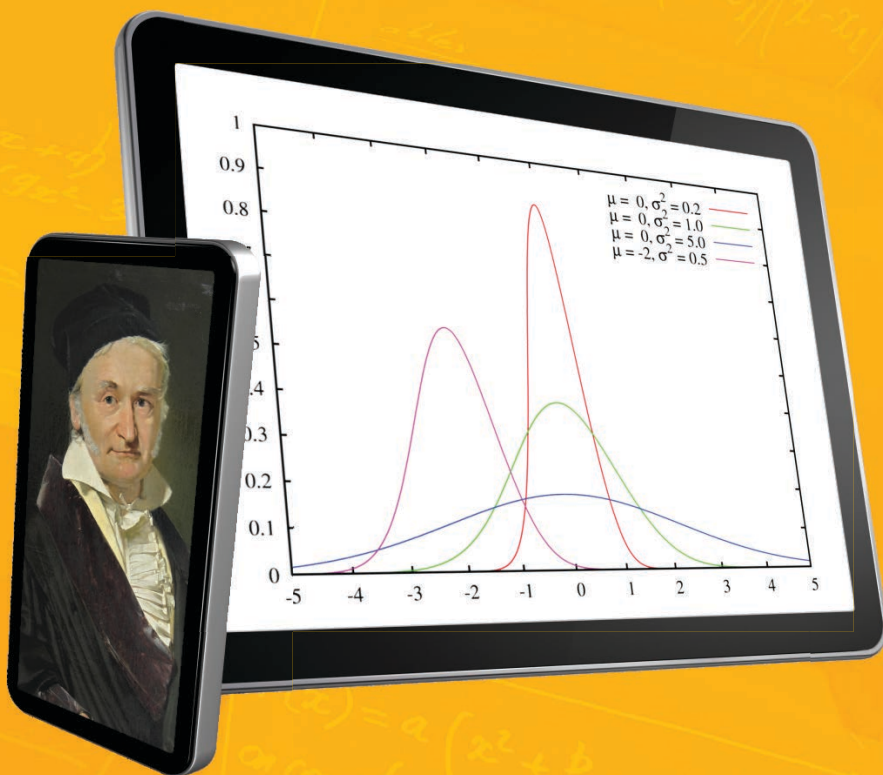


Verovatnoća i statistika

SA ZBIRKOM ZADATAKA

Ivana Kostić Kovačević



UNIVERZITET SINGIDUNUM

Ivana Kostić Kovačević

VEROVATNOĆA I STATISTIKA SA ZBIRKOM ZADATKA

Peto izdanje

Beograd, 2025.

VEROVATNOĆA I STATISTIKA SA ZBIRKOM ZADATAKA

Autor:

dr Ivana Kostić Kovačević

Recenzenti:

dr Nenad Cakić, Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Beogradu

mr Zoran Mišković, Visoka škola elektrotehnike i računarstva, Beograd

Izdavač:

UNIVERZITET SINGIDUNUM

Beograd, Danijelova 32

www.singidunum.ac.rs

Za izdavača:

dr Milovan Stanišić

Priprema za štampu:

Miloš Višnjić

Dizajn korica:

Aleksandar Mihajlović, MA

Godina izdanja:

2025.

Tiraž:

800 primeraka

Štampa:

Caligraph, Beograd

ISBN: 978-86-7912-711-2

Copyright:

© 2025. Univerzitet Singidunum

Izdavač zadržava sva prava.

Reprodukcija pojedinih delova ili celine ove publikacije nije dozvoljena.

PREDGOVOR

Ovaj udžbenik pokriva kurs od jednog semestra osnova verovatnoće i matematičke statistike. Namenjen je studentima koji se po prvi put susreću sa ovom materijom i to prvenstveno studentima informatike i računarstva. Udžbenik ne sadrži stroge matematičke dokaze, pošto je osnovni cilj da se čitaoci upoznaju sa osnovnim pojmovima teorije i primene, da ih shvate, razumeju i osposobe da ih primene u struci. Uz teorijski deo dat je veliki broj rešenih zadataka koji omogućavaju lakše savladavanje materije.

Treba imati u vidu da se danas nijedno statističko izračunavanje ne realizuje i bez upotrebe nekog od softvera koji je predviđen za tu oblast, kao što su Excel, SPSS, Statistica i dr. Novina u odnosu na predhodno izdanje udžbenika je što su u ovom materijalu za izračunavanje osim klasičnih metoda izložena i mogućnost korišćenja softverskog paketa Excel. Excel je izabran jer je kao deo Microsoftovog paketa pristupačan većini korisnika, a drugi razlog je što je to relativno jednostavan softver za rad, a dovoljno sadržajan da se većina problema može rešiti njegovim korišćenjem.

Beograd 2019.

Autor

SIMBOLI

obeležavanje pojmova verovatnoće
korišćenjem grčke azbuke

ω (omega) oznaka za elementaran događaj

Ω (omega) oznaka za skup svih elementarnih događaja

μ -(mi) oznaka za matematičko očekivanje slučajne promenljive

σ -(sigma) oznaka za standardno odstupanje slučajne promenljive

σ^2 -(sigma) oznaka za disperziju slučajne promenljive

λ (lambda) oznaka za parametar Poasonove raspodele

Φ -(fi) oznaka za funkciju raspodele normalne slučajne promenljive

χ (ksi) oznaka za χ^2 raspodelu

ε -(epsilon) oznaka za mali pozitivan broj

Σ -(veliko sigma) oznaka za zbir

SADRŽAJ

Predgovor	III
Simboli	IV
Uvod	IX
1. VEROVATNOĆA	3
1.1. SLUČAJNI EKSPERIMENTI I SLUČAJNI DOGAĐAJI	3
1.2. ALGEBRA DOGAĐAJA	5
1.3. AKSIOME TEORIJE VEROVATNOĆE	6
1.3.1. AKSIOME	6
1.3.2. VAŽNE TEOREME	7
1.4. STATISTIČKA DEFINICIJA VEROVATNOĆE	8
1.5. KLASIČNA DEFINICIJA VEROVATNOĆE	9
1.6. VEROVATNOĆA ZBIRA DOGAĐAJA	12
1.7. VAŽNI OBRASCI	15
1.8. ZADACI	15
2. USLOVNA VEROVATNOĆA I NEZAVISNOST	29
2.1. USLOVNA VEROVATNOĆA	29
2.2. VEROVATNOĆA PROIZVODA DOGAĐAJA-NEZAVISNI I ZAVISNI DOGAĐAJI	32
2.3. TOTALNA VEROVATNOĆA	35
2.4. BAJESOVA FORMULA	38
2.5. VAŽNI OBRASCI	40
2.6. ZADACI	41
3. SLUČAJNE PROMENLJIVE – FUNKCIJA RASPODELE	53
3.1. DISKRETNA SLUČAJNA PROMENLJIVA	54
3.2. FUNKCIJA RASPODELE	55
3.2.1. OSOBINE FUNKCIJE RASPODELE	57
3.3. NEPREKIDNA SLUČAJNA PROMENLJIVA	59
3.5. VAŽNI OBRASCI	63
3.6. ZADACI	64

4. PARAMETRI ILI BROJNE KARAKTERISTIKE SLUČAJNIH PROMENLJIVIH	73
4.1. PARAMETRI KOJI REPREZENTUJU CENTAR RASTURANJA	73
4.2. PARAMETRI KOJI MERE RASTURANJE SLUČAJNE PROMENLJIVE OKO CENTRA RASTURANJA	76
4.2.1.OSOBINE VARIJACIJE	78
4.3. VAŽNI OBRASCI	80
4.4. ZADACI	81
 5. RASPODELE SLUČAJNIH PROMENLJIVIH	 91
5.1.RASPODELE DISKRETNE SLUČAJNIH PROMENLJIVIH	91
5.1.1. BERNULIJEVI EKSPERIMENTI	91
5.1.2. BINOMNA RASPODELA	91
5.1.3. POASONOVA RASPODELA	97
5.1.4. APROKSIMACIJE BINOMNE RASPODELE POASONOVOM	99
5.2. RASPODELE NEPREKIDNE SLUČAJNE PROMENLJIVE	101
5.2.1. NORMALNA – GAUSOVA RASPODELA	101
5.2.2. APROKSIMACIJE BINOMNE RASPODELE NORMALNOM	109
5.2.3. χ^2 RASPODELA	111
5.2.4. STUDENTOVA RASPODELA	113
5.3.VAŽNI OBRASCI	115
5.4. ZADACI	118
 6. GRANIČNE TEOREME	 137
6.1. ZAKON VELIKIH BROJEVA	137
6.2.CENTRALNA GRANIČNA TEOREMA	140
6.3.RASPODELA EMPIRIJSKE FUNKCIJE	142
6.4 .VAŽNI OBRASCI	142
6.5.ZADACI	143
 7. MATEMATIČKA STATISTIKA	 147
7.1. OSNOVNI POJMOVI STATISTIKE	147
7.2. STATISTIČKE TABELE, POLIGONI I HISTOGRAMI EMPIRIJSKE RASPODELE OBELEŽJA	149

7.3. PARAMETRI –STATISTIKE SLUČAJNIH STATISTIČKIH PROMENLJIVIH	153
7.3.1. PARAMETRI KOJI REPREZENTUJU CENTAR RASTURANJA - SREDNJE VREDNOSTI	154
7.3.1.1. ARITMETIČKA SREDINA	154
7.3.1.2 GEOMERIJSKA SREDINA	156
7.3.1.3. HARMONIJSKA SREDINA	157
7.3.1.4. MODA	159
7.3.1.5. MEDIJANA	160
7.3.2.PARAMETRI KOJI MERE RASTURANJE SLUČAJNE PROMENLJIVE OKO CENTRA RASTURANJA	162
7.3.2.1.RAZMAK VARIJACIJE	162
7.3.2.2.VARIJANSA I DISPERZIJA	162
7.3.2.3. STANDARDNA DEVIJACIJA	165
7.3.2.4. KOFICIJENT VARIJACIJE	166
7.4. RASPODELE PARAMETARA-STATISTIKA UZORKA	166
7.4.1. RASPODELA ARITMETIČKIH SREDINA UZORKA	166
7.5. VAŽNI OBRASCI	168
7.6. ZADACI	170
8. OCENJIVANJE PARAMETARA RASPODELE	179
8.1.TAČKASTE OCENE	182
8.1.1. TAČKASTE OCENE MATEMATIČKOG OČEKIVANJA	182
8.1.2. TAČKASTE OCENE DISPERZIJE	183
8.1.3. TAČKASTE OCENE VEROVATNOĆE	184
8.2.INTERVALI POVERENJA	185
8.2.1. INTERVAL POVERENJA ZA MATEMATIČKO OČEKIVANJE μ KADA JE POZNATA DISPERZIJA σ^2	186
8.2.2. INTERVAL POVERENJA ZA MATEMATIČKO OČEKIVANJE μ KADA JE NEPOZNATA DISPERZIJA σ^2	190
8.2.3. INTERVAL POVERENJA ZA NEPOZNATU DISPERZIJU	191
8.2.4. INTERVAL POVERENJA ZA VEROVATNOĆU p BINOMNE RASPODELE	194
8.3. VAŽNI OBRASCI	196
8.4. ZADACI	197

9. TESTIRANJE HIPOTEZA	209
9.1 TESTIRANJE PARAMETERSKIH HIPOTEZA	209
9.2. GREŠKE TESTIRANJA HIPOTEZA	212
9.3. TESTIRANJE HIPOTEZE $H_0(\mu = \mu_0)$ AKO SLUČAJNA PROMENLJIVA IMA NORMALNU RASPODELU, A σ JE POZNATO	212
9.4. TESTIRANJE HIPOTEZE $H_0(\mu = \mu_0)$ AKO SLUČAJNA PROMENLJIVA IMA NORMALNU RASPODELU, A σ JE NEPOZNATO	217
9.5. TESTIRANJE HIPOTEZE $H_0(\sigma = \sigma_0)$	220
9.6. TESTIRANJE HIPOTEZE $H_0(\sigma = \sigma_0)$	222
9.7. TESTIRANJE NEPARAMETERSKIH HIPOTEZA- χ^2 TEST	224
9.8. VAŽNI OBRASCI	229
9.9. ZADACI	231
INDEKS POJMOVA	254
LITERATURA	257
TABLICE	258

UVOD

U svakodnevnom životu često se srećemo sa izjavama koje u sebi sadrže reč **verovatnoća**. Umesto reči verovatnoća koriste se i reči mogućnost, šansa i sl.

Na primer:

1. Prognošičar vremena kaže u izveštaju na TV da je verovatnoća da sutra padne kiša 80%.
2. Reporter koji izveštava o zdravlju građana kaže da pušači imaju veću verovatnoću da dobiju rak nego nepušači.
3. Student se pita kolika je verovatnoća da dobije ocenu 10, ako nije baš sve naučio.
4. Izveštač sa izbora se pita kolika je verovatnoća da pobedi baš ta politička stranka.
5. Zaposleni se pitaju kolika je verovatnoća da će se plate povećati u narednoj godini.

Verovatnoća kao nauka, bavi se procenama, prognozama, mogućnostima i sl u situacijama kada nemamo sve potrebne podatke za rešavanje nekog problema. U tom smislu verovatnoća:

- meri mogućnost da li će se neki događaj realizovati ili ne
- koristiti se da donosimo odluke u uslovima nepotpunih informacija
- predstavlja osnovu statističkog zaključivanja

Problemi najrazličitijih struka mogu se rešavati primenom verovatnoće, na primer:

- upravljanje rizicima bilo kog poslovanja
- procena pojave greške u telekomunikacionim sistemima
- procena potreba za izgradnju vodoprivrednih sistema u budućnosti
- predviđanje događaja u spoljnoj politici i mnogi drugi

Teorija verovatnoće je matematička disciplina koja izučava zakonitosti pojava čiji su ishodi slučajni.

Prvi problemi za čije je rešavanje korišćena verovatnoća potiču iz 10 i 11 veka i odnose se na rezultate prilikom bacanja kocke i hazardnih igara. Rađanje teorije verovatnoće vezano je za imena: Blez Paskal (Blaise Pascal - 1623-1662), Pjer Ferma (Pierre de Fermat 1601-1665) i Kristijana Hajgensa (Christiaan Huyghens 1629-1695).

Između Paskala i Ferma počela je 1654. godine prepiska o nizu problema, među kojima je bio i zadatak o podeli uloga prilikom prekida kockarske igre. Naime, Paskalu se obratio njegov prijatelj kockar, sa sledećim problemom: Dva igrača A i B se dogovore da čitav ulog pripadne onom koji prvi dobije tri igre. Kada je igrač A dobio dve igre, a igrač B jednu morali su da prekinu igru. Postavlja se pitanje kako da podele ulog?

Paskal je odgovorio 3:1. Ovaj zanimljivi primer se često uzima kao početak nastanka verovatnoće.

Prvu knjigu iz verovatnoće "O računu u hazardnim igrama" napisao je Hajgens 1657g. i istakao je da je knjiga manje o hazardnim igrama, a više o osnovama jedne nove teorije. U njoj Hajgens po prvi put spominje pojmove kao što su matematičko očekivanje, slučajne promenljive i sl.

Period formiranja verovatnoće kao nauke započinje pojavom knjige švajcarskog matematičara Jakoba Bernulija (1654-1705) "Veština predviđanja". U ovoj knjizi je strogo definisana prva granična teorema, **Zakon velikih brojeva**, koji se danas naziva i Bernulijeva teorema. Ona tvrdi da je verovatnoća odstupanja frekvencije nekog događaja od njegove verovatnoće mala, ukoliko je broj ponavljanja eksperimenta u kome se događaj realizuje dovoljno veliki.

Početak 18 veka obeležen je radovima Abrahama de Muavra (Abraham de Moivre 1667-1754). U radu "Učenje o slučajevima" on razmatra niz pitanja koja su vezana za Bernulijevu teoremu. Razmatrao je verovatnoće odstupanja frekvencija od verovatnoće događaja.

Pjer Laplas (Pierre Laplace 1749-1827) proširio je Muavrovu teoremu. U knjizi "Analitička teorija verovatnoća" definiše pravilo koje se smatra klasičnom definicijom verovatnoće. Sumirajući svoje radove i radove svojih prethodnika produbio je matematičke i filozofske probleme vezane za verovatnoću.

Nemački matematičar Karl Frederik Gaus (Carl Friedrich Gauss 1777-1855) daje **Normalni zakon raspodele slučajnih grešaka**, zatim definiše ocenu parametara normalne raspodele, metod najmanjih kvadrata i sl. Njegovi rezultati iz teorije grešaka i sada se, bez izmena, nalaze u matematičkim udžbenicima.

Svakako treba spomenuti i mnoge druge matematičare koji su se bavili ovom oblašću i dali veliki doprinos i to: Tomas Bajes (Thomas Bayes 1702-1763), Leonard Ojler (Leonhard Euler 1707-1788), Simeon Denis Poison (Simeon Denis Poisson 1781-1840) i dr.

U drugoj polovini 19 veka u Zapadnoj Evropi dolazi do zastoja u razvoju teorije verovatnoće. Međutim, u Rusiji mnogi veliki matematičari se bave ovom disciplinom i to prvo Viktor Bunjakovski (1804-1889) i Mikhail Ostrogradski (1801-18662), a pod njihovim uticajem i Pafnuti Čebišev (1821-1894). Njegovi najznačajniji sledbenici su bili Andrej Markov (1856-1922) i Aleksandar Ljapunov (1858-1918). Za ime Markova vezani su "lanci Markova", to jest nizovi slučajnih promenljivih povezanih tako da verovatnoća realizacije jednog eksperimenta uzima određenu vrednost ako je poznat rezultat predhodnog eksperimenta. Poseban doprinos dao je Aleksandar Ljapunov. Definisao je teoremu koja je dobila naziv **Centralna granična teorema**.

Zahvaljujući uspehu ruskih matematičara postepeno se tokom 20 veka povratio interes za verovatnoću u Evropi i Americi.

Primene verovatnoće postavile su zahtev za preciziranjem njene logičke osnove, odnosno definisanje aksiomatskog metoda koji je već bio uveden u mnoge druge matematičke discipline. Prvu aksiomatiku verovatnoće dao je Sergej Bernštajn 1917. godine, a zatim ju je proširio Andrej Kolmogorov 1933. godine.

I danas, mnogima su najinteresantniji kockarski aspekti primene teorije verovatnoće. Tako se povremeno se čuje kako je neki 'genijalan matematičar' doveo kazino na rub propasti, jer je našao sistem koji sigurno dobija.

Mnogo značajnije od kockarskih problema je što je danas verovatnoća sastavni deo nauke i tehnike. Sa verovatnoćom kao matematičkim modelom, praktični problemi transformišu se u teorijske i tako se jednostavnije i lakše rešavaju.

Zapravo, veliki interes za verovatnoću i statistiku nastupio je posle drugog svetskog rata. Jedna izuzetno značajna nova oblast je teorija **slučajnih procesa** koju je zasnovao Kolmogorov. Od posebnog praktičnog značaja su i **procesi Markova** koji se primenjuju u problemima masovnog opsluživanja (telefonija, saobraćaj, trgovina). **metodi simulacije** (Monte Karlo metodi) uz primenu računara koriste se u najrazličitijim oblastima nauke i tehnike. Zahvaljujući razvoju teorije verovatnoće nastale su i nove matematičke discipline:

- teorija masovnog opsluživanja,
- teorija informacija,
- teorija pouzdanosti tehničkih sistema,
- teorija zaliha.

Reč **statistika** potiče od latinske reči status , tako da bi statistika bila opisivanje stanja neke pojave.

U 17-om veku su se pojavile dve velike statističke škole, nemačka i engleska.

Po nemačkoj školi zadatak statistike je bila sistematizacija podataka o stanovništvu i privredi, u cilju vođenja državne politike, bez naglaska na otkrivanje zakonitosti. Zadatak statistike se uglavnom zasnivao na opisu, pa je kasnije ovaj pravac nazvan i deskriptivna škola.

Engleska škola istakla je zahtev za matematičkom obradom statističkih podataka i za otkrivanjem zakonitosti u ponašanju posmatranih pojava, što je doprinelo bržem razvoju savremene statistike. Postigli su značajne rezultate u istraživanju odnosa demografskih, socioloških i ekonomskih pojava.

Matematička statistika kao naučna disciplina je počela da se razvija tek nedavno. Početkom 20 veka pojavile su se prve formulacije osnova matematičke statistike. Savremena statistička metodologija vezana je za ime amerikanaca Džona Nojmana (John von Neumann 1903-1957). Zahvaljujući njegovim radovima razvile su se tri oblasti:

- teorija estimacije (ocene),
- teorija provere (verifikacije) statističkih hipoteza,
- teorija planiranja eksperimenta.

Teorija estimacije se sastoji u definisanju metoda za ocenu vrednosti parametara zakona raspodele verovatnoća slučajnih promenljivih. Njen tvorac je Nejman.

Osnovni zadatak teorije provere (verifikacije) statističkih hipoteza je u određivanju pravila ili kriterijuma na osnovu kog se pomoću eksperimentalnih vrednosti slučajnih promenljivih može prihvatiti ili odbaciti predložena hipoteza.

Treća, najmlađa oblast statistike je teorija planiranja eksperimenta. Praksa je pokazala da bitnu ulogu u primeni statistike igra sama šema eksperimenta, jer u zavisnosti od nje može da se dobije nepotpuna ili potpunija i kvalitetnija informacija. Unapred je utvrđen broj posmatranja na osnovu kojih se izvode statistički zaključci.

Danas matematička statistika je savremeno oruđe inženjera, ekonomista, lekara, biologa i drugih, dok na početku prošlog veka na prste jedne ruke mogle su se nabrojati oblasti ljudskog istraživanja koje su koristile teoriju verovatnoće i matematičku statistiku.

Statistika je korisna u predviđanju budućnosti, jer nema boljeg načina da se odredi koliko vremena, resursa, napora, novca i sl. treba upotrebiti da bi se realizovao neki projekat. Pošto se to ne može tačno unapred predvideti, na osnovu iskustava i prakse, zaključci se donose na osnovu statističkih metoda, koje su bazirane na korišćenju verovatnoće.

U teoriji verovatnoće izučavaju se matematički modeli stvarnih pojava, dok se u statistici, metodom slučajnog uzorka, uspostavlja veza između stvarnih pojava i odgovarajućih modela. Statistika je bliža realnosti od verovatnoće jer povezuje eksperimentalne podatke i matematičke modele.

Među naučnicima i danas postoji dilema da li su zakoni prirode deterministički ili slučajni. Da li slučajnost postoji samo zato što ne umemo da proučimo brojne uzročno posledične veze, ili je ona realnost u prirodi? Još u 18 veku naučnike je zanimalo ovo pitanje, tako je Laplas zastupao strogi determinizam i smatrao da bi poznavanje parametara koji definišu stanje kosmosa omogućilo tačno predviđanje rezultata svakog eksperimenta. Događaji bi se po njemu delili samo na nemoguće i sigurne.

Međutim, na današnjem stanju nauke sigurno je jedno, i to da slučajne pojave postoje, da imaju svoje zakonitosti, a njima se bavi teorija verovatnoće.

1.

VEROVATNOĆA

1. VEROVATNOĆA

Neke od pojava koje se događaju oko nas možemo da predvidimo, objasnimo i kontrolišemo, pošto poznajemo zakonitosti njihovog nastanka. Tako, na primer, možemo da predvidimo pomračenje sunca i meseca, pojavu plime i oseke, pojavu elektriciteta i sl.

Nasuprot tome, postoje pojave čije uzroke nismo u stanju da odredimo, pa takve pojave ne možemo u potpunosti da predvidimo i objasnimo. Tu spadaju, na primer, meteorološke pojave, pojave zemljotresa, ali i dobitak na lutriji, sportskoj prognozi i sl. To su pojave ili događaji koji se ne moraju nužno desiti, ali nisu ni nemogući. Takve i slične događaje proučava teorija verovatnoće.

Da bismo preciznije objasnili čime se bavi teorija verovatnoće posmatrajmo sledeći primer.

Znamo da prilikom bacanja novčića može da padne pismo ili glava i obe mogućnosti su jednako verovatne. Ako novčić bacamo više puta, očekujemo da se broj glava neće mnogo razlikovati od broja pisama. Kod malog broja bacanja to ne mora da se dogodi. Izvršeni su sledeći eksperimenti: Bufon je bacio novčić 4040 puta i 2060 puta je dobio grb, Pirson je 12 000 puta bacio novčić i dobio 6019 puta grb, a kada ga je bacio 24 000 puta dobio ga je 12 012 puta. Frekvence pojave grba u ovim eksperimentima su 0,5100; 0,5016 i 0,5005. Vidimo da se tek u slučaju velikog broja ponavljanja eksperimenta uočava neka zakonitost u pogledu broja glava.

U ovom i sličnim primerima može se uočiti da pri pojedinačnim posmatranjima događaji se realizuju bez ikakvog reda, po čistoj slučajnosti, bez mogućnosti predviđanja. Tako, kada bacamo dinar mi ne znamo da li će pasti pismo ili glava. Ali, pri velikom broju ponavljanja eksperimenta, mogu da se uoče neke zakonitosti, što se vidi iz prethodnog primera. Frekvence dobijanja glave variraju oko očekivane vrednosti koja iznosi 0,5.

Takvim zakonitostima se bavi teorija verovatnoće. Ove zakonitosti su drugačije prirode od onih na koje smo navikli, je se one uočavaju tek pri velikom broju ponavljanja eksperimenta.

Verovatnoća događaja je numerička mera objektivne mogućnosti ostvarivanja tog događaja.

1.1. SLUČAJNI EKSPERIMENTI I SLUČAJNI DOGAĐAJI

Eksperimentima se u nauci prikupljaju podaci koji se zatim obrađuju i dobijeni rezultati koriste u praksi ili za dokazivanje novih teorija. Međutim, kod nekih eksperimenata nismo u mogućnosti da tačno odredimo i kontrolišemo vrednosti dobijenih rezultata, odnosno ti rezultati ne mogu pouzdano da se predvide.

Takvi eksperimenti su predmet izučavanja verovatnoće i nazivaju se *slučajni eksperimenti*.

Primer:

Bacamo novčić. Ovaj eksperiment možemo ponavljati proizvoljno mnogo puta, a mogući ishodi su 'glava' i 'pismo'.

Primer:

Rezultat eksperimenta koji se sastoji u bacanju kocke su brojne vrednosti koje pripadaju skupu $\{1,2,3,4,5,6\}$.

Teorija verovatnoće za svoja istraživanja koristi *idealne eksperimente* koji imaju sledeće osobine:

- Ponavljaju se proizvoljan broj puta pod istim uslovima,
- Svi njihovi ishodi su unapred definisani,
- Ishod pojedinačnog eksperimenta nije unapred poznat.

Slučajni eksperimenti nazivaju se još i *statistički* ili *stohastički eksperimenti*.

Ishod slučajnog eksperimenta je *slučajan događaj*.

Primer:

Pol deteta ili pojava glave pri bacanju novčića su slučajni događaji.

Slučajni događaji mogu da budu *elementarni*, odnosno da se ne mogu redukovati na jednostavnije događaje i *složeni*, koji mogu da se dalje razlože na elementarne događaje.

Kao polazna osnova za proučavanje slučajnih događaja je određivanje *skupa (prostora) elementarnih događaja*.

- Svaki mogući ishod eksperimenta naziva se *elementaran događaj* i obeležava sa grčkim slovom ω .
- *Skup svih elementarnih događaja*, odnosno skup *svih ishoda eksperimenta*, zove se i *prostor elementarnih događaja*, a obeležava se sa $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$.
- Svaki podskup skupa Ω naziva se *događaj*. Događaji se obeležavaju velikim slovima A,B,C...
- Događaj koji se pojavljuje prilikom svake realizacije eksperimenta je *siguran događaj*. Skup svih elementarnih događaja je siguran događaj.
- Događaj koji se nikada ne može pojaviti pri realizaciji eksperimenta zove se *ne-moguć događaj*.
- *Nemoguć događaj* se obeležava kao prazan skup $\emptyset$.

- Ako su $A_1, A_2, \dots, A_n$ slučajni događaji takvi da je $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$ i da se svaka dva događaja isključuju (disjunktni događaji), tj. $A_i A_j = \emptyset$; $i, j \in [1, n]$, tada ovi događaji čine **potpuni sistem događaja**.

Primer:

U eksperimentu bacanja jednog novčića ishodi su G i P (glava ili pismo). Dakle skup $\Omega = \{G, P\}$.

Primer:

U eksperimentu bacanja kocke ishodi su brojevi 1, 2, 3, 4, 5, 6. Dakle skup $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Događaj A da padne paran broj ima ishode $\{2, 4, 6\}$.

Primer:

Događaj da kada bacamo kocku za igru padne bilo koji broj od jedan do šest je siguran događaj Ω , a da padne broj 7 je nemoguć događaj $\emptyset$.

1.2. ALGEBRA DOGAĐAJA

Pošto se događaji definišu kao podskupovi skupa elementarnih događaja moguće je veze između događaja izraziti pomoću odgovarajućih skupovnih relacija i operacija.

Ako su A i B slučajni događaji, tada:

- Događaj A ili B označavamo sa $A \cup B = A + B$.
- Događaj A i B označavamo sa $A \cap B = AB$.
- Događaj A ali ne B označavamo sa $A \setminus B$.
- Suprotan događaj događaju A obeležavamo sa A' ili $\bar{A}$, gde se komplement posmatra u odnosu na skup Ω .
- Ako događaj A povlači (implicira) događaj B , tada kažemo da je $A \subset B$.
- Ako za događaje A i B važi da je $A \subset B$ i $B \subset A$, tada kažemo da su događaji A i B jednaki i pišemo $A = B$.

Primer:

Događaj A da se na gornjoj strani kocke pojavi broj pet, odnosno događaj B da se pojavi paran broj, su događaji koji se isključuju, odnosno disjunktni su.

Primer:

Zbir događaja A, koji se sastoji da se na kocki pojavi broj veći od tri ili događaja B, koji se sastoji u pojavi parnog broja, je događaj koji se sastoji u pojavi brojeva 2,4,5 ili 6, odnosno

$$A \cup B = \{4, 5, 6\} \cup \{2, 4, 6\} = \{2, 4, 5, 6\}$$

Primer:

Proizvod događaja koji se sastoji u pojavi parnog broja na gornjoj strani kocke i događaja da se pojavi broj veći od tri je $\{2, 4, 6\} \cap \{4, 5, 6\} = \{4, 6\}$.

1.3. AKSIOME TEORIJE VEROVATNOĆE

Osnovni zadatak teorije verovatnoće jeste određivanje metoda i pravila za izračunavanje verovatnoće slučajnih događaja. Teorija verovatnoće je strogo matematički formalizovana i zasniva se na aksiomama i teoremama koje proističu iz njih.

1.3.1. AKSIOME

Ako je Ω skup svih elementarnih događaja i neka su događaji $A, B \subset \Omega$.

Funkcija P naziva se verovatnoća na skupu, ako važe sledeće aksiome:

1. $P(\Omega) = 1$
2. $0 \leq P(A) \leq 1$,
3. Ako se događaji A i B međusobno isključuju onda važi

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Uopšteno možemo reći da je $P(A) = \sum_i P(A_i)$, ako se događaj A razlaže na n konačnih ili prebrojivo mnogo događaja koji se međusobno isključuju.

Verovatnoća je dakle funkcija, preslikavanje, oblika,

$$P : \text{skup događaja} \rightarrow [0,1]$$

Drugim rečima, ova funkcija događaje iz skupa svih događaja preslikava u interval $[0,1]$ realne ose.

Napomena: Oznaka P za verovatnoću potiče od početnog slova latinske reči *probabilitas* što znači verovatnoća.

1.3.2. VAŽNE TEOREME

Teorema 1: Ako događaji čine potpuni sistem, odnosno važi $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$, onda je

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A_i) = 1.$$

Dokaz:

Dokaz direktno sledi iz aksiome 3

Teorema2: Verovatnoća događaja $\bar{A}$ koji je suprotan (komplementaran) događaju iznosi

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Dokaz:

Kako je $A + \bar{A} = \Omega$, pri čemu se događaji A i $\bar{A}$ isključuju, a $P(\Omega) = 1$, dobijamo da je $P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = P(\Omega) = 1$, odakle sledi $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Teorema3: Verovatnoća nemogućeg događaja je 0.

Dokaz:

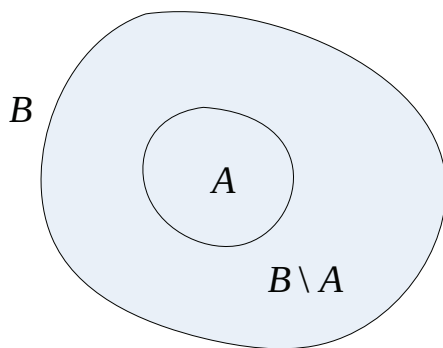
Kako je $\bar{\Omega} = \emptyset$, na osnovu predhodne teoreme sledi $P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$

Teorema4: Ako je $A \subseteq B$, onda je $P(A) \leq P(B)$.

Dokaz:

Ako je $A \subseteq B$, onda je $B = A \cup (B \setminus A)$, odnosno pošto se događaji A i $B \setminus A$ isključuju $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$, odakle sledi $P(B \setminus A) = P(B) - P(A) \geq 0$, čime je teorema dokazana.

Dokaz teoreme ilustrovan je na sledećoj slici.



1.4. STATISTIČKA DEFINICIJA VEROVATNOĆE

Do pojma verovatnoće može se doći i iskustveno (empirijski) korišćenjem pojma relativne frekvence.

Pretpostavimo da se eksperiment u kome se može realizovati događaj A ponavlja n puta. Neka je broj m broj povoljnih realizacija događaja A u n ponavljanja eksperimenta.

Broj $r = \frac{m}{n}$ predstavlja relativnu učestalost (frekvencu) pojave događaja A u n ponavljanja eksperimenta.

U nekoj drugoj seriji od n ponavljanja istog eksperimenta dobiće se m_1 realizacija

događaja i neki drugi broj koji predstavlja frekvenciju $r_1 = \frac{m_1}{n}$.

Ako bi nastavili sa ponavljanjem eksperimenta dobili bi niz različitih vrednosti koje se u velikim serijama, kada je broj ponavljanja eksperimenta neograničeno veliki, grupišu oko nekog broja $P(A)$ koji nazivamo i *statistička definicija verovatnoće*

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}.$$

Ova definicija ukazuje na tesnu povezanost sa realnošću. Nedostatak joj je što granični proces kojim je data definicija nije jasno definisan. Međutim, i pored svih nedostataka ova definicija omogućava da se odredi verovatnoća na konačnom skupu elementarnih događaja.

Primer:

Izvršene su 3 serije bacanja kocke od 600, 6 000, 60 000 puta. Broj 2 se u tim bacanjima pojavio 106, 982, 10 190 puta, tako da relativne frekvence iznose 0,18; 0,164; 0,170.

Ove relativne frekvence pojavljivanja broja 2 grupišu se oko broja $\frac{1}{6} = 0,166\dots$

Naravno i intuitivno je jasno da će se svaki broj sa kocke pojaviti podjednak broj puta.

1.5. KLASIČNA DEFINICIJA VEROVATNOĆE

Klasičnu definiciju verovatnoće dao je Pjer Laplas (1749-1827), francuski matematičar i astronom.

Definicija se odnosi samo na one slučajne eksperimente kod kojih je skup elementarnih događaja konačan, a događaji su jednako verovatni.

Klasičan eksperiment ovog tipa je bacanje novčića. Skup elementarnih događaja je dvočlani skup {glava, pismo}, a oba događaja su jednako verovatna, jer pri bacanju novčića obe opcije su ravnopravne.

Definicija:

Neka skup Ω sadrži n elementarnih događaja koji su disjunktني i jednako mogući. Ako je m ($0 \leq m \leq n$), broj svih povoljnih ishoda događaja A , onda je verovatnoća $P(A)$ jednaka

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Primer:

Kolika je verovatnoća događaja A da prilikom bacanja novčića padne glava?

$$P(A) = \frac{1}{2}.$$

Primer:

Kolika je verovatnoća događaja A da prilikom bacanja kocke za igru pojavi se paran broj?

$$P(A) = \frac{3}{6}.$$

Klasična definicija verovatnoće se naziva i definicija **apriori**. Primenljiva je kao što smo već naglasili samo u slučaju kada je Ω konačan skup, a svi ishodi imaju jednaku verovatnoću. Nažalost, jednakost verovatnoća pojavljuje se samo u malom broju slučajeva, kao što su primeri bacanja novčića ili kocke. U praksi, odnosno statistici, biologiji, ekonomiji i sl. to najčešće nije slučaj. Čak ni rađanje dečaka i devojčice nisu dva jednako verovatna događaja.

Ipak, i pored svojih nedostataka ova definicija je imala izuzetan značaj jer je dovela do nastanka drugih, preciznijih definicija verovatnoće.

Napomena: U eksperimentima čiji su ishodi jednako verovatni, ishode je potrebno prebrojati, pa se u ovim zadacima koristi kombinatorika. Podsetimo se nekih osnovnih pojmova i obrazaca.

Neka je dat skup $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Broj **permutacija** skupa od n elemenata, **bez ponavljanja**, iznosi

$$P(n) = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1 = n!$$

Broj **permutacija sa ponavljanjem**, skupa od n elemenata, među kojima ima

$$k_1, k_2, \dots, k_m \text{ jednakih iznosi } P_{k_1, k_2, \dots, k_m}(n) = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}$$

Varijacija k klase od n elemenata je bilo koja k -torka različitih elemenata skupa A .

Broj varijacija iznosi $V_k^n = n(n-1) \cdots (n-k+1)$.

Varijacija sa ponavljanjem k klase od n elemenata je bilo koja k -torka elemenata skupa A .

Broj varijacija iznosi $\bar{V}_k^n = n^k$.

Kombijacija klase od k elemenata je bilo koja k -torka različitih elemenata skupa A , bez obzira na redosled elemenata.

Broj kombinacija iznosi $C_k^n = \frac{V_k^n}{k!} = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}$.

Izraz $\binom{n}{k}$ čita se ' **n nad k** '.

Kombinacija sa ponavljanjem k klase od n elemenata je bilo koja k -torka elemenata skupa A

Broj kombinacija iznosi $\bar{C}_k^n = \binom{n+k-1}{k}$.

Primer:

Od 10 istovetnih proizvoda jedne fabrike 7 je ispravnih, a ostali su neispravni. Nasumice se bira 5 proizvoda. Kolika je verovatnoća da će među izvučenim proizvodima biti 3 ispravna?

$$P(A) = \frac{C_3^7 C_2^3}{C_5^{10}} = \frac{\binom{7}{3} \binom{3}{2}}{\binom{10}{5}} = \frac{105}{252}.$$

Primer:

Kocka se baca 3 puta. Kolika je verovatnoća da se bar jednom pojavi broj 6?

Izračunaćemo prvo verovatnoću suprotnog događaja, da se ne pojavi broj 6.

$$P(\bar{A}) = \frac{\bar{V}_3^5}{\bar{V}_3^6} = \frac{5^3}{6^3} = \frac{125}{216}$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$

1.6. VEROVATNOĆA ZBIRA DOGAĐAJA

Kao što smo već naglasili u aksiomi 3, verovatnoća **zbira događaja** $A, B \subset \Omega$ koji se međusobno isključuju, tj. $A \cap B = \emptyset$ je

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

Za konačno mnogo događaja A_i , $i = 1, \dots, n$ važi formula

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

Primer:

U kutiji se nalazi 100 cedulja na kojima su ispisani prirodni brojevi od 1 do 100. Izvlačimo jednu cedulju. Kolika je verovatnoća da je broj koji smo izvukli deljiv sa 2 ili deljiv sa 15 ili deljiv sa 29?

Ako sa A , B , C označimo ove događaje, onda je njihova verovatnoća

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{50}{100} + \frac{6}{100} + \frac{3}{100} = \frac{59}{100}$$

Teorema: Ako se događaji A i B međusobno *ne isključuju*, tj. $A, B \subset \Omega$, $A \cap B \neq \emptyset$, onda je verovatnoća zbira događaja

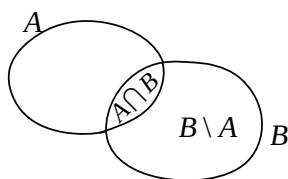
$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Dokaz:

Događaj $A + B$ može se prikazati kao zbir događaja A i $B \setminus (A \cap B)$, pri čemu se ovi događaji isključuju.

Zato je

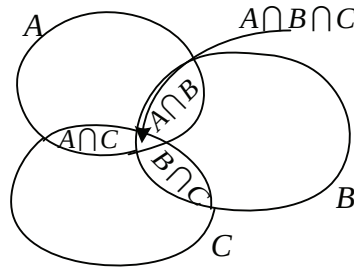
$$P(A + B) = P(A) + P(B \setminus AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$$



Na osnovu ove formule mogu se izvesti i formule za zbir više od dva događaja koji se ne isključuju.

Za tri događaja imamo formulu:

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$



Primer:

Bacamo kocku. Kolika je verovatnoća da dobijemo broj koji je deljiv sa 2 ili sa 3?

Neka je A događaj da je dobijeni broj deljiv sa 2, a B događaj da je deljiv sa 3. Događaji A i B se ne isključuju, jer postoji broj 6 koji je deljiv i sa 2 i sa 3.

Kako je $P(A) = \frac{3}{6}$, $P(B) = \frac{2}{6}$, $P(AB) = \frac{1}{6}$, dobijamo

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

1.8. VAŽNI OBRASCI

Klasična definicija verovatnoće

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Verovatnoća zbira događaja koji se isključuju

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

Verovatnoća zbira događaja koji se ne isključuju

$$P(A + B) = P(A) + P(B \setminus AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

1.9. ZADACI

1. Odrediti suprotne događaje događajima:

A- pojava dva grba pri bacanju 2 dinara,

B- pojava bele kuglice prilikom izvlačenja jedne kuglice iz kutije u kojoj se nalaze 2 bele, 3 crne i 4 crvene kuglice,

C- tri pogotka u tri gađanja,

D- makar jedan pogodak u pet gađanja,

E- ne više od dva pogotka u pet gađanja.

Rešenje:

$\bar{A}$ - pojava bar jednog pisma,

$\bar{B}$ - pojava crne ili crvene,

$\bar{C}$ - bar jedan promašaj,

$\bar{D}$ - svih pet promašaja,

$\bar{E}$ - više od dva pogotka.

2. U prodavnici se nalaze sijalice iz dve fabrike. Događaj da je slučajno izabrana sijalica iz prve fabrike obeležimo sa A , a da je dobrog kvaliteta sa B . Šta znače sledeći događaji: $\bar{A}$, $A + \bar{A}$, $A\bar{A}$, AB , $A + B$, $A\bar{B}$, $\bar{A}B$?

Rešenje:

$\bar{A}$ - je događaj da je sijalica iz druge fabrike,

$A + \bar{A}$ - je događaj da je sijalica iz prve ili druge fabrike,

$A\bar{A}$ - događaj je nemoguć,

AB - da je iz prve fabrike i da je dobra,

$A + B$ - da je iz prve fabrike ili da je dobra,

$A\bar{B}$ - da je iz prve fabrike i da nije dobra,

$\bar{A}B$ - da je iz druge fabrike i da je dobra.

3. Meta se gađa sa tri metka. Neka je A_i , $i = 1, 2, 3$ događaj pogotka mete iz i -tog gađanja. Predstaviti sledeće događaje:

A - sva tri pogotka,

B - sva tri promašaja,

C - makar jedan pogodak,

D - ne manje od dva pogotka,

E - ne više od jednog pogotka.

Rešenje:

$$A = A_1 A_2 A_3 ,$$

$$B = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 ,$$

$$C = A_1 + A_2 + A_3 ,$$

$$D = \bar{A}_1 A_2 A_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 A_2 A_3$$

$$E = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 .$$

4. Navesti skup svih događaja za sledeće eksperimente

A – bacanje jednog dinara,

B – bacanje dva dinara,

C – bacanje kocke i dinara,

D – bacanje dve kocke,

E – bacanje tri kocke.

Rešenje:

$$\Omega = \{G, P\},$$

$$\Omega = \{GG, PP, GP, PG\},$$

$$\Omega = \{G1, G2, G3, G4, G5, G6, P1, P2, P3, P4, P5, P6\}$$

Eksperiment bacanja dve kocke ima $6^2 = 36$ elementarnih događaja:

11,12,13,14,15,16,

21,22,23,24,25,26,

31,32,33,34,35,36,

41,42,43,44,45,46,

51,52,53,54,55,56,

61,62,63,64,65,66,

Eksperiment bacanja tri kocke ima $6^3 = 216$ elementarnih događaja.

5. Četiri studenta polažu ispit. Ako sa A,B, C, D označimo događaj da su položili ispit, izraziti sledeće događaje

a) Nijedan nije položio

b) Pao je samo drugi student

c) Položila su najviše 3 studenta

d) Položila su najmanje 3 studenta

Rešenje:

a) $\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} \cdot \bar{D}$

b) $A \cdot \bar{B} \cdot C \cdot D$

c) $1 - A \cdot B \cdot C \cdot D$

d) $A \cdot \bar{B} \cdot C \cdot D + \bar{A} \cdot B \cdot C \cdot D + A \cdot B \cdot \bar{C} \cdot D + A \cdot B \cdot C \cdot \bar{D} + A \cdot B \cdot C \cdot D$

6. Ako je A događaj da dve kocke pri istovremenom bacanju pokažu brojeve čiji je zbir paran broj, a B događaj da pokažu brojeve čiji je proizvod paran broj, naći zbir $A+B$?

Rešenje: $A + B = \Omega$

7. U poslednjih 10 godina beležen je broj padavina i temperatura u Beogradu u martu mesecu i dobijeni su sledeći podaci:

događaj A-105 dana je bilo sa padavinama,

događaj B-135 dana je bilo hladno,

53 dana je bilo hladno sa padavinama.

Odrediti verovatnoće

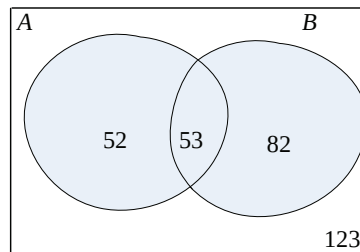
$$P(A), P(B), P(AB), P(A+B), P(\bar{A}B), P(A/\bar{B}), P(\bar{A}\bar{B})$$

Rešenje:

Kako mesec mart ima 31 dan, ukupno je posmatrano 310 dana.

$$P(A) = \frac{105}{310}, P(B) = \frac{135}{310}, P(AB) = \frac{53}{310},$$

Iskoristimo Venove dijagrame da prikažemo događaje



$$\text{dan sa padavinama ili hladan } P(A+B) = \frac{187}{310}$$

$$\text{dan bez padavina i hladan } P(\bar{A}B) = \frac{82}{310}$$

$$\text{dan sa padavinama i nije hladan } P(A/\bar{B}) = \frac{52}{310}$$

dan bez padavina i nije hladan $P(\overline{AB}) = P(\overline{A+B}) = \frac{123}{310}$.

8. U jednoj prodavnici tokom 10 dana prodavan je isti proizvod i to:

Odrediti verovatnoću prodaje drugog dana i od trećeg do sedmog dana.

dani	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Br. proizv.	42	16	11	10	8	8	12	23	56	300

Rešenje: $P(A) = \frac{16}{300} = 0,533$ $P(B) = \frac{11+10+8+8+12}{300} = 0,163$

9. U posudi se nalazi 12 belih, 13 crvenih i 14 plavih kuglica. Kolika je verovatnoća izvlačenja plave kuglice pod uslovom da su sve mogućnosti jednako verovatne?

Rešenje: $P(A) = \frac{14}{39}$

10. Ako se kocka za igru baci jednom, kolika je verovatnoća pojave

a) parnog broja

b) pojave broja tačaka koji je manji od 5.

Rešenje:

a) Neka je A događaj da padne paran broj.

$$P(A) = P(A_2) + P(A_4) + P(A_6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

b) Događaj da se pojavi broj tačaka koji je manji od 5 je suprotan događaju da je

broj tačaka veći ili jednak 5. $P(B) = 1 - (P(A_5) + P(A_6)) = 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) = \frac{2}{3}.$

11. Na osam listića napisani su brojevi 2,4,6,7,8,11,12,13. Na slučajan način biraju se dva listića.

Odrediti verovatnoću da se razlomak dobijen od ovih brojeva može skratiti.

$$\text{Rešenje: } P(A) = \frac{C_2^5}{C_2^8} = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{5}{14}.$$

12. Deset kartica numerisano je brojevima od 1 do 10. Izvlače se dve kartice istovremeno. Naći verovatnoću da je zbir brojeva na izvučenim karticama jednak 10.

$$\text{Rešenje: } P(A) = \frac{4}{\binom{10}{2}} = \frac{4}{45}.$$

13. U kutiji se nalazi 8 crvenih i 6 plavih kuglica. Nasumice izvlačimo 2 kuglice. Kolika je verovatnoća da će:

- a) izvučene kuglice biti različitih boja
- b) da će obe kuglice biti crvene
- c) da će obe kuglice biti plave

Rešenje:

$$\text{a) } P(A) = \frac{6 \cdot 8}{\binom{14}{2}} = \frac{48}{91}, \quad \text{b) } P(B) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{14}{2}} = \frac{28}{91}, \quad \text{c) } P(C) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{14}{2}} = \frac{15}{91}.$$

$$\text{Ovi događaji čine potpuni sistem i } P(A) + P(B) + P(C) = \frac{48 + 28 + 15}{91} = 1.$$

14. U kutiji se nalazi 8 crvenih i 6 plavih kuglica. Nasumice izvlačimo 5 kuglica. Kolika je verovatnoća da će među njima biti tačno 3 plave?

Rešenje:
$$P(A) = \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{8}{2}}{\binom{14}{5}} = 0,279 .$$

15. U seriji od 5 sijalica jedna je neispravna. Kolika je verovatnoća da između 3 nasumično izabrane sijalice
- a) bude neispravna sijalica
 - b) ne bude neispravna.

Rešenje:

a)
$$P(A) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{5}{3}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} .$$

Ako je jedna neispravna onda od preostale 4 treba birati 2.

b)
$$P(\bar{A}) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} .$$

16. U jednoj seriji od 10 istovetnih sijalica nalazi se jedna neispravna. Nasumice se biraju 3 sijalice. Kolika je verovatnoća da nisu sve tri izabrane sijalice pravne?

Rešenje:
$$P(A) = 1 - \frac{\binom{9}{3}}{\binom{10}{3}} = 0,3 .$$

17. Među n proizvoda m je lošeg kvaliteta. Naći verovatnoću da je među k slučajno izabраних proizvoda bar jedan lošeg kvaliteta.

Rešenje:

Događaj A je suprotan događaju da su svi proizvodi dobri.

$$P(A) = 1 - \frac{\binom{n-m}{k}}{\binom{n}{k}}.$$

18. U pakovanju od n proizvoda ima m neispravnih. Naći verovatnoću da se u uzorku od r slučajno izabраних proizvoda nađe k neispravnih.

Rešenje:
$$P(A) = \frac{\binom{m}{k} \binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}.$$

19. Dete ima 4 pločice za igru na kojima piše 2,3,5,6. Od tih brojeva prave se razni četvorocifreni brojevi. Kolika je verovatnoća da dete dobije broj
- a) deljiv sa 4
 - b) deljiv sa 2

Rešenje:

- a) Broj svih ishoda su permutacije od 4 elementa, tj. $4! = 24$. Brojeva deljivih sa 4 ima 8. To su brojevi koji se završavaju sa dvocifrenim brojevima deljivim sa 4. (32,36,52,56). Preostale 2 cifre čine 2 različite permutacije.

$$P(A) = \frac{2 \cdot 4}{4!} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

b)
$$P(B) = \frac{12}{4!} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}.$$

20. Koja je verovatnoća da u društvu od n osoba postoje bar dve koje su rođene istog dana u godini?

Rešenje:

Problem treba rešiti kao suprotan događaj, događaju da svi imaju različit datum rođenja.

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - n + 1)}{365^n} = P_n(A).$$

Može se izračunati da je $P_{22} \approx 0,467$, a $P_{23} \approx 0,507$. Dakle, ako postoje više od 22 osobe, onda je veća verovatnoća da postoje 2 osobe sa istim datumom rođendana.

A kako je $P_{68} \approx 0,999$, onda za više od 68 osoba sa sigurnošću od 99,9%, možemo tvrditi da postoje bar dve osobe rođene istog datuma.

21. Bacamo 3 novčića jedan za drugim. Naći verovatnoću da ćemo dobiti 2 pisma i jedan grb.

Rešenje: $P(A) = \frac{3}{\overline{V}_3^2} = \frac{3}{8}.$

22. Na četiri cedulje ispisani su brojevi 1,2,3,4. Cedulje su slučajno poredane u niz. Kolika je verovatnoća da će se dobiti broj kod koga su prva i druga cifra neparni brojevi?

Rešenje: $P(A) = \frac{2 \cdot 2!}{4!} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$

23. Šest porodica se sastoje od oca, majke i troje dece. Izaberu se slučajno jedan otac, jedna majka i jedno dete. Kolika je verovatnoća da pripadaju istoj porodici?

Rešenje: $P(A) = \frac{6 \cdot 3}{6 \cdot 6 \cdot 18} = \frac{1}{36}.$

24. Dato je 7 pertli različitih boja, od kojih je jedna crvena, a jedna zelena. Naći verovatnoću da će crvena i zelena pertla biti jedna pored druge, ako se pertle ređaju na slučajan način

a) na prav konac, b) u krug.

Rešenje:

a) Broj svih načina da se nanižu pertle na prav konac je . Da bismo odredili povoljne realizacije, zamislimo da su crvena i zelena pertla jedna pored druge i to crvena pa zelena. Dakle imamo 6 objekata, (ove dve kao 1 i ostalih 5) koje treba raspodeliti na 6 mesta, dakle $6!$ Dve pertle još mogu da razmene mesta pa je .

$$P(A) = \frac{2 \cdot 6!}{7!} = \frac{2}{7}$$

b) Ako se pertle ređaju u krug mesta se ne razlikuju. U jednom kružnom rasporedu ima 7 različitih mesta, jer ogrlicu možemo raseći na 7 mesta.

Prema tome broj različitih kružnih rasporeda je 7 puta manji od broja linskih rasporeda, dakle $6!$ Slično je i za povoljne ishode, pa je

$$P(B) = \frac{2 \cdot 5!}{6!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

25. Šest kuglica raspoređeno je nasumice u 12 kutija. Naći verovatnoću da je tačno 10 kutija prazno.

Rešenje:

Ukupan broj ishoda je 12^6

Ako je 10 kutija prazno, znači da smo svih 6 kuglica stavili u 2 kutije. Broj raspo-

reda za 2 kuglice je $\binom{12}{2}$. Broj rasporeda da 6 kuglica stavimo u 2 kutije je 2^6 .

Ali međuovim rasporedima postoje i 2 rasporeda u kojima je jedna od dve kutije prazna. Zato broj rasporeda 6 kuglica u 2 kutije, a da nijedna nije prazna je $2^6 - 2$.

$$P(A) = \frac{\binom{12}{2}(2^6 - 2)}{12^6}.$$

26. Telefonski broj se sastoji od 6 cifara. Ako se pretpostavi da postoje svi telefonski brojevi od 000 000 do 999 999, koja je vjerovatnoća da u proizvoljno izabranom broju sve cifre budu različite?

Rešenje: $P(A) = \frac{V_6^{10}}{\bar{V}_6^{10}} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{10^6} = 0,1512$.

27. Kocka čije su sve strane obojene rasečena je na 1000 kockica istih dimenzija. Sve kockice su stavljene u jednu kutiju. Kolika je vjerovatnoća da izvučena kockica ima:
- a) 3 obojene strane,
 - b) 2 obojene strane,
 - c) 1 obojenu stranu.

Rešenje:

a) $P(A) = \frac{8}{1000} = 0,008$ b) $P(B) = \frac{96}{1000} = 0,096$ c) $P(C) = \frac{384}{1000} = 0,384$

- 28 Posmatramo 3 zatvorene kutije. U jednoj od njih se nalazi poklon koji igrač želi da dobije, a ostale 2 su prazne. Vlasnik kutija zna u kojoj se nalazi poklon. Igrač pokazuje jednu kutiju, kao svoj izbor. Ona se ne otvara. Vlasnik otvara jednu od preostale dve kutije i ona je obavezno prazna. Zatim vlasnik pita igrača da li želi da promeni kutiju i izmeni svoj prvobitni izbor. Da li je za igrača bolje da promeni odluku o izboru kutije?

Rešenje:

A je događaj da je u prvom pokazivanju izabrao praznu,
B promenio je izbor i osvaja poklon.

Očigledno je $A=B$, odnosno $P(A) = P(B) = \frac{2}{3}$.
Znači, bolje je da promeni kutiju.

29. Jedan student je od 30 ispitnih pitanja naučio 24, a drugi 15. Na ispitu su dobili po 3 pitanja. Kolika je verovatnoća da će prvi, odnosno drugi da odgovorio na:

a) najmanje 2 pitanja

b) najviše 1 pitanje

Rešenje:

$$P(A) = \frac{\binom{24}{2}\binom{6}{1} + \binom{24}{3}}{\binom{30}{3}} = 0,906, \quad P(B) = \frac{\binom{15}{2}\binom{15}{1} + \binom{15}{3}}{\binom{30}{3}} = \frac{1}{2}.$$

$$P(A) = \frac{\binom{24}{1}\binom{6}{2} + \binom{6}{3}}{\binom{30}{3}} = 0,0936, \quad P(B) = \frac{\binom{15}{1}\binom{15}{2} + \binom{15}{3}}{\binom{30}{3}} = \frac{1}{2}.$$

30. Dva strelca gađaju cilj. Verovatnoća da prvi pogodi cilj je 0,7, a drugi je 0,4. Obojica istovremeno opale prema cilju. Kolika je verovatnoća da će cilj biti pogoden?

Rešenje:

A je događaj da cilj pogodi prvi strelac,

B je događaj da cilj pogodi drugi strelac.

Događaji A i B se ne isključuju jer je moguće da oba strelca istovremeno pogode cilj.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,7 + 0,4 - 0,7 \cdot 0,4 = 0,82.$$

31. U grupi je 20 studenata i 10 studentkinja. Polovina od ove grupe puši. Kolika je verovatnoća da će slučajno izabrana osoba biti ili studentkinja ili pušač.

Rešenje:

A je događaj da je izabrana osoba studentkinja

B je događaj da je izabrana osoba pušač

$$P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}, \quad P(AB) = \frac{10}{30} \cdot \frac{15}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

32. U kutiji se nalazi 80 cedulja na kojima su ispisani brojevi od 1 do 80. Odrediti verovatnoću da ćemo izvući cedulju na kojoj broj nije manji od 45 ili broj koji je deljiv sa 3?

Rešenje: $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,6203$

33. Kolika je verovatnoća da pri bacanju dve kocke jedna kocka prikaže broj deljiv sa 3 ili deljiv sa 4?

Rešenje:

A je događaj da se na kocki pojavi broj deljiv sa 3, odnosno jedan od brojeva je 3 ili 6, onda je .

B je događaj da se na jednoj kocki pojavi broj deljiv sa 4, odnosno jedan od brojeva

je 4, onda je $P(A) = \frac{20}{36}$.

Događaji A i B se ne isključuju, pa je $P(AB) = \frac{4}{36}$.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{20}{36} + \frac{11}{36} - \frac{4}{36} = \frac{3}{4}.$$

34. Bacamo dinar tri puta. Neka je događaj A pojavljivanje samo jednog pisma, događaj B pojavljivanje najmanje jednog grba, i događaj C pojavljivanje prvi put pisma, a druga dva puta grb. Izračunati $P(A + B + C)$.

Rešenje:

Broj svih elementarnih događaja je 2^3 .

$$A = \{(PGG), (GPG), (GGP)\}, P(A) = \frac{3}{8}$$

$$B = \{(GPP), (PGP), (PPG), (PGG), (GPG), (GGP), (GGG)\}, P(B) = \frac{7}{8}$$

$$C = \{(PGG)\}, P(C) = \frac{1}{8}.$$

$$A \cap B = A, \quad A \cap C = B \cap C = A \cap B \cap C = C.$$

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) = \\ \frac{3}{8} + \frac{7}{8} + \frac{1}{8} - \frac{3}{8} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

35. Kolika je verovatnoća da se istovremenim bacanjem 3 kocke dobiju bar 2 jednaka broja?

Rešenje: $P(A) = \frac{4}{9}.$

36. Iz špila od 32 karte za igru izvlačimo jednu kartu. Kolika je verovatnoća sa ćemo izvući

a) asa ili kralja

b) karo kartu ili kralja?

Rešenje:

a) $P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{4}.$

b) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{11}{32}.$

2. USLOVNA VEROVATNOĆA I NEZAVISNOST

TOTALNA VEROVATNOVA BAJESVA FORMULA

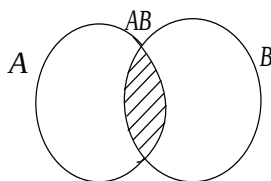
2.1. USLOVNA VEROVATNOĆA

Verovatnoća događaja A znajući da se događaj B već realizovao ili pretpostavljajući da će se realizovati naziva se **uslovna verovatnoća**.

Definicija:

Verovatnoća $P(A|B)$ zove se uslovna verovatnoća događaja A pod uslovom B i

definiše se sa $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$, za $P(B) > 0$.



Relativna učestanost događaja A u eksperimentima u kojima se događaj B reali-

zovao iznosi $\frac{n_{AB}}{n_B} = \frac{\frac{n_{AB}}{n}}{\frac{n_B}{n}}$ gde je n broj eksperimenata, n_B broj realizacija događaja

A i n_{AB} broj realizacija događaja AB, pa je $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

Primer:

Kolika je verovatnoća da će se na kocki prilikom bacanja pojaviti paran broj, pod uslovom da znamo da je taj broj manji od 4?

Neka je A događaj pojave parnog broja, a B pojava brojeva manjih od 4.

$$A = \{2, 4, 6\}, B = \{1, 2, 3\}, A \cap B = \{2\}, \quad P(AB) = \frac{1}{6}, P(B) = \frac{3}{6},$$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

Primer:

U kesi se nalazi 5 belih i 9 crnih kuglica. Izvlačimo nasumice 2 kuglice, jednu po jednu, bez vraćanja. Kolika je verovatnoća da ćemo iz drugog puta izvući crnu, ako znamo da je prvo izvučena bela kuglica?

Možemo da izvučemo 2 bele, 2 crne ili 1 crnu i 1 belu kuglicu.

Neka je A događaj izvlačenja crne kuglice, a B verovatnoća pojave bele kuglice iz prvog izvlačenja.

$$P(B) = \frac{5}{14} \quad A \cap B = A \cdot B = 5 \cdot 9.$$

$$P(AB) = \frac{9 \cdot 5}{V_2^{14}} = \frac{45}{14 \cdot 13} = \frac{45}{182}, \text{ ali mogli smo da izračunamo i na drugi način kao}$$

$$P(AB) = \frac{5}{14} \cdot \frac{9}{13} = \frac{45}{182}$$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{9}{13}$$

Primer:

Dinar se baca ili do pojave grba ili do tri uzastopne pojave pisma. Pod uslovom da je rezultat prvog bacanja pismo, naći verovatnoću da dinar bude bačen 3 puta.

Prilikom bacanja novčića moguće je da se dogodi G, PG, PPG, PPP .

$$P(G) = \frac{1}{2}, P(PG) = \frac{1}{4}, P(PPG) = \frac{1}{8}, P(PPP) = \frac{1}{8}$$

Neka je B događaj pojave pisma u prvom bacanju ($B=PG+PPG+PPP$), pa je

$$P(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

Ako je A događaj da se dinar baca 3 puta, onda je ($A=PPG+PPP$) i

$$P(A) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

Kako je $AB=A$ i $P(AB) = \frac{1}{4}$.

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

2.2. VEROVATNOĆA PROIZVODA DOGAĐAJA NEZAVISNI I ZAVISNI DOGAĐAJI

Koristeći definiciju uslovne verovatnoće moguće je definisati zavisnost i nezavisnost događaja i dati definiciju verovatnoće proizvoda dva događaja.

Neka je dat skup Ω i $A, B \subset \Omega$. Događaj A je **zavisan** od događaja B, ako ostvarivanje događaja B utiče na realizaciju događaja A. U suprotnom su **nezavisni**.

Primer:

Bacamo dve kocke. Neka je A događaj da prva kocka pokaže broj 5, a B događaj da druga kocka pokaže broj 6.

$$P(A) = \frac{1}{6} \text{ bez obzira da li se događaj B realizovao ili ne. Isto važi i u obrnutom slučaju.}$$

Dakle događaji A i B su nezavisni.

Primer:

Imamo 6 artikala jedne fabrike od kojih je 3 neispravno. Biramo dva artikla, jedan pa drugi.

Neka je A događaj da u prvom izvlačenju dobijemo neispravan artikal, a B događaj da i u drugom izvlačenju izvučemo neispravan artikal.

Jasno je da će realizacija događaja A uticati na realizaciju događaja B.

Ako ne bi obraćali pažnju na događaj A, onda je imamo 3 povoljne mogućnosti a pod pretpostavkom da se događaj A realizovao imali bismo 2 povoljne mogućnosti za događaja B,

Znači, događaji A i B su zavisni.

Definicija:

Ako su događaji A i B međusobno zavisni, tada je proizvod događaja A i B

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A).$$

Za konačno mnogo zavisnih događaja $A_1 A_2 \dots A_n$ važi formula

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_2 A_1) \dots P(A_n | A_{n-1} \dots A_2 A_1)$$

Definicija

Događaji A i B su međusobno *nezavisni* ako je

$$P(A|B) = P(A), \quad P(B|A) = P(B),$$

a *proizvod* događaja A i B je

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Za konačno mnogo nezavisnih događaja važi formula

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) P(A_2) \dots P(A_n)$$

Primer:

Eksperiment se sastoji u bacanju 2 novčića od po dinar. Neka su događaji:

A: pojava glave na prvom dinaru

B: pojava makar jedne glave

C: pojava makar jednog pisma

D: pojava glave na drugom dinaru

Ispitati da li su događaji A i C, A i D, B i C, B i D, zavisni ili nezavisni.

Događaji A i C su zavisni jer je, $P(C) = \frac{3}{4}$ $P(C|A) = \frac{1}{2}$.

Događaji A i D su nezavisni, $P(C) = \frac{3}{4}$ $P(A|D) = \frac{1}{2}$.

Događaji B i C su zavisni, $P(B) = \frac{3}{4}$ $P(B|C) = \frac{2}{3}$.

Događaji B i D su zavisni, $P(B|C) = \frac{2}{3}$ $P(B|D) = 1$.

Primer:

Radnik radi na 3 automatske mašine. Verovatnoća da tokom 1 sata mašina ne zahteva intervenciju je za prvu mašinu 0,9, za drugu 0,8 i za treću 0,85.

Kolika je verovatnoća da nijedna od 3 mašine ne zahteva intervenciju tokom sata?

U pitanju su nezavisni događaji i ako sa A, B, C označimo događaje da nije potrebna intervencija na mašinama, onda je

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,85 = 0,612$$

Primer:

Među proizvodima jedne fabrike ima 5% škarta, a od proizvoda koji su dobri 80% je prve klase. Naći verovatnoću da je slučajno izabrani proizvod prve klase.

Neka je A događaj da proizvod nije škart, $P(A) = 0,95$ i ako je B događaj da proizvod prve klase onda je $P(B|A) = 0,8$ i dobijamo

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = 0,95 \cdot 0,8 = 0,76.$$

Izuzetno je važno praviti razliku između nezavisnosti i disjunktnosti (događaji koji se isključuju). Nezavisni događaji se definišu nad skupom Ω , za razliku od disjunktnosti koja postoji nezavisno od skupa Ω .

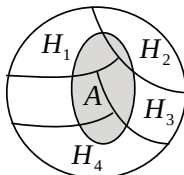
Na primer, nezavisni događaji su događaji da padne pismo ili glava kod bacanja dva novčića, a disjunktni događaji su da padne pismo prilikom bacanja novčića ili da padne broj pet prilikom bacanja kocke.

2.3. TOTALNA VEROVATNOĆA

Neka nezavisni slučajni događaji $H_1, H_2, \dots, H_n$ čine jedno *razlaganje* skupa

Ω . Oni čine *potpuni sistem hipoteza*, odnosno $\sum_{k=1}^n H_k = \Omega$, gde su verovatnoće $P(H_k)$ unapred poznate.

Neka se proizvoljni događaj A ostvaruje uz realizaciju bar jednog od ovih događaja.



Da bi se odredila verovatnoća događaja A potrebno je naći uslovne verovatnoće, $P(A|H_k)$ realizacije pojedinih hipoteza koje su dovele do ostvarivanja događaja A .

Teorema:

Formula totalne verovatnoće: Ako događaji $H_1, H_2, \dots, H_n$ čine *potpuni sistem hipoteza* u odnosu na događaj A , tada je

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(H_k)P(A|H_k).$$

Dokaz direktno sledi iz činjenice da je $A = \sum_{k=1}^n H_k A$ ili $P(A) = \sum_{k=1}^n P(H_k A)$, a kako je $P(AH_i) = P(H_i)P(A|H_i)$, dobijamo traženu formulu.

Primer:

Na ispit iz matematike izašlo je 60% studenata koji polažu prvi put i 40% ostalih. Verovatnoća da će student koji polaže prvi put položiti ispit je 0,3, a za ostale 0,4. Odrediti verovatnoću da će slučajno izabrani student položiti ispit.

Neka su H_1, H_2 verovatnoće da student polaže prvi put, odnosno više puta.

$$P(H_1) = 0,6 \quad P(H_2) = 0,4$$

A je događaj da student položi ispit, a $P(A|H_1) = 0,3$ $P(A|H_2) = 0,4$ su verovatnoće da položi ispit iz prvog, odnosno ostalih puta.

Na osnovu formule totalne verovatnoće dobijamo da je

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = 0,6 \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0,4 = 0,34$$

Primer:

U nekoj fabrici 30% proizvodnje otpada na prvu mašinu, 25% na drugu mašinu i ostalo na treću mašinu. Na prvoj mašini pojavljuje se 1% škarta, na drugoj mašini 1,2% škarta i na trećoj mašini 2% škarta. Kolika je verovatnoća da će slučajno izabrani proizvod biti škart?

A je događaj da je slučajno izabrani proizvod škart.

Događaji Primer:

U nekoj fabrici 30% proizvodnje otpada na prvu mašinu, 25% na drugu mašinu i ostalo na treću mašinu. Na prvoj mašini pojavljuje se 1% škarta, na drugoj mašini 1,2% škarta i na trećoj mašini 2% škarta. Kolika je verovatnoća da će slučajno izabrani proizvod biti škart?

A je događaj da je slučajno izabrani proizvod škart.

Događaji H_1, H_2, H_3 predstavljaju proizvode izrađene redom na mašinama.

$$P(H_1) = 0,30, \quad P(H_2) = 0,25, \quad P(H_3) = 0,45$$

$$P(A|H_1) = 0,01, \quad P(A|H_2) = 0,012, \quad P(A|H_3) = 0,02$$

Na osnovu formule totalne verovatnoće dobijamo da je

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) = 0,015.$$

Primer:

Određeni artikal proizvode 3 fabrike. Poznato je da prva fabrika proizvodi dva puta više od druge, a druga i treća isto. Takođe 2% proizvoda iz prve i druge fabrike je defektno, a 4% iz treće. Svi proizvodi nalaze se na istom skladištu. Slučajno se bira jedan proizvod. Naći verovatnoću da je on defektan.

Neka sa H_1, H_2, H_3 obeležimo događaje da je proizvod iz ovih fabrika respektivno.

Iz uslova zadatka imamo da je

$$P(H_1) = 2P(H_2), \quad P(H_2) = P(H_3), \quad P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1,$$

pa dobijamo da je $P(H_1) = \frac{1}{2} \quad P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{4}$.

Ako je događaj A da je izabrani proizvod defektan imamo da je

$$P(A|H_1) = P(A|H_2) = 0,02 \quad P(A|H_3) = 0,04.$$

Na osnovu formule totalne verovatnoće dobijamo da je

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3)$$

$$\frac{1}{2} \cdot 0,02 + \frac{1}{4} \cdot 0,02 + \frac{1}{4} \cdot 0,04 = 0,025$$

2.4. BAJESOVA FORMULA

Na osnovu formule totalne verovatnoće, u prethodnom primeru, ne može se odgovoriti na pitanje iz koje fabrike potiče izabrani proizvod. Odgovor na ovo pitanje daje Bajesova formula.

Bajesova formula:

Ako događaji $H_1, H_2, \dots, H_n$ čine **potpuni sistem hipoteza** u odnosu na događaj A i $P(A) > 0$, tada je

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^n P(H_k)P(A|H_k)}, i = 1, \dots, n$$

Bajesova formula se zove i **formula verovatnoća hipoteza (uzroka)**, jer na događaje $H_1, H_2, \dots, H_n$ može se gledati kao na različite uzroke koji mogu dovesti do realizacije događaja A .

Primer:

U prethodnom primeru verovatnoća da je traženi proizvod iz prve fabrike iznosi:

$$P(H_1|A) = \frac{0,5 \cdot 0,02}{0,025} = 0,4.$$

Primer:

Baca se kocka. Ako se na kocki pojavi 1 ili 6 uzima se kuglica iz prve kutije, u suprotnom se uzima iz druge kutije. Prva kutija sadrži 3 crne, 2 bele i 1 zelenu kuglicu, a druga kutija sadrži 4 bele i 2 zelene kuglice.

- Naći verovatnoću da je izvučena bela kuglica
- Naći verovatnoću da je izvučena iz prve kutije, ako znamo da je bela.

a) Ako su H_1, H_2 događaji da su izabrane prva odnosno druga kutija , imamo

$$P(H_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, P(H_2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

$$P(A|H_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, P(A|H_2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = \frac{5}{9}$$

$$\text{b) } P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{1}{5}.$$

2.5. VAŽNI OBRASCI

Uslovna verovatnoća

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Verovatnoća proizvoda :

zavisni događaji

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

nezavisni događaji

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

Formula totalne verovatnoće

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(H_k)P(A|H_k)$$

Bajesova Formula

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^n P(H_k)P(A|H_k)}, i = 1, \dots, n$$

2.6. ZADACI

1. U jednoj kutiji nalaze se 4 bele i 8 crnih kuglica, a u drugoj 3 bele i 9 crnih. Izvlačimo iz svake kutije po jednu kuglicu. Odrediti verovatnoću da je iz obe kutije izvučena bela?

Rešenje:

Događaj A : bela kuglica iz prve kutije.

Događaj B : bela kuglica iz druge kutije,

Događaji A i B su nezavisni.

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{12} = \frac{1}{12}.$$

2. U magacinu se nalazi 12 proizvoda, od kojih je 8 ispravnih. Radnik nasumice bira 2 proizvoda, prvo jedan pa drugi. Naći verovatnoću da su oba proizvoda ispravna.

Rešenje:

Događaji A i B su zavisni.

A -je događaj da je prvi proizvod ispravan

B -je događaj da je i drugi proizvod ispravan

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} = 0,4242.$$

3. Iz špila za igru izvučena je jedna karta, a zatim je ponovo izvučena još jedna karta.

a) kolika je verovatnoća da su oba puta izvučene petice ako se karta posle prvog izvlačenja vraća u špil?

b) kolika je verovatnoća da su oba puta izvučene petice, ako se posle prvog izvlačenja karta ne vraća u špil?

Rešenje:

A -je događaj da je u prvom izvlačenju izvučena petica

B -je događaj da je u drugom izvlačenju izvučena petica

a) Događaji su nezavisni, pa je $P(AB) = P(A)P(B) = \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52} = \frac{16}{52^2}$

b) Događaji su zavisni, pa je $P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{12}{2652}$

4. Pri bacanju dve kocke posmatramo zbir koji se pojavljuje na njima. Kolika je verovatnoća da je zbir 6, ako se zna da je zbir paran broj?

Rešenje:

Događaj A: zbir je 6.

Događaj B: zbir je paran broj.

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{18}{36}} = \frac{5}{18}$$

5. U jednom odeljenju od 30 učenika, 12 nosi naočare, 8 piše levom rukom, a 6 ima obe te osobine. Kolika je verovatnoća da slučajno izabrani učenik piše levom rukom, ako znamo da nosi naočare.

Rešenje:

Neka je A događaj da učenik piše levom rukom.

Neka je B događaj da učenik nosi naočare.

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{6}{30}}{\frac{12}{30}} = \frac{1}{2}$$

6. Deo A jednog automobila se zamenjuje u 80% slučajeva. Deo B se zamenjuje u 25% slučajeva ako se zameni deo A. Kolika je verovatnoća da će oba dela biti zamenjena?

Rešenje:

$$P = P(A) \cdot P(B|A) = 0,8 \cdot 0,25 = 0,2$$

7. Student je izašao na ispit znajući 20 od 25 pitanja. Ispitivač je postavio 3 pitanja. Naći verovatnoću da je student znao odgovor na sva 3 pitanja.

Rešenje:

Ako sa A, B C označimo događaje da su izvlačena pitanja koje student zna, onda

$$P = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|AB) = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24} \cdot \frac{18}{23} = 0,496.$$

Zadatak se mogao rešiti primenom klasične definicije verovatnoće

$$P = \frac{\binom{20}{3} \binom{5}{0}}{\binom{25}{3}}$$

8. Iz špila od 32 karte za igru slučajno se, odjednom, izvlače 2 karte. Neka je A događaj da je izvučena bar jedna dama i B događaj da je izvučen bar jedan pik. Naći verovatnoću da je izvučena bar jedna dama i bar jedan pik.

Rešenje:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{\binom{28}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{236}{992}, \quad P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{\binom{24}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{440}{992}$$

$$P(AB) = 1 - P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - \frac{\binom{21}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{572}{992}$$

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{104}{992}$$

9. U kutiji se nalaze 6 crvenih i 4 bele kuglice. Izvlačimo 2 kuglice jednu za drugom. Kolika je verovatnoća da, ako je prva izvučena kuglica crvena, druga bude bela?

Rešenje: $P(A) = \frac{4}{15}$

10. Dat je niz prirodnih brojeva 1,2,3,4,5,6,7,8,9. Biramo 2 broja. Kolika je verovatnoća da njihov zbir bude veći od 12 i neparan?

Rešenje:

Ako je B događaj da je zbir neparan

$$P(B) = \frac{20}{\binom{9}{2}} = \frac{5}{9}, \text{ a uslovna verovatnoća da je zbir veći od 12, pod uslovom da}$$

je neparan $P(A|B) = \frac{6}{\binom{9}{2}} = \frac{1}{6}$, onda je tražena verovatnoća

$$P(AB) = P(A|B)P(B) = \frac{5}{54}$$

11. Kolika je verovatnoća da se na dvema bačenim kockama dobije zbir 9 ili ako se to ne dogodi, da se na ponovljenom bacanju dobije zbir 7.

Rešenje:

Događaj A - zbir je 9

Događaj B - zbir je 7

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}, \quad P(\bar{A}) = 1 - \frac{4}{36} = \frac{32}{36}$$

$$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(\bar{A}B) = \frac{32}{36} \cdot \frac{6}{36} = \frac{4}{27}$$

$$P(A + \bar{A}B) = \frac{7}{27}$$

12. U televizijskom studiju ima 3 kamere. Verovatnoća da je kamera uključena za svaku kameru iznosi 0,6. Odrediti verovatnoću da je u datom trenutku uključena bar jedna.

Rešenje: $P(A) = 1 - 0,4^3 = 0,936$.

13. Iz špila od 52 karte za igru na slučajan način izvlače se 3 karte. Naći verovatnoću da to budu tri različite slike.

Rešenje:

$$P(A) = \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{3}} = 0,0029 \text{ ili } P(A) = \frac{12}{52} \cdot \frac{8}{51} \cdot \frac{4}{50} = 0,0029$$

14. Verovatnoća da će student A rešiti neki zadatak je 0,7, a za studenta B je 0,9.
- a) Naći verovatnoću da će zadatak biti rešen ako ga rešavaju oba studenta, nezavisno jedan od drugog.
 - b) Ako je zadatak rešen, koja je verovatnoća da ga je rešio student B?

Rešenje:

a) $P = P(\overline{A}\overline{B}) + (\overline{A}B) + (AB) = 0,7 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,9 + 0,7 \cdot 0,9 = 0,97$

Ili

$$P = 1 - (\overline{AB}) = 1 - 0,3 \cdot 0,1 = 0,97.$$

b) $P = \frac{1}{2} \cdot 0,7 + \frac{1}{2} \cdot 0,9 = 0,8$

15. U kutiji se nalaze 7 crvenih, 4 belih i 3 plave kuglice. Izvlače se 3 kuglice jedna za drugom. Kolika je verovatnoća da će prva izvučena kuglica biti crvena, druga bela i treća plava?

Rešenje: $P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB) = \frac{7}{14} \cdot \frac{4}{13} \cdot \frac{3}{12} = 0,038$

16. Strane kocke sa brojevima 1,2,3,4 su obojene zeleno, a sa 5 i 6 plavo. Kocka se baca jednom. Ako je događaj A: kocka pokazuje paran broj, događaj B kocka pokazuje zeleno. Da li su događaji A i B zavisni ili nezavisni?

Rešenje:

$$\Omega = \{1z, 2z, 3z, 4z, 5p, 6p\}$$

$$A = \{2z, 4z, 6p\} \quad P(A) = \frac{3}{6}$$

$$B = \{1z, 2z, 3z, 4z\} \quad P(B) = \frac{4}{6}$$

$$A \cap B = \{2z, 4z\} \quad P(AB) = \frac{2}{6}$$

Kako je $P(AB) = P(A)P(B)$, događaji su nezavisni

17. Strane kocke sa brojevima 1,2,3, su obojene zeleno, a sa 4, 5 i 6 plavo. Kocka se baca jednom. Ako je događaj A: kocka pokazuje paran broj, događaj B kocka pokazuje zeleno. Da li su događaji A i B zavisni ili nezavisni?

Rešenje:

$$P(A) = \frac{3}{6}, P(B) = \frac{3}{6}, P(AB) = \frac{1}{6}$$

Kako je $P(AB) \neq P(A)P(B)$, događaji su zavisni

18. Letilica se gađa 2 puta. U prvom gađanju verovatnoća pogotka je 0,3 a u drugom 0,6. Jednom pogođena letilica se ruši sa verovatnoćom 0,2 a dva puta pogođena ruši se sa verovatnoćom 0,9. Kolika je verovatnoća da letilica padne?

Rešenje:

Događaji:

H_1 - letilica je pogođena jedanput

H_2 - letilica je pogođena dva puta

A - letilica je pada.

$$P(H_1) = 0,3 \cdot 0,4 + 0,7 \cdot 0,6 = 0,54$$

$$P(H_2) = 0,3 \cdot 0,6 = 0,18$$

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = 0,56 \cdot 0,2 + 0,18 \cdot 0,9 = 0,27$$

19. Fabrika proizvodi televizore. Tri pogona proizvode respektivno 25%, 35% i 40% celokupne proizvodnje. Pogoni redom daju 5%, 4% i 2% škartova.

a) Kolika je verovatnoća da je slučajno izabrani televizor škart?

b) Kolika je verovatnoća da je taj televizor proizveden u drugom pogonu?

Rešenje:

$$P(H_1) = 0,25, P(H_2) = 0,35, P(H_3) = 0,40$$

$$P(A|H_1) = 0,05, P(A|H_2) = 0,04, P(A|H_3) = 0,02$$

$$a) P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) = \frac{345}{100^2}$$

$$b) P(H_2|A) = \frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{35}{100} \cdot \frac{4}{100}}{\frac{345}{100^2}} = \frac{28}{69}$$

20. Dva strelca nezavisno jedan od drugog gađaju metu ispaljujući po jedan metak. Verovatnoća da će prvi strelac da pogodi metu iznosi 0,8, a za drugog je 0,4. Jedan metak je pogodio metu. Kolika je verovatnoća da je metu pogodio prvi strelac?

Rešenje:

$$P(H_1) = 0,5, \quad P(H_2) = 0,5, \quad P(A|H_1) = 0,8, \quad P(A|H_2) = 0,4.$$

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0,5 \cdot 0,8}{0,8 \cdot 0,5 + 0,4 \cdot 0,5} = 0,67$$

21. U magacinu se nalaze proizvodi iste vrste, proizvedeni u tri različita pogona, respektivno po 20%, 40% i 40% proizvoda. Pogoni redom daju 0,01; 0,02 i 0,04 škartova.

- a) Kolika je verovatnoća da je slučajno izabrani proizvod škart?
b) Kolika je verovatnoća da je taj proizvod izrađen u prvom pogonu?

Rešenje:

$$P(H_1) = 0,2; \quad P(H_2) = 0,4; \quad P(H_3) = 0,4;$$

$$a) \quad P(A|H_1) = 0,01; \quad P(A|H_2) = 0,02; \quad P(A|H_3) = 0,04;$$

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) = 0,026$$

$$b) \quad P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0,2 \cdot 0,01}{0,026} = 0,0769.$$

22. U dve kutije nalaze se kuglice. U prvoj kutiji se nalazi 2 crvene i 4 bele, a u drugoj 6 crvenih i 2 bele. Izvlači se jedna kuglica iz slučajno izabrane kutije. Ona je bela. Kolika je verovatnoća da je iz prve kutije?

Rešenje:

Događaj B: kuglica je bele boje.

Događaj $A_i, i = 1, 2$: Kuglica je iz i -te kutije.

$$P(A_1) = \frac{1}{2}, P(A_2) = \frac{1}{2}, P(B|A_1) = \frac{4}{6}, P(B|A_2) = \frac{2}{8}$$

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2)} = \frac{8}{11}$$

23. Na sportskom takmičenju iz streljaštva učestvuju tri takmičara. Cilj gađaju istovremeno.

a) Odrediti verovatnoću da je cilj pogođen ako verovatnoća pogotka za prvog

takmičara iznosi $\frac{3}{4}$, za drugog $\frac{17}{20}$ i za trećeg $\frac{1}{20}$.

b) Ako je cilj pogođen, odrediti verovatnoću da ga je pogodio prvi takmičar ?

Rešenje:

$$a) P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{17}{20} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{20} = 0,55$$

$$b) P(H_1|A) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}}{0,55} = 0,45$$

24. Na našem fakultetu 45% studentkinja ima plavu kosu, 20 % ima plave oči, a 15% ima i plavu kosu i plave oči. Odrediti verovatnoću da slučajno izabrana studentkinja

a) Ako ima plavu kosu da će imati i plave oči

b) Ako ima plavu kosu da neće imati i plave oči

c) Ako ima plave oči da neće imati plavu kosu

d) Da neće imati ni plavu kosu ni plave oči

Rešenje:

Događaj A je –plava kosa

Događaj B je –plave oči

$$P(A) = \frac{45}{100} = 0,45$$

$$P(B) = \frac{20}{100} = 0,2$$

$$P(AB) = \frac{15}{100} = 0,15$$

$$\text{a) } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0,15}{0,45} = 0,33.$$

$$\text{b) } P(\bar{B}|A) = 1 - P(B|A) = 1 - 0,33 = 0,67$$

$$\text{c) } P(\bar{A}|B) = 1 - P(A|B) = 1 - \frac{P(AB)}{P(B)} = 1 - \frac{0,15}{0,2} = 0,25$$

$$P(\overline{A+B}) = 1 - P(A+B)$$

$$\text{d) } P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{2}$$

$$P(\overline{A+B}) = \frac{1}{2}$$

25. U prodavnici se nalaze cipele iz dve fabrike i to 70% je iz prve fabrike, a 30% je iz druge. 2% cipela iz prve fabrike je lošeg kvaliteta, a 5% iz druge fabrike.

a) Odrediti verovatnoću da slučajni kupac kupi kvalitetne cipele?

b) Kolika je verovatnoća da su to cipele proizvedene u prvoj fabrici?

Rešenje:

a) 0,97 b) 0,71

26. Svaka od 3 kutije za nakit ima 2 pregrade. U prvoj od kutija u jednoj od predgrada nalazi se zlatni prsten, a u drugoj srebrni. U drugoj kutiji u obe pregrade su zlatni prstenovi, a u trećoj u obe pregrade srebrni prstenovi. Na slučajan način biramo jednu od kutija, otvaramo jednu pregradu i nalazimo srebrni prsten. Kolika je verovatnoća da je u drugoj pregradi zlatan prsten?

Rešenje: 1/3

27. Na jednom uskom putu u susret jedan drugom idu 2 vozača. Ako su oba vozača trezna verovatnoća da neće doći do sudara je 0,999, ako je jedan vozač pripit verovatnoća je 0,7 i ako su oba vozača pripita verovatnoća je 0,4. Ako sa zna da je svaki deseti vozač pripit odrediti verovatnoću da neće doći do sudara.

Rešenje:

$$P(H_1) = 0,9 \cdot 0,9 = 0,81,$$

$$P(H_2) = 0,9 \cdot 0,1 + 0,1 \cdot 0,9 = 0,18,$$

$$P(H_3) = 0,1 \cdot 0,1 = 0,01$$

$$P(A|H_1) = 0,99, \quad P(A|H_2) = 0,7, \quad P(A|H_3) = 0,4$$

$$P(A) = 0,94.$$

28. Na ispitu ima 20 pitanja. Od 10 studenta koji su izašli na ispit 3 studenta su se pripremili odlično, 4 vrlo dobro, 2 dobro i 1 slabo. Student koji se odlično pripremio zna odgovore na sva pitanja, vrlo dobro pripremljeni student zna odgovore na 14 pitanja, a slabo pripremljeni zna odgovore na 7 pitanja. Slučajno izabrani student je odgovorio na sva tri pitanja. Kolika je verovatnoća da je to vrlo dobro pripremljeni student?

Rešenje:

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{10} \cdot \frac{\binom{14}{3}}{\binom{20}{3}}}{0,3 \cdot 1 + 0,4 \cdot 0,49 + 0,2 \cdot 0,32 + 0,1 \cdot 0,03} = \frac{0,4 \cdot 0,49}{0,563} = 0,348$$

29. Analize Ministarstva zdravlja pokazuju da od raka oboljeva 2% građana Srbije. Postoji test koji je uvek pozitivan ako bolest postoji, a u slučaju zdravih ljudi daje pozitivan rezultat u 22% slučajeva. (test tvrdi da su bolesni iako su zdravi). Kolika je verovatnoća da osoba koja se testirala je zaista bolesna?

Rešenje:

Verovatnoća da je proizvoljno odabrana osoba bolesna je $P(H_1) = 0,02$,

a zdrava $P(H_2) = 0,98$

Verovatnoća da se osoba testira u obe varijante su $P(T|H_1) = 1$, $P(T|H_2) = 0,22$
Verovatnoća da je testirana osoba bolesna je

$$P(H_1|T) = \frac{P(H_1)P(T|H_1)}{P(T)} = \frac{P(H_1)P(T|H_1)}{P(H_1)P(T|H_1) + P(H_2)P(T|H_2)} = \frac{0,02 \cdot 1}{0,02 \cdot 1 + 0,98 \cdot 0,21} = 0,0885$$

Napomena: Ovaj primer ukazuje na korisnu primenu Bajesove formule. Iz uslova zadatka, ako je test pozitivan u 22% slučajeva, većina ljudi bi brzopleto zaključili da šansa da su bolesni iznosi 78%, a realno taj broj je 8,85%.

30. Neka je test na neku bolest (hiv, kancer i sl) takav da u 99% slučajeva je tačan kada je pozitivan i u 99% slučajeva tačan kada je negativan. Poznato je da 0,5% bolesnih pozitivno. Kolika je verovatnoća da slučajno odabrana osoba je zaista bolesna ako je test bio pozitivan?

Rešenje:

Događaj A je da je test dobar

$$P(H_1) = 0,05, \quad P(H_2) = 0,995,$$

$$P(A|H_1) = 0,99, \quad P(A|H_2) = 0,01,$$

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = 0,332$$

Napomena: I ovaj primer ukazuje na korisnu primenu Bajesove formule. I ako je test pozitivan samo 33.2% je verovatnoća da je osoba bolesna.

3. SLUČAJNE PROMENLJIVE – FUNKCIJA RASPODELE

U prethodnim razmatranjima slučajni događaji su bili okarakterisani opisno, rečima. Mnogo je korisnije slučajne događaje okarakterisati kao brojne vrednosti, kao realne brojeve. Tako se dolazi do pojma *slučajne promenljive*.

Primer:

Novčić se baca dva puta. Kako je $\Omega = \{PP, PG, GP, GG\}$ i ako je slučajna promenljiva X broj registrovanih pisama onda ona uzima vrednosti

$$X(PP) = 2, X(GP) = 1, X(PG) = 1, X(GG) = 0.$$

Znači, slučajna promenljiva X uzima 3 vrednosti, a to su 0,1,2.

Definicija:

Funkcija X koja svakom slučajnom događaju $\omega \in \Omega$ dodeljuje neki realni broj

$X(\omega)$ zove se *slučajna promenljiva*, gde je $X : \omega \rightarrow R$.

Slučajne promenljive obeležavaju se velikim slovima $X, Y, Z, \dots$, a njihove vrednosti malim slovima $x, y, z, \dots$.

U prethodnom primeru, slučajna promenljiva X koja predstavlja broj registrovanih pisama kod bacanja 2 novčića uzima vrednosti $(x, y, z) = (0, 1, 2)$.

Da bi se okarakterisala slučajna promenljiva treba znati sve vrednosti koje ona može da uzme.

Ovako definisana slučajna promenljiva X predstavlja jedan apstraktan matematički model.

Na primer, ako bi u eksperimentu bacanja kocke sa $X=0$ označili pojavu parnog broja, a sa $X=1$ neparnog, a u eksperimentu bacanja novčića sa $X=0$ pojavu pisma, a sa $X=1$ pojavu glave, imamo situaciju da se različiti slučajni događaji preslikavaju u iste realne brojeve. Znači, u pitanju je jedan isti apstraktni model sa dva podjednako verovatna ishoda.

Slučajna promenljiva predstavlja preslikavanje događaja iz skupa Ω u skup svih realnih brojeva $X : \omega \rightarrow R$, dok je verovatnoća, kako smo već naglasili, preslikavanje događaja iz skupa Ω na interval realnih brojeva $[0, 1]$

$$P : \omega \rightarrow [0, 1]$$

Važno je shvatiti da slučajna promenljiva nema neku određenu vrednost, već se samo može govoriti o verovatnoćama da ona uzme neku određenu vrednost.

Razlikuju se dva osnovna tipa slučajnih promenljivih, **diskretne** i **neprekidne** slučajne promenljive. Podela se vrši u zavisnosti da li slučajna promenljiva uzima vrednosti u konačnom ili prebrojivim i beskonačnom skupu vrednosti.

3.1. DISKRETNA SLUČAJNA PROMENLJIVA

Slučajna promenljiva X je diskretna ako je domen njenih vrednosti konačan ili prebrojiv beskonačan skup.

Definicija:

Neka slučajna promenljiva X uzima vrednosti $x_1, x_2, \dots, x_n$, sa verovatnoćama $p_1, p_2, \dots, p_n$, pri čemu je $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

Skup parova $(x_i, p_i = P(X = x_i)), i = 1, 2, \dots, n$ ili napisano

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}$$

čini **raspodelu verovatnoća** slučajne promenljive X ili **zakon raspodele diskretne slučajne promenljive**.

Napomena: Zakon raspodele je identičan i u slučaju prebrojivo mnogo vrednosti.

Zakon raspodele verovatnoća kao potpuna karakteristika odnosi se isključivo na diskretnu slučajnu promenljivu.

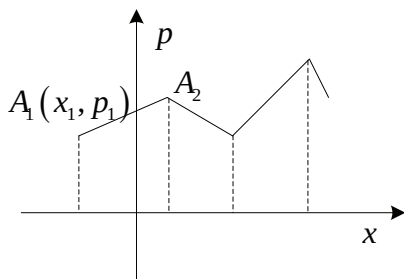
Primer:

U prethodnom primeru bacanja dva novčića, gde je slučajna promenljiva X broj registro-

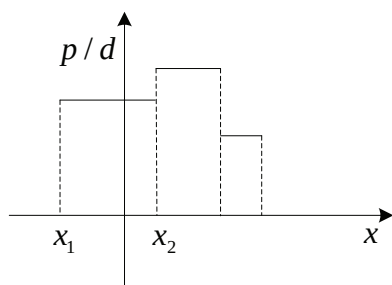
vanih pisama, zakon raspodele verovatnoća bio bi $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Raspodele verovatnoća slučajne promenljive mogu se prikazati grafički.

a) Ako se na x -osu nanesu vrednosti x_i slučajne promenljive X , a na y -osu njihove verovatnoće p_i , tada tačke $A_i(x_i, p_i)$, kada se spoje daju **poligon raspodele**.



b) Ako se nacrtaju pravougaonici, tako da je $d_i = x_{i+1} - x_i$, $A_i\left(x_i, \frac{p_i}{d_i}\right)$, dobija se **histogram raspodele**



3.2. FUNKCIJA RASPODELE

Vrednosti slučajne promenljive ne mogu se predvideti pre obavljenog eksperimenta. Samim tim, ne može se definisati zakon raspodele. Prema tome potrebno je definisati neku veličinu koja ne zavisi od eksperimenta, a to je funkcija raspodele.

Funkcija raspodele je karakteristika slučajne promenljive X koja omogućava da se izračuna verovatnoća da slučajna promenljiva uzme vrednost na nekom intervalu na x osi. Drugim rečima, slučajna promenljiva uzima neku vrednost x sa verovatnoćom .

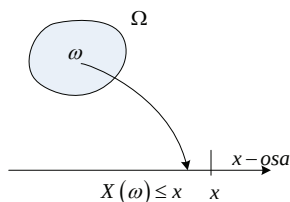
Umesto verovatnoće da slučajna promenljiva uzme neku vrednost, češće govorimo o verovatnoći da vrednost slučajne promenljive pripada nekom intervalu. Razlog za ovakvo rezonovanje su eksperimenti koji imaju ishode na neprekidnom skupu vrednosti.

Definicija:

Neka je X slučajna promenljiva. Realna funkcija F definisana kao

$$F(x) = P(X \leq x) = P(\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x)$$

naziva se **funkcija raspodele** slučajne promenljive X .



Funkcija raspodele opisuje sve bitne karakteristike slučajne promenljive. Dok vrednosti slučajne promenljive se ne znaju pre obavljenog eksperimenta, funkcija raspodele je potpuno poznata. Iz ovih razloga predmet proučavanja teorije verovatnoće nisu slučajne promenljive, već njihove funkcije raspodela.

Primer:

Ako je slučajna promenljiva X ishod bacanja kocke, i pre bacanja kocke znamo da je

$$F(x) = P(X \leq 4) = \frac{4}{6}, \text{ iako ne možemo da tačno predvidimo koju vrednost će slučajna}$$

promenljiva X imati u konkretnom bacanju.

3.2.1.OSOBINE FUNKCIJE RASPODELE

Neka je F funkcija raspodele slučajne promenljive X . Tada je:

1. $0 \leq F(x) \leq 1, \quad \forall x \in R,$
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1,$

jer je verovatnoća nemogućeg događaja $(X < -\infty)$ jednaka 0, a sigurnog $(X < +\infty)$ jednaka 1

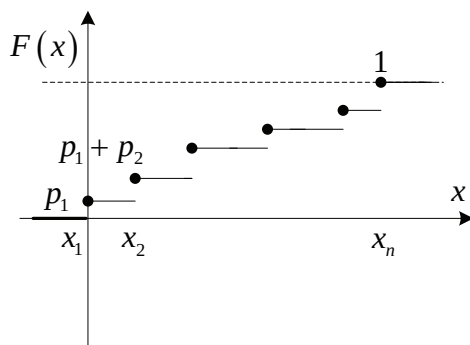
3. Funkcija F je monotonno neopadajuća, $x_1 \leq x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$.

4. Funkcija je neprekidna s desna, $\lim_{h \rightarrow 0} F(x+h) = F(x)$.

Kod diskretne slučajne promenljive, funkcija raspodele se zove i **kumulativna funkcija** i oblika je:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < x_1 \\ p_1, & x_1 \leq x < x_2 \\ p_1 + p_2, & x_2 \leq x < x_3 \\ \dots\dots\dots & \\ 1, & x_n \leq x < \infty \end{cases}$$

Grafički prikaz kumulativne funkcije raspodele dat je na sledećoj slici:



Funkcija raspodele kod diskretne slučajne promenljive je prekidna funkcija čiji su skokovi $P(X = x_k) = p_k \quad k = 1, 2, \dots, n$.

Primer:

Bacamo novčić. Neka je slučajna promenljiva X broj registrovanih pisama.

Onda je $X(P) = 1$, $X(G) = 0$, znači slučajna promenljiva uzima dve moguće vrednosti 0,1.

Zakon raspodele i funkcija raspodele slučajne promenljive X su:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Primer:

Novčić se baca dva puta. Neka je slučajna promenljiva X broj registrovanih pisama. Kako je $\Omega = \{PP, PG, GP, GG\}$, imamo da je

$$X(PP) = 2, X(GP) = 1, X(PG) = 1, X(GG) = 0.$$

Znači slučajna promenljiva uzima 3 moguće vrednosti 0,1,2.

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{4}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4}, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

3.3. NEPREKIDNA SLUČAJNA PROMENLJIVA

Slučajna promenljiva X je **neprekidna** (kontinualna) ako je domen njenih vrednosti interval na realnoj osi.

Primer:

Posmatrajmo skup odraslih žena u jednom gradu. Njihova visina je neprekidna slučajna promenljiva koja može da uzme bilo koju od beskonačno mnogo vrednosti iz intervala $[155\text{cm}; 185\text{cm}]$.

Definicija:

Kod neprekidne slučajne promenljive X **funkcija raspodele** može se predstaviti u obliku

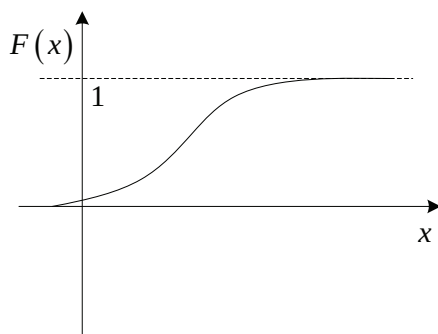
$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt, \quad -\infty < x < \infty$$

gde je $f(x)$ **funkcija gustine verovatnoća** i zadovoljava uslove

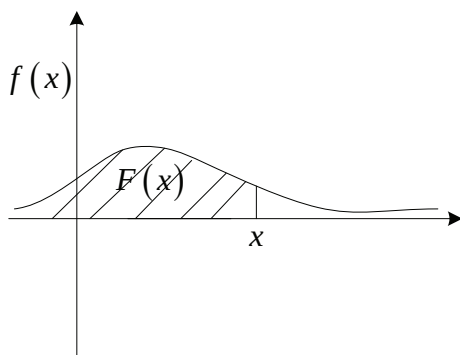
1. $f(x) \geq 0$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

Grafik krive na narednoj slici predstavlja funkciju raspodele za neprekidnu slučajnu promenljivu.

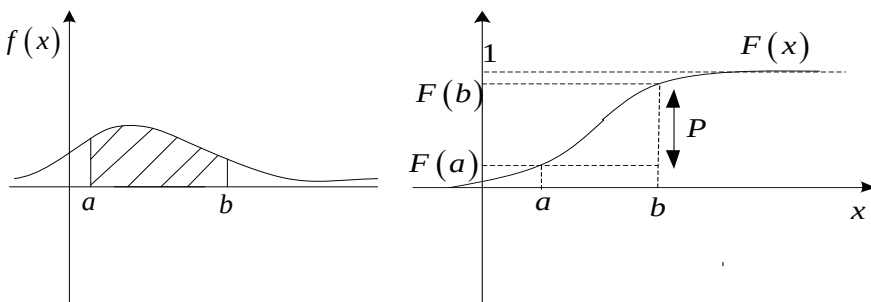


Kriva na narednoj slici naziva se **kriva gustine verovatnoća**.



Polazeći od geometrijskog tumačenja određenog integrala, funkcija raspodele $F(x)$ predstavlja površinu dela ravni između krive gustine i x -ose u granicama od $-\infty$ do x .

Funkcija gustine verovatnoće omogućava da se izračuna verovatnoća da se vrednost slučajne veličine nađe u nekom intervalu. Ta verovatnoća je jednaka površini koja je ograničena funkcijom gustine i granicama datog intervala.



$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

Prema tome možemo zaključiti:

$$1. P(a < X < b) = F(b) - F(a) .$$

$$2. P(X = c) = 0, \forall c \in R$$

Jednakost $P(X = c) = 0$ ne znači da se događaj $X = c$ nikada neće ostvariti, već da je mala, veoma mala, verovatnoća da će se on ostvari. To je razumljivo, jer slučajna promenljiva X može da uzme bilo koju vrednost c sa intervala (a, b) , a njih je beskonačno mnogo, pa su mali izgledi da uzme baš vrednost c .

Kod neprekidne funkcije, nemoguće je svakom elementu c iz intervala (a, b) dodeliti pozitivnu verovatnoću, jer tada bi zbir svih verovatnoća bio beskonačan, a zbir verovatnoća skupa svih vrednosti promenljive X mora biti jednak 1. Zato se uzima da je $P(X = c) = 0$.

Prividno ovo je paradoks. Međutim, ovakvi paradoksi postoje u nauci. U geometriji duž ima pozitivnu dužinu, a dužina svake tačke je 0. U mehanici, masa tela postoji, a masa svakog pojedinog dela je nula.

Kao posledica navedenog važi da je:

$$P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b)$$

Teorema:

Između funkcije raspodele i funkcije gustine postoji veza da je $F'(x) = f(x)$

Dokaz:

Verovatnoća slučajne promenljive X na intervalu $(x, x + \Delta x)$ iznosi

$$P(x \leq X \leq x + \Delta x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt \text{ ili aproksimativno } P(x \leq X \leq x + \Delta x) = f(x) \Delta x.$$

Primer:

Ako je data funkcija gustine $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 + 2 & 0 \leq x < 2 \\ 0 & x \geq 2 \end{cases}$, odrediti funkciju raspodele

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_0^x (x^2 + 2) dx = \frac{x^3}{3} + 2x$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^3}{3} + 2x & 0 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

Primer:

Odrediti konstantu a tako da funkcija $f(x) = \begin{cases} ax^2, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x < 0, x \geq 1 \end{cases}$,

bude funkcija gustine raspodele verovatnoće neprekidne slučajne promenljive.

Zatim naći funkciju raspodele i izračunati $P(0 < X < 2)$.

$$\text{Kako je } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1, \quad \int_0^1 ax^2 dx = 1 \Rightarrow a = 3.$$

$$\text{Funkcija gustine glasi } f(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x < 0, x \geq 1 \end{cases}.$$

$$\text{Funkcija raspodele glasi: } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x 3x^2 dx = x^3, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{Tražena verovatnoća } P(0 < X < 2) = F(2) - F(0) = 1.$$

3.4. VAŽNI OBRASCI

Zakon raspodele diskretne slučajne promenljive

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}$$

Kumulativna funkcija raspodele diskretne slučajne promenljive

[illegible]

Funkcija raspodele neprekidne slučajne promenljive

$$F(x) = P(X(\omega) \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt, \quad -\infty < x < \infty$$

Vrednost verovatnoće neprekidne slučajne promenljive u intervalu

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

3.5. ZADACI

1. Eksperiment se sastoji od bacanja dve kocke. Neka slučajna promenljiva X predstavlja zbir brojeva koji se dobijaju prilikom bacanja kocke. Naći zakon raspodele slučajne promenljive X .

Rešenje:

Slučajna promenljiva uzima 11 mogućih vrednosti 2,3,...,12

Verovatnoće slučajne promenljive X su:

$$P(X=2)=\frac{1}{36}, P(X=3)=\frac{2}{36}, P(X=4)=\frac{3}{36}, \dots, P(X=12)=\frac{1}{36}.$$

Zakon raspodele je:

$$X : \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}.$$

2. U kesi se nalazi 5 belih i 3 crne kuglice. Vade se po 2 kuglice. Neka slučajna promenljiva X predstavlja broj belih kuglica. Napisati zakon raspodele slučajne promenljive X .

Rešenje:

Slučajna promenljiva uzima 3 moguće vrednosti 0,1,2.

Broj belih kuglica je slučajna promenljiva X sa verovatnoćama:

$$P(X=0)=\frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}}=\frac{3}{28}, P(X=1)=\frac{\binom{5}{1}\binom{3}{1}}{\binom{8}{2}}=\frac{15}{28}, P(X=2)=\frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}}=\frac{10}{28}.$$

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{3}{28} & \frac{15}{28} & \frac{5}{14} \end{pmatrix}$$

3. Automobil se kreće ulicom u kojoj se nalazi 3 semafora. Svaki dopušta prolazak sa verovatnoćom od $\frac{2}{3}$, a zaustavlja automobil sa verovatnoćom od $\frac{1}{3}$.

Naći zakon raspodele i funkciju raspodele verovatnoća slučajne promenljive X koja predstavlja broj semafora kroz koje je automobil prošao.

4. U kutiji se nalaze 4 bele i 3 crne kuglice. Kuglice se vade do prvog pojavljivanja bele. Napisati zakon raspodele slučajne promenljive X koja predstavlja broj izvlačenja kuglica.

Rešenje:

$$P(X=1) = \frac{4}{7}, \quad P(X=2) = \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{7},$$

$$P(X=3) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{35}, \quad P(X=4) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{4} = \frac{1}{35}.$$

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{4}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{35} & \frac{1}{35} \end{pmatrix} \quad F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{4}{7} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{6}{7} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{34}{35} & 3 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

5. Odrediti zakon raspodele slučajne promenljive X koja predstavlja broj grbova kod bacanja 3 dinara, kao i funkciju raspodele.

Rešenje:

Neka je slučajna promenljiva X broj registrovanih grbova.

El.dog.	GGG	GGP	GPG	PGG	GPP	PGP	PPG	PPP
Broj glava	3	2	2	2	1	1	1	0
verovatnoće	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

Slučajna promenljiva uzima 4 moguće vrednosti 0,1,2,3

Broj grbova je slučajna promenljiva sa verovatnoćama:

$$P(X=0)=\frac{1}{8}, P(X=1)=\frac{3}{8}, P(X=2)=\frac{3}{8}, P(X=3)=\frac{1}{8}$$

Zakon raspodele verovatnoća broja grbova je: $X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$

$$\text{Funkcija raspodele: } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{8}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{4}{8}, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8}, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

6. Slučajna promenljiva X data je zakonom raspodele

$$X: \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 3 \\ 0,08 & 0,4 & 0,32 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Naći verovatnoće događaja

$$P(X < 2), \quad P(1 \leq X < 3), \quad P(2 < X \leq 3).$$

Rešenje:

$$P(X < 2) = P(X = -2) + P(X = 1) = 0,48$$

$$P(1 \leq X < 3) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0,72$$

$$P(2 \leq X \leq 3) = P(X = 2) + P(X = 3) = 0,52$$

7. Kocka za igru se baca do pojave petice, a najviše 4 puta. Neka je X broj bacanja. Odrediti zakon raspodele slučajne promenljive X, funkciju raspodele i nacrtati njen grafik.

8. Kutija sadrži kuglice numerisane brojevima 1,2,3,4,5, čiji je odnos 2:5:4:3:1. Ako su vrednosti slučajne promenljive X cifre označene na kuglicama, napisati zakon raspodele, funkciju raspodele i nacrtati graf funkcije raspodele.

Rešenje:

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{2}{15} & \frac{5}{15} & \frac{4}{15} & \frac{3}{15} & \frac{1}{15} \end{pmatrix} \quad F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{2}{15} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{15} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{11}{15} & 3 \leq x < 4 \\ \frac{14}{15} & 4 \leq x < 5 \\ 1 & x \geq 5 \end{cases}$$

9. Data je funkcija $f(x) = \begin{cases} cx^2, & 1 \leq x < 2 \\ cx, & 2 \leq x < 3 \\ 0, & x < 1, x \geq 3 \end{cases}$.

Odrediti nepoznati parametar c tako da ova funkcija bude funkcija gustine ve rovatnoća slučajne promenljive X . Zatim odrediti funkciju raspodele i izračunati

$$P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right), P(X > 2).$$

Rešenje:

Kako je

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_1^2 cx^2 dx + \int_2^3 cxdx = c \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 + c \frac{x^2}{2} \Big|_2^3 \Rightarrow c = \frac{6}{29}.$$

$$\text{Funkcija gustine verovatnoća glasi } f(x) = \begin{cases} \frac{6}{29}x^2, & 1 \leq x < 2 \\ \frac{6}{29}x, & 2 \leq x < 3 \\ 0, & x < 1, x \geq 3 \end{cases}$$

$$\text{Funkcija raspodele glasi } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \int_1^x \frac{6}{29}x^2 dx = \frac{2x^3 - 2}{29}, & 1 \leq x < 2 \\ \int_2^x \frac{6}{29}x dx = \frac{3(x^2 - 4)}{29}, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

$$P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right) = F\left(\frac{3}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{19}{116} - 0 = \frac{19}{116}$$

$$P(X > 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - F(2) = \frac{15}{29}$$

10. Data je funkcija $f(x) = \begin{cases} ce^{-3x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$. Odrediti nepoznati parametar c

tako da ova funkcija bude funkcija gustine verovatnoća slučajne promenljive X .
Zatim odrediti funkciju raspodele i izračunati

$$P(1 < X < 2), P(X \geq 3) \text{ i } P(X < 1).$$

Rešenje:

Kako je

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} ce^{-3x} dx = -\frac{c}{3}e^{-3x} \Big|_0^{\infty} = -\frac{c}{3} \left(\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-3x} - 1 \right) = \frac{c}{3}; \Rightarrow c = 3.$$

$$f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} \int_0^x 3e^{-3x} dx = 1 - e^{-3x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$P(1 < X < 2) = F(2) - F(1) = e^{-3} - e^{-6}$$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - F(3) = e^{-9}$$

$$P(X < 1) = F(1) = 1 - e^{-3}.$$

11. Odrediti konstantu a tako da funkcija $f(x) = \frac{a}{x^2 + 1}$, bude funkcija gustine

verovatnoća neprekidne slučajne promenljive.

Zatim naći funkciju raspodele i izračunati $P(-1 < X < 1)$.

Rešenje:

Kako je

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{1+x^2} dx = a(\arctg \infty - \arctg(-\infty)) = a\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{\pi}$$

Funkcija gustine verovatnoća glasi $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$

Ova raspodela se zove **Košijeva raspodela**.

Tražena verovatnoća

$$P(-1 < X < 1) = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\pi(1+x^2)} = \frac{1}{\pi}(\arctg 1 - \arctg(-1)) = \frac{1}{2}$$

12. Funkcija raspodele slučajne promenljive X data je izrazom

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Naći:

a) funkciju gustine verovatnoća ,

b) verovatnoće $P(X > 2)$, $P(-3 < X \leq 4)$.

Rešenje:

$$\text{a) Kako je } f(x) = F'(x) = \frac{dF}{dx} = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } P(X > 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - F(2) = e^{-4} .$$

$$\text{c) } P(-3 < X \leq 4) = F(4) - F(-3) = (1 - e^{-8}) - 0 = 1 - e^{-8}$$

$$13. \text{ Data je } f(x) = \begin{cases} a(4x - 2x^2), & x \in [0, 2) \\ 0, & x \geq 2, x < 0 \end{cases} ,$$

Odrediti nepoznati parametar a tako da ova funkcija bude funkcija gustine verovatnoća slučajne promenljive X . Zatim odrediti funkciju raspodele i skicirati grafike ovih funkcija.

Rešenje:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^2 a(4x - 2x^2) dx = \frac{8a}{3} \Rightarrow a = \frac{3}{8} .$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}(4x - 2x^2), & x \in [0, 2) \\ 0, & x < 0, x \geq 2 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x \frac{3}{8}(4x - 2x^2) dx = \frac{16}{3} \left(x^2 - \frac{x^3}{3} \right), & x \in [0, 2) \\ 0, & x < 0, x \geq 2 \end{cases}$$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - F(3) = 1$$

$$P(X < 1) = F(1) = \frac{32}{9} .$$

14. Data je funkcija raspodele slučajne promenljiva X

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{2x} & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Odrediti funkciju gustine verovatnoća.

Rešenje:

Funkcija gustine verovatnoća je

$$f(x) = F'(x) = (1 - e^{2x})' = -2e^{2x}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ -2e^{2x} & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

15. Ako je data funkcija raspodele $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ cx^2 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$

a) Odrediti parametar c ako je $P(X = 1) = 0$

b) Naći funkciju gustine verovatn

Rešenje:

a) $P(X = 1) = F(1_+) - F(1_-) = 1 - c \cdot 1 = 0 \Rightarrow c = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

b) $f(x) = F'(x)$

$$f(x) = 2x$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 2x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$$

4. PARAMETRI ILI BROJNE KARAKTERISTIKE SLUČAJNIH PROMENLJIVIH

Funkcija raspodele ili zakon raspodele za diskretnu slučajnu promenljivu i funkcija raspodele ili gustina raspodele verovatnoća za neprekidnu slučajnu promenljivu predstavljaju potpune karakteristike tih promenljivih. Međutim, u mnogim praktičnim problemima nije potrebno u potpunosti okarakterisati slučajnu promenljivu. Najčešće je potrebno samo ukazati na neke parametre (numeričke pokazatelje) koji do izvesne mere karakterišu bitne osobine raspodele verovatnoća.

Najveći praktični značaj imaju dve grupe parametara:

- Parametri koji reprezentuju centar rasturanja slučajne promenljive
- Parametri koji mere rasturanje oko centra rasturanja

4.1. PARAMETRI KOJI REPREZENTUJU CENTAR RASTURANJA

Jedan od najvažnijih parametara koji reprezentuje centar rasturanja je **matematičko očekivanje** ili kako se još naziva, srednja vrednost, prosečna vrednost, nada, slučajne promenljive.

Za matematičko očekivanje koristi se oznaka $E(X)$, ali i oznake μ_X ili μ .

Iako se naziva očekivanje, matematičko očekivanje ono ne mora da bude moguća vrednost slučajne promenljive.

Definicija:

Ako je X diskretna slučajna promenljiva čiji je zakon raspodela verovatnoća dat izrazom

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \text{ i } p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1,$$

matematičko očekivanje je

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

Diskretna slučajna promenljiva može da uzima konačno mnogo vrednosti, kao u prethodnoj definiciji ili beskonačno, ali prebrojivo mnogo vrednosti.

Definicija:

Ako je X neprekidna slučajna promenljiva sa gustinom raspodele verovatnoća $f(x)$, onda je **matematičko očekivanje**

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Napomena: Da bi postojalo matematičko očekivanje, nesvojstveni integral kod neprekidne slučajne promenljive, odnosno beskonačni red kod diskretne slučajne promenljive moraju da konvergiraju.

Matematičko očekivanje se naziva i momenat **prvog reda**.

Moment k -tog reda definiše se kao $E(X^k) = \sum_{i=1}^n x_i^k P(X = x_i)$.

4.1.1. OSOBINE MATEMATIČKOG OČEKIVANJA

1. $E(C) = C$

2. $E(CX) = CE(X)$

3. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

4. Ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive onda je

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Primer:

Neka izraz $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ \frac{1}{10} & \frac{6}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$ predstavlja zakon raspodele verovatnoća diskretne slučajne promenljive X .

Naći matematičko očekivanje $E(X)$, a zatim $E(5X+1)$ i $E(X^2)$.

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = 3 \cdot \frac{1}{10} + 5 \cdot \frac{6}{10} + 2 \cdot \frac{3}{10} = \frac{39}{10}$$

Iz ovog primera se vidi da matematičko očekivanje ne mora da bude postojeća vrednost slučajne promenljive

$$E(5X+1) = E(5X) + E(1) = 5E(X) + 1 = \frac{41}{2}$$

$$E(X^2) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 = 9 \cdot \frac{1}{10} + 25 \cdot \frac{6}{10} + 4 \cdot \frac{3}{10} = \frac{171}{10}$$

Primer:

Neka slučajna promenljiva X predstavlja broj pisama u tri bacanja novčića.

Zakon raspodele slučajne promenljive X je
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Matematičko očekivanje $E(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1,5$.

Primer:

Jedna prodavnica prodaje tri tipa televizora. Zarada od prodaje je 1000 dinara po komadu od prve vrste, 2000 dinara, od druge i 3000 dinara od treće vrste. Najviše se prodaju prvi tip, na njih odlazi 60%, drugih 30% i trećih 10%. Odrediti prosečnu zaradu.

Neka slučajna promenljiva X predstavlja zaradu po tipovim televizora

Zakon raspodele slučajne promenljive X :

$$\begin{pmatrix} 1000 & 2000 & 3000 \\ 0,6 & 0,3 & 0,1 \end{pmatrix}$$

Matematičko očekivanje $E(X) = 1000 \cdot 0,6 + 2000 \cdot 0,3 + 3000 \cdot 0,1 = 1500$

Primer:

Data je neprekidna slučajna promenljiva sa funkcijom gustine

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x < a, x > b \end{cases}.$$

Naći matematičko očekivanje $E(X)$ i $E(X^2)$.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{a+b}{2},$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{b^3 - a^3}{3} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}.$$

4.2. PARAMETRI KOJI MERE RASTURANJE SLUČAJNE PROMENLJIVE OKO CENTRA RASTURANJA

U nekim problemima srednja vrednost nije dovoljna karakteristika za opisivanje pojava. To može da se vidi iz sledećih primera.

Primer:

Prosečna temperatura u Beogradu tokom godine je 15 stepeni. Imamo utisak prijatne klime, ali leti temperatura ide do 40^0 , a zimi -10^0 .

Primer:

Posmatrajmo dve diskretne slučajne promenljive čiji su zakoni raspodele dati sa:

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} \text{ i } Y : \begin{pmatrix} -60 & -30 & 44,5 \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}.$$

U oba slučaja matematička očekivanja su ista, tj $E(X) = E(Y) = 4$.

Odstupanja za prvu slučajnu promenljivu, $X - E(X)$ su redom -3, -2, 2 dok su za drugu promenljivu, $Y - E(Y)$ redom -64, -34, 40,5.

Iako su im matematička očekivanja jednaka, odstupanja za promenljivu X su relativno mala, dok su za promenljivu Y velika, pa se raspodele slučajnih promenljivih dosta razlikuju.

Prema tome, osim srednje vrednosti potrebno je znati još neki parametar koji karakteriše slučajnu promenljivu. To je odstupanje, odnosno veličina rasprostranjenosti mogućih vrednosti slučajne promenljive oko očekivane vrednosti.

Definicija:

Neka je X slučajna promenljiva sa matematičkim očekivanjem $E(X)$.

Disperzija ili varijansa slučajne promenljive X se definiše kao matematičko očekivanje kvadrata odstupanja slučajne promenljive X od matematičkog očekivanja

$$D(X) = E(X - E(X))^2$$

Kvadratni koren varijanse naziva se **standardna devijacija** ili **standardno odstupanje**

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Definicija:

Ako je X diskretna slučajna promenljiva, onda je **disperzija** je

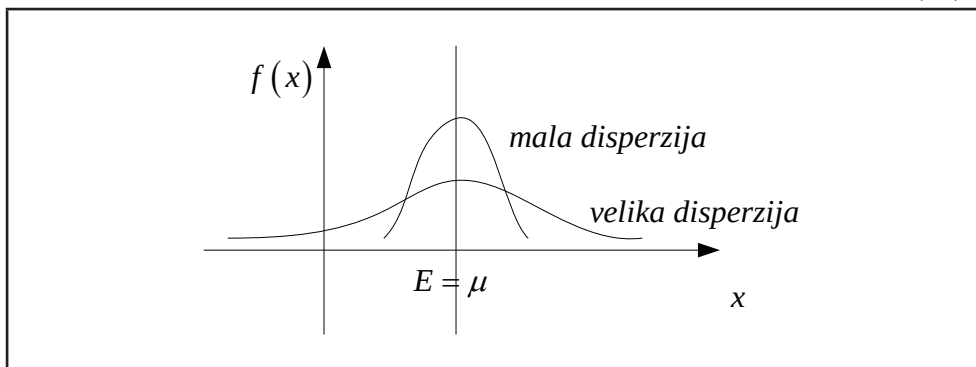
$$D(X) = E(X - E(X))^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 p_i$$

Definicija:

Ako je X neprekidna slučajna promenljiva sa gustinom raspodele $f(x)$, onda je **dispersija**

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(x))^2 f(x) dx$$

Dispersija predstavlja meru rasturanja vrednosti slučajne promenljive X oko sredine $E(X)$.



Ako je koncentracija vrednosti oko sredine velika, dispersija je mala, vrednostima koje leže blizu sredine moraju odgovarati velike verovatnoće slučajne promenljive X , dok ako se vrednosti slučajne promenljive značajno rasipaju oko sredine i dispersija je velika. Vrednostima slučajne promenljive koje su daleko od sredine odgovaraju male verovatnoće, što se vidi na slici.

4.2.1. OSOBINE VARIJANSE

Neka je C konstanta- proizvoljni realni broj, a X i Y slučajne promenljive. Tada važi:

1. $D(C) = 0$
2. $D(X) = E(X^2) - E^2(X)$
3. $D(CX) = C^2 D(X)$
4. $D(X + C) = D(X)$
5. Ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y)$$

Primer:

Izračunati disperziju i standardno odstupanje slučajne promenljive X ako je definisana zakonom

$$\text{raspodele } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{8},$$

$$D(X) = E(X - E(X))^2 = E\left(X - \frac{5}{8}\right)^2 = \left(0 - \frac{5}{8}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{5}{8}\right)^2 \cdot \frac{3}{8} + \left(2 - \frac{5}{8}\right)^2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{31}{64}.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{31}{64}},$$

ili koristeći osobinu $D(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$$X^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \quad E(X^2) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{7}{8},$$

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{7}{8} - \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{31}{64}.$$

Primer:

Neka je data gustina raspodele verovatnoće slučajne promenljive X

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}x + 1 \right), & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & x < 0, x > 2 \end{cases}$$

Izračunati disperziju i standardnu devijaciju slučajne promenljive X .

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^2 x \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) dx = \frac{10}{9}$$

$$D(X) = \int_0^2 \left(x - \frac{10}{9} \right)^2 \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) dx = \frac{26}{81}, \quad \sigma(X) = \sqrt{\frac{26}{81}}$$

4.3. VAŽNI OBRASCI

Matematičko očekivanje diskretne slučajne promenljive

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Matematičko očekivanje neprekidne slučajne promenljive

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Osobine matematičkog očekivanja

$$E(C) = C$$

$$E(CX) = CE(X)$$

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Disperzija ili varijansa slučajne promenljive

$$D(X) = E(X - E(X))^2$$

Standardna devijacija ili standardno odstupanje

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Disperzija ili varijansa diskretne slučajne promenljive

$$D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 p_i$$

Disperzija ili varijansa neprekidne slučajne promenljive

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(x))^2 f(x) dx$$

Osobine disperzije

$$D(C) = 0$$

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$D(CX) = C^2 D(X)$$

$$D(X + a) = D(X)$$

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y)$$

4.4. ZADACI

1. Neka je dat zakon raspodele slučajne promenljive X izrazom $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{2}{10} & \frac{3}{10} & \frac{5}{10} \end{pmatrix}$.

Naći matematičko očekivanje.

Rešenje:

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = 0 \cdot \frac{2}{10} + 1 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{5}{10} = \frac{13}{10}.$$

U ovom primeru matematičko očekivanje jednako je aritmetičkoj sredini

$$E(X) = \bar{X}.$$

2. Data je slučajna promenljiva X zakonom raspodele $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Naći $E(X)$, $E(3X + 4)$, $E(X^2)$.

Rešenje:

$$E(X) = -2 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$E(3X + 4) = E(3X) + 4 = 3E(X) + 4 = 7$$

$$E(X^2) = (-2)^2 \cdot \frac{1}{3} + 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{2} = 6.$$

3. Prvi igrač baca 2 kocke, a drugi igrač mu plaća onoliko dinara koliko iznosi zbir dobijenih brojeva bačenih kocki. Kolika je srednja dobit prvog igrača?

Rešenje:

$$X : \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & \dots & 7 & \dots & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \dots & \frac{6}{36} & \dots & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix},$$

$$E(X) = 7.$$

4. Dva igrača bacaju kocku. Pre bacanja prvi igrač uplati unapred neku svotu. Posle bacanja drugi igrač plaća prvom onoliko dinara koliki broj padne. Koliko treba da uplati prvi igrač da bi igra bila fer?

Rešenje:

Ako bi prvi igrač uplatio 1 dinar, posle prvog bacanja drugi igrač bi morao da uplati prvom bar dinar, a verovatno i više, znači igra je nepovoljna za njega, drugog igrača. Ako prvi uplati 6 dinara, može da dobije uloženi novac, ali je verovatnije da će dobiti manje, pa je to nepovoljnije za prvog igrača.

Posmatramo matematičko očekivanje slučajne promenljive X , koja predstavlja broj koji može da se dobije kada kocka padne, sa podjednakim verovatnoćama $1/6$.

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3,5$$

Prema tome, prvi igrač treba da uplatiti 3,5 dinara da bi igra bila podjednako povoljna za oba igrača.

5. Prodavac sladoleda zaradi 120 dinara kada je lep dan i 40 dinara kada je hladno. Koliko može da očekuje da zaradi u danu za koji je verovatnoća da će biti hladno 0,35?

Rešenje:

$$E(X) = 120 \cdot 0,65 + 40 \cdot 0,35 = 92$$

6. Lutrija ima sledeće dobitke:

1 dobitak	od 500 000 dinara
2 dobitka	od 100 000 dinara
5 dobitaka	od 50 000 dinara
20 dobitaka	od 10 000 dinara
100 dobitaka	od 5 000 dinara
1000 dobitaka	od 1 000 dinara

Ako cena jednog loza iznosi 100 dinara i izdato je 50 000 lozova, koliko je matematičko očekivanje osobe koja kupi loz?

Rešenje:

Verovatnoća da učesnik izvuče loz sa nekim dobitkom je .

$$p = \frac{k}{50000}, \quad k = 1, 2, 5, 20, 100, 1000$$

$$E(X) = \frac{1}{50000} (1 \cdot 500000 + 2 \cdot 100000 + 5 \cdot 50000 + 20 \cdot 10000 + 100 \cdot 5000 + 1000^2) = 53$$

$$E(X) - 100 = -47$$

Može se dakle zaključiti da je lutrija nepovoljna za učesnika, jer od svakog kupljenog loza gubi 47 dinara.

7. Dokazati teoremu $D(X) = E(X^2) - E^2(X)$.

Rešenje:

$$\begin{aligned} D(X) &= E(X - E(X))^2 = E(X^2 - 2XE(X) + E^2(X)) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E^2(X) = \\ &= E(X^2) - E^2(X) \end{aligned}$$

8. Odrediti disperziju slučajne veličine X čiji je zakon raspodele dat sa

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ \frac{1}{10} & \frac{6}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

Rešenje:

$$E(X) = \frac{1}{10}(2 \cdot 1 + 3 \cdot 6 + 5 \cdot 3) = 3,5$$

$$X^2: \begin{pmatrix} 4 & 9 & 25 \\ \frac{1}{10} & \frac{6}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{10}(4 \cdot 1 + 9 \cdot 6 + 25 \cdot 3) = 13,3$$

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 13,3 - (3,5)^2 = 1,05$$

9. Dva strelca gađaju metu. Meta je podeljena u tri dela. Pogodak u pojedine krugove donosi redom 3,2 i 1 bodova. Slučajna promenljiva je broj bodova. Dati su zakoni raspodele broja bodova oba strelca

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{4}{10} & \frac{4}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{10} & \frac{6}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

Naći matematičko očekivanje i disperziju i na osnovu toga zaključiti ko je bolji strelac.

Rešenje:

$$E(X) = \frac{1}{10}(1 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2) = \frac{18}{10}, \quad E(Y) = \frac{1}{10}(1 \cdot 1 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 3) = \frac{22}{10}$$

Na osnovu aritmetičke sredine rekli bismo da je drugi strelac bolji, no pravi rezultat može da se dobije tek kada se izračuna disperzija i vidi koliko je rasturanje vrednosti oko sredine.

$$X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ \frac{4}{10} & \frac{4}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix} \quad Y^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ \frac{1}{10} & \frac{6}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{10}(1 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 9 \cdot 2) = \frac{38}{10}, \quad E(Y^2) = \frac{1}{10}(1 \cdot 1 + 4 \cdot 6 + 9 \cdot 3) = \frac{52}{10}$$

Kako je disperzija, a samim tim i standardno odstupanje manje u drugom slučaju, sa sigurnošću možemo reći da je drugi strelac bolji.

10. Dve košarkaške ekipe su postigle isto po 96 poena. U prvoj 4 igrača su postigla po 6 poena, 4 igrača po 8 poena i 4 po 10 poena, a u drugoj ekipi 11 igrača po 4 poena i 1 igrač 52 poena. Neka su X i Y slučajne promenljive koje predstavljaju broj poena slučajno izabranog igrača. Odrediti njihove funkcije raspodele, grafički ih prikazati i naći matematička očekivanja. Na osnovu dobijenih vrednosti koja ekipa je uspešnija?

Rešenje:

$$X = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 10 \\ \frac{4}{12} & \frac{4}{12} & \frac{4}{12} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 4 & 52 \\ \frac{11}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

$$E(X) = \frac{96}{12}, \quad E(Y) = \frac{96}{12}$$

$$X^2 = \begin{pmatrix} 36 & 64 & 100 \\ \frac{4}{12} & \frac{4}{12} & \frac{4}{12} \end{pmatrix} \quad E(Y^2) = \begin{pmatrix} 16 & 2704 \\ \frac{11}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

$$E(X^2) = \frac{800}{12}, \quad E(Y^2) = \frac{2880}{12}$$

$$D(X) = 2,7, \quad D(Y) = 176$$

Prva ekipa je uspešnija

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 6 \\ \frac{4}{12}, & 6 \leq x < 8 \\ \frac{8}{12}, & 8 \leq x < 10 \\ 1, & x \geq 10 \end{cases} \quad F(y) = \begin{cases} 0, & y < 4 \\ \frac{11}{12}, & 4 \leq y < 52 \\ 1, & y \geq 52 \end{cases}$$

11. Baca se novčić. Označimo sa X broj bacanja novčića do prve pojave glave. Naći matematičko očekivanje slučajne promenljive X .

Rešenje:

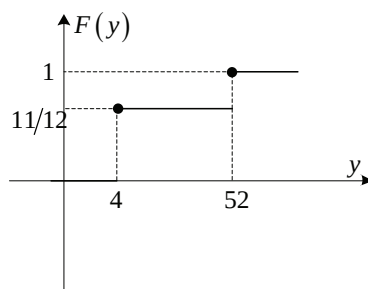
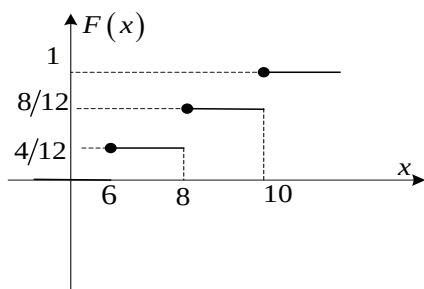
U pitanju je slučajna promenljiva koja ima prebrojivo mnogo vrednosti.

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3} \dots \end{pmatrix}.$$

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 3 \cdot \frac{1}{2^3} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}.$$

Znajući da je $1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$, diferenciranjem dobijamo

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}, \text{ pa je } E(X) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = 2.$$



12. Matematičko očekivanje slučajne promenljive X jednako je 12,5 a disperzija 3,48. Izračunati matematičko očekivanje i disperziju sledećih slučajnih promenljivih:

a) $3X$; b) $X - 10$; c) $\frac{X}{5}$; d) $\frac{2X + 5}{6}$; e) X^2

- 13 Funkcija gustine verovatnoća data je izrazom $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 < x < 2 \\ 0, & x \leq 0; x \geq 2 \end{cases}$.

Odrediti matematičko očekivanje i disperziju.

Rešenje:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^2 x \left(\frac{1}{2}x \right) dx = \int_0^2 \frac{1}{2}x^2 dx = \frac{4}{3}$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx = \int_0^2 \left(x - \frac{4}{3} \right)^2 \left(\frac{1}{2}x \right) dx = \frac{2}{9}$$

14. Neka je X neprekidna slučajna promenljiva čija je funkcija gustine

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x < 0; x > 1 \end{cases}.$$

Naći $E(X)$, $E(3X - 2)$, $E(X^2)$.

Rešenje:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^1 x (3x^2) dx = \int_0^1 3x^3 dx = \frac{3}{4}$$

$$E(3X - 2) = 3E(X) - 2 = 3 \cdot \frac{3}{4} - 2 = \frac{1}{4}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2 (3x^2) dx = \int_0^1 3x^4 dx = \frac{3}{5}$$

15. Neka je X neprekidna slučajna promenljiva čija je funkcija gustine

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

Naći $E(X)$, $E(3X - 2)$ i $E(X^2)$.

Rešenje:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} x(2e^{-2x})dx = \int_0^{\infty} 2xe^{-2x}dx =$$

$$2 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-x \frac{e^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} \right) \Big|_0^x = \frac{1}{2}$$

$$E(3X - 2) = 3E(X) - 2 = 3 \cdot \frac{1}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{\infty} x^2 (2e^{-2x})dx = \int_0^{\infty} 2x^2 e^{-2x}dx =$$

$$2 \lim_{a \rightarrow \infty} \left(-x^2 \cdot \frac{e^{-2x}}{2} - 2x \cdot \frac{e^{-2x}}{4} - \frac{e^{-2x}}{4} \right) \Big|_0^a = \frac{1}{2}$$

16. Televizori sa različitim kvarovima donose se u radionicu na opravke. Neka je vreme popravke slučajna promenljiva X . Ako je funkcija raspodele data sa

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - e^{-t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

Naći prosečno vreme popravke televizora i vreme čekanja sa mogućim odstupanjem.

Rešenje:

Potrebno je naći naći matematičko očekivanje i standardno odstupanje slučajne promenljive.

$$\text{Kako je } f(t) = F'(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$E(X) = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \int_0^{\infty} t e^{-t} dt = 1$$

Prosečna popravka traje jedan dan.

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} t^2 f(t) dt = \int_0^{\infty} t^2 e^{-t} dt = 2$$

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 1.$$

$$\sigma = \sqrt{1} = 1$$

Popravka je moguća u rasponu $[0, 2]$, odnosno odmah, do dva dana

17. Nепrekidna slučajna promenljiva zadata je funkcijom gustine verovatnoća,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x < a, x > b \\ 0 & a < x < b \end{cases}$$

Odrediti matematičko očekivanje i disperziju

Rešenje:

$$E(X) = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{a+b}{2}$$

$$D(X) = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

18. Nепrekidna slučajna promenljiva zadata je funkcijom gustine verovatnoća, gde je k nepoznat parametar

$$f(x) = \begin{cases} k(x^2 + 2x) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

Izračunati matematičko očekivanje.

Rešenje:

$$\int_0^1 k(x^2 + 2x) dx = 1$$

$$k \left(\frac{x^3}{3} + x^2 \right)_0^1 = 1 \Rightarrow k = \frac{3}{4}$$

Funkcija gustine verovatnoća glasi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(x^2 + 2x) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

Matematičko očekivanje

$$E(X) = \frac{3}{4} \int_0^1 x(x^2 + 2x) dx = \frac{3}{4} \left(\frac{x^4}{4} + 2 \frac{x^3}{3} \right)_0^1 = \frac{11}{16}$$

19. Odrediti matematičko očekivanje neprekidne slučajne promenljive

$$\text{a) } f(x) = 2x, 0 < x < 1, \quad \text{b) } f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, 0 < x < 1$$

Rešenje:

$$\text{a) } 2/3 \quad \text{b) } 1/3$$

5. RASPODELE SLUČAJNIH PROMENLJIVIH

5.1. RASPODELE DISKRETNE SLUČAJNE PROMENLJIVE

5.1.1. BERNULIJEVI EKSPERIMENTI

Dve najznačajnije raspodele diskretne slučajne promenljive su **binomna raspodela** i njena generalizacija **Poasonova raspodela**.

Binomna raspodela vezana je za Bernulijeve eksperimente.

Bernulijevi eksperimenti su niz nezavisnih eksperimenata, sa dva moguća ishoda koji se izvode pod istim uslovima. U datim eksperimentima događaj A se može ili ne može realizovati. Verovatnoća realizacije događaja A je ista u svim ponavljanjima eksperimenta i iznosi p . Sa $q = 1 - p$ označava se verovatnoća suprotnog događaja, da se događaj A ne realizuje.

Ako je X slučajna promenljiva koja predstavlja broj realizacija događaja A, pod pretpostavkom da se događaj realizuje jednom, zakon raspodele verovatnoća bi izgledao:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix}$$

Ova raspodela se zove i nula-jedan raspodela.

5.1.2. BINOMNA RASPODELA

Neka se u n eksperimenata događaj A realizuje k puta, a verovatnoća svake realizacije događaja je p . Eksperimenti su međusobno nezavisni i izvode se pod istim uslovima. Onda slučajna promenljiva X može uzeti vrednosti $0, 1, 2, \dots, n$ i ima **Binomnu raspodelu**.

Binomna raspodela

Neka promenljiva X predstavlja broj realizacija događaja A u n ponavljanja eksperimenta. Verovatnoća da se u n eksperimenata događaj A realizuje k puta, ako je verovatnoća svake realizacije događaja p , iznosi

$$P(A) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Za binomnu raspodelu se koristi oznaka $X : B(n, p)$.

Dokaz

Ako je $X = k$, to znači da se u k slučajeva realizovao događaj A , a u preostalih $n-k$ slučajeva nije.

Jedna od takvih mogućnosti je $\underbrace{AA...A}_k \underbrace{\bar{A}\bar{A}... \bar{A}}_{n-k}$, a kako je $P(A) = p$, imamo da je $\underbrace{pp...p}_k \underbrace{qq...q}_{n-k}$

Imajući u vidu da događaj A može da se pojavi u k od mogućih n eksperimenata,

broj različitih rasporeda je $C_k^n = \binom{n}{k}$,

pa dobijamo obrazac $P(A) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Ova raspodela se zove binomna raspodela zato što su verovatnoće članovi binomnog razvoja

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Funkcija raspodele diskretne slučajne promenljive sa binomnom raspodelom jednaka je:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Primer:

Kolika je verovatnoća da se u 10 uzastopnih bacanja novčića 6 puta pojavi glava?

Neka je A događaj pojave glave. Verovatnoća događaja A u svakom bacanju iznosi

$p = \frac{1}{2}$, pa slučajna promenljiva X koja prestavlja broj glava ima binomnu raspodelu

$$X : B\left(\frac{1}{2}, 10\right).$$

$$P(A) = P(X = 6) = \binom{10}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10-6} = 0,205.$$

Primer:

Verovatnoća da je jedan proizvod defektan je 0,01. Iz skladišta se uzima 100 proizvoda. Kolika je verovatnoća da:

- a) bude tačno 5 defektnih proizvoda,
- b) broj defektnih proizvoda nije veći od 10?

Neka je A događaj da je proizvod defektan. Slučajna promenljiva X je broj defektnih proizvoda i ima binomnu raspodelu $B(100; 0,01)$

- a) Za $k = 5$ imamo

$$P(X = 5) = \binom{100}{5} 0,01^5 \cdot 0,99^{95} = 0,00579$$

$$\text{b) } P = P(X = 0) + P(X = 1) + \dots + P(X = 10) = \sum_{k=0}^{10} \binom{100}{k} 0,01^k \cdot 0,99^{100-k}$$

Matematičko očekivanje, disperzija i standardno odstupanje diskretne slučajne promenljive date binomnim zakonom raspodele iznose:

$$E(X) = np,$$

$$D(X) = npq,$$

$$\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{npq}.$$

Znajući da je $p + q = 1$ dobijamo

$$E(X) = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^n k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} = np \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} q^{n-k} =$$

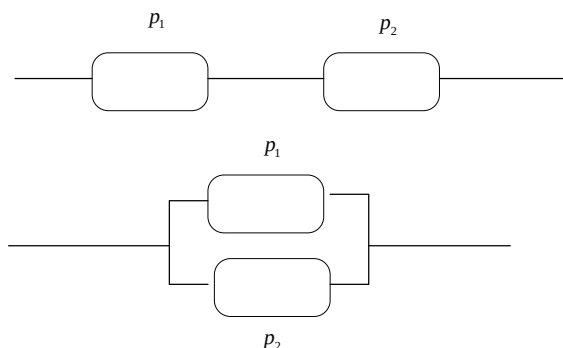
$$np \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{n-1-(k-1)} = np(p+q)^{n-1} = np.$$

Dokaz formule za disperziju se slično izvodi.

Pouzdanost nekog uređaja se definiše kao verovatnoća da uređaj ispravno radi. Ako je sistem sačinjen od nezavisnih komponentata, tada se pouzdanost može odrediti ako znamo pouzdanost pojedinačnih komponenti. Osnovni načini povezivanja komponenti su **redna i paralelna** veza.

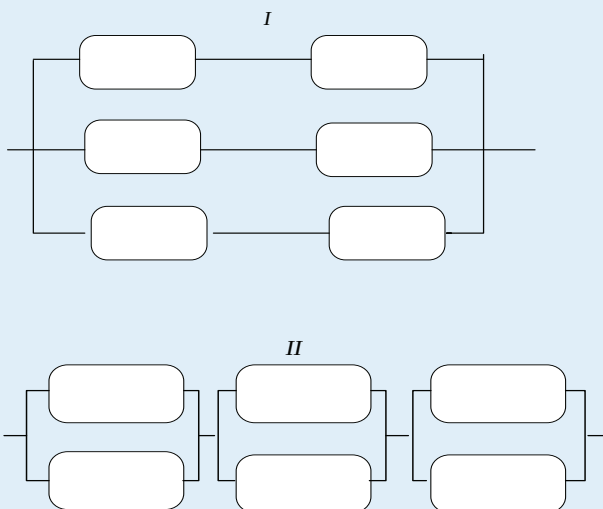
Sistem od dve redne komponente radi samo ako obe komponente rade. Pouzdanost sistema je dakle $p = p_1 p_2$.

Sistem od dve paralelne komponente ne radi samo ako ni jedna komponenta ne radi. Dakle verovatnoća da sistem ne radi je $(1-p_1)(1-p_2)$. Pouzdanost sistema je dakle $p = 1 - (1-p_1)(1-p_2) = p_1 + p_2 - p_1 p_2$.



Primer:

Data su dva sistema na slici. Koji od njih ima veću pouzdanost?



Neka su p_1, p_2 pouzdanosti datih sistema.

Sistem I se svodi na paralelnu vezu 3 komponente od kojih je svaka redna sa pouzdanošću

$$p_1 = 1 - (1 - p^2)^3 = 3p^2 - 3p^4 + p^6.$$

Sistem II se svodi na rednu vezu 3 komponente od kojih je svaka paralel-

na sa pouzdanošću $p_1 = 1 - (1 - p^2)^3 = 3p^2 - 3p^4 + p^6$, pa dobijamo

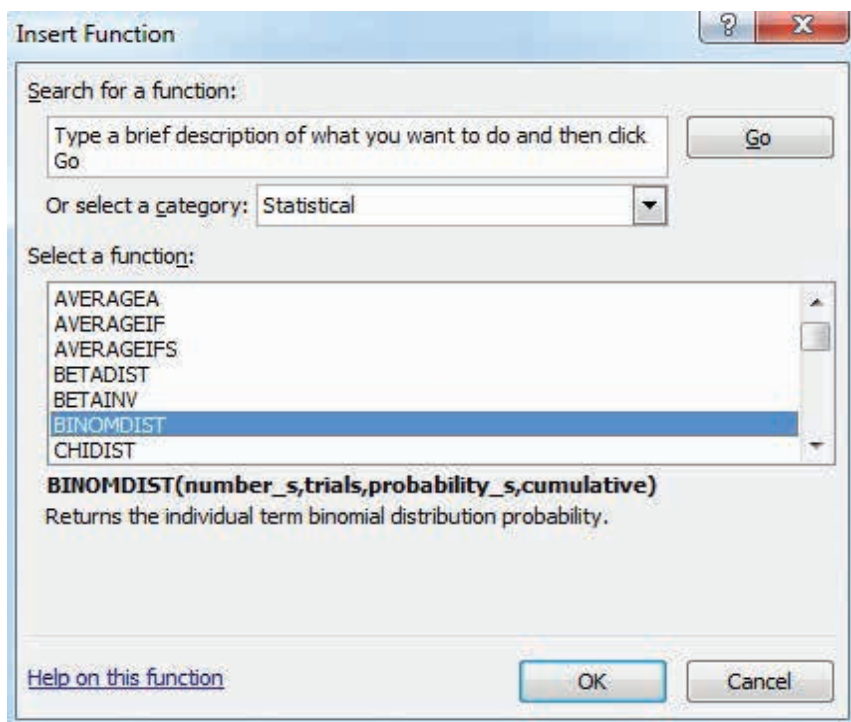
$$p_2 = (2p - p^2)^3 = 8p^3 - 12p^4 + 6p^5 - p^6.$$

Dakle

$$p_1 - p_2 = p^2 (p - 1)^2 (2p^2 - 2p + 3) > 0,$$

Pa prema tome sistem I ima veću pouzdanost.

U Excelu se za binomnu raspodelu koristi se funkcija *BINOM.DIST*. Dobija se tako što iz menija izabere naredba Formulas - Insert Function i iz padajućeg menija izabere se Statistical pa *BINOMDIST*, kao što se može videti na sledećoj slici:



Sintaksa za ovu funkciju je:

BINOMDIST(number_s, trials, probability_s, cumulative)

BINOM.DIST

number_s = number

trials = number

probability_s = number

cumulative = logical

Result: {...}
 Done

***fx* BINOM.DIST**
 Returns the individual term binomial distribution probability.

Funkcija BINOM.DIST

- *number_s* – broj uspešnih realizacija nekog događaja u n ponavljanja eksperimenta
- *trials* – broj ponavljanja eksperimenta n
- *probability_s* – verovatnoća događaja u svakom eksperimentu
- *cumulative* – logička vrednost koja određuje oblik funkcije, ako je *cumulative*=TRUE, *BINOM.DIST* daje kumulativnu raspodelu funkcije, ukoliko je *cumulative*= FALSE, rezultat je verovatnoća da će događaj ostvariti zadati broj puta.

5.1.3. POASONOVA RASPODELA

Poasonova (Simeon Denis Poisson 1781-1840) raspodela definiše verovatnoće događaja u jedinici vremena ili prostora, kada je verovatnoća p mala, a broj mogućnosti veliki. Takvi događaji se nazivaju i **retki događaji**.

Može da se koristi kao:

- model za broj telefonskih poziva u jedinici vremena,
- broj osoba u nekom redu,
- broj autobusa koji dolaze na stanicu u jedinici vremena,
- broj radioaktivnih raspada nekog materijala u jedinici vremena,
- broj retkih bolesti u jednoj državi i sl.

Ovakvi događaji su međusobno nezavisni. U teorijskom smislu može da ih bude i beskonačno mnogo, za razliku od binomne raspodele koja važi samo za konačno mnogo događaja.

Poasonova raspodela

Slučajna promenljiva X slučajna promenljiva za koju važi

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \lambda > 0$$

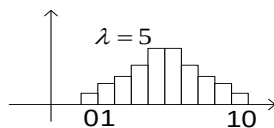
$$\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

ima Poasonov zakon raspodele,

gde je k broj realizovanih događaja u jedinici vremena ili prostora, a λ parametar raspodele i predstavlja prosečan broj ovih događaja.

Za ovu raspodelu koristi se oznaka $X : P(\lambda)$,

Poasonov zakon raspodele može se prikazati grafikom koji nazivamo **histogram**.



Osnove pravougaonika su centrirane u tačkama $k = 0, 1, \dots, 10$, a njihova visina jednaka je $P(X = k)$. Ukupna površina svih pravougaonika je 1. Na slici je prikazano samo nekoliko, jer je visina preostalih pravougaonika zanemarljivo mala.

Primer:

Sekretarica firme prima u proseku 5 telefonskih poziva u 10 minuta. Kolika je verovatnoća da će u periodu od 10 min

a). primiti tačno 1 poziv?

b) neće biti poziva?

Broj poziva je slučajna promenljiva X koja ima Poasonovu raspodelu sa parametrom $\lambda = 5$

a) $P(X = 1) = e^{-5} \frac{5^1}{1!} = 0,0336$,

b) $P(X = 0) = e^{-5} \frac{5^0}{0!} = 0,0067$.

Matematičko očekivanje, disperzija i standardno odstupanje diskretne slučajne promenljive date Poasonovim zakonom raspodele iznose:

$$E(X) = \lambda,$$

$$D(X) = \lambda,$$

$$\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\lambda}.$$

Za Poasonovu raspodelu u Excelu koristi se funkcija POISSON.DIST

Sintaksa za ovu funkciju je POISSON.DIST(x , mean, cumulative).

5.1.4. APROKSIMACIJE BINOMNE RASPODELE POASONOVOM

Poasonova raspodela je nastala kao granični slučaj binomne raspodele. Naime, kada u binomnoj raspodeli sa parametrima n i p , proizvod $np \rightarrow \lambda$, ako je n veliko, a p malo, tada binomna raspodela teži Poasonovoj raspodeli sa parametrom λ .

U praksi zamena se vrši ako je $np \leq 10$.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, k = 1, 2, \dots, \lambda = np \leq 10$$

Dokaz:

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{n-k} = \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k k!} (np)^k (1-p)^{n-k} = \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) (np)^k (1-p)^{\frac{np}{p}} (1-p)^{-k} \\ &\approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \lambda = np \leq 10 \end{aligned}$$

Primer:

Verovatnoća proizvodnje defektnog proizvoda je 0,003. Naći verovatnoću da će od 1000 slučajno izabranih proizvoda biti:

- a) 4 defektna,
- b) bar 1 defektan,
- c) ne više od 2 defektna.

Slučajna promenljiva X je broj defektnih elemenata i ima binomnu raspodelu.

Kako je $n = 1000$, $p = 0,003$; $q = 1 - p = 0,997$, $X : B(1000; 0,003)$.

$$a) P(X = 4) = \binom{1000}{4} 0,003^4 \cdot 0,997^{996}.$$

Kako je $np = 3 = \lambda < 10$, binomna raspodela se može aproksimirati Poasonovom raspodelom za $\lambda = 3$.

$$P(X = 4) \approx e^{-3} \cdot \frac{3^4}{4!} \approx 0,1680.$$

$$b) P(X \geq 1) = P(1 \leq X \leq 1000) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) \approx$$

$$1 - e^{-3} \cdot \frac{3^0}{0!} = 1 - \frac{1}{e^3} \approx 1 - 0,04978 = 0,95022$$

$$c) P(0 \leq X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$\approx e^{-3} \cdot \frac{3^0}{0!} + e^{-3} \cdot \frac{3^1}{1!} + e^{-3} \cdot \frac{3^2}{2!} \approx 0,423190$$

5.2. RASPODELE NEPREKIDNE SLUČAJNE PROMENLJIVE

5.2.1. NORMALNA – GAUSOVA RASPODELA

Normalna raspodela zauzima centralno mesto u teoriji verovatnoće i njenim primenama. Naziv nosi po nemačkom naučniku Karlu Friederichu Gaussu (1777-1855), mada je normalnu raspodelu je prvi proučavao francuski matematičar i sveštenik Abraham de Moivre (1667-1754).

Osnovna Gausova zasluga je otkriće da se slučajne greške različitih merenja mogu predstaviti istom raspodelom. Promenljive koje nastaju iz ponovljenih merenja jednog istog objekta istim aparatom i sa istom preciznošću ne daju uvek isti rezultat. Na rezultate merenja utiču slučajni faktori (šum merenja) koji se ne mogu kontrolisati i koji variraju od jednog merenja do drugog, ali dobijene greške imaju istu raspodelu.

Slučajne promenljive koje imaju normalnu raspodelu nastaju kao rezultat velikog broja uticaja, pri čemu je efekat pojedinačnog uticaja neznatan u odnosu na celokupnu sumu efekata svih pojedinačnih uticaja.

Mnoge slučajne promenljive, kao na primer, težina novorođenčadi, visina muškaraca istog uzrasta i sl imaju takođe normalnu raspodelu, tako da se veliki broj statističkih problema može rešiti samo uz pretpostavku da osnovni skup podataka ima normalnu raspodelu. Takođe, ako neka promenljiva, bilo da je diskretna ili neprekidna, nema normalnu raspodelu njena raspodela se može uspešno aproksimirati normalnom.

Normalna ili Gausova raspodela.

Neka je X neprekidna slučajna promenljiva.

funkcija gustine je

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

funkcija raspodele je

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad \mu, \sigma^2 \in \mathbb{R},$$

Za normalnu raspodelu koristi se oznaka $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Matematičko očekivanje i disperzija slučajne promenljive koja ima normalnu raspodelu:

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\sigma^2 = D(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Normalna raspodela je raspodela sa centrom u μ i standardnim odstupanjem σ .

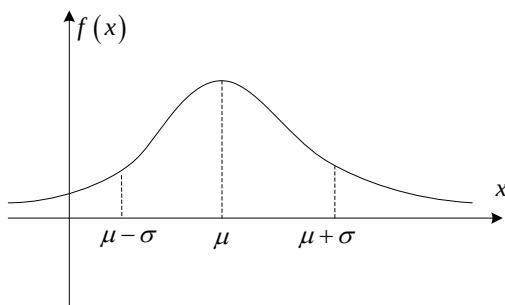
Funkcija gustine verovatnoće $f(x)$ zadovoljava uslove:

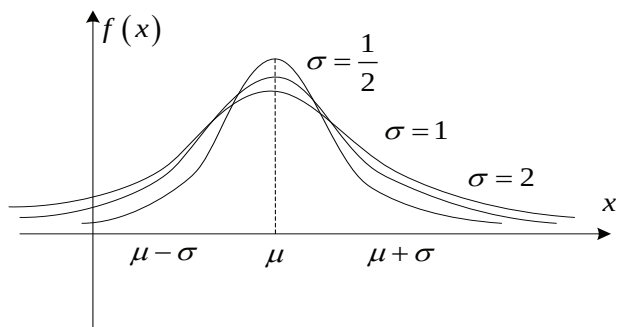
1. Funkcija $f(x)$ je definisana za sve realne brojeve,
2. $f(x) \geq 0$,
3. Krivagustine je simetrična u odnosu na pravu $x = \mu$, tj. $f(x - \mu) = f(-(x - \mu))$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$,
5. U tački $x = \mu$ funkcija dostiže maksimum $f_{\max}(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

6. Prevojne tačke su tačke sa apscisama $\mu \pm \sigma$.

Grafik funkcije gustine prikazan je na sledećoj slici:

Ukoliko je standardno odstupanje manje, utoliko je veća koncentracija verovatnoća oko očekivane, srednje vrednosti, slučajne promenljive X.





Definicija:

Ako je $\mu = 0$, a $\sigma = 1$, tada se normalna raspodela zove **standardna normalna raspodela**.

Funkcija gustine je oblika

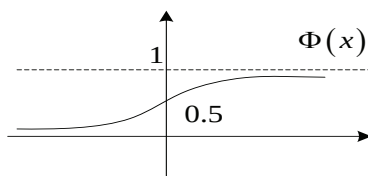
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

odnosno **funkcija raspodele**

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad \mu, \sigma^2 \in \mathbb{R}.$$

Oznaka za standardnu normalnu raspodelu je $N(0,1)$.

Grafik funkcije raspodele prikazan je na sledećoj slici:



Funkcija raspodele $\Phi(x)$ ima sledeće osobine:

1. $\Phi(0) = 0,5$
2. $\Phi(+\infty) = 1, \Phi(-\infty) = 0$
3. $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$
4. $P(a < X < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$

Funkcija gustine nema primitivnu funkciju u skupu elementarnih funkcija, pa se vrednosti funkcije raspodele, koja je definisana nesvojstvenim integralom funkcije gustine, mogu odrediti samo numeričkom integracijom.

Za praktična izračunavanja vrednosti funkcije raspodele isključivo se koristi tablica približnih vrednosti funkcije $\Phi(x)$ koja se nalazi i na kraju udžbenika.

Ako slučajna promenljiva X ima normalnu raspodelu $N(\mu, \sigma^2)$, onda slučajna promenljiva Z ima standardnu normalnu raspodelu $N(0,1)$, ako je $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$.

Neka slučajna promenljiva X ima normalnu raspodelu $N(\mu, \sigma^2)$. Iz tablica za standardnu normalnu raspodelu nalazimo da je

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0,68$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0,955$$

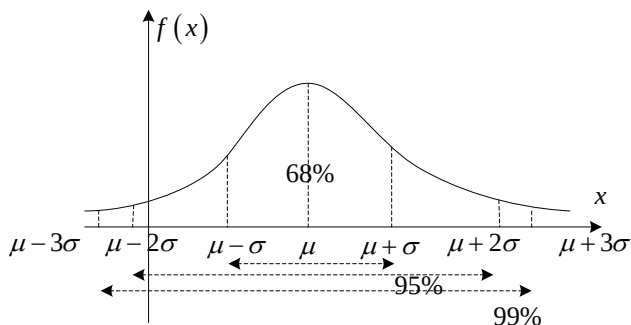
$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0,997$$

Ovo znači da možemo očekivati da će veliki broj vrednosti slučajne promenljive X biti raspodeljen na sledeći način:

Oko 68% svih vrednosti naći će u intervalu $\mu - \sigma, \mu + \sigma$,

Oko 95% svih vrednosti naći će u intervalu $\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma$,

Oko 99% svih vrednosti naći će u intervalu $\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma$.



Poslednji rezultat znači da će se skoro sve vrednosti slučajne promenljive naći u intervalu $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$. Ova osobina normalne raspodele poznata je pod nazivom pravilom **3 sigme**. U ovom intervalu skoncentrisana je skoro sva 'masa' verovatnoća.

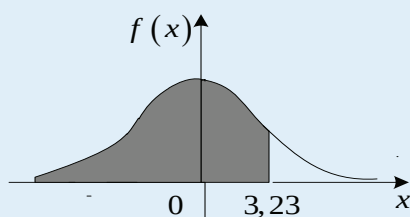
Tako na primer, ako na pakovanju nekog proizvoda piše da je težina $1kg \pm 10g$, to

znači da je težina proizvoda normalna slučajna promenljiva sa $\mu = 1kg$ i $\sigma = \frac{10}{3}g$. Pravilo tri sigme omogućava da se otkriju grube greške merenja. Podaci koji nisu u opsegu $\mu \pm 3\sigma$ su najverovatnije pogrešni.

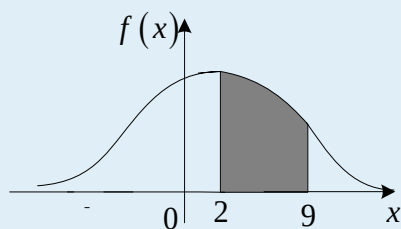
Primer:

Izračunati sledeće verovatnoće ako je slučajna promenljiva ima standardnu normalnu raspodelu $N(0,1)$

a) $P(X \leq 3,23) = \Phi(3,23) = 0,999381$



$$b) P(2 \leq X \leq 9) = \Phi(9) - \Phi(2) = 1 - 0,9772 = 0,0228$$



Primer:

Ako slučajna promenljiva X ima normalnu raspodelu $N(6, 4)$, odnosno $\mu = 6, \sigma^2 = 4$, dobijamo

$$a) P(X < 8) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{8 - 6}{2}\right) = P(Z < 1) = \Phi(1) = 0,8413$$

$$b) P(X < 3) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{3 - 6}{2}\right) = P(Z < -1,5) = \Phi(-1,5) = 0,0668$$

Primer:

Izračunati $P(2 \leq X \leq 9)$ ako je $N(4, 1)$.

$$P(2 \leq X \leq 9) = P\left(\frac{2 - 4}{1} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{9 - 4}{1}\right) = P(-2 \leq Z \leq 5) = \Phi(5) - \Phi(-2) = 0,9772$$

Primer:

Težina određene grupe dece u jednom obdaništu normalno je raspoređena sa matematičkim očekivanjem 15kg i standardnim odstupanjem od 3kg. Kolika je verovatnoća da će slučajno izabrano dete imati težinu između 11kg i 17kg.

Slučajna promenljiva X -težina dece ima normalnu raspodelu, i tada je

$$P(11 \leq X \leq 17) = P\left(\frac{11 - 15}{3} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{17 - 15}{3}\right) = P(-1,33 \leq Z \leq 0,66) = \Phi(0,66) - \Phi(-1,33) = 0,6539$$

Primer:

Čekanja lifta je slučajna promenljiva srednje vrednosti 1,5 min sa standardnim odstupanjem od 20sec.

a) Skicirati grafik krive gustine radi ilustracije zadatih podataka

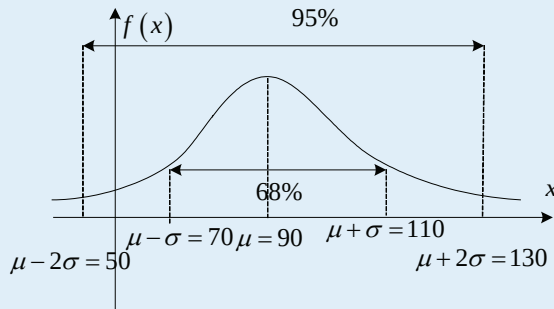
b) Naći verovatnoću da neko čeka lift duže od 2min i 10sec

c) Naći verovatnoću da neko čeka lift manje od 1min i 10sec

d) 200 ljudi je posmatrano u odnosu na vreme čekanja lifta.

Izračunaj broj ljudi koji su lift čekali manje od 50sec

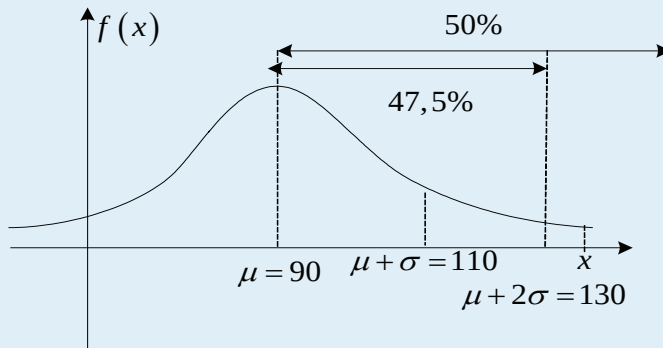
a) U pitanju je normalna raspodela $\mu = 1,5 \text{ min} = 90 \text{ sec}$, $\sigma = 20 \text{ sec}$, $N(90, 400)$



b) $\mu = 1,5 \text{ min} = 90 \text{ sec}$, $\sigma = 20 \text{ sec}$, $t = 130 \text{ sec}$

$$P(X > 130) = 1 - P(X < 130) = 1 - P\left(X_1 < \frac{130 - 90}{20}\right) =$$

$$1 - P(X_1 < 2) = 0,0228$$

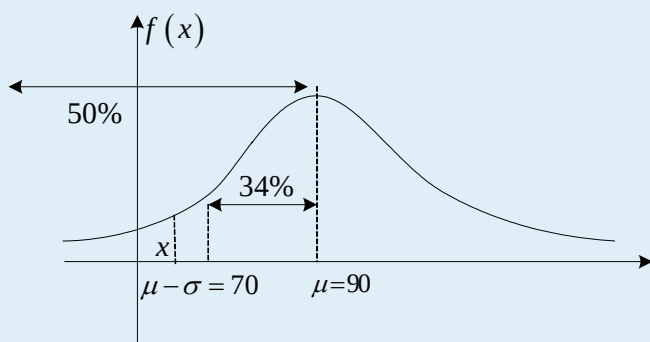


$$50\% - 47,5\% = 2,5\%$$

ili
ato je 0,025

$$\mu = 1,5 \text{ min} = 90 \text{ sec}, \quad \sigma = 20 \text{ sec}, \quad t = 70 \text{ sec}$$

$$c) P(X < 70) = P(X < 70) = P\left(X_1 < \frac{70 - 90}{20}\right) = P(X_1 < -1) = 0,16$$

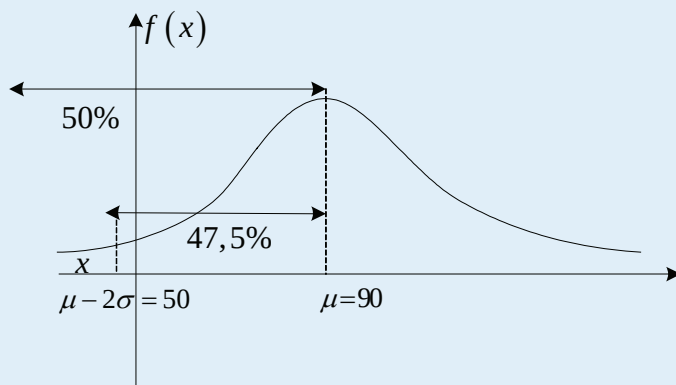


$$50\% - 34\% = 16\%$$

ili
ato je 0,16

$$\mu = 1,5 \text{ min} = 90 \text{ sec}, \quad \sigma = 20 \text{ sec}, \quad t = 50 \text{ sec}$$

$$d) P(X < 50) = P(X < 50) = P\left(Z < \frac{50 - 90}{20}\right) = P(Z < -2) = 0,025$$



$$50\% - 47,5\% = 2,5\%$$

$$\text{broj ljudi} \quad 200 * 0,025 = 5$$

ili
ato je 0,025

U Excel-u se za normalnu raspodelu koristi funkcija NORM.DIST koja ima više različitih oblika. Osnovna je

NORM.DIST(x,mean, standard_dev,cumulative)

gde je

- x – vrednost za koju se izračunava funkcija
- *mean* – aritmetička sredina raspodele
- *standard_dev* -standarno odstupanje
- *cumulative*- logička vrednost koja određuje oblik funkcije True ili False

5.2.2. APROKSIMACIJE BINOMNE RASPODELE NORMALNOM

Ako slučajna promenljiva X ima binomnu raspodelu sa parametrima n i p , kod koje je $np \geq 10$, bez velike greške, aproksimacija se vrši normalnom raspodelom i to:

$$a) P(X = k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \Phi(Z), \text{ gde je } Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}},$$

$$b) P(a \leq X \leq b) \approx P\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}} \leq Z \leq \frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Primer:

Naći verovatnoću dobijanja od 30 do 60 glava u 100 bacanja novčića.

$$n = 100, \quad p = P(A) = 0,5, \quad q = 1 - p = P(\bar{A}) = 0,5$$

$$X : B(100; 0,5)$$

$$P(30 \leq X \leq 60) = \sum_{k=30}^{60} \binom{100}{k} \cdot 0,5^k \cdot 0,5^{100-k}$$

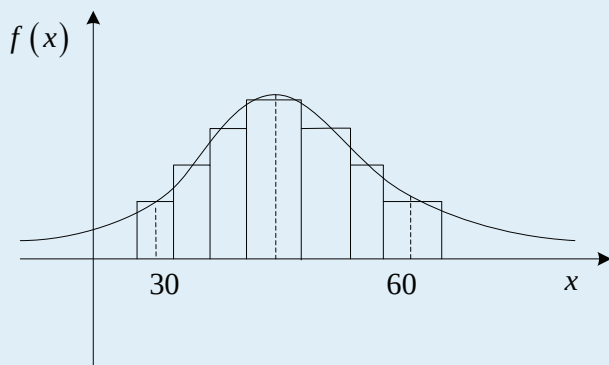
Kako je $np = 50 > 10$, aproksimacija može da se izvrši normalnom raspodelom, gde je:

$$\mu = np = 50, \quad \sigma = \sqrt{npq} = 5, \quad N(50, 25)$$

$$P(30 \leq X \leq 60) = P\left(\frac{30 - 50}{\sqrt{100 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} \leq \frac{X - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{60 - 50}{\sqrt{100 \cdot 0,5 \cdot 0,5}}\right) = P(-4 \leq Z \leq 2) =$$

$$\Phi(2) - \Phi(-4) = 0,9772$$

Na narednoj slici se vidi kako kriva normalne raspodele aproksimira histogram koji je dobijen na osnovu podataka binomne raspodele.



Primer:

Verovatnoća proizvodnje defektnog proizvoda je 0,05. Naći verovatnoću da između 500 slučajno izabranih proizvoda bude od 5 do 15 defektnih proizvoda.

Neka je A događaj da je proizvod defektan.

$$n = 500, \quad p = P(A) = 0,05, \quad q = P(\bar{A}) = 0,95$$

$$X : B(500; 0,05)$$

$$P(5 \leq X \leq 15) = \sum_{k=5}^{15} \binom{500}{k} \cdot 0,05^k \cdot 0,95^{500-k}$$

Kako je $np = 25 > 10$, može da se vrši aproksimacija normalnom raspedlom.

$$P(5 \leq X \leq 15) = P\left(\frac{5-25}{\sqrt{500 \cdot 0,05 \cdot 0,95}} \leq \frac{X-np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{15-25}{\sqrt{500 \cdot 0,05 \cdot 0,95}}\right) =$$

$$P(-4,1 \leq Z \leq -2,05) = \Phi(-2,05) - \Phi(-4,1) = 0,202 - 0 = 0,202$$

5.2.3. χ^2 RASPODELA

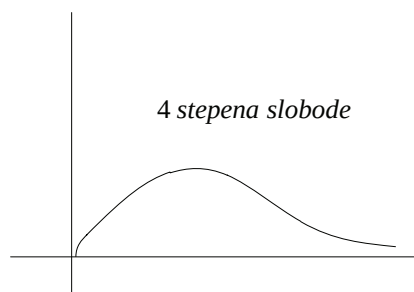
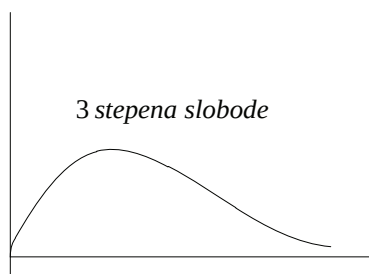
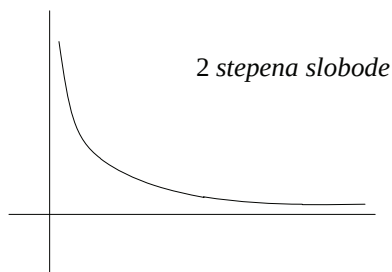
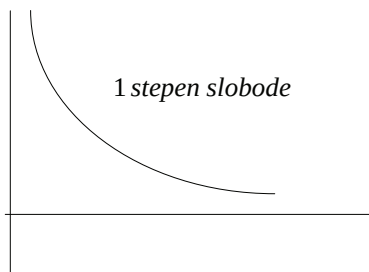
Pretpostavimo da slučajna promenljiva X ima standardnu normalnu raspodelu $(0,1)$. Uočimo slučajnu promenljivu $Y = X^2$. Ova promenljiva je pozitivna i njena funkcija raspodele drugačije izgleda nego kod normalne raspodele. Naziva se χ^2 , **hi-kvadrat** slučajna promenljiva. Za označavanje koristi se grčko slovo χ . I za slučajnu promenljivu i za raspodelu koristi se isti naziv i oznaka.

Neka su $X_1, X_2, \dots, X_n$ neprekidne slučajne promenljive sa standardnom normalnom raspodelom $N(0,1)$.

Zbir njihovih kvadrata $H = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2$ definiše slučajnu promenljivu koja ima χ^2 raspodelu.

Ova slučajna promenljiva zavisi od n parametara i zato kažemo da slučajna promenljiva ima raspodelu sa **n stepena slobode**. Stepen slobode je broj linearno nezavisnih slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \dots, X_n$ u izrazu H . Ako bi znali bar jednu vezu između promenljivih, onda bi slučajna promenljiva H imala $n-1$ stepen slobode.

Funkcija gustine kod χ^2 raspodele zavisi samo od stepena slobode i ona je Ojerova gama funkcija, $\Gamma(x)$, što prevazilazi elementarna znanja ovog kursa.



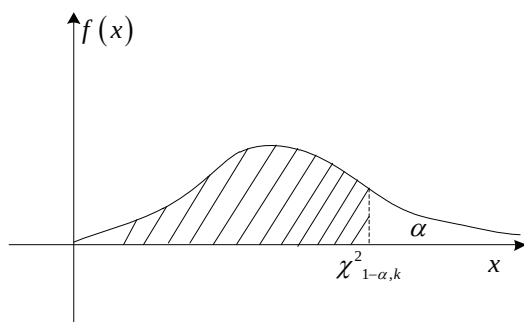
Prethodni grafici predstavljaju funkcije gustine za četiri vrednosti stepena slobode.

Osobine funkcije gustine:

1. Funkcija je definisana samo za pozitivne vrednosti nezavisno promenljive.
2. Za negativne vrednosti, uzima se da je vrednost funkcije gustine 0.
3. Kada je stepen slobode mali, funkcija gustine je asimetrična, i kako raste grafik funkcije gustine postaje sve više i više simetričan.
4. Kada je n dovoljno veliki broj, raspodela se asimptotski približava normalnoj raspodeli.

Za izračunavanje vrednosti χ^2 raspodele koriste se tablice koje za dati stepen slobode, obično 1,2,...,30 i dati broj α , verovatnoću, obično 0,01; 0,05 daju vrednosti

$\chi_{k,\alpha}^2$, takve da je $P(\chi^2 < \chi_{k,\alpha}^2) = 1 - \alpha$.



Grafik predstavlja funkciju gustine, a verovatnoća predstavlja osenčenu površinu sa slike.

Imajući u vidu da je matematičko očekivanje je $E(H) = n$, a disperzija $\sigma^2(H) = 2n$, za $n \geq 30$ χ^2 raspodela se aproksimira normalnom raspodelom $N(n, 2n)$.

χ^2 raspodela je značajna u statističkom ocenjivanju. Koristi se za određivanje intervala poverenja nepoznate disperzije, za testiranje saglasnosti disperzija, a posebno u slučajevima korišćenja ne parametarskih testova.

Primer:

Za $k=9$ i verovatnoću 0,95 iz tablica se dobija da je $\chi_{9,0,95}^2 = 16,9$.

To znači da kod uzorka veličine 10, odnosno $k = n - 1 = 10 - 1 = 9$ stepena slobode, važi

$$P(\chi^2 < 16,9) = 0,95$$

Ako slučajna promenljiva X ima normalnu raspodelu $N(\mu, \sigma)$, tada je $H = \left(\frac{X - \mu}{\sigma} \right)^2$, slučajna promenljiva sa χ^2 raspodelom.

Ako slučajne promenljive imaju normalnu raspodelu $N(\mu, \sigma)$, tada je:

a) $H = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2$ slučajna promenljiva sa χ^2 raspodelom sa n stepena slobode.

b) $H = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2$, gde je $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ aritmetička sredina, slučajna pro-

menljiva sa χ^2 raspodelom sa $n-1$ stepenom slobode.

U Excelu postoji funkcija *CHISQ.DIST* koja izračunava vrednosti χ^2 rapodele.

Sintaksa je *CHISQ.DIST(x, deg_freedom, cumulative)*, gde *deg_freedom* predstavlja definisani stepen slobode.

5.2.4. STUDENTOVA RASPODELA

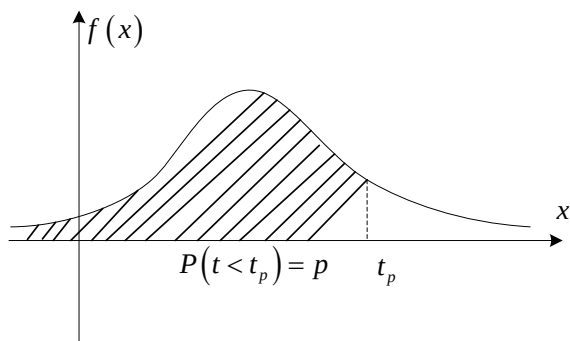
Neka su date, slučajna promenljiva X sa normalnom raspodelom $N(\mu, \sigma^2)$ i slučajna promenljiva H sa χ^2 raspodelom sa n stepena slobode.

Slučajna promenljiva

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{H}{n}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = ,$$

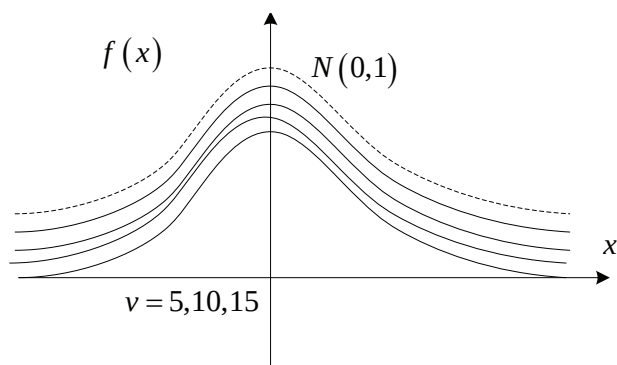
ima **studentovu** ili ***t*-raspodelu**, sa ***n* stepena slobode**.

Za određeni stepen slobode n i verovatnoću p na osnovu tablica se izračunava pozitivna vrednost t_p , tako da je $P(T < t_p) = p$.



Grafik predstavlja funkciju gustine, a osenčena površina verovatnoću p za koju važi da je $P(t < t_p) = p$.

Za veliko n , odnosno za $n \geq 30$ t -raspodela se aproksimira sa normalnom. Što je veći broj stepena slobode to kriva gustine sve više se približava normalnoj raspodeli.



Funkcija gustine kod Studentove t -raspodele je gama funkcija, $\Gamma(x)$, što prevaziilazi elementarna znanja ovog kursa.

Studentova raspodela ima veliki značaj u statistici. Koristi se u slučajevima kada je uzorak mali $n < 30$, za ocenu parametara, definisanju intervala poverenja za ocenu srednjih vrednosti, za testiranje hipoteza o parametrima osnovnog skupa i sl.

Napomena: Ovu raspodelu otkrio je početkom dvadesetog veka Viliam Gosset (1908) koji je radio u pivari, pa je svoje radove izdavao pod pseudonimom student.

U Excelu postoji funkcija *T.DIST* koja izračunava verovatnoće Studentove raspodele. Postoji više oblika ove funkcije.

Sintaksa je *T.DIST*(*x*, *deg_freedom*, *cumulative*), gde *deg_freedom* predstavlja definisani stepen slobode.

Primer:

Za $n = 15$ i verovatnoću $0,99$, na osnovu tablice dobićemo

$$f_{14;0,99} = 2,62.$$

5.3. VAŽNI OBRASCI

Binomna raspodela

$$P(A) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Matematičko očekivanje, disperzija i standardno odstupanje za binomnu raspodelu

$$E(X) = np$$

$$D(X) = npq, \quad \sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{npq}$$

Funkcija raspodele za binomnu raspodelu

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sum_{k \leq x} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, & 0 \leq x < n \\ 1, & x \geq n \end{cases}$$

Poasonova raspodela

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Matematičko očekivanje, disperzija i standardno odstupanje za Poasonovu raspodelu

$$E(X) = \lambda$$

$$D(X) = \lambda, \quad \sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\lambda}$$

Aproksimacija binomne raspodele Poasonovom, ako je $\lambda = np \leq 10$

$$P(X = k) \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!},$$

Funkcija gustine kod normalne raspodele

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

Funkcija gustine kod standardne normalne raspodele

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Funkcija raspodele normalne raspodele

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Funkcija standardne normalne raspodele

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Matematičko očekivanje i disperzija za normalnu raspodelu

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\sigma^2 = D(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Aproksimacija binomne raspodele normalnom, ako je $np \geq 10$

$$P(X = k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \Phi(Z), \text{ gde je } Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}},$$

$$P(a \leq X \leq b) \approx P\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}} \leq Z \leq \frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

5.4. ZADACI

1. Kolika je verovatnoća da kad novčić bacamo 3 puta, 2 puta se pojavi grb?

Rešenje:

$$p = \frac{1}{2}; n = 3; k = 2; X; B\left(3; \frac{1}{2}\right)$$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$$

2. Cilj se gađa sa četiri metka. Naći zakon raspodele i funkciju raspodele slučajne promenljive X koja označava broj pogodaka, ako je u svakom gađanju verovatnoća pogotka cilja $\frac{1}{2}$.

Rešenje:

$$p_k = P(X = k) = \binom{4}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4-k}, k = 0, 1, 2, 3.$$

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{16} & \frac{4}{16} & \frac{6}{16} & \frac{4}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{16} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{5}{16} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{11}{16} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{15}{16} & 3 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

3. Učestalost krvne grupe O u nekoj populaciji je 40%. Uzet je uzorak od 10 osoba. Kolika je verovatnoća da u tom uzorku postoje 2 osobe sa krvnom grupom O?

Rešenje:

$$k = 2, n = 10, p = 0,4 \quad X : B(10; 0,4)$$

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} 0,4^2 \cdot 0,6^8 = 0,1209$$

4. Na osnovu rezultata gađanja zaključeno je da strelac sa verovatnoćom od 80% pogađa cilj. Ako izvrši tri gađanja, kolika je verovatnoća da će cilj biti pogođen

- a) nijedanput,
- b) jednom,
- c) bar jednom?

Rešenje:

Slučajna promenljiva X je broj pogodaka mete u 3 pokušaja. Zakon raspodele je:

$$p_k = P(X = k) = \binom{3}{k} \cdot 0,8^k \cdot 0,2^{3-k} \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,008 & 0,096 & 0,348 & 0,512 \end{pmatrix}$$

$$\text{a) } P(X = 0) = \binom{3}{0} \cdot 0,8^0 \cdot 0,2^{3-0} = 0,008,$$

$$\text{b) } P(X = 1) = \binom{3}{1} \cdot 0,8^1 \cdot 0,2^{3-1} = 0,096,$$

$$\text{c) } 1 - P(X = 0) = 1 - 0,008 = 0,992.$$

5. Kontrolor proverava proizvod jedne partije od n proizvoda koja sadrži 20% škarta i obustavlja proveru kada naide na škart. Ako je slučajna promenljiva X broj pregledanih proizvoda. Naci verovatnoća slučajne promenljive X .

Rešenje:

Provera se završava na k -tom proizvodu, ako je prvih $k-1$ proizvoda dobro, onda je n -ti škart.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{n-k} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^k$$

6. U kutiji se nalaze dve bele i šest crnih kuglica. Izvlačimo 5 puta po jednu kuglicu sa vraćanjem. Neka je X slučajna promenljiva predstavlja broj pojavljivanja crne kuglice u pet izvlačenja.

a) Naci zakon raspodele.

b) Kolika je verovatnoća da će bela kuglica biti izvučena bar 3 puta?

Rešenje:

$$a) p_k = P(X = k) = \binom{5}{k} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{5-k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Zakon raspodele je:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{243}{1024} & \frac{405}{1024} & \frac{270}{1024} & \frac{90}{1024} & \frac{15}{1024} & \frac{1}{1024} \end{pmatrix}$$

$$b) P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = \sum_{k=3}^5 \binom{5}{k} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{5-k} = \frac{53}{512}$$

7. Naci verovatnoću da porodica sa četvoro dece ima

a) najmanje jednog dečaka,

b) najmanje jednog dečaka i najmanje jednu devojčicu

Rešenje:

Neka je X slučajna promenljiva koja predstavlja broj dečaka.

$$a) P(X = k) = \binom{4}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{4-k}, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$P = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{15}{16}.$$

Do istog rezultata se moglo doći korišćenjem verovatnoće suprotnog događaja, da nema samo dečaka

$$P = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{15}{16}$$

b) Korišćenjem suprotne verovatnoće, da nema samo dečaka i nema samo devojčica dobijamo

$$P = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{7}{8}$$

8. Utvrđeno je da proizvoda pripada prvoj klasi, a proizvoda pripada drugoj klasi. Odrediti raspodelu verovatnoća 4 slučajno izabranih proizvoda koji pripadaju prvoj klasi, zatim naći matematičko očekivanje i disperziju slučajne promenljive.

Rešenje:

$$P(X = k) = \binom{4}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{4-k}, k = 0, 1, 2, 3, 4$$

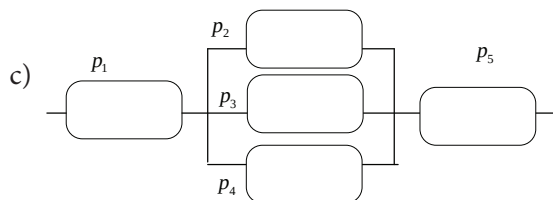
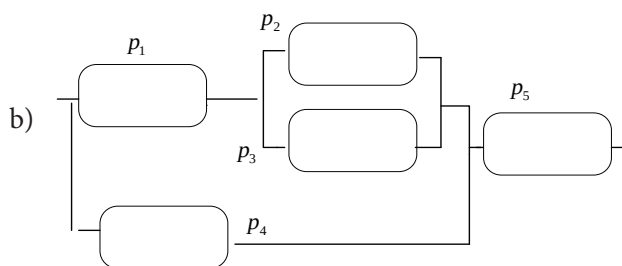
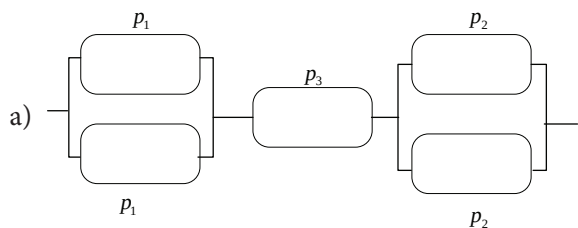
$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{81} & \frac{8}{81} & \frac{24}{81} & \frac{32}{81} & \frac{16}{81} \end{pmatrix} \quad X^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 & 16 \\ \frac{1}{81} & \frac{8}{81} & \frac{24}{81} & \frac{32}{81} & \frac{16}{81} \end{pmatrix}$$

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{81} + 1 \cdot \frac{8}{81} + 2 \cdot \frac{24}{81} + 3 \cdot \frac{32}{81} + 4 \cdot \frac{16}{81} = \frac{216}{81}$$

$$E(X^2) = 0 \cdot \frac{1}{81} + 1 \cdot \frac{8}{81} + 4 \cdot \frac{24}{81} + 9 \cdot \frac{32}{81} + 16 \cdot \frac{16}{81} = \frac{648}{81}$$

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{648}{81} - \left(\frac{216}{81}\right)^2 = 0,89$$

9. Tehnički sistem se sastoji od blokova povezanih kao na datim slikama. Oni ispravno rade sa verovatnoćama $p_i, i = 1, 5$. Naći verovatnoću da će sistem ispravno raditi.



Rešenje:

$$a) P = (2p_1 - p_1^2) \cdot p_3 \cdot (2p_2 - p_2^2)$$

$$b) P = (p_1(p_2 + p_3) + p_4) p_5$$

$$c) P = p_1(p_2 + p_3 + p_4) p_5$$

10. Centrala gradskog taksija prima u proseku 12 poziva na sat. Kolika je verovatnoća da u periodu od 10 minuta neće biti poziva?

Rešenje:

U pitanju je Poasonova raspodela.

Prosečno se prima 12 poziva na sat, a to je 2 poziva u 10 minuta, znači $\lambda = 2$

$$P(X = 0) = e^{-2} \cdot \frac{2^0}{0!} = e^{-2} = 0,135.$$

11. Servis za popravku televizora pozivan je u proseku 6 puta u toku jednog sata. Kolika je verovatnoća da će tokom određenog sata servis biti pozvan

- a) tačno 5 puta
- b) bar jedanput.

Rešenje:

U pitanju je Poasonova raspodela sa parametrom $\lambda = 6$

a) $P(X = 5) = e^{-6} \frac{6^5}{5!} = 0,1606.$

b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-6} \frac{6^0}{0!} = 0,9975.$

12. Telefonska sekretarica dobija prosečno 90 poziva na čas. Ukoliko je linija bila u prekidu 1 minut, kolika je verovatnoća da je za to vreme bilo najviše 2 poziva?

Rešenje:

Prosečno se dobija 90 poziva na čas, znači 1,5 poziva u minuti.

U pitanju je Poasonova raspodela sa parametrom $\lambda = 1,5$ i tražena verovatnoća je

$$P(0 \leq X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = e^{-1,5} \left(1 + 1,5 + \frac{1,5^2}{2} \right) = 0,8088.$$

13. Partija proizvoda sadrži 5% škartova. Uzima se slučajni uzorak od 60 proizvoda. Izračunati verovatnoću da se u uzorku ne pojavi nijedan škart.

Rešenje:

U pitanju je Binomna raspodela sa $n = 60$; $p = 0,05$; $q = 0,95$.

$$P(X = 0) = \binom{60}{0} (0,05)^0 (0,95)^{60} = 0,0460$$

Aproksimacija može da se izvrši Poasonovom raspodelom, jer je $np = 3 = \lambda$

$$P(X = 0) = e^{-3} \cdot \frac{3^0}{0!} \approx 0,04979.$$

14. Aparat se sastoji od 100 delova. Verovatnoća da jedan deo otkáže u toku jedne godine je 0,01. Kolika je verovatnoća da za godinu dana otkážu:

- a) 2 dela,
- b) bar 2 dela ?

Rešenje:

U pitanju je Binomna raspodela sa $n = 100$; $p = 0,01$; $q = 0,99$. Kako je $np = 1 = \lambda$, aproksimaciju vršimo Poasonovom raspodelom.

a) $P(X = 2) = e^{-1} \cdot \frac{1^2}{2!} \approx 0,184$.

b) $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) \approx 0,264$.

15. Ako je u proizvodnji izvesnih artikala 2% neispravnih, naći verovatnoću da se u uzorku od 100 artikala nađu

- a) tri neispravna
- b) najmanje 3 neispravna

Rešenje:

$$\lambda = 100 \cdot 0,02 = 2$$

a) $P = 0,18$

b) $P = 0,325$

16. U tabeli je dat broj nesrećnih slučajeva u fabrici u toku od 200 dana.

Broj nesreća	0	1	2	3	4	5	6
Broj dana	130	51	12	4	2	1	0

Izračunati srednju vrednost nesrećnih slučajeva dnevno, a zatim Poasonovom raspodelom izračunati verovatnoću da se jednog dana dogode 3 ili više nesreća

Rešenje:

$$\bar{X} = \frac{\sum_i x_i f_i}{\sum_i f_i} \approx E(X) = \lambda$$

$$\bar{X} = \frac{1}{200}(1 \cdot 51 + 2 \cdot 12 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1) = 0,5$$

$$\lambda = 0,5$$

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = 0,01263 + 0,00158 + 0,00016 + 0,00001 + 0,00000 = 0,01439$$

17. Partija sadrži 1% škarta. Koliki treba da bude uzorak da verovatnoća pojave bar 1 škarta u uzorku ne bude manja od 0,95?

Rešenje:

$$1 - P(X = 0) \geq 0,95 \Rightarrow P(X = 0) \leq 0,05$$

$$0,99^n \leq 0,05$$

$$n \log 0,99 \leq \log 0,05 \Rightarrow n \geq \frac{\log 0,05}{\log 0,99} \approx 298$$

18. U Bernulijevom eksperimentu koji se ponavlja n puta verovatnoća pojave događaja je 0,01. Koliko je n da verovatnoća pojave eksperimenta u tih n ponavljanja bude veća od 0,5?

Rešenje:

$$1 - P(X = 0) > 0,5 \Rightarrow P(X = 0) \leq 0,5$$

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \leq 0,5$$

$$\binom{n}{0} 0,01^0 0,99^n \leq 0,5 \Rightarrow 0,99^n \leq 0,5$$

$$n \log 0,99 \leq \log 0,5 \Rightarrow n \geq 69$$

19. U periodu od 110 dana meren je broj vozila na raskrsnici u vremenu od 22h do 24h. Dobijeni su sledeći rezultati:

Broj vozila	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Broj dana	2	10	18	23	22	16	10	5	3	0	1

Izračunati srednju vrednost broja vozila dnevno, a zatim Poasonovom raspodelom izračunati verovatnoću da jednog dana kroz raskrsnicu prođe manje od 2 vozila.

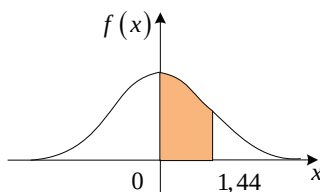
20. Slučajna promenljiva X ima standardnu normalnu raspodelu $N(0,1)$. Izračunati:

a) $P(0 < X < 1,44)$, b) $P(-0,73 < X < 0)$, c) $P(-1,37 < X < 2,01)$,

d) $P(0,65 < X < 1,26)$, e) $P(-1,79 < X < -0,54)$, f) $P(X > 1,13)$.

Rešenje:

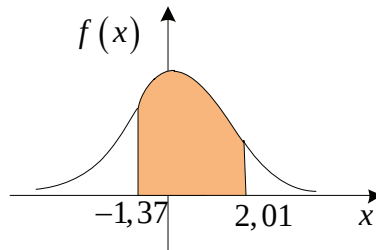
a) $P(0 < X < 1,44) = \Phi(1,44) - \Phi(0) = 0,9336 - 0,5 = 0,4336$



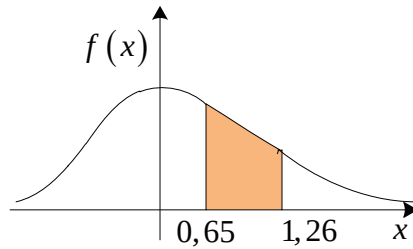
$$\text{b) } P(-0,73 < X < 0) = \Phi(0) - \Phi(-0,73) = 0,5 - 0,2327 = 0,2673$$

$$\text{c) } P(-1,37 < X < 2,01) = \Phi(2,01) - \Phi(-1,37) = 0,9778 - 0,0853 = 0,8925$$

U nekim tablicama nema vrednosti za vrednosti $x < 0$ i tada koristimo osobinu da je $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

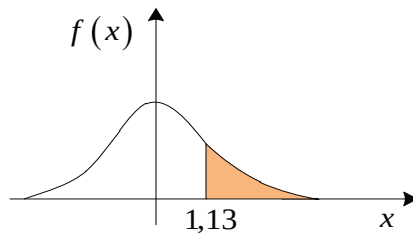


$$\text{d) } P(0,65 < X < 1,26) = \Phi(1,26) - \Phi(0,65) = 0,1540$$



$$\text{e) } P(-1,79 < X < -0,54) = \Phi(-0,54) - \Phi(-1,79) = 0,2579$$

$$\text{f) } P(X > 1,13) = 1 - P(X < 1,13) = 1 - \Phi(1,13) = 0,1292$$



21. Slučajna promenljiva ima raspodelu $N(3, 4)$. Izračunati $P(X > 9)$.

Rešenje:

Kako je $\mu = 3, \sigma = 2$

$$P(X > 9) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} > \frac{9 - \mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{X - 3}{2} > \frac{9 - 3}{2}\right) =$$

$$P(Z > 3) = 1 - P(Z < 3) = 1 - \Phi(3) = 1 - 0,9986 = 0,0014$$

22. Ako je slučajna promenljiva X ima normalnu raspodelu i $E(X) = 6$, a $D(X) = 4$, naći $P(2 \leq X \leq 16)$.

Rešenje:

$$N(6, 4)$$

$$P(2 \leq X \leq 16) = P\left(\frac{2 - 6}{2} \leq \frac{X - 6}{2} \leq \frac{16 - 6}{2}\right) = P(-2 \leq Z \leq 5) = \Phi(5) - \Phi(-2) \\ = 1 - 0,0228 = 0,9772$$

23. Neka je $X : N(7, 25)$. Odrediti: a) $P(X \leq 12)$, b) $P(-1 \leq X \leq 9)$,

c) $P(X \leq -2)$, d) $P(X \geq -1)$, e) naći x tako da je $P(X \leq x) = 0,85$, f) naći x tako da je $P(X \leq x) = 0,2$.

Rešenje:

$$\text{a) } P(X \leq 12) = P\left(\frac{X - 7}{5} \leq \frac{12 - 7}{5}\right) = P(Z \leq 1) = \Phi(1) = 0,8413$$

$$\text{b) } P(-1 \leq X \leq 9) = P\left(\frac{-1 - 7}{5} \leq \frac{X - 7}{5} \leq \frac{9 - 7}{5}\right) = P(-1,6 \leq Z \leq 0,4) =$$

$$\Phi(0,4) - \Phi(-1,6) = 0,6006$$

$$c) P(X \leq -2) = P\left(\frac{X-7}{5} \leq \frac{-2-7}{5}\right) = P(Z \leq -1,8) = \Phi(-1,8) = 0,0359 ,$$

$$d) P(X \geq -1) = P\left(\frac{X-7}{5} \geq \frac{-1-7}{5}\right) = P(X \geq -1,6) = \Phi(1,6) = 0,9452 ,$$

$$e) P\left(\frac{X-7}{5} \leq \frac{x-7}{5}\right) = P\left(Z \leq \frac{x-7}{5}\right) = \Phi\left(\frac{x-7}{5}\right) = \Phi(z) = 0,85 , \text{ kako se}$$

ova vrednost ne nalazi u tablicama, treba uzeti najpribližniju,

a to je 0,8508 i njoj odgovara vrednost $z = 1,04$, pa je $x = 5z + 7 = 12,2$

$$f) P(X \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x-7}{5}\right) = 0,01 .$$

$$P(Z \leq z) = \Phi(z) = 0,2 \Rightarrow z = -2,05$$

$$x = 5z + 7 = -3,25$$

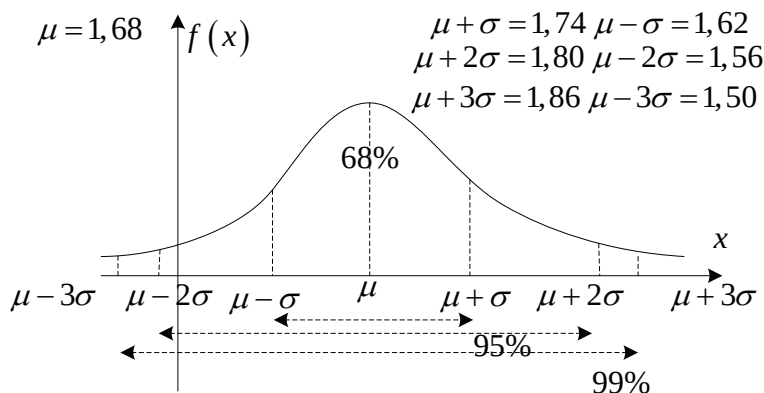
24. Visina kod žena je slučajna promenljiva koja ima normalnu raspodelu. Izmereno je 250 žena i dobijena srednja visina od 1,68m sa standardnim odstupanjem od 0,06m.

a) Nacrtati krivu ove raspodele

b) Naći verovatnoću da je proizvoljno izabrana žena visoka između 1,56m i 1,74m.

c) Naći broj žena čija je visina veća od 1,8m

Rešenje:



b) Oblast između 1,56 i 1,74m je $34\% + 47,5\% = 81,5\%$ ili 0,815

Odnosno:

$$P(1,56 < X < 1,74) = P\left(\frac{1,56-1,68}{0,06} < X < \frac{1,74-1,68}{0,06}\right) = P(-2 < X < 1) = \Phi(1) - \Phi(-2) = 0,8413 - 0,0228 = 0,8185$$

c) Oblast veća od 1,8m je $50\% - 47,5\% = 0,025$

$$P(X > 1,8) = P\left(X > \frac{1,8-1,68}{0,06}\right) = P(X > 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \Phi(2) = 0,0228$$

25. Pretpostavimo da debljina metalnih ploča ima normalnu raspodelu

$N(\mu = 0,25\text{cm}, \sigma = 0,028\text{cm})$. Naći procenat neispravnih ploča, ako se smatra da je ploča neispravna kad je njena debljina manja od 0,20cm ili veća od 0,28cm

Rešenje:

Ploča ispravna ako je

$$P(0,20 \leq X \leq 0,28) = P\left(\frac{0,20-0,25}{0,028} \leq \frac{X-0,25}{0,28} \leq \frac{0,28-0,25}{0,028}\right) =$$

$$P(-1,78 \leq Z \leq 1,071) = \Phi(1,071) - \Phi(-1,78) = 0,8202$$

$$P(X \geq 0,28) + P(X \leq 0,20) = 1 - 0,8202 = 0,1798.$$

Procenat je 17,9 %.

26. Pretpostavimo da telesne težine 800 studenata imaju normalnu raspodelu, sa srednjom težinom . Naći broj studenata čija je težina

a) između 65 i 75 kg,

b) veća od 72kg.

Rešenje:

$$X : N(66,25), Z : N(0,1)$$

$$a) P(65 < X < 75) = P\left(\frac{65-66}{5} < X < \frac{75-66}{5}\right) =$$

$$P(-0,2 < X < 1,8) = \Phi(1,8) - \Phi(-0,2) = 0,5434$$

$$n = 800 \cdot 0,5434 \approx 434$$

b)

$$P(X > 72) = P\left(X > \frac{72-66}{5}\right) = P(X > 1,2) = 1 - P(X < 1,2) = 1 - \Phi(1,2) = 0,1151$$

$$n = 800 \cdot 0,1151 = 92$$

27. Neka fabrika proizvodi kuglice nominalnog prečnika. Usled neprecizne izrade njen prečnik je slučajna promenljiva X , sa normalnom raspodelom, matematičkim očekivanjem m i odstupanjem $0,05\text{mm}$. Pri kontroli se odbacuju sve kuglice čiji prečnik odstupa od nominalnog za više od $0,1\text{mm}$. Koliki procenat kuglica će biti odbačen?

Rešenje:

$$N(0,5; 0,05^2)$$

Treba izračunati $P(|X - 5| > 0,1)$. Izračunaćemo suprotan događaj, tj.

$$P(|X - 5| \leq 0,1) = P(-0,1 \leq X - 5 \leq 0,1) = P\left(-\frac{0,1}{0,05} \leq \frac{X - 5}{0,05} \leq \frac{0,1}{0,05}\right) =$$

$$= P(-2 \leq Z \leq 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 0,9544$$

$$P(|X - 5| > 0,1) = 1 - 0,9544 = 0,0456 \approx 0,046.$$

Dakle biće odbačeno 4,6%.

28. Neka su vremena 'života' dva električna uređaja slučajne promenljive sa raspodelama $N(40, 36)$ i $N(45, 9)$ respektivno. Ako uređaj treba da radi bar 48 časova, koji od njih je bolje uzeti?

Rešenje:

$$P(X > 48) = P\left(\frac{X - 40}{6} > \frac{48 - 40}{6}\right) = P(Z > 1,33) = 1 - \Phi(1,33) \approx 1 - 0,9082 = 0,0918$$

$$P(X > 48) = P\left(\frac{X - 45}{3} > \frac{48 - 45}{3}\right) = P(Z > 1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0,8413 \approx 0,1587$$

Bolje je uzeti drugi uređaj.

29. Prečnik kuglica koje proizvodi fabrika je slučajna promenljiva X sa normalnom raspoделom $N(\mu = 1,5\text{cm}; \sigma = 0,04\text{cm})$.

a) Naći verovatnoću škarta pod uslovom da je propisana tolerancija prečnika kuglice $\pm 0,07$

b) Kolika tolerancija prečnika može da se garantuje sa verovatnoćom od 0,97?

Rešenje:

$$\text{a) } P(|X - 1,5| > 0,07) = 1 - P(|X - 1,5| < 0,07) = 0,08$$

$$\text{b) } P(|X - 1,5| < \varepsilon) = 0,97, \quad \varepsilon \approx 0,09$$

30. Vek trajanja električne lampe ima normalnu raspodelu $N(100, 25)$.

a) Naći verovatnoću da nova lampа istog tipа traje najmanje 105 časova.

b) Ako je jedna lampа već izdržala 90 časova, kolika je verovatnoća da će izdržati još 15 časova?

Rešenje:

$$\text{a) } P(X \geq 105) = 1 - P(X < 105) = 1 - P\left(Z < \frac{105 - 100}{5}\right) = 0,1587$$

b) U pitanju je uslovna verovatnoća

$$P(X \geq 105 | X \geq 90) = \frac{P(X \geq 105, X \geq 90)}{P(X \geq 90)} = \frac{P(X \geq 105)}{P(X \geq 90)} =$$

$$\frac{P\left(Z \geq \frac{105-100}{5}\right)}{P\left(Z \geq \frac{90-100}{5}\right)} = \frac{P(Z \geq 1)}{P(Z \geq -2)} = \frac{1 - P(Z < 1)}{1 - P(Z < -2)} = 0,1624$$

31. Broj mušterija subotom u frizerskom salonu ima približno normalnu raspodelu sa

$$\mu = 30 \text{ i } \sigma = 5.$$

Odrediti verovatnoću da će sledeće subote broj mušterija biti:

- a) veći od 45,
- b) manji od 25,
- c) najmanje 25, a najviše 40.

Rešenje:

$$\text{a) } P(X > 45) = P\left(\frac{X - 30}{5} > \frac{45 - 30}{5}\right) = P(Z > 3) = 1 - \Phi(3) = 0,0013$$

$$\text{b) } P(X < 20) = P\left(\frac{X - 30}{5} < \frac{20 - 30}{5}\right) = P(Z < -2) = \Phi(-2) = 0,0228$$

$$\text{c) } P(25 < X < 40) = P\left(\frac{25 - 30}{5} < \frac{X - 30}{5} < \frac{40 - 30}{5}\right) = 0,8185$$

32. Verovatnoća pogađanja u cilj je u svakom od 100 nezavisnih gađanja 0,8. Izračunati verovatnoću da će od 100 obavljenih gađanja biti:

- a) bar 80 pogodaka
- b) broj pogodaka biti između 40 i 90.

Rešenje:

$$n = 100, \quad p = 0,8; \quad q = 0,2; \quad X : B(100; 0,8)$$

$$P(X \geq 80) = P(80 \leq X \leq 100) = \sum_{k=80}^{100} \binom{100}{k} \cdot 0,8^k \cdot 0,2^{100-k}.$$

Kako je $np = 80 > 10$, vrši se aproksimacija normalnom raspodelom.

$$a) P(80 \leq X \leq 100) \approx P\left(\frac{80-80}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} \leq Z \leq \frac{100-80}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right) = 0,5$$

$$b) P(40 \leq X \leq 90) \approx P\left(\frac{40-80}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} \leq Z \leq \frac{90-80}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right) = 0,9938$$

33. Verovatnoća kvara uređaja je 0,03. U kom procentu se može očekivati da će se kod 1000 uređaja kvarovi pojaviti u ne manje od 20 i ne više od 40 slučajeva.

Rešenje:

$$n = 1000, \quad p = P(A) = 0,03, \quad q = P(\bar{A}) = 0,97 \quad X : B(1000; 0,03)$$

$$P(20 \leq X \leq 40) = \sum_{k=20}^{40} \binom{1000}{k} \cdot 0,03^k \cdot 0,997^{1000-k}.$$

Kako je $np = 30 > 10$, vrši se aproksimacija normalnom raspodelom.

$$P(20 \leq X \leq 40) = P\left(\frac{20-30}{\sqrt{1000 \cdot 0,03 \cdot 0,997}} \leq Z \leq \frac{40-30}{\sqrt{1000 \cdot 0,03 \cdot 0,997}}\right) = 0,93$$

Znači da se u 93,6% slučajeva može desiti da broj neispravnih uređaja bude između 20 i 40.

34. Poznato je sa 90% kupaca Sony televizora nema reklamacije u garantnom roku.

Prodato je 100 televizora u jednoj prodavnici.

a) kolika je očekivana vrednost broja reklamacija,

b) naći verovatnoću da reklamacija bude max 20

Rešenje:

Slučajna promenljiva X je broj reklamacija, i ima binomnu raspodelu $B(100; 0,1)$

$$a) E(X) = np = 10$$

$$b) P(X < 20) = P\left(\frac{X - np}{\sqrt{npq}} < \frac{20 - 10}{\sqrt{100 \cdot 0,1 \cdot 0,9}}\right) = P(Z < 3,33) = \Phi(3,33) \approx 0,9987$$

35. Neka su vremena 'života' dva električna uređaja slučajne promenljive sa raspodelama $N(40, 36)$ i $N(45, 9)$ respektivno. Ako uređaj treba da radi bar 45 časova, koji od njih je bolje uzeti?

Rešenje:

a)

$$P(X > 45) = P\left(\frac{X - 40}{6} > \frac{45 - 40}{6}\right) = P(Z > 0,833) = 1 - \Phi(0,833) \approx 0,2$$

b)

$$P(X > 45) = P\left(\frac{X - 45}{3} > \frac{45 - 45}{3}\right) = P(Z > 0) = 1 - \Phi(0) \approx 0,5.$$

Bolje je uzeti drugi uređaj.

36. Procenat škarta pri proizvodnji delova je 2%. Odrediti verovatnoću da u uzorku od 60 delova ima

a) tačno 3 škarta

b) najviše 3 škarta

Rešenje:

$$n = 60, p = 0,02, np = 1,2$$

$$= \text{POISSON}(3, 1, 2, 5, \text{FALSE})$$

$$a) P(X = 3) = 0,086744$$

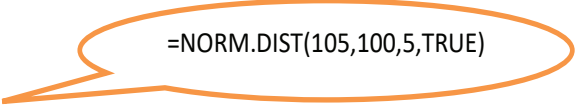
$$b) P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0,966231$$

$$= \text{POISSON}(3, 1, 2, 5, \text{FALSE})$$

37. Vek trajanja električne lampe u časovima ima normalnu raspodelu

- a) Naći verovatnoću da nova lampa istog tipa traje najmanje 105 časova
- b) Ako je jedna lampa već izdržala 90 časova, kolika je verovatnoća da će izdržati još 15 časova?

Rešenje:


$$= \text{NORM.DIST}(105, 100, 5, \text{TRUE})$$

a) $P(X < 105) = 0,841345$

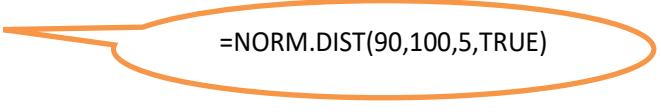
$$P(X > 105) = 1 - P(X < 105) = 0,158655$$

b)

$$P(X > 105 | X > 90) = \frac{P(X > 105 \cap X > 90)}{P(X > 90)} = \frac{P(X > 105)}{P(X > 90)} = 0,1623142$$

$$P(X > 90) = 1 - P(X < 90) = 0,97725$$

$$P(X < 90) = 0,02275$$


$$= \text{NORM.DIST}(90, 100, 5, \text{TRUE})$$

6. GRANIČNE TEOREME

U matematičkoj analizi veoma strogo je definisan pojam granične vrednosti niza realnih brojeva, odnosno konvergenciji niza. Međutim, na niz slučajnih promenljivih X_n ne mogu se primeniti ove poznate definicije i teoreme iz razloga što slučajne promenljive postoje samo sa nekom verovatnoćom, pa jedino može da se ustanovi da je verovatnoća događaja $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$ jednaka 1.

U verovatnoći možemo govoriti samo o sledećim konvergencijama:

Ako su zadate slučajne promenljive $X_1 X_2 \cdots X_n \dots$ onda postoji:

Stroga konvergencija ili konvergencija skoro svuda ako je

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X\right) = 1$$

Konvergencija u verovatnoći ako je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1, \quad \varepsilon > 0$$

Konvergencija u raspodeli ili slaba konvergencija ako je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \leq x) = P(X \leq x)$$

Postoje dve grupe zakona i teorema koje važe u verovatnoći, a to su zakoni velikih brojeva i Centralna granična teorema.

6.1. ZAKON VELIKIH BROJEVA

Pod zakonima velikih brojeva podrazumeva se niz teorema koje objašnjavaju uslove pod kojim realizacije slučajnih promenljivih dovode do rezultata koji i nisu slučajni. Statističke zakonitosti povezane sa masovnim pojavama poseduju određenu stabilnost ponašanja u odnosu na srednju vrednost. Pri velikom broju slučajnih promenljivih njihova srednja vrednost praktično prestaje da bude slučajna i može se predskazati sa velim sigurnošću.

Generalno, one tvrde da aritmetička sredina konvergira ka matematičkom očekivanju.

U eksperimentu bacanja novčića, pojava pisma ne može se predvideti u konkretnom bacanju, ali sa sigurnošću se može tvrditi da je verovatnoća pojave pisma je 0,5. Oko ove vrednosti se grupišu relativne frekvence pri velikom broju ponavljanja eksperimenta, odnosno bacanja novčića. Već smo govorili o rezultatima koje su eksperimentalno dobili Bufon i Pirson. Nažalost, nije moguće dokazati da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = 0,5$

gde je S_n -broj uspeha u n eksperimenata

$$\text{Može se samo tvrditi da je } P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = 0,5\right) = 1$$

Prvi koji je naučno interpretirao ovaj rezultat je Jakob Bernuli koji 1713. godine daje prvi zakon velikih brojeva, koji zovemo i **Bernulijev zakon velikih brojeva**.

Teorema:

Ako slučajne promenljive $X_1 X_2 \cdots X_n$ imaju binomnu raspodelu tada je

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{S_n}{n} - p \right| < \varepsilon\right) = 1$$

gde je $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ -broj uspeha u n eksperimenata

Generalno zakon velikih brojeva glasi

Teorema Čebiševa:

Ako su date nezavisne slučajne promenljive $X_1 X_2 \cdots X_n$ sa istim matematičkim očekivanjem μ i disperzijom D, tada niz aritmetičkih sredina konvergira u verovatnoći i važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left| \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - \mu \right| < \varepsilon\right) = 1, \quad \forall \varepsilon > 0$$

Za dokazivanje ove teoreme potrebno je znati sledeću važnu nejednakost

Nejednakost Čebiševa

Ako postoji disperzija $D(X)$, tada važi

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}, \quad \forall \varepsilon > 0$$

Primer:

Verovatnoća rađanja dečaka je 0,5. Oceniti verovatnoću da apsolutna vrednost razlike verovatnoće i frekvencije rađanja dečaka je manja od 0,01. Posmatrano je 10 000 rođene dece

Po teoremi Bernulija

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{S_n}{n} - p \right| < \varepsilon\right) = 1, \text{ a znajući da je u binomnoj raspodeli frekvencije } \frac{S_n}{n}$$

jednaka $E\left(\frac{S_n}{n}\right) = p$ i $D\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{pq}{n}$, po nejednakosti Čebiševa se može napisati u

$$\text{obliku } P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

$$P\left(\left|\frac{S_n}{10000} - 0,5\right| < 0,01\right) > 1 - \frac{0,5 \cdot 0,5}{10000 \cdot 0,01^2} = 0,9975$$

Primer:

Za kontrolu težine uzeto je 20 proizvoda iz pogona neke fabrike. Ako se zna da je disperzija

$\sigma^2 = 10,8g$, kolika je verovatnoća da aritmetička sredina težina ne odstupa od srednje težine više od 3g.

Po nejednakosti Čebiševa

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \Rightarrow P(|X - \mu| < \varepsilon) > 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

$$\text{Kako je } D(X) = \frac{\sigma^2}{n} \text{ imamo } P(|X - \mu| < \varepsilon) > 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

$$1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} = 1 - \frac{10,8}{20 \cdot 9} = 0,94. \text{ Tražena verovatnoća treba da bude veća od 0,94.}$$

Teorema Čebiševa je najjednostavniji slučaj Zakona velikih brojeva. Teorema u suštini tvrdi, da mada u nizu slučajnih promenljivih svaka pojedinačna promenljiva može da uzme vrednosti koje se razlikuju od srednje vrednosti (velika disperzija), aritmetička sredina niza slučajnih promenljivih uvek ima malu disperziju i sa velikom verovatnoćom uzima vrednosti koje su bliske njenoj srednjoj vrednosti. Ovo je moguće objasniti činjenicom da pri izračunavanju aritmetičke sredine slučajna odstupanja, pozitivna i negativna se međusobno poništavaju.

Osim ovih postoje i niz drugih teorema velikih brojeva kao što su teorema Markova, Hinčina, Borela, Kolmogorova i mnoge druge. Sve one omogućavaju naučne prognoze i ocene tačnosti rezultata masovnih pojava.

6.2. CENTRALNA GRANIČNA TEOREMA

Teoreme koje pripadaju grupi centralnih graničnih teorema ne odnose se na granične vrednosti slučajnih promenljivih, već na granične zakone raspodela. Tako dok zakon velikih brojeva tvrdi da aritmetička sredina konvergira matematičkom očekivanju, centralna granična teorema daje asimptotsku raspodelu aritmetičke sredine.

Ova teorema definiše da zakon raspodele verovatnoća suma velikog broja slučajnih promenljivih teži normalnoj raspodeli.

Sve teoreme ovog tipa uzimaju normalnu raspodelu kao granični zakon i definišu uslove pod kojim je to ispunjeno. Iako normalna raspodela nije jedina koja daje dobre aproksimacije empirijskih raspodela, sigurno se najčešće koristi. Možda je i razlog što oko 30% svih pojava u prirodi ima normalnu raspodelu.

Teorema: Centralna granična teorema

Neka su date slučajne nezavisne promenljive $X_1 X_2 \cdots X_n$, sa istom raspodelom sa istim matematičkim očekivanjem $E(X_n) = \mu$ i disperzijom $D(X_n) = \sigma^2$,

tada slučajna promenljiva $Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ konvergira u raspodeli slučajnoj promenljivoj $Z : N(0,1)$, tj

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \forall x \in R,$$

Postoji mnogo verzija centralne granične teoreme., ali sve se svode na slučaj da niz $\frac{S_n - E(S_n)}{D(S_n)} = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$. gde je $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ konvergira u raspodeli $N(0,1)$

Primer:

Naći verovatnoću dobijanja više od 60 glava u 100 bacanja novčića.

Neka su X_n slučajne promenljive koje imaju Binomnu raspodelu. Ako je

$S_n = X_1 + \dots + X_n$, izračunati $P(S_n \geq 60)$

$$n = 100, \quad p = P(A) = 0,5 \quad X : B(100; 0,5)$$

$$P(S_n > 60) = \sum_{k=60}^{100} \binom{100}{k} \cdot 0,5^k \cdot 0,5^{100-k}$$

Aproksimacija može da se izvrši normalnom raspodelom, gde je:

$$\mu = np = 50, \quad \sigma = \sqrt{npq} = 5, \quad N(50, 25)$$

$$P(S_n > 60) = 1 - P(S_n \leq 60) = 1 - P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{60 - 50}{\sqrt{100 \cdot 0,5 \cdot 0,5}}\right) = 1 - P(2) = P(2) = 0,97725$$

Primer:

Neka su X_n slučajne promenljive koje imaju Poasonovu raspodelu $P(5)$. Izračunati

$$P(S_{100} \geq 2)$$

Ako bi računali direktno imali bi za $\lambda = 5$

$$P(S_{100} \geq 2) = 1 - P(S_{100} < 2) = 1 - (P(S_{100} = 0) + P(S_{100} = 1)) = 1 - \frac{5^0}{0!} e^{-5} - \frac{5^1}{1!} e^{-5} = 0,9596$$

Ako bi koristili centralnu graničnu teoremu, a znajući da su matematičko očekivanje i disperzija kod Poasonove raspodele $\mu = \sigma^2 = \lambda = 5$, pa je

$$P(S_{100} \geq 2) = 1 - P(S_{100} < 2) = 1 - P\left(\frac{S_{100} - 100 \cdot 0,05}{\sqrt{0,05 \sqrt{100}}} < \frac{3}{\sqrt{5}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right) = 0,9099$$

6.3. RASPODELA EMPIRIJSKE FUNKCIJE

Matematička veza između populacije i uzorka izražena je vezom između funkcije raspodele $F(x)$ slučajne promenljive X koja reprezentuje neko obeležje populacije i empirijske funkcije raspodele frekvencija $F_n(x)$ uzorka obima n . Treba voditi računa da se u svakom novom eksperimentu dobija neka druga empirijska funkcija raspodele.

Teorema: (Glivenko)

Neka je $F(x)$ funkcija raspodele obeležja X populacije, a $F_n(x)$ empirijska funkcija raspodele nezavisnog uzorka obima n ove populacije, tada ,

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{-\infty < x < \infty} (F_n(x) - F(x)) = 0\right) = 1.$$

Ova teorema u suštini tvrdi, da kada je uzorak dovoljno brojan, sa verovatnoćom bliskom jedinici, empirijska raspodela se malo razlikuje od teorijske.

6.4. VAŽNI OBRASCI

Stroga konvergencija ili konvergencija skoro svuda ako je

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X\right) = 1$$

Konvergencija u verovatnoći ako je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1, \quad \varepsilon > 0$$

Konvergencija u raspodeli ili slaba konvergencija ako je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n \leq x) = P(X \leq x)$$

Bernulijev zakon velikih brojeva

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{S_n}{n} - p \right| < \varepsilon\right) = 1$$

Teorema Čebiševa:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1, \quad \forall \varepsilon > 0$$

Nejednakost Čebiševa

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}, \quad \forall \varepsilon > 0$$

Centralna granična teorema

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_n \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \forall x \in R$$

6.5. ZADACI

1. Veličina je izmerena 1000 puta. Disperzija merenja nije veća od 2cm naći verovatnoću da aritmetička sredina rezultata merenja ne odstupi od matematičkog očekivanja za više od 0,2

Rešenje:

Na osnovu nejednakosti Čebiševa imamo

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \Rightarrow P(|X - \mu| < \varepsilon) > 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

$$p > 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} = 1 - \frac{2}{1000 \cdot 0,04} = 0,9$$

2. U svakom od 6000 nezavisnih eksperimenata događaj se realizuje sa verovatnoćom od 0,625. Naći verovatnoću da se frekvencija pojave događaja razlikuje od verovatnoće za više od 0,01.

Rešenje:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} \Rightarrow P\left(\left|\frac{S_n}{6000} - 0,625\right| < 0,01\right) > 1 - \frac{0,625 \cdot 0,375}{6000 \cdot 0,01^2}$$

$$P\left(\left|\frac{S_n}{6000} - 0,625\right| < 0,01\right) > 0,6094$$

3. Eksperiment po Bernulijevoj šemi je realizovan 600 puta sa verovatnoćom svakog od njih od 0,9. naći verovatnoću da se relativna frekvencija događaja ne razlikuje od verovatnoće događaja za ne više od 0,04.

Rešenje:

$$P\left(\left|F_n(x) - p\right| \leq a\right) = P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \leq a\right) = P\left(-a\sqrt{\frac{n}{pq}} \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq a\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

$$= 2\Phi\left(a\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - 1$$

$$P\left(\left|\frac{S_n}{600} - 0,9\right| \leq 0,04\right) = 2\Phi\left(0,04\sqrt{\frac{600}{0,9 \cdot 0,1}}\right) - 1 = 0,99886$$

4. Novčić se baca 10000 puta, Naći verovatnoću da se pismo pojavi od 4950 do 5100 puta.

Rešenje:

$$P(4950 < S_n < 5100) = P\left(-1 < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < 2\right) = \Phi(2) - \Phi(-1) = 0,8185$$

2.

STATISTIKA

7. MATEMATIČKA STATISTIKA

7.1. OSNOVNI POJMOVI STATISTIKE

Začetke statistike srećemo još u srednjem veku, sa prvim popisima stanovništva, a tek sredinom dvadesetog veka ona se definiše kao nova matematička disciplina.

U svakodnevnom životu prikupljamo veliki broj podataka i statistika nam daje način njihovog organizovanja i donošenja zaključaka za predviđanje budućih događaja.

Matematička statistika je nauka koja se bavi proučavanjem masovnih pojava u prirodi i društvu. Ova istraživanja imaju kvantitativan, a ne kvalitativan karakter.

Predmet istraživanja matematičke statistike je **statistički skup** ili **populacija**. To je skup svih elemenata na kojima se neka statistička pojava posmatra. Skup može biti konačan i beskonačan. Obeležava se sa $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$

Primer:

Populacija je skup svih građana Srbije, skup svih studenata našeg fakulteta, skup svih merenja neke veličine i sl.

Do statističkih podataka se dolazi se sistematski, po jasno utvrđenom planu. U procesu proučavanja pojava statistika se služi određenim naučnim metodama.

Razlikujemo tri koraka u proučavanju podataka:

1. Prikupljanje podataka (ankete, popisi, merenje, eksperimenti i sl.)
2. Sređivanje i obrada podataka
3. Donošenje zaključaka

Svaka populacija se može posmatrati sa stanovišta jedne ili više numeričkih karakteristika, koje nazivamo **obeležje**. Za posmatranu populaciju neka obeležja su bitna, druga nisu. Na primer, ako posmatramo studente jednog fakulteta, bitna obeležja su njihov broj, prolaznost na ispitima, srednje ocene, dužina studiranja i slično, a nebitna obeležja su njihova visina, težina, boja očiju i slično.

Obeležja mogu biti **numerička**, koja se izražavaju kvantitativno, brojem i **atributivna**, koja se izražavaju opisno.

Numerička obeležja su ako u populaciju studenata posmatramo, visinu i težinu, a atributivna su pol i boja očiju. Da bi se na atributivna obeležja mogle primeniti statističke metode, neophodno je se ona prevedu na jezik matematike ,odnosno da se definišu kao brojevi.

Definicija:

Ako svakom elementu skupa Ω pridružimo jedan realan broj, definišemo preslikavanje $X : \Omega \rightarrow R$ koje se naziva **obeležje**.

Obeležje X je **slučajna promenljiva**, koja svakoj vrednosti $\omega \in \Omega$, pridružuje realan broj $X(\omega)$.

Ispitivanja obeležja cele populacije u praksi se retko realizuju. Ona bi mogla da budu složena, neracionalna, a ponekad i nemoguća jer populacija može da ima beskonačno mnogo elemenata ili konačno mnogo, ali da je taj broj veliki. Iz tih razloga definiše se neki podskup uočene populacije i naziva se **uzorak**.

Definicija:

Bilo koji podskup U , populacije Ω , nazivamo **uzorak**, $U \subset \Omega$.

Primer:

Ako je potrebno odrediti prosečnu visinu građana Srbije, nije potrebno izmeriti visinu svakog njenog građanina već se uzima proizvoljan uzorak, na primer 1000 građana, i na osnovu rezultata merenja ovog broja građana, određuje se prosečna visina za celokupno stanovništvo.

Postavlja se pitanje koliko je opravdano populaciju zameniti uzorkom, koliko su rezultati dobijeni iz uzorka prihvatljivi kao rezultati cele populacije.

Načini formiranja uzorka su različiti i od toga zavisi verodostojnost zaključivanja. Uzorak treba izabrati tako da dobro reprezentuje populaciju, da zaključak donesen na osnovu njega važi za celu populaciju.

Samim tim formiranje uzorka je složen postupak koji treba da zadovolji niz praktičnih i teorijskih kriterijuma.

Uzorak treba da bude:

- **reprezentativan**, odnosno da svaki element populacije ima podjednaku šansu da se nađe u uzorku
- **dovoljno brojan**, da sadrži optimalan broj elemenata na osnovu kojih se donosi zaključak
- **objektivan**, potrebno je odbaciti sve subjektivne faktore, a to se postiže slučajnim izborom.

Ako u nekoj populaciji posmatramo obeležje X , onda se iz nje na slučajan način uzima n elemenata i kod svakog od njih registrujemo vrednost obeležja X . Na taj način dobija se slučajan uzorak obima n , $x_1, x_2, \dots, x_n$. Uzorak $x_1, x_2, \dots, x_n$ se može smatrati realizacijom n dimenzione slučajne promenljive $X_1, X_2, \dots, X_n$. Ako su slučajne promenljive $X_1, X_2, \dots, X_n$ nezavisne i jednako raspodeljene onda se dobija **prost uzorak**.

Uzorak je umanjena slika osnovnog skupa. Njegove karakteristike, **parametri**, kao što su aritmetička sredina, disperzija, standardno odstupanje i ostale, jesu procene istih parametara osnovnog skupa.

Raspodela frekvencija statističkog obeležja uzorka je aproksimacija raspodele odgovarajuće slučajne promenljive u celoj populaciji. Kako je svako obeležje neka slučajna promenljiva, osnovni zadatak matematičke statistike je nalaženje raspodela verovatnoća ovih slučajnih promenljivih.

7.2. STATISTIČKE TABELE, POLIGONI I HISTOGRAMI EMPIRIJSKE RASPODELE OBELEŽJA

Podatke dobijene posmatranjem ili eksperimentima, a koji predstavljaju vrednosti posmatranog obeležja populacije ili uzorka, potrebno je srediti na odgovarajući način da bi se mogli ispitivati i odrediti raspodela obeležja.

Prvenstveno podaci se smeštaju u tablice U njima su podaci precizno i jasno sređeni i omogućavaju izračunavanje veličina koje se traže u istraživanju. Ako je broj podataka mali svi podaci se unose u tabele, dok kod velikog broja podataka, podaci se dele u serije. One u zavisnosti od problema mogu da budu strukturne, vremenske i geografske.

Grafičko prikazivanje statističkih podataka može da bude različito u zavisnosti od vrste podataka i njihove primene.

Najčešće se koriste dijagrami koji mogu da budu:

- Tačkasti-stigmogrami
- Linijski-poligoni
- Površinski-histogrami
- Prostorni-stereogrami

Neka posmatrano obeležje X uzima vrednosti $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$, koja se pojavljuju redom $f_1, f_2, \dots, f_k$ puta, uz uslov da je $f_1 + f_2 + \dots + f_k = N$ i nazivaju se **apsolutne frekvence** (učestalosti) vrednosti obeležja.

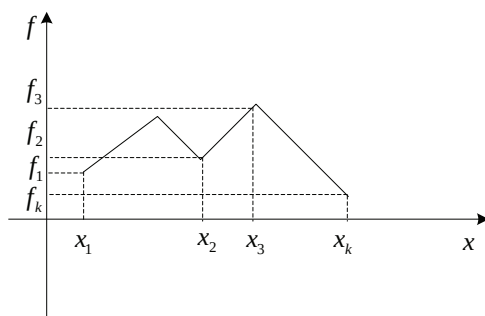
Umesto apsolutnih frekvenci često se koriste **relativne frekvence** vrednosti obeležja

$$f_{r1} = \frac{f_1}{N}, f_{r2} = \frac{f_2}{N}, \dots, f_{rk} = \frac{f_k}{N}, \text{ uz uslov } f_{r1} + f_{r2} + \dots + f_{rk} = 1.$$

Vrednosti obeležja $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ uzete sa odgovarajućim frekvencijama raspoređuju se po rastućim vrednostima i mogu da formiraju statističku tabelu.

X	x_1	x_2		x_k	Σ
f_i	f_1	f_2		f_k	N
f_{ri}	f_{r1}	f_{r2}		f_{rk}	1

Podaci iz tabele mogu se predstaviti i grafički u koordinatnom sistemu, tako što se na x-osu nanose vrednosti obeležja X , a na y-osu frekvence i dobija se **poligon raspodela apsolutnih ili relativnih frekvenci**.

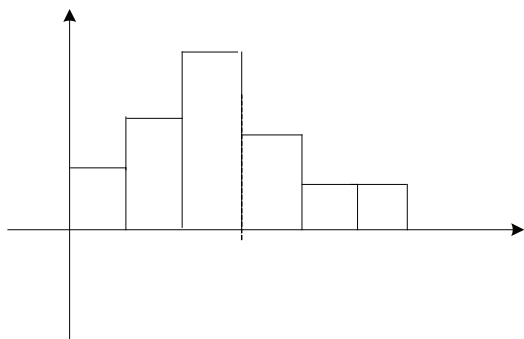


Ukoliko je broj vrednosti obeležja veliki vrednosti obeležja se zadaju intervalno. Kada je obeležje neprekidna veličina to je uvek slučaj.

Interval $[a,b]$ u okviru koga se nalaze sve posmatrane vrednosti obeležja, podeli se na k , najčešće jednakih delova, $[a,a_1)$, $[a_1,a_2)$,..... $[a_{k-1},b]$. Zatim se odrede frekvence podataka koji pripadaju ovim intervalima i rezultati prikažu tabelarno i grafički.

X	$[a,a_1)$	$[a_1,a_2)$		$[a_{k-1},b]$	Σ
f_i	f_1	f_2		f_k	N
f_{ri}	f_{r1}	f_{r2}		f_{rk}	1

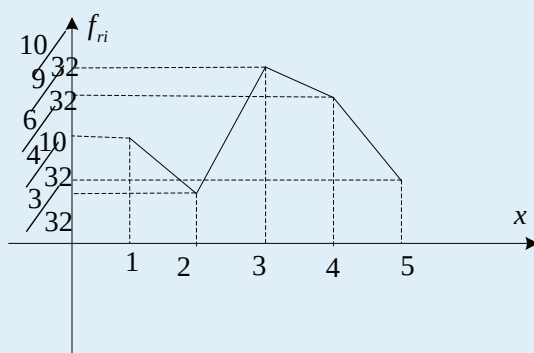
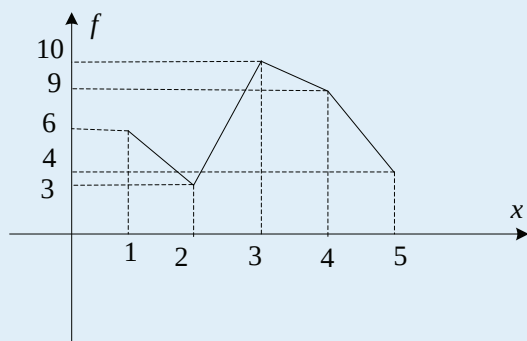
Grafički prikaz naziva se **histogram raspodele** i dobija se tako što se crtaju pravougao-nici sa osnovicom veličine uočenih intervala, a visine su vrednosti odgovarajućih frekvenci.



Primer:

U jednom odeljenju ima 32 učenika. Među njima su 4 odlična, 9 vrlo dobrih, 10 dobrih, 3 dovoljna i 6 nedovoljnih učenika. Ovo obeležje ima atributivni karakter i zato ako uzmemo da su numeričke vrednosti obeležja, 5-odličan, 4-vrlo dobar i tako redom, odgovarajuća tablica i poligon raspodela frekvencija su:

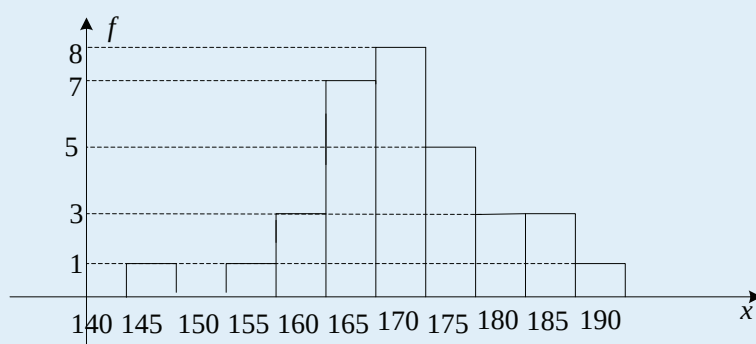
X	1	2	3	4	5	Σ
f_i	6	3	10	9	4	32
f_{ri}	$\frac{6}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{4}{32}$	1



Primer:

U skupu od 32 učenika obeležje je visina koja je data u intervalima dužine 5cm.

X	140- 145	145- 150	150- 155	155- 160	160- 165	165- 170	170- 175	175- 180	180- 185	185- 190
f_i	1	0	1	3	7	8	5	3	3	1
f_{ri}	$\frac{1}{32}$	0	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{8}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$



7.3. PARAMETRI –STATISTIKE SLUČAJNIH STATISTIČKIH PROMENLJIVIH

Tabelarnim i grafičkim predstavljanjem statističkih podataka mogu se samo delimično uočiti njihove pravilnosti.

Da bi se statistički podaci preciznije proučili potrebno je znati njihove parametre.

Postoje dve vrste parametara koji karakterišu statističke promenljive, ili kako se nazivaju **statistike**:

- *parametri koji reprezentuju centar rasturanja*
- *parametri koji mere rasturanje vrednosti promenljivih oko centra rasturanja*

7.3.1. PARAMETRI KOJI REPREZENTUJU CENTAR RASTURANJA-SREDNJE-VREDNOSTI

Važne statističke karakteristike nekog obeležja su srednje vrednosti. One mogu da reprezentuju skup, ali i da omoguće upoređivanje različitih skupova. Postoje dve vrste srednjih vrednosti, **računske i pozicione**.

Računske srednje vrednosti su **aritmetička sredina, geometrijska sredina, harmonijska sredina i sl.**

Pozicione srednje vrednosti su **moda, medijana i sl**

7.3.1.1. ARITMETIČKA SREDINA

Od svih srednjih vrednosti aritmetička sredina je najčešće u upotrebi.

Aritmetička sredina

1. Ako obeležje X ima ne grupisane vrednosti $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

2. Kada su vrednosti obeležja date sa različitim frekvencijama, onda je

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

3. U slučaju intervalno grupisanih podataka

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} x_{si} f_i}{\sum_{i=1}^{k-1} f_i} \quad x_{si} = \frac{x_{i+1} + x_i}{2}$$

U Excelu se za izračunavanje aritmetičke sredine koristi naredba AVERAGE.

Primer:

Prinos pšenice na 5 parcela u tonama je 760, 990, 1200, 1450, 1000.

Izračunati prosečan prinos .

$$\bar{X} = \frac{1}{5}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = \frac{760 + 990 + 1200 + 1450 + 1000}{5} = 1080$$

Prosečan prinos je 1080t.

Primer:

Naći aritmetičku sredinu brojeva

1,1,2,2,2,3,3,3,3,4,4,4,4,4.

x_i	f	$x_i f_i$
1	2	2
2	3	6
4	4	12
	5	20
	$\sum_{i=1}^4 f_i = 14$	$\sum_{i=1}^4 x_i f_i = 40$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i f_i}{\sum_{i=1}^4 f_i} = \frac{40}{14} = \frac{20}{7}$$

Primer:

U skupu od 27 učenika obeležje je visina koja je data u intervalima dužine 5cm.

Izračunati srednju visinu učenika.

xi- visina	fi	sredina intervala	$x_i f_i$
145-150	1	142,5	142,5
150-155	1	152,5	152,5
155-160	3	157,5	472,5
160-165	7	162,5	1137,5
165-170	8	167,5	1340
170-175	4	172,5	690
175-180	3	177,5	532,5
	$\sum_{i=1}^7 f_i = 27$		$\sum_{i=1}^7 x_i f_i = 4467,5$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^7 x_i f_i}{\sum_{i=1}^7 f_i} = \frac{4467,5}{27} = 165,46$$

7.3.1.2. GEOMETRIJSKA SREDINA

Pomoću geometrijske sredine izračunava se prosečna stopa promene neke pojave. Može da se koristi kao mera promene brzina pojava u vremenu.

Definicija:

Ako su $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ vrednosti obeležja X, onda je

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n}.$$

Primer:

Primenom geometrijske sredine odgovorili bi na pitanje:
Koliko puta je prosečno pao natalitet u Srbiji u zadnjih 10 godina

Primer:

Geometrijska sredina brojeva 1, 8, 27 je

$$G = \sqrt[3]{1 \cdot 8 \cdot 27} = 6.$$

Definicija:

Ako su $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ vrednosti obeležja X sa frekvencama $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ onda je

$$G = \sqrt[n]{x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdot x_3^{f_3} \cdots x_n^{f_n}}.$$

Geometrijsku sredinu nema smisla računati ako su neke vrednosti nula ili negativne.

7.3.1.3. HARMONIJSKA SREDINA

Harmonijska sredina koristi se u slučajevima kada su vrednosti i obim obeležja u obrnutoj razmeri.

Definicija:

Ako su $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ vrednosti obeležja X , a $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ frekvence, onda je *prosta harmonijska sredina*

$$H = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}$$

složena harmonijska sredina

$$H = \frac{\sum_{i=1}^n f_i}{\sum_{i=1}^n \frac{f_i}{x_i}}.$$

Primer:

Harmonijska sredina brojeva 1, 2, 3 je,

$$H = \frac{3}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{18}{11}$$

Primer:

Pet fabrika proizvode isti artikal. U prvoj fabrici proizvode se 650 komada za 4 dana, u drugoj 350 za 4 dana, u trećoj 75 za 5 dana, četvrtoj 150 za 3 dana i u petoj 80 za 2 dana. Koliko je prosečno vreme izrade tog artikla.

$$H = \frac{\sum_{i=1}^n f_i}{\sum_{i=1}^n \frac{f_i}{x_i}} = \frac{650 + 350 + 75 + 150 + 80}{\frac{650}{4} + \frac{350}{4} + \frac{75}{5} + \frac{150}{3} + \frac{80}{2}} = \frac{1305}{355} = 3,68$$

Između aritmetičke, geometrijske i harmonijske sredine važi relacija $H \leq G \leq \bar{X}$.

Koju ćemo od sredina koristiti zavisi od problema koji treba rešiti i nema opšteg pravila. Za izračunavanje aritmetičke, geometrijske i harmonijske sredine koristimo sve postojeće vrednosti. Geometrijska i harmonijska sredina su u suštini mere brzine promena posmatranih pojava.

Primer:

Merenjem dobijene su vrednosti slučajne promenljive X, obeležja neke populacije

x_i	5	8	10	12	16
f_i	1	2	2	3	2

Izračunati aritmetičku, geometrijsku i harmonijsku sredinu

x_i	f_i	$x_i f_i$	$\frac{f_i}{x_i}$	$x_i^{f_i}$
5	1	5	0,200	5
8	2	16	0,250	64
10	2	20	0,200	100
12	3	36	0,250	1728
16	2	32	0,125	256
Σ	10	109	1,025	$\Pi = 14155776000$

$$\bar{X} = \frac{\sum_i x_i f_i}{\sum_i f_i} = \frac{109}{10} = 10,9$$

$$H = \frac{\sum_i f_i}{\sum_i \frac{f_i}{x_i}} = \frac{10}{1,025} = 9,76$$

$$G = \sqrt[10]{x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdot x_3^{f_3}} = \sqrt[10]{14155776000} = 10,35$$

7.3.1.4. MODA

Definicija:

Moda M_o je vrednost obeležja koje ima najveću frekvencu,

Od svih pozicionih srednjih vrednosti moda se najčešće se koristi. Može se desiti da moda ne postoji ili da ih ima više.

Primer:

Naći modu brojeva 1,1,2,2,2,3,3,3,3,4,4,4,4,4.

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Broj 4 ima najveću frekvencu, dakle

$$M_o = 4$$

Primer:

Naći modu brojeva 1,1,2,2,2,3,3,3,3,4,4,4,4,4.

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Kako postoje dva broja 3 i 4 koji imaju iste frekvence 5, zaključujemo da imamo dve mode.

$$M_o = 4, M_o = 3$$

Ako su vrednosti obeležja data intervalima, modu treba tražiti u intervalima sa najvećim frekvencama i oni se nazivaju **modalni intervali**.

Definicija:

Ako su vrednosti obeležja X date intervalima imamo da je

$$M_o = a_1 + \frac{f_2 - f_1}{(f_2 - f_1) + (f_2 - f_3)} d,$$

gde je a_1 donja granica modalnog intervala, a f_1, f_2, f_3 su frekvencije predmodalnog, modalnog i postmodalnog intervala, a d veličina intervala.

Primer:

U skupu od 27 učenika obeležje je visina koja je data u intervalima dužine 5cm.

xi- visina	fi
145-150	1
150-155	1
155-160	3
160-165	7
165-170	8
170-175	5
175-180	3

modalni interval je [165-170]

Prema tome $a_1 = 165$ $f_1 = 7$, $f_2 = 8$, $f_3 = 5$ i $d=5$, pa je moda

$$M_o = 165 + \frac{1}{1+3} \cdot 5 = 166,25$$

7.3.1.5. MEDIJANA

Definicija:

Medijana je srednja vrednost svih vrednosti obeležja $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ uređenih po veličini.

Ako je broj vrednosti obeležja neparan, medijana je srednja vrednost obeležja.

Ako je broj vrednosti obeležja paran, medijana je aritmetička sredina. 2 srednja člana.

Primer:

Skup vrednosti nekog obeležja 21, 25, 27, 30, 32 . Kako ima neparan broj vrednosti obeležja njegova medijana je srednja vrednost i medijana je 27.

Primer:

Skup vrednosti nekog obeležja 17, 19, 21, 23, 26, 28. U ovom primeru imamo paran broj vrednosti obeležja i medijana je aritmetička sredina dva srednja člana, .

$$M_e = \frac{21+23}{2}$$

Definicija:

Ako su vrednosti obeležja date intervalno, prvo se određuje medijalni interval u kome se nalazi srednji član, pa je **medijana**

$$M_e = a_1 + \frac{d}{f_k} \left(\frac{n}{2} - \sum_{i=1}^{k-1} f_i \right).$$

Primer:

U skupu od 27 učenika obeležje je visina koja je data u intervalima dužine 5cm.

xi- visina	fi
145-150	1
150-155	1
155-160	3
160-165	7
165-170	8
170-175	4
175-180	3

medijalni interval je $(165,170)$, $a_1 = 165$, $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_3 = 3$, $f_4 = 7$ i $d=5$

Medijana je

$$M_e = 165 + \frac{5}{8} (16 - (1 + 1 + 3 + 7)) = 167,50$$

U Excelu za izračunavanje medijana se koristi funkcija MEDIAN.

Moda i medijana imaju veliku primenu u statistici, naročito kada treba naći onu vrednost obeležja koje se najčešće sreće.

Na primer, ako ispitujemo uslove stanovanja građana, bolji je pokazatelj veličine stambene površine koju koristi najveći broj stanovnika (moda), nego prosečna površina po jednom stanovniku (aritmetička sredina).

Takođe, srednji vek trajanja službenih automobila u jednom preduzeću može se odrediti i pre rashodovanja svih automobila, tako što se nađe medijana kada broj rashodovanih automobila pređe polovinu.

7.3.2. PARAMETRI KOJI MERE RASTURANJE SLUČAJNE PROMENLJIVE OKO CENTRA RASTURANJA

U nekim praktičnim problemima mnogo korisniji podatak je odrediti rasturanje podataka oko centra rasturanja, nego sredinu. Najvažniji parametri koji mere rasturanje oko centra su **razmak varijacije, varijansa, standardno odstupanje i dr.**

7.3.2.1. RAZMAK VARIJACIJE

Definicija:

Razmak varijacije R je razlika između maksimalne i minimalne vrednosti podataka. $R = x_{\max} - x_{\min}$.

7.3.2.2. VARIJANSA ILI DISPERZIJA

Varijansa ili disperzija je mera odstupanja i predstavlja prosečno kvadratno odstupanje svakog podatka, od aritmetičke sredine.

Definicija:

Ako obeležje X ima vrednosti, tada je **varijansa ili disperzija**

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{X}^2$$

Kada se vrednosti obeležja javljaju sa različitim frekvencijama onda je

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^n f_i} - \bar{X}^2$$

U Excelu se koristi funkcija VARP.

Primer:

Na osnovu broja dana koje je neki radnik proveo na bolovanju tokom jedne godine 7,23,4,8,2,12,6,13,9,4 izračunati prosečan broj dana na bolovanju i odrediti rasturanje u odnosu na taj broj.

Rešenje:

Prosečan broj dana koji je proveo na bolovanju je.

x_i -broj dana na bolovanju	x_i^2	$x_i - \bar{X} = x_i - 8,8$	$(x_i - \bar{X})^2 = (x_i - 8,8)^2$
7	49	-1,8	3,24
23	529	14,2	201,64
4	16	-4,8	23,04
8	64	-0,8	0,64
2	4	-6,8	46,24
12	144	3,2	10,24
6	36	-2,8	7,84
13	169	4,2	17,64
9	81	0,2	0,04
4	16	-4,8	23,04
Σ 88	Σ 1108		Σ 333,06

$$\bar{X} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{88}{10} = 8,8$$

$$s^2 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{X})^2 = \frac{333,06}{10} = 33,36$$

$$s^2 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1108}{10} - 8,8^2 = 33,36$$

Primer:

Odrediti rasturanje prodaje TV aparata na osnovu podataka datih u tabeli.

Broj aparata	8	9	10	11	12	13	14	15
Broj dana	2	4	6	7	5	4	1	1

Rešenje:

Prodato aparata x_i	Broj dana u mesecu f	$x_i \cdot f$	$x_i - \bar{X}$	$(x_i - \bar{X})^2$	$f(x_i - \bar{X})^2$	x_i^2	$x_i^2 f_i$
8	2	16	-3	9	18	64	128
9	4	36	-2	4	16	81	324
10	6	60	1	1	6	100	600
11	7	77	0	0	0	121	847
12	5	60	1	1	5	144	720
13	4	52	2	4	16	169	676
14	1	14	3	9	9	196	196
15	1	15	4	225	16	225	225
$\sum_{i=1}^8 =$	30	330			81		3716

Prosečan broj prodatih TV aparata je $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i f_i}{\sum_{i=1}^8 f_i} = \frac{330}{30} = 11$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^8 f_i (x_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^8 f_i} = \frac{81}{30} = 2,7 \text{ ili } s^2 = \frac{\sum_{i=1}^k f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^k f_i} - \bar{X}^2 = \frac{3716}{30} - 11^2 = 2,7 .$$

7.3.2.3. STANDARDNA DEVIJACIJA

Disperzija ili varijansa nije pogodna za interpretaciju jer je izražena u kvadratima jedinice. Zbog toga se za izračunavanje rasturanja neke pojave koristi kvadratni koren disperzije koji se naziva **standardna devijacija ili standardno odstupanje**.

Definicija:

Ako obeležje X ima vrednosti $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$, tada je standardno odstupanje.

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{X}^2}$$

Kada se vrednosti obeležja javljaju sa različitim frekvencijama onda je

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n f_i}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^n f_i} - \bar{X}^2}$$

U Excelu se koristi funkcija STDEVP.

Iz prethodnog primera imamo da je

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^8 f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^8 f_i} - \bar{X}^2} = \sqrt{\frac{3716}{30} - 11^2} = \sqrt{2,7} = 1,643.$$

7.3.2.4. KOEFICIJENT VARIJACIJE

Koeficijent varijacije koristi se u slučajevima kada je potrebno upoređivati varijacije više skupova koje su izražene različitim jedinicama mere. Koristi se i u slučajevima kada su jedinice mere iste, ali imaju različite aritmetičke sredine.

$$K = \frac{s}{\bar{X}} = 100 \frac{s}{\bar{X}} \%$$

Primer:

Rudari nekog rudnika u proseku svaki dan iskopaju $\bar{X} = 400kg$ uglja sa standardnim odstupanjem $s=80$ kg. U drugom rudniku iskopaju $\bar{X} = 1200kg$ uglja sa standardnim odstupanjem $s=120$ kg. U kom rudniku se iskopa više uglja?

Ako izračunamo koeficijent korelacije za oba rudnika imamo

$$K_1 = \frac{s}{\bar{X}} = \frac{80}{400} = 20\%$$

$$K_2 = \frac{s}{\bar{X}} = \frac{120}{1200} = 10\%$$

Zaključujemo da je u prvom rudniku iskopana veća količina uglja jer je u njemu duplo veće rasturanje oko sredine nego u drugom.

7.4. RASPODELE VEROVATNOĆA PARAMETARA-STATISTIKA UZORKA

7.4.1. RASPODELA ARITMETIČKIH SREDINA UZORKA

Neka obeležje X u populaciji ima matematičko očekivanje $E(X) = \mu = \mu_x$ i disperziju $\sigma^2 = \sigma_x^2$.

Elementi bilo kog uzorka od n elemenata $X_1, \dots, X_n$, ove populacije imaju isto matematičko očekivanje i disperziju, $E(X_i) = \mu$, $D(X_i) = \sigma^2$, pa su matematičko očekivanje i disperzija aritmetičke sredine $\bar{X}$ jednaki:

Matematičko očekivanje

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

Disperzija-varijansa

$$s^2 = D(\bar{X}) = D\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(X_i) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Standardno odstupanje-standardna greška

$$s = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Prema tome, ako slučajna promenljiva X , koja predstavlja neko obeležje populacije, ima normalnu raspodelu $N(\mu, \sigma^2)$, onda će njena aritmetička sredina $\bar{X}$ imati takođe normalnu raspodelu ali oblika $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$. Ako slučajna promenljiva

X nema normalnu raspodelu, ali je $n \geq 30$, onda će raspodela aritmetičkih sredina težiti normalnoj raspodeli.

Primer:

Kuglice koje su proizvedene u jednoj fabrici imaju srednju težinu 5gr i standardno odstupanje od 0,3gr. Bira se slučajan uzorak od 100 kuglica. Naći verovatnoću da će se težine svih kuglica nalaziti u granicama od 4,9gr do 5,02gr, ako znamo da se radi o normalnoj raspodeli.

$$n = 100, \mu = \mu_{\bar{x}} = 5, s = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0,3}{\sqrt{100}} = 0,03,$$

$$P(4,9 < \bar{X} < 5,02) = P\left(\frac{4,9-5}{0,03} < \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{5,02-5}{0,03}\right) = P(-3,33 < Z < 0,66) = \Phi(0,66) - \Phi(-3,33) = 0,74495$$

7.5. VAŽNI OBRASCI

Aritmetička sredina

$$\text{prosta } \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{složena } \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

$$\text{Moda } M_o = a_1 + \frac{f_2 - f_1}{(f_2 - f_1) + (f_2 - f_3)} d$$

$$\text{Medijana } M_e = a_1 + \frac{d}{f_n} \left(\frac{n}{2} - \sum_{i=1}^{n-1} f_i \right).$$

Geometrijska sredina

$$\text{prosta } G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n} \quad \text{složena } G = \sqrt[n]{x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdot x_3^{f_3} \cdots x_n^{f_n}}$$

Harmonijska sredina

$$\text{prosta } H = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \quad \text{složena } H = \frac{\sum_{i=1}^n f_i}{\sum_{i=1}^n \frac{f_i}{x_i}}$$

Varijansa ili disperzija

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{X}^2$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^n f_i} - \bar{X}^2$$

Standardno odstupanje

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{X}^2}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^n f_i}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^n f_i} - \bar{X}^2}$$

Matematičko očekivanje $\bar{X} \quad E(\bar{X}) = \mu$

Disperzija-varijansa $\bar{X} \quad s^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

Standardno odstupanje $\bar{X} \quad s = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$

7.6. ZADACI

1. Populaciju čine svi studenti Univerziteta Singidunum. U ovoj populaciji posmatraju se sledeća obeležja:

- a) navika redovnog posećivanja koncertima ozbiljne muzike
- b) visina studenata

Uzet je uzorak koga čine svi studenti druge godine Fakulteta za informatiku i računarstvo. Da li je ovaj uzorak reprezentativan?

Rešenje:

- a) Uzorak nije reprezentativan jer navika posećivanja koncerata klasične muzike je uslovljena i delatnošću, to bi bili studenti muzike ili nekih sličnih fakulteta.
- b) U drugom slučaju uzorak je reprezentativan jer su u pitanju mladi ljudi slične socijalne strukture, porekla, životnih navika, ishrane i sl.

2. Neka je osnovni skup sastavljen od brojeva 2,3,4,5,6,7,8.

Naći srednju vrednost i standardno odstupanje.

Rešenje:

Kako je $n=7$ imamo

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{2+3+4+5+6+7+8}{7} = \frac{35}{7} = 5$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n} = \frac{(2-5)^2 + (3-5)^2 + (4-5)^2 + (5-5)^2 + (6-5)^2 + (7-5)^2 + (8-5)^2}{7} = \frac{28}{7} = 4$$

$$\sigma = 2$$

3. Kocka se baca 36 puta. Broj 1 je pao 6 puta, broj 2 je pao 3 puta, broj 3 je pao 10 puta, broj 4 je pao 8 puta, broj 5 je pao 5 puta i broj 6 je pao 4 puta.

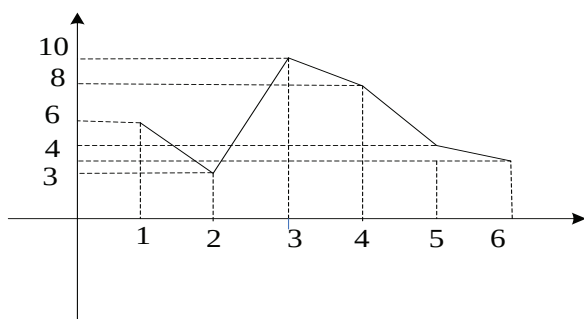
- a) Naći odgovarajuću tablicu raspodele frekvencija
- b) Nacrtati poligon raspodela frekvencija.
- c) Izračunati aritmetičku sredinu
- d) Izračunati varijansu i standardno odstupanje

e) Naći modu

f) Naći medijanu

Rešenje:

x_i	f_i	f_{ri}	$x_i f_i$	x_i^2	$x_i^2 f_i$
1	6	$\frac{6}{36}$	6	1	6
2	3	$\frac{3}{36}$	6	4	12
3	10	$\frac{10}{36}$	30	9	90
4	8	$\frac{8}{36}$	32	16	128
5	5	$\frac{4}{36}$	25	25	125
6	4	$\frac{4}{36}$	24	36	144
Σ	36	1	123		505



$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} = \frac{123}{36} = 3,4$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^n f_i} - \bar{X}^2 = \frac{505}{36} - 3,4^2 = 2,47 \quad s = \sqrt{2,47} = 1,57$$

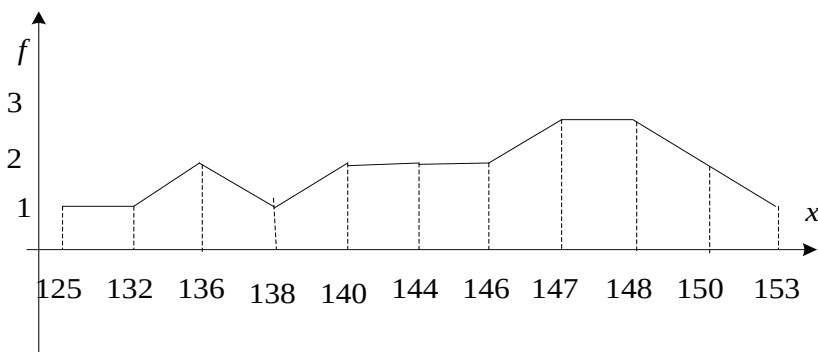
$$M_0 = 10 \quad M_e = \frac{10+8}{2}$$

4. Visine 20 učenika neke osnovne škole su: 147, 144, 125, 153, 132, 136, 150, 138, 148, 148, 140, 147, 146, 150, 148, 136, 140, 144, 146, 147.

- Odrediti raspodelu frekvencija
- Konstruisati poligon raspodele frekvencija
- Izračunati srednju vrednost
- Izračunati varijansu
- Izračunati medijanu
- Izračunati modu

Rešenje:

x_i	f_i	$x_i f_i$	x_i^2	$x_i^2 f_i$
125	1	125	15625	15625
132	1	132	17424	17424
136	2	272	18496	36992
138	1	138	19044	19044
140	2	280	19600	39200
144	2	288	20736	41472
146	2	292	21316	42632
147	3	441	21609	64827
148	3	444	21904	65712
150	2	300	22500	45000
153	1+	306	23409	23409
Σ =2865	=20	=3018		=411337



$$\bar{X} = \frac{2865}{20} = 143,25$$

$$s^2 = \frac{411337}{20} - 143,25^2 = 20566,85 - 20520,56 = 46,29$$

$$s = 6,8$$

$$M_e = 144$$

$$M_o = 147, M_o = 148$$

5. Data je slučajna promenljiva $X : \begin{pmatrix} 5 & 8 & 10 & 12 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Izračunati njenu aritmetičku, geometrijsku i harmonijsku sredinu.

Rešenje:

$$\bar{X} = \frac{1 \cdot 5 + 2 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 12}{8} = 9,625$$

$$G = \sqrt[8]{5 \cdot 8^2 \cdot 10^2 \cdot 12^3} = \sqrt[8]{55296000} = 9,29$$

$$H = \frac{8}{\frac{1}{5} + \frac{2}{8} + \frac{2}{10} + \frac{3}{12}} = 8,89$$

6. Četvorica radnika rade isti posao u fabrici cipela. Za 8h prvi radnik je završio i prekontrolisao 48 pari obuće, drugi radnik 80 pari, treći 96 i četvrti radnik 120 pari obuće. Izračunati prosečan broj završenih parova obuće.

Rešenje:

Ako prosečnu proizvodnju za 8h računamo preko:

Aritmetičke sredine imamo

$$\bar{X} = \frac{48 + 80 + 96 + 120}{4} = 86, \text{ a to je prosečan broj proizvedenih cipela.}$$

Harmonijske sredine je

Prosečno vreme po radniku koje je potrebno utrošiti za proizvodnju jednog para obuće:

$$\text{Prvi radnik } \frac{8 \cdot 60}{48} = 10 \text{ min} \quad \text{drugi radnik } \frac{8 \cdot 60}{80} = 6 \text{ min}$$

$$\text{treći radnik } \frac{8 \cdot 60}{96} = 5 \text{ min} \quad \text{četvrti radnik } \frac{8 \cdot 60}{120} = 4 \text{ min}$$

$$H = \frac{4}{\frac{1}{10} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4}} = 5,581 \text{ i to je prosečno vreme}$$

7. Četiri grupe studenta od 15, 20, 10 i 18 članova imaju visine 162, 148, 153 i 140cm. Naći aritmetičku sredinu njihovih visina.

Rešenje:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i f_i}{\sum_{i=1}^4 f_i} = \frac{15 \cdot 162 + 20 \cdot 148 + 10 \cdot 153 + 18 \cdot 140}{15 + 20 + 10 + 18} = 150.$$

8. Na kraju ispitnog roka 60 studenata informatike dobilo je sledeće ocene iz matematike i diskretne matematike.

Ocene matematike	5	6	7	8	9	10
Broj studenata	10	12	23	7	5	3

Ocene diskretne matematike	5	6	7	8	9	10
Broj studenata	9	9	11	20	6	5

Izračunati srednje ocene iz oba predmeta i standardno odstupanje.

Ocene x_{1i}	f_i	x_{1i}^2	$x_{1i} f_i$	$x_{1i}^2 f_i$
5	10	25	50	250
6	12	36	72	432
7	23	49	161	1127
8	7	64	56	448
9	5	81	45	405
10	3	100	30	300
	60		414	2962

$$\bar{X}_1 = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i f_i}{\sum_{i=1}^6 f_i} = \frac{414}{60} = 6,9, \quad s_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i^2 f_i}{\sum_{i=1}^6 f_i} - \bar{X}^2 = \frac{2962}{60} - (6,9)^2 = 1,72$$

$$s_1 = \sqrt{1,72} = 1,31$$

x_{2i}	f_i	x_{2i}^2	$x_{2i} f_i$	$x_{2i}^2 f_i$
5	9	25	45	225
6	9	36	54	324
7	11	49	77	539
8	20	64	160	1280
9	6	81	54	486
10	5	100	50	500
	60		440	3354

$$\bar{X}_2 = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i f_i}{\sum_{i=1}^6 f_i} = \frac{440}{60} = 7,34$$

$$s_2 = \sqrt{2,024} = 1,422$$

Koeficijent korelacije je relativna mera odstupanja koja pokazuje koje se obeležje više menja u odnosu na aritmetičku sredinu.

$$M : \frac{s_1}{\bar{X}_1} = \frac{1,31}{6,9} = 0,19 \quad DM : \frac{s_2}{\bar{X}_2} = \frac{1,71}{7,43} = 0,23$$

Ocene iz diskretne matematike pokazuju veću promenljivost.

9. U fabrici čokolade u prvih 6 meseci proizvedeno je

meseci	1	2	3	4	5	6
Proizvodnja u tonama	34	44	29	51	45	62

Izračunati srednju proizvodnju, standardno odstupanje, modu i medijanu.

10. Pretpostavimo da su težine studenata normalno raspoređene $N(68\text{kg}, 9\text{kg})$. Uzet je uzorak od 25 studenata. Sa kojom verovatnoćom možemo očekivati da će se aritmetička sredina težina naći u granicama od 66,8 do 68,3kg?

Rešenje:

$$\mu = \mu_x = \mu_{\bar{x}} = 68 \text{ i } s = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{25}} = 0,6 \text{ ,}$$

Aritmetička sredina ima raspodelu $\bar{X} : N(68; 0,6)$.

Standardna slučajna promenljiva Z ima raspodelu $N(0,1)$, pa je

$$P(66,8 < \bar{X} < 68,3) = P\left(\frac{66,8 - 68}{0,6} < \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{68,3 - 68}{0,6}\right) =$$

$$P(-2 < Z < 0,5) = \Phi(0,5) - \Phi(-2) = 0,6687$$

11. U fabrici se proizvode kuglice. Prečnik kuglice ima raspodelu . Sa proizvodne trake se uzimaju uzorci obima 100 delova. Izračunati verovatnoću da aritmetička sredina uzorka odstupa od očekivane vrednosti za manje od 0,01.

Rešenje:

$$\mu = 1, \sigma = 1, n = 100$$

Traži se verovatnoća

$$P\left\{\left|\bar{X} - \mu\right| < z\right\} = P\left\{-0,01 < \bar{X} - \mu < 0,01\right\} = P\left\{\frac{-0,01}{\frac{1}{\sqrt{100}}} < \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{0,01}{\frac{1}{\sqrt{100}}}\right\} =$$

$$P\left\{-0,1 < Z < 0,1\right\} = 2\Phi(0,1) - 1 = 2 \cdot 0,5398 - 1 = 0,0796$$

12. Izračunati koliki treba uzeti obim uzorka iz populacije sa normalnom raspodelom, nepoznatog matematičkog očekivanja i $\sigma^2 = 100$, tako da verovatnoća odstupanja srednje vrednosti uzorka od očekivane vrednosti populacije za manje od 5 jedinica iznosi 0,954.

Rešenje:

$$\mu, \sigma = 10$$

$$P\left\{\left|\bar{X} - \mu\right| < z\right\} = P\left\{-5 < \bar{X} - \mu < 5\right\} = 0,954$$

$$= P\left\{\frac{-5}{\frac{10}{\sqrt{n}}} < \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{5}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\right\} = P\left\{-\frac{\sqrt{n}}{2} < Z < \frac{\sqrt{n}}{2}\right\} = 0,954$$

$$= 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) - 1 = 0,954 \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{2} = 2 \Rightarrow n = 16$$

13. Za prečnik X nekog dela zna se da ima normalnu raspodelu sa varijansom 100. Kontrolor je uzeo 9 delova. Sa kojom verovatnoćom kontrolor može računati da će aritmetička sredina na uzorku odstupiti od matematičkog očekivanja za manje od 5 po apsolutnoj vrednosti.

Rešenje:

$$P\left\{\left|\bar{X} - \mu\right| < 5\right\} = P\left\{-5 < \bar{X} - \mu < 5\right\} =$$

$$= P\left\{\frac{-5}{\frac{10}{\sqrt{9}}} < \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{5}{\frac{10}{\sqrt{9}}}\right\} = P\left\{-\frac{3}{2} < Z < \frac{3}{2}\right\} = 0,8664$$

14. Iz populacije sa normalnom raspodelom $N(\mu, 16)$ uzet je uzorak obima 16. Neka je aritmetička sredina $\bar{X}$. Izračunati verovatnoću da nepoznati parametar μ populacije bude u opsegu $(4, 6)$.

Rešenje:

$$P(4 < \mu < 6) = P(-6 < -\mu < -4) = P\left\{\frac{5-6}{\frac{4}{\sqrt{16}}} < \bar{X} - \mu < \frac{5-4}{\frac{4}{\sqrt{16}}}\right\} =$$

$$= P\{-1 < Z < 1\} = 0,6826$$

8. OCENJIVANJE PARAMETARA RASPODELA

Jedan od osnovnih zadataka sa kojim se sreće matematička statistika je određivanje numeričkih karakteristika, odnosno parametara obeležja X raspodele verovatnoća, osnovne populacije, pomoću nekog njenog nezavisnog uzorka $(X_1, X_2, \dots, X_n)$

Kako nismo u mogućnosti da odredimo tačne vrednosti parametara vrši se njihova ocena.

Znamo da je uzorak je deo populacije o kojoj je potrebno doneti zaključak. Prilikom zaključivanja uvek je moguće napraviti grešku i nikada nećemo 100% biti sigurni u ispravnost donetog zaključka. Iz tog razloga ocenjivanje se mora se pažljivo raditi da bi se greška ako ne uklonila, onda minimizovala.

Na osnovu iskustva ili poznavanja prirode posmatranog problema ponekad smo u mogućnosti da prepoznamo o kojoj je raspodeli reč i da procenimo nepoznate parametre. U raspodelama koje smo do sada proučavali sretali smo se sa različitim parametrima. Veličine p , n u binomnoj raspodeli, λ u Poasonovoj raspodeli, ili μ, σ u normalnoj raspodeli.

U praksi najčešće ne poznajemo ni raspodelu, ni vrednosti njenih odgovarajućih parametara.

Ukoliko nemamo neku informaciju o parametru, onda **ocenjujemo nepoznati parametar**, a ako imamo informaciju **testiramo hipotezu**.

Prvo ćemo se pozabaviti problemom ocenjivanja parametara.

Primer:

Ako ispitujemo visinu svih ljudi jedne države možemo pretpostaviti da ova promenljiva ima normalnu raspodelu.

Međutim, mi ne znamo unapred koliko je matematičko očekivanje - srednja vrednost visine.

Moramo da ga ocenimo na osnovu statističkih podataka.

Primer:

Pretpostavimo da znamo broj uspešnih realizacija nekog eksperimenta. Znamo da je u pitanju binomna raspodela, ali ne znamo kolika je verovatnoća p i možemo samo da odredimo približnu vrednost.

Primer:

Ako želimo da predvidimo rezultate izbora, ne znamo proporcionalno broj ljudi koji će da pruže podršku nekom određenom kandidatu. Znači ne znamo ni raspodelu ni parametre.

Međutim, u mogućnosti smo da izaberemo slučajan uzorak i pokušamo da izvršimo procenu.

Ovaj zadatak se naziva **ocenjivanje ili estimacija parametara**, a tako dobijene vrednosti nazivamo **ocene parametara**.

Skup svih mogućih vrednosti parametra θ populacije obeležavamo sa Θ . Na osnovu uzorka $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ obima n , izvodi se ocena nepoznatog parametra θ u obliku funkcije $\bar{\theta} = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Parametri uzorka $\bar{\theta}$, nazivaju se **statistike**. Za svaki uzorak možemo izračunati bar jednu statistiku.

Na osnovu zakona velikih brojeva $\bar{\theta} \rightarrow \theta$ kada $n \rightarrow \infty$, po verovatnoći. Greška ocene $\bar{\theta}$ u odnosu na tačnu vrednost θ može se učiniti proizvoljno malom ako je uzorak dovoljno veliki.

Koriste se dve vrste ocena parametara. To su **tačkaste i intervalne ocene**.

- **Tačkasta ocena** je slučajna promenljiva koja se dobija na osnovu proizvoljno mnogo uzoraka date populacije. Tek kada se precizira konkretan uzorak tačkasta ocena postaje jedan određen broj. Tačkasta ocena uvek daje samo približnu vrednost parametara. Ako je uzorak mali moguća su velika odstupanja procene od stvarne vrednosti.

- Ako su ocene parametara izražene u intervalima, onda se one nazivaju **intervalne ocene**. Ovi intervali se nazivaju i **intervali poverenja** (pouzdanosti). Interval sa unapred datom pouzdanošću, odnosno verovatnoćom, obuhvata nepoznati parametar. Osnovni postupak svodi se da se prvo definiše tačkasta ocena parametra, a zatim se oko nje formira interval poverenja.

OSOBINE OCENA

Ocena treba da bude:

- **Centrirana ili nepristrasna**

$$E(\bar{\theta}) = \theta$$

Centriranost znači da ne postoji odstupanje date procene od prave vrednosti.

- **Efikasna** je ona ocena koja ima minimalnu varijansu.

$$D(\bar{\theta}_1) \rightarrow \min$$

Za dve centrirane ocene $\bar{\theta}_1$ i $\bar{\theta}_2$, efikasnija je ona ocena koja ima manju varijansu.

$$D(\bar{\theta}_1) < D(\bar{\theta}_2).$$

Primer:

Dat je uzorak od 5 elemenata iz populacije sa sredinom μ i neke njegove ocene.

Koja je od sledećih ocena ovog parametra nepristrasna, a koja je najefikasnija?

$$\bar{\mu}_1 = X_4,$$

$$\bar{\mu}_2 = \frac{2X_1 - X_2}{2}$$

$$\bar{\mu}_3 = \frac{X_1 + X_2 + X_5}{5},$$

$$\bar{\mu}_4 = \frac{X_1 + 2X_2 + X_5}{4}$$

$$\bar{\mu}_5 = 2X_1 - X_2,$$

$$\bar{\mu}_6 = \frac{X_2 + X_5}{2}$$

Znajući da je $E(ax + b) = aE(x) + b$ i $E(x + y) = E(x) + E(y)$, imamo:

$$E(\bar{\mu}_1) = E(X_4) = \mu$$

$$E(\bar{\mu}_2) = \frac{E(2X_1 + X_2)}{2} = \frac{2\mu + \mu}{2} = \frac{3\mu}{2}$$

$$E(\bar{\mu}_3) = \frac{E(X_1 + X_2 + X_5)}{5} = \frac{3\mu}{5}$$

$$E(\bar{\mu}_4) = \frac{E(X_1 + 2X_2 + X_5)}{4} = \mu$$

$$E(\bar{\mu}_5) = E(2X_1 - X_2) = \mu$$

$$E(\bar{\mu}_6) = \frac{E(X_2 + X_5)}{2} = \mu$$

Centrirane su prva, četvrta, peta i šesta ocena.

Kako je $D(ax + b) = a^2 D(x)$ i $D(x + y) = D(x) + D(y)$,

i posmatrajući samo centrirane ocene imamo da je

$$D(\bar{\mu}_1) = D(X_1) = \sigma^2$$

$$D(\bar{\mu}_4) = \frac{D(X_1 + 2X_2 + X_5)}{16} = \frac{6}{16}\sigma^2 = \frac{3}{8}\sigma^2$$

$$D(\bar{\mu}_5) = 4D(X_1) + D(-X_2) = 5\sigma^2$$

$$D(\bar{\mu}_6) = \frac{D(X_2 + X_5)}{4} = \frac{2\sigma^2}{4} = \frac{\sigma^2}{2}$$

Najmanju varijansu ima četvrta ocena, znači ona je najefikasnija.

8.1. TAČKASTE OCENE

Posmatrajmo obeležje X i neka je θ parametar posmatrane populacije, a $\bar{\theta}$ vrednost uočenog parametra dobijenog na osnovu uzorka.

Treba imati u vidu da su parametri populacije nepoznati, ali fiksni brojevi. Sa druge strane ocene-parametri uzorka, variraju od uzorka do uzorka i uzimaju različite vrednosti. Znači ocena je jedna slučajna promenljiva. Tek kada odaberemo jedan konkretan uzorak i iz njega izračunamo ocenu, dobićemo konkretan broj.

Definicija:

Slučajna promenljiva $\bar{\theta} = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ koja se koristi za ocenu nepoznatog parametra θ zove se **tačkasta ocena**.

Ako je $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ jedna realizacija slučajnog uzorka $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, tada se broj $\bar{\theta} = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ zima za ocenu parametra θ .

Ova definicija dopušta da se na mnogo različitih načina definišu ocene za isti parametar θ . Na primer, ako hoćemo da ocenimo matematičko očekivanje μ populacije, kao ocenu možemo da koristimo aritmetičku sredinu uzorka, modu, medijanu, geometrijsku sredinu, harmonijsku sredinu i sl. Neke od ovih vrednosti parametar ocenjuju bolje, a neke slabije.

8.1.1. TAČKASTA OCENA MATEMATIČKOG OČEKIVANJA

Definicija:

Neka su $X_1, X_2, \dots, X_n$, n nezavisnih slučajnih promenljivih sa istom raspodelom $N(\mu, \sigma^2)$.

Standardna tačkasta ocena matematičkog očekivanja slučajne promenljive je aritmetička sredina,

$$E(\bar{X}) = \frac{E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)}{n} = \frac{n\mu}{n} = \mu.$$

8.1.2. TAČKASTA OCENA DISPERZIJE

Definicija:

Ocena disperzije nezavisnih slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \dots, X_n$, gde je $\bar{X}$ aritmetička sredina, data je izrazom

$$s^2(\bar{X}) = \frac{D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n)}{n^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Aritmetička sredina $\bar{X}$ ima normalnu raspodelu $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$. Ona je centrirana ocena matematičkog očekivanja jer je $E(\bar{X}) = \mu$.

Disperzija uzorka $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2$ nije centrirana ocena disperzije populacije σ^2 , zato što je $E(s^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$. Centrirana ocena bi bila ako bi uzeli da je

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2.$$

Primer:

Sredina uzorka $\bar{X}$ nije jedina centrirana ocena matematičkog očekivanja μ .

To su i $\bar{\mu}_1 = X_1$, $\bar{\mu}_2 = \frac{X_1 + X_2}{2}$, $\bar{\mu}_3 = \frac{5X_1 + X_2}{6}$, zato što je

$$E(\bar{\mu}_1) = E(X_1) = \mu, E(\bar{\mu}_2) = E\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right) = \frac{\mu + \mu}{2} = \mu, E(\bar{\mu}_3) = E\left(\frac{5X_1 + X_2}{6}\right) = \frac{5\mu + \mu}{6} = \mu$$

U prethodnom slučaju imamo da je

$$D(\bar{\mu}_1) = D(X_1) = \sigma^2,$$

$$D(\bar{\mu}_2) = \frac{D(X_1 + X_2)}{4} = \frac{\sigma^2 + \sigma^2}{4} = \frac{\sigma^2}{2}$$

$$D(\bar{\mu}_3) = \frac{D(5X_1 + X_2)}{36} = \frac{25\sigma^2 + \sigma^2}{36} = \frac{13}{18}\sigma^2$$

Najefikasnija je druga ocena, zato što je to ocena sa najmanjom varijansom.

8.1.3. TAČKASTE OCENE VEROVATNOĆE

Parametrom raspodele obeležja X može se smatrati i **verovatnoća** p ostvarivanja nekog slučajnog događaja A koji se može opisati pomoću slučajne promenljive X . Ako se eksperiment ponavlja n puta, onda dobijamo n slučajnih promenljivih $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ koje imaju Binomnu raspodelu $B(n, p)$, sa poznatim parametrom n i nepoznatim parametrom p .

Definicija:

Kao ocena parametra p uzima se relativna frekvenca $\bar{p}$ pojavljivanja događaja A u uzorku $(X_1, X_2, \dots, X_n)$,

$$\bar{p} = \frac{\bar{X}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n j_i,$$

gde prilikom izračunavanja $\bar{X}$ veličine x_i mogu samo da uzimaju vrednosti 0 ili 1, zavisno od toga da li se u ponavljanju Bernulijevog eksperimenta događaj realizovao ili ne. $j_i = 1$ ako se događaj realizovao, inače je $j_i = 0$.

U definisanju procene verovatnoće korišćeno je da je $\mu = np \Rightarrow p = \frac{\mu}{n} \square \frac{\bar{X}}{n}$.

Primer:

Fabrika proizvodi kuglice standardnog prečnika 3,00 mm. Kuglica se smatra ispravnom ako njen prečnik odstupa od standardne najviše za 0,03 mm. Na osnovu uzorka od 11 kuglica dobijene su sledeće vrednosti dužina prečnika u mm: 3,02; 3,04; 2,98; 3,00; 3,01; 2,98; 2,99; 3,00; 3,06; 2,99; 3,05.

Naći ocenu verovatnoće p da je kuglica koja je proizvedena ispravna.

Kako je za 8 prečnika iz datog uzorka odstupanje od nominalnog manje od 0,03mm, to je

$$\bar{p} = \frac{1}{11} \cdot 8 = 0,73, \text{ jer je}$$

$$j_1 = j_3 = j_4 = j_5 = j_6 = j_7 = j_8 = j_{10} = 1, \text{ a } j_2 = j_9 = j_{11} = 0.$$

8.2. INTERVALI POVERENJA

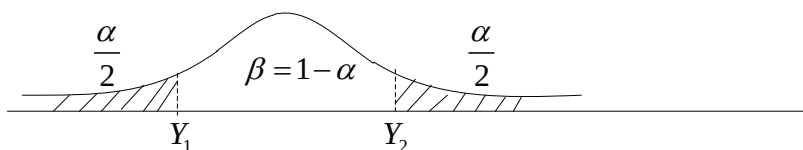
Pri ocenjivanju parametara $\theta_1, \theta_2, \dots$ raspodela, mnogo preciznije je naći intervale koji sa velikom verovatnoćom sadrže vrednost nepoznatog parametara.

Ovi intervale zovu se **intervali poverenja** ili **intervali pouzdanost**

Interval poverenja se uvek vezuje za unapred izabranu verovatnoću, koja se obično obeležava sa β i naziva **nivo poverenja**.

Ako su granice traženog intervala Y_1, Y_2 tada verovatnoća da će se procenjena vrednost parametra naći u datom intervalu iznosi $p = \int_{Y_1}^{Y_2} f(x) dx$. Da bi se odredio

interval poverenja, dakle, treba odrediti površinu čija je vrednost $\beta = 1 - \alpha$, a zaklapa je kriva gustine sa x-osom. Za verovatnoću β najčešće se uzima da je 0.9; 0.95 ili 0.99.



Definicija:

Neka je $X_1, X_2, \dots, X_n$ uzorak obeležja X , sa raspodelom $F(X, \theta)$, gde je θ nepoznati parametar.

Ako su $Y_1 = \bar{\theta}_1 = f_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$ i $Y_2 = \bar{\theta}_2 = f_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ dve statistike nad datim uzorkom za koji važi $P(\bar{\theta}_1 < \theta < \bar{\theta}_2) = \beta = 1 - \alpha$,

tada interval $[\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2]$ se naziva **interval poverenja** sa nivoom poverenja β .

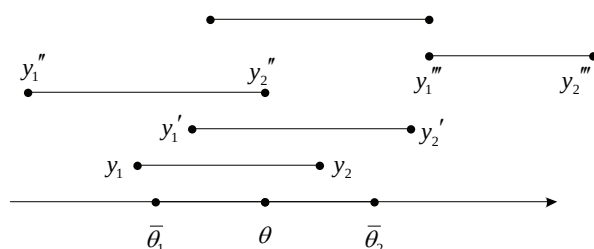
Interval $[\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2]$ je slučajan interval jer su mu krajnje tačke promenljive. Kada se definiše uzorak i dobiju brojevi $x_1, x_2, \dots, x_n$, tada statistike $Y_1 = \bar{\theta}_1$ i $Y_2 = \bar{\theta}_2$ postaju određeni brojevi $y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Slučajni

interval $[\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2]$ postaje brojni interval $[y_1, y_2]$. To naravno ne znači da svaki interval $[y_1, y_2]$ obavezno mora da sadrži parametar θ sa verovatnoćom β .

Zamislamo da smo uzeli više serija uzoraka obima n i dobili brojeve

$$(x_1, x_2, \dots, x_n), (x'_1, x'_2, \dots, x'_n), (x''_1, x''_2, \dots, x''_n), \dots$$

Ako smo izračunali njihove intervale poverenja $[y_1, y_2], [y'_1, y'_2], [y''_1, y''_2], \dots$ i kako je $P(\bar{\theta}_1 < \theta < \bar{\theta}_2) = \beta$, može se reći da približno $100\beta\%$ brojnih intervala pokriva nepoznati parametar θ



Postoji mogućnost da izračunati interval ne sadrži tačnu vrednost parametra. Na primer ako je verovatnoća 0,95, onda sa pouzdanošću od 95% nepoznati parametar se nalazi u izračunatom intervalu, ali postoji 5% mogućnosti da ne pripada.

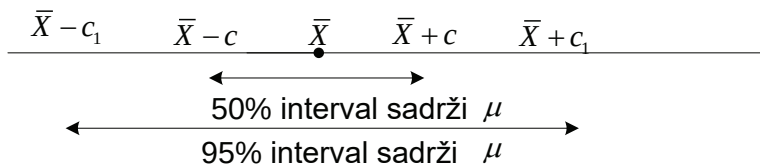
8.2.1. INTERVAL POVERENJA ZA MATEMATIČKO OČEKIVANJE

KADA JE POZNATA DISPERZIJA σ^2

Kao što smo već pokazali, ako slučajna promenljiva X ima normalnu raspodelu $N(\mu, \sigma^2)$, tada aritmetička sredina uzorka $\bar{X}$ ima normalnu raspodelu oblika

$N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$. Znači, aritmetička sredina $\bar{X}$ može da aproksimira matematičko očekivanje μ .

Slučajni interval $(\bar{X} - c, \bar{X} + c)$ treba da pokriva nepoznati parametar μ sa unapred zadatom verovatnoćom.



Izračunavanje granica traženog intervala poverenja, za zadatu verovatnoću, odnosno nivo poverenja, $\beta = 1 - \alpha$, vrši se pomoću tablica normalne standardne raspodele.

Teorema:

Neka je $X_1, X_2, \dots, X_n$ nezavisan uzorak normalne raspodele $N(\mu, \sigma^2)$.

Interval poverenja za nepoznato matematičko μ i poznatu varijansu σ^2 može biti:

dvostrani interval poverenja

$$I : \left[\bar{X} - z_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

ili **jednostrani intervali poverenja**

$$I : \left(-\infty, \bar{X} - z_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right], \quad I : \left[\bar{X} + z_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty \right)$$

Dokaz:

Statistika $\bar{X}$ ima normalnu raspodelu $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, a statistika $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ ima standardnu normalnu raspodelu $N(0,1)$

Za dvostrani interval, važi da je

$$P(\bar{X} - c < \mu < \bar{X} + c) = \beta \Leftrightarrow P(-c < \mu - \bar{X} < c) = \beta$$

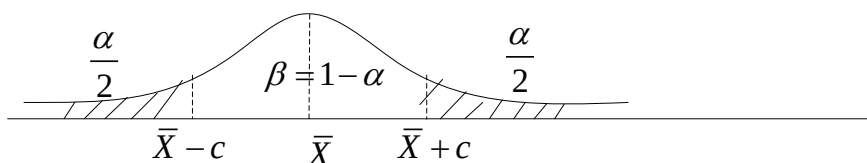
$$P(c > \bar{X} - \mu > -c) = \beta \Leftrightarrow P(-c < \bar{X} - \mu < c) = \beta$$

$$P\left(\frac{-c}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{c}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = P\left(-z_\beta < \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_\beta\right) =$$

$$P\left(\bar{X} - z_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \beta$$

na osnovu čega se dobija interval poverenja za matematičko očekivanje

$$I: \left[\bar{X} - z_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$



Izraz $z_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ naziva se **greška aritmetičke sredine (srednje vrednosti)**.

Dužina intervala: $d = \bar{X} + z_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \left(\bar{X} - z_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = 2z_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Dužina intervala

se smanjuje sa porastom obima uzorka n .

Primer:

Godišnji prinos neke poljoprivredne kulture je slučajna promenljiva X sa standardnim odstupanjem od 16 jedinica. Na 100 kontrolnih parcela izmeren je srednji prinos od 175 jedinica. Odrediti 99% dvostrani interval poverenja za očekivani prinos poljoprivredne kulture.

Imamo da je $\sigma = 16$, $n = 100$, $\bar{X} = 175$, $\beta = 0,99$

Interval poverenja za nepoznato matematičko očekivanje kada je poznata disperzija iznosi

$$I : \left[\bar{X} - z_{\beta} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\beta} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Iz tablica se čita da je $z_{0,99} = 2,58$, pa je

$$I : \left[175 - 2,58 \frac{16}{\sqrt{100}}; 175 + 2,58 \frac{16}{\sqrt{100}} \right] = [170,872; 179,128].$$

Znači, sa pouzdanosću od 99% zaključuje se da očekivani prinos poljoprivredne kulture se nalazi u datom intervalu.

Odgovor da prosečna vrednost očekivane kulture se nalazi u datom intervalu ne bi bio korektan, jer bi to značilo da smo 100% sigurni da se očekivana vrednost nalazi u izračunatom intervalu.

Ako bi koristili pojam verovatnoće, vrednost očekivanog prinosa bi se ili nalazila u izračunatom intervalu, pa bi verovatnoća bila 1, ili ne bi pripadala intervalu pa bi verovatnoća bila 0. Znači verovatnoća nikada ne može biti 0,99.

Primer:

Na osnovu uzorka od $n = 45$ komada nekog proizvoda sa normalnom raspodelom

$N(\mu, 48)$ izračunata je aritmetička sredina $\bar{X} = 32$. Naći 95% interval poverenja za nepoznatu sredinu populacije-matematičko očekivanje⁸.

$$n = 45, \bar{X} = 32, \sigma^2 = 48 \quad z_{0,95} = 1,96$$

$$I : \left[\bar{X} - z_{\beta} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\beta} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

$$I : \left[32 - 1,96 \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{45}}; 32 + 1,96 \frac{\sqrt{48}}{\sqrt{45}} \right] = [29,98; 34,02].$$

8.2.2. INTERVAL POVERENJA ZA MATEMATIČKO OČEKIVANJE μ KADA JE NEPOZNATA DISPERZIJA μ

Interval poverenja za matematičko očekivanje μ ako je nepoznata disperzija σ^2 , određuje se na osnovu aproksimacije disperzije uzoračkom disperzijom s^2 , gde je

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2.$$

Statistika $T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ ima studentovu raspodelu sa $n-1$ stepenom slobode, a broj

$t = t_{\beta}(n-1)$ određuje se na osnovu tablica vrednosti t raspodele.

Za n treba uzimati vrednosti manje od 30. Ukoliko je uzorak veći od 30 studentova raspodela se aproksimira normalnom raspodelom i uzima da je $\sigma \approx s$

Teorema:

Ako je $X_1, X_2, \dots, X_n$ uzorak iz normalne raspodele $N(\mu, \sigma^2)$, pri čemu su i

matematičko očekivanje i varijansa nepoznate, intervali poverenja su:

dvostrani interval poverenja

$$I : \left[\bar{X} - t \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t \frac{s}{\sqrt{n}} \right],$$

jednostrani intervali poverenja

$$I : \left(-\infty, \bar{X} - t \frac{s}{\sqrt{n}} \right], I : \left[\bar{X} + t \frac{s}{\sqrt{n}}, +\infty \right)$$

Dokaz:

$$P(-t < T < t) = P\left(-t < \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} < t\right) = P\left(\bar{X} - t \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = \beta$$

$$I: \left[\bar{X} - t \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

Interval poverenja u slučaju kada je disperzija poznata je uži nego u slučaju kada disperzija nije poznata. To je za očekivati jer se ocenom i disperzije unosi dodatna nesigurnost. Za veliko n , praktično nema razlike u slučajevima kada je σ^2 poznato ili ne, zato što se tada t raspodela aproksimira normalnom.

Primer:

Uočen je uzorak od 10 proizvoda. Na osnovu izmerenih vrednosti uzorka dobijena je sredina $\bar{X} = 3$ i ocena disperzije $s^2 = 0,25$. Odrediti dvostrani interval poverenja za nepoznato matematičko očekivanje sa verovatnoćom od $\beta = 0,95$

Imamo da je $s^2 = 0,25$; $s = 0,5$; $n = 10$; $\bar{X} = 3$; $\beta = 0,95$.

Iz tablica studentovu raspodelu dobijamo da je $t_{0,95}(9) = 2,262$.

Interval poverenja za nepoznato matematičko očekivanje kada je nepoznata disperzija iznosi

$$I: \left[\bar{X} - t \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

$$I: \left[3 - 2,262 \frac{0,5}{\sqrt{10}}; 3 + 2,262 \frac{0,5}{\sqrt{10}} \right] = [2,64; 3,357].$$

8.2.3. INTERVAL POVERENJA ZA NEPOZNATU DISPERZIJU σ^2

U ovom slučaju koristimo statistiku $\chi^2 = \frac{ns^2}{\sigma^2}$ koja ima χ^2 raspodelu sa $n-1$ stepena slobode.

Dokaz

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \Rightarrow s^2 = \frac{\sigma^2}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 = \frac{\sigma^2}{n} \chi_{n-1}^2, \text{ koja ima } \chi_{n-1}^2$$

raspodelu.

Teorema:

Ako je $X_1, X_2, \dots, X_n$ uzorak sa normalnom raspodelom $N(\mu, \sigma^2)$

Interval poverenja za nepoznatu disperziju za nivo poverenja $\beta = 1 - \alpha$ i $n - 1$ stepena slobode je:

jednostrani interval poverenja

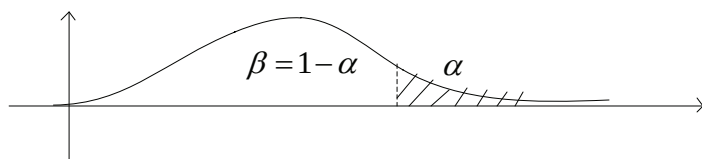
$$I : \left[0; \frac{ns^2}{\chi^2_{n-1, \alpha}} \right]$$

dvostrani interval poverenja

$$I : \left[\frac{ns^2}{\chi^2_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}}; \frac{ns^2}{\chi^2_{n-1, \frac{\alpha}{2}}} \right]$$

Dokaz:

Jednostrani interval:



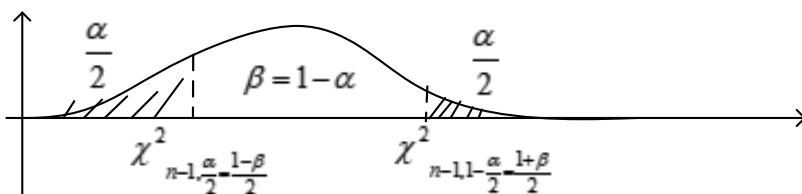
U tablicama χ^2 raspodele date su vrednosti $\chi^2_{n-1, \alpha}$ za koje je ispunjeno

$$P\left(\frac{n \cdot s^2}{\sigma^2} > \chi^2_{n-1, \alpha}\right) = \alpha$$

$$P\left(0 < \sigma^2 < \frac{n \cdot s^2}{\chi^2_{n-1, \alpha}}\right) = \alpha$$

pa je interval $I : \left[0; \frac{ns^2}{\chi^2_{n-1, \alpha}} \right]$.

Dvostrani interval



Kako je

$$P\left(\chi^2_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} < \chi^2_{n-1} < \chi^2_{n-1, \frac{\alpha}{2}}\right) = P\left(\chi^2_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{ns^2}{\sigma^2} < \chi^2_{n-1, \frac{\alpha}{2}}\right) =$$

$$P\left(\frac{ns^2}{\chi^2_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}} < \sigma^2 < \frac{ns^2}{\chi^2_{n-1, \frac{\alpha}{2}}}\right) = 1 - \alpha$$

odnosno interval

$$I = \left(\frac{ns^2}{\chi^2_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}}; \frac{ns^2}{\chi^2_{n-1, \frac{\alpha}{2}}} \right)$$

Kako je $1 - \alpha = \beta \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \beta}{2}, \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \beta}{2}$, interval se može pisati u

obliku
$$I = \left[\frac{ns^2}{\chi^2_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}}; \frac{ns^2}{\chi^2_{n-1, \frac{\alpha}{2}}} \right]$$

Disperzija obeležja X na neki meri način homogenost tog obeležja pa je često važno odrediti samo gornju granicu disperzije i češće se koriste jednostrani intervali.

Primer:

Iz populacije sa normalnom raspodelom uzet je uzorak veličine 20 i izračunata je njegova disperzija koja iznosi 1,8. Naći 95% interval poverenja za nepoznatu disperziju.

Za $n = 20$ $s^2 = 1,8$, $\beta = 0,95$

Jednostrani interval

$$\chi^2_{n-1; \alpha=1-\beta} = \chi^2_{19; 0,05} = 10,1$$

$$I: \left[0; \frac{ns^2}{\chi^2_{n-1, \alpha}} \right] = \left[0; \frac{18 \cdot 1,8}{10,1} \right] = [0; 3,207].$$

Dvostrani interval

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\beta}{2} = 0,025 \text{ i } 1 - \frac{\alpha}{2} = \frac{1+\beta}{2} = 0,975, \text{ dobijamo}$$

$$\chi^2_{19;0,975} = 32,825 \text{ i } \chi^2_{19;0,025} = 8,91$$

$$I: \left[\frac{ns^2}{\chi^2_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}}; \frac{ns^2}{\chi^2_{n-1, \frac{\alpha}{2}}} \right] = \left[\frac{18 \cdot 1,8}{32,9}; \frac{18 \cdot 1,8}{8,91} \right] = [0,984; 3,636]$$

8.2.4.INTERVAL POVERENJA ZA NEPOZNATU VEROVATNOĆU p BINOMNE RASPODELE

Neka je zadata slučajna promenljiva X koja ima binomnu raspodelu $B(n, p)$.

Za velike vrednosti broja n slučajna promenljiva X, ima približno normalnu raspodelu sa matematičkim očekivanjem $\mu = np$ i disperzijom $\sigma^2 = np(1-p)$.

Statistika $Z = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ ima približno normalnu raspodelu $N(0,1)$, gde je

S_n broj koji pokazuje koliko se puta u uzorku obima n realizuje dati događaj, a p je verovatnoća.

Uobičajeno je da je $n > 30$, odnosno $np > 5$.

Napomena: Može da se koristi i statistika $Z = \frac{p - p_0}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$

$$P\left(-z_{\beta} < \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < z_{\beta}\right) = \beta$$

$$P\left(\left|\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right| < z_{\beta}\right) = \beta$$

$$P\left(\frac{(S_n - np)^2}{np(1-p)} < z_{\beta}^2\right) = \beta$$

Traženi interval $I: (\bar{p}_1, \bar{p}_2)$, gde su $\bar{p}_1$ i $\bar{p}_2$ dobija se kao rešenja kvadratne jednačine

$$(n^2 + nz_{\beta}^2)p^2 - (2nS_n + nz_{\beta}^2)p + S_n^2 = 0$$

Primer:

Među 10 izabranih proizvoda uočeno je da je samo jedan škart. Naći 95% interval poverenja za nepoznatu verovatnoću.

Kako je $n = 10$; $S_n = 1$, a na osnovu tablice za standardnu normalnu raspodelu dobijamo

da je $z_{\beta} = z_{0,95} = 1,96$.

$$\frac{(S_n - np)^2}{np(1-p)} < z_{\beta}^2 \Rightarrow \frac{(1-10p)^2}{10p(1-p)} < 1,96^2$$

$$138p^2 - 58,4p + 1 = 0$$

$$\bar{p}_1 = 0,018 \quad \bar{p}_2 = 0,404$$

$$I: [\bar{p}_1; \bar{p}_2] = [0,018; 0,404].$$

8.3. VAŽNI OBRASCI

Centrirane ili nepristrasne ocene $E(\bar{\theta}) = \theta$

Efikasna ocena $D(\bar{\theta}_1) < D(\bar{\theta}_2)$

Ocena matematičkog očekivanja $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$

Ocena varijanse $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2$

Ocena parametra p

$$\bar{p} = \frac{\bar{X}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n j_i, \text{ gde je } j_i = 1, \text{ ako je } x_i = 1, \text{ inače je } j_i = 0.$$

Intervali poverenja za nepoznato μ i poznato σ

$$I: \left[\bar{X} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right], I: \left(-\infty, \bar{X} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right], I: \left[\bar{X} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty \right)$$

gde je $z = z_\beta$ -tablica normalne raspodele.

Intervali poverenja za nepoznato μ i σ nepoznato

$$I: \left[\bar{X} - t \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t \frac{s}{\sqrt{n}} \right], I: \left(-\infty, \bar{X} - t \frac{s}{\sqrt{n}} \right], I: \left[\bar{X} + t \frac{s}{\sqrt{n}}, +\infty \right)$$

gde je $t = t_\beta(n-1)$ -tablica studentove t raspodele.

Intervali poverenja za nepoznato σ

$$I: \left[0; \frac{ns^2}{\chi_{n-1, \alpha}^2} \right], I: \left[\frac{ns^2}{\chi_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}^2}; \frac{ns^2}{\chi_{n-1, \frac{\alpha}{2}}^2} \right]$$

gde se koristi χ^2 -tablica χ^2 raspodele.

Intervali poverenja za verovatnoću p

$$(n^2 + nz_\beta^2) p^2 - (2nS_n + nz_\beta^2) p + S_n^2 = 0$$

$z = z_\beta$ -tablica normalne raspodele.

8.4. ZADACI

1. Iz populacije sa sredinom μ uzet je uzorak veličine 4. Koje od sledećih ocena ovog parametra su nepristrasne, a koja je najefikasnija?

$$\bar{\mu}_1 = X_3, \bar{\mu}_2 = \frac{2X_1 + X_4}{2}, \bar{\mu}_3 = \frac{X_1 + X_3 + X_4}{5}$$
$$\bar{\mu}_4 = \frac{X_1 + 2X_3 - X_4}{2}, \bar{\mu}_5 = 2X_1 - \frac{X_3}{2}, \bar{\mu}_6 = \frac{X_2 + X_3}{3}$$

Rešenje:

$$E(\bar{\mu}_1) = \mu,$$

$$E(\bar{\mu}_2) = \frac{E(2X_1 + X_4)}{2} = \frac{3}{2}\mu,$$

$$E(\bar{\mu}_3) = \frac{E(X_1 + X_3 + X_4)}{5} = \frac{3}{5}\mu,$$

$$E(\bar{\mu}_4) = \frac{E(X_1 + 2X_3 - X_4)}{2} = \mu$$

$$E(\bar{\mu}_5) = E\left(2X_1 - \frac{X_3}{2}\right) = \frac{3}{2}\mu,$$

$$E(\bar{\mu}_6) = \frac{E(2X_2 + X_3)}{3} = \mu$$

Nepristrasne su prva, četvrta i šesta ocena.

Upoređujući vrednosti njihovih disperzija dobijamo

$$D(\bar{\mu}_1) = \sigma^2,$$

$$D(\bar{\mu}_4) = \frac{D(X_1 + 2X_3 - X_4)}{4} = \sigma^2$$

$$D(\bar{\mu}_6) = \frac{D(2X_2 + X_3)}{9} = \frac{9}{5}\sigma^2$$

da su druga i četvrta ocena podjednako efikasne.

2. Merenjem prečnika lopte dobijen je uzorak od 5 merenja 6,33; 6,37; 6,36; 6,35; i 6,37. Na osnovu uzorka odrediti centriranu ocenu srednje vrednosti i varijanse.

Rešenje:

Centrirana ocena srednje vrednosti populacije je aritmetička sredina uzorka.

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^5 X_i = 6,35, \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^5 (X_i - \bar{X})^2 = 0,000325.$$

$$s = \sqrt{0,000325} = 0,00055 \text{ nije ni centrirana ni efikasna ocena.}$$

Kao centriranu ali ne i efikasnu ocenu može se uzeti medijana $\hat{I}_d = 6,35$.

3. Neka je dat uzorak obima 100, sa nepoznatim matematičkim očekivanjem μ i

poznatom disperzijom $\sigma^2 = \frac{1}{4}$. Uporediti intervale poverenja za slučajevne nivoea poverenja 0,9 i 0,95.

Rešenje:

Kako se na osnovu tablica normalne raspodele dobija $z = z_{0,9} = 1,645$, sa verovatnoćom 0,9 interval poverenja je:

$$I: \left[\bar{X} - z_{\beta} \frac{\sigma}{\sqrt{100}}; \bar{X} + z_{\beta} \frac{\sigma}{\sqrt{100}} \right]$$

$$I_1: \left[\bar{X} - 1,64 \frac{0,5}{\sqrt{100}}; \bar{X} + 1,64 \frac{0,5}{\sqrt{100}} \right] = [\bar{X} - 0,082; \bar{X} + 0,082]$$

Ako bi uzeli da je nivo poverenja 0,95, dobili bi interval $I_2: [\bar{X} - 0,1; \bar{X} + 0,1]$. Znači da interval sa manjim nivoom poverenja ima i manju širinu.

4. Uzorak od 80 posmatranih računa u jednom restoranu pokazao je da računi imaju srednju vrednost od 25 evra i standardno odstupanje od 6 evra. Odrediti 95% i 99% intervale poverenja za srednju vrednost svih računa u tom restoranu.

Rešenje:

$$\sigma = 6; n = 80; \bar{X} = 25; \beta_1 = 0,95; \beta_2 = 0,99$$

$$z_1 = z_{0,95} = 1,96, \quad z_2 = z_{0,99} = 2,576$$

Pa dobijamo sledeće intervale:

$$I_1: \left[\bar{X} - z_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + z_1 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] = \left[25 - 1,96 \frac{6}{\sqrt{80}}; 25 + 1,96 \frac{6}{\sqrt{80}} \right] = [23,686; 26,314]$$

$$I_2: \left[\bar{X} - z_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + z_2 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] = \left[25 - 2,576 \frac{6}{\sqrt{80}}; 25 + 2,576 \frac{6}{\sqrt{80}} \right] = [23,29; 26,71]$$

5. U cilju izračunavanja srednje dužine trajanja rada lampi iz jedne serije uzet je uzorak obima 400. komada.

x_i	1200	1210	1220	1230	1240
f_i	20	30	300	30	20

Sa nivoom poverenja $\beta = 0,99$ odrediti interval poverenja za srednju dužinu rada lampi cele populacije, ako se zna da je disperzija populacije rada lampi 1225.

Rešenje:

$$\text{Kako je } \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i f_i = 1220,$$

$$\sigma^2 = 1225; \sigma = 35; n = 400; \beta = 0,99$$

Iz tablica se dobija $z_{0,99} = 2,567$,

$$I: \left[\bar{X} - z_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + z_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] = \left[1220 - 2,576 \cdot \frac{35}{\sqrt{400}}; 1220 + 2,576 \cdot \frac{35}{\sqrt{400}} \right] = [1215,51; 1224,49]$$

6. Koliki najmanji uzorak treba uzeti iz populacije sa normalnom raspodelom čija je disperzija jednaka 9, tako da dužina 99% intervala poverenja za matematičko očekivanje bude manja od 5,16.

Rešenje:

$$\sigma = 3, n = ?, \beta = 0,99.$$

$$\text{Dužina intervala poverenja je } d = \bar{X} + z_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \left(\bar{X} - z_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = 2z_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Kako je uslov da dužina intervala ne bude veća od 5,16 imamo

$$d = 2z_{\beta} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 5,16 \Rightarrow 2z_{\beta} \frac{3}{\sqrt{n}} \leq 5,16.$$

Sa druge strane je

$$z_{0,99} = 2,576, \text{ pa dobijamo}$$

$$2 \cdot 2,576 \frac{3}{\sqrt{n}} \leq 5,16 \Rightarrow n \geq 9.$$

7. Mereći vreme reagovanja pacijenata na novi lek, lekar je procenio da je standardno odstupanje 0,05 sekundi. Koliki uzorak pacijenata treba uzeti iz populacije sa normalnom raspodelom, tako da u 95% slučajeva greška procene srednje vrednosti ne bude veća od 0,01.

Rešenje:

$$\sigma = 0,05; n = ?; \beta = 0,95; z_{0,95} = 1,96$$

Greška procene srednje vrednosti data je izrazom $z_{\beta} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$$1,96 \cdot \frac{0,05}{\sqrt{n}} \leq 0,01 \Rightarrow n \geq 96,04.$$

Treba uzeti uzorak od minimalno 97 pacijenata.

8. Na osnovu uzorka od 10 elemenata, sa aritmetičkom sredinom od $\bar{X} = 20,4$ i ocenom odstupanja $s = 0,8$, naći 99% interval poverenja za nepoznato matematičko očekivanje?

Rešenje:

Znajući da je $n = 10; \bar{X} = 20,4; s = 0,8; \beta = 0,99;$

Na osnovu tablica je $t_{0,99}(9) = 3,25$ i

$$I: \left[\bar{X} - t \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t \frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

$$I: \left[20,4 - 3,25 \frac{0,8}{\sqrt{10}}; 20,4 + 3,25 \frac{0,8}{\sqrt{10}} \right] = [19,578; 21,222].$$

9. Odrediti 95% interval poverenja za nepoznato matematičko očekivanje, gde je na uzorku od 16 merenja dobijena aritmetička sredina $\bar{X} = 25,4$ i ocena standardnog odstupanja od $\pm 1,3$.

Rešenje:

$$n = 16; \bar{X} = 25,4; s = 1,3; \beta = 0,95;$$

Na osnovu tablica je $t_{0,95}(15) = 2,131$

$$I: \left[25,4 - 2,131 \frac{1,3}{\sqrt{16}}; 25,4 + 2,131 \frac{1,3}{\sqrt{16}} \right] = [24,707; 26,092].$$

Možemo napisati i $25,4 \pm 0,7$

10. Izvršeno je pet merenja dužine čekanja automobila na semaforu. Dobijen je sledeći rezultat: 0,28; 0,30; 0,27; 0,33; 0,31 sekundi. Odrediti 95% interval poverenja za srednju vrednost čekanja

Rešenje:

X_i	X_i^2
0,28	0,0784
0,30	0,09
0,27	0,0729
0,33	0,1089
0,31	0,0961
$\sum_{k=1}^5 = 1,49$	$\sum_{k=1}^5 = 0,4463$

$$\bar{X} = \frac{1,49}{5} = 0,298.$$

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2,$$

$$s^2 = \frac{1}{5} \cdot 0,4463 - 0,289^2 = 0,08926 - 0,08880 = 0,00046 \Rightarrow s = 0,02145$$

$$t_{0,95}(4) = 2,776,$$

$$I: \left[0,298 - 2,776 \frac{0,02145}{\sqrt{5}}; 0,298 + 2,776 \frac{0,02145}{\sqrt{5}} \right] = [0,271; 0,324].$$

11. Rukovodstvo Banke Intesa ocenjivalo je prosečno vreme čekanja bankaeske usluge na šalteru. U tom cilju uzet je uzorak iz skupa koji je normalno raspoređen i dobijeni su sledeći rezultati

Vreme usluge	4	7	11	15
Broj klijenata	2	4	6	1

Oceniti prosečno vreme čekanja sa pouzdanošću od 95%

Rešenje:

Vreme usluge x_i	Broj klijenata f_i	$x_i f_i$	x_i^2	$x_i^2 f_i$
4	2	8	16	32
7	6	28	49	196
11	4	66	121	726
15	1	15	225	225
	$n = \sum = 13$	$\sum = 117$		$\sum = 1179$

$$\bar{X} = \frac{117}{13} = 9$$

$$s^2 = \frac{1}{13} 1179 - 9^2 \Rightarrow s = 3,11$$

$$t_{0,95}(12) = 2,179$$

$$I: \left[9 - 2,179 \frac{3,11}{\sqrt{13}}; 9 + 2,179 \frac{3,11}{\sqrt{13}} \right] = [7,12; 10,88]$$

12. Na uzorka dobijeni su rezultati: 180, 115, 221, 180, 256, 190, 185, 210, 160, 210, 180, 206, 180, 192. Naći interval poverenja za srednju vrednost, ako je $\beta = 0,99$.

Rešenje:

$$\bar{X} = 190,3, s = 51,62, t_{0,99}(12) = 3,055$$

$$I: [148,21; 232,51]$$

13. Na osnovu uzorka normalne raspodele $N(\mu, \sigma^2)$ naći 95% interval poverenja za nepoznato μ . Koliki treba da je obim uzorka da bi širina intervala bila manja od 0,1 u slučajevima:

a) Poznata je disperzija $\sigma^2 = 1$

b) Disperzija σ^2 je nepoznata, ali je na osnovu uzorka veličine 10 izračunata ocena $s^2 = 1$

Rešenje:

$$a) \quad d = 2 \cdot z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad z_{0,95} = 1,96$$

$$2 \cdot 1,96 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} < 0,1 \Rightarrow \sqrt{n} > 39,2$$

$$n > 1536,6$$

Obim uzorka treba da bude veći od 1537.

$$b) \quad d = 2 \cdot t_{\beta}(n-1) \frac{s_n}{\sqrt{n}}, \quad n = 10, t_{0,95}(9) = 2,262, s = s_n = 1$$

$$2 \cdot 2,262 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} < 0,1 \Rightarrow \sqrt{n} > 52,4$$

$$n > 2745,76$$

Obim uzorka treba da bude veći od 2746.

14. Merene su prosečne temperature 120 zimskih dana i dobijeni su rezultati dati u tablici

dimenzije	(-12:-8)	(-8:-4)	(-4:0)	(0:4)	(4:8)	(8:12)
broj	8	17	42	30	18	5

Odrediti 99% interval poverenja za srenju vrenost temperature.

Rešenje:

$$\bar{X} = \frac{-10 \cdot 8 - 6 \cdot 17 - 2 \cdot 42 + 2 \cdot 30 + 6 \cdot 18 + 10 \cdot 5}{120} = -0,4$$

$$s^2 = 23,57 \quad s = 4,84$$

Zbog veličine uzorka t raspodela se aproksimira normalnom

$$I = \left[-0,4 - 2,576 \cdot \frac{4,85}{\sqrt{120}}; -0,4 + 2,576 \cdot \frac{4,85}{\sqrt{120}} \right] = [-1,54; 0,74]$$

15. Uzorak od 15 elemenata ima $\bar{X} = 7,38$, $s = 1,24$. Odrediti 95% i 99% interval poverenja za srednju vrednost sa nepoznatom disperzijom.

Rešenje: $I : [7,38 \pm 0,82]$ $I : [7,38 \pm 1,16]$

16. Merenjem dobijene su sledeće vrednosti: 34,1; 27,4; 33,7; 31,1; 30,9; 35,2; 28,4; 32,1. Odrediti 90% interval poverenja za nepoznato matematičko očekivanje?

Rešenje:

$$\bar{X} = 31,6$$

$$s^2 = 7,5, t_{0,9}(7) = 1,895 \quad I : [29,6; 33,6].$$

17. Iz slučajno izabranog uzorka, populacije sa normalnom raspodelom, obima $n = 25$ komada izračunata je disperzija $s^2 = 12$. Odrediti interval poverenja za nepoznatu disperziju populacije sa verovatnoćom od 0,95.

Rešenje:

$$n = 25, s^2 = 12, \beta = 0,95, \alpha = 0,05$$

$$\chi^2_{n-1, \frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{24, 0,025} = 12,4, \quad \chi^2_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{24, 0,975} = 39,4$$

Dvostrani interval:

$$I : \left[\frac{ns^2}{\chi^2_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}}; \frac{ns^2}{\chi^2_{n-1, \frac{\alpha}{2}}} \right] = \left[\frac{25 \cdot 12}{39,4}; \frac{25 \cdot 12}{12,4} \right] = [7,61; 24,19].$$

Jednostrani interval je

$$\chi^2_{n-1; \alpha=1-\beta} = \chi^2_{24; 0,05} = 13,8$$

$$I : \left[0; \frac{ns^2}{\chi^2_{n-1, \alpha}} \right] = \left[0; \frac{25 \cdot 12}{13,8} \right] = [0; 21,74].$$

18. Disperzija nekog proizvoda ima normalnu raspodelu. U uzorku od 20 komada izračunata je disperzija 2,53. Naći 95% dvostrani interval poverenja za nepoznatu disperziju.

Rešenje:

$$\chi^2_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} = \chi_{19, 0,975} = 32,9, \quad \chi^2_{n-1, \frac{\alpha}{2}} = \chi_{19, 0,025} = 8,91$$

$$I = \left[\frac{ns^2}{\chi^2_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}}; \frac{ns^2}{\chi^2_{n-1, \frac{\alpha}{2}}} \right] = \left[\frac{20 \cdot 2,53}{32,9}; \frac{20 \cdot 2,53}{8,91} \right] = [1,54; 5,68]$$

19. Neka obeležje X ima normalnu raspodelu. Uzet je uzorak od 16 komada i izračunata je disperzija koja iznosi 11,625. Izračunati 90% interval poverenja za nepoznatu disperziju.

Rešenje:

$$\chi^2_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} = \chi_{15, 0,95} = 25 \quad \chi^2_{n-1, \frac{\alpha}{2}} = \chi_{15, 0,05} = 7,26$$

$$s^2 = 11,625;$$

$$I = \left[\frac{16 \cdot 11,625}{25}; \frac{16 \cdot 11,625}{7,26} \right] = [7,44; 25,62]$$

20. Naći dvostranu intervalnu ocenu disperzije populacije iz koje je izvučen uzorak sa pouzdanošću od 90%.

x_i	1	2	3	4	5
f_i	2	3	4	5	6

Rešenje:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^5 x_i f_i = 3,5 \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^5 x_i^2 f_i - \bar{X}^2 = 2,48$$

Može da se koristi i prethodni obrazac za disperziju, koja je u ovom slučaju centrirana.

$$\chi^2_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} = \chi_{19, 0,95} = 30,1 \quad \chi^2_{n-1, \frac{\alpha}{2}} = \chi_{19, 0,05} = 10,1$$

$$I = \left[\frac{20 \cdot 2,48}{30,1}; \frac{20 \cdot 2,48}{10,1} \right] = [1,65; 4,91]$$

21. U 100 gađanja cilja strelac ga pogodi 32 puta. Naći 95% interval poverenja za nepoznatu verovatnoću p pogotka u jednom gađanju.

Rešenje:

$$n = 100, S_n = 32, \beta = 0,95$$

$$z_{\beta} = 1,96,$$

$$\frac{(S_n - np)^2}{np(1-p)} < z_{\beta}^2 \Rightarrow \frac{(32 - 100p)^2}{100p(1-p)} < 1,96^2$$

$$10384p^2 - 6784p + 1024 = 0$$

$$\bar{p}_1 = 0,237 \quad \bar{p}_2 = 0,417$$

$$I = [0,237; 0,417]$$

22. Tokom dana u jednom pogonu fabrike proizvedeno je 80 nekih proizvoda. Kontrola je otkrila 4 defektna. Naći 95% interval poverenja za nepoznatu verovatnoću p da je proizvod defektan.

Rešenje:

$$n = 80, S_n = 4, \beta = 0,95$$

$$z_{0,95} = 1,96,$$

$$\frac{(S_n - np)^2}{np(1-p)} < z_{\beta}^2 \Rightarrow \frac{(4 - 80p)^2}{80p(1-p)} < 1,96^2$$

$$67072p^2 - 3712p + 16 = 0$$

$$\bar{p}_1 = 0,0196 \quad \bar{p}_2 = 0,1216$$

$$I = [0,0196; 0,1216]$$

23. Od 100 studenata 20 je položilo ispit. Naći 95% interval poverenja za nepoznatu verovatnoću p polaganja ispita.

Rešenje:

$$n = 100, S_n = 20, \beta = 0,95$$

$$\left(\frac{20 - 100p}{\sqrt{100p(1-p)}} \right)^2 < 1,96 \Rightarrow$$

$$96,16p^2 - 40,384p + 4 < 0 \Rightarrow I = [0,11; 0,26]$$

24. Uočeno je da od 3000 testiranih proizvoda jedne fabrike ima 1578 onih koji su kvalitetni. Ako je u pitanju binomna raspodela, odrediti 99% interval poverenja za kvalitetne proizvode.

Rešenje: $I = [0,502; 0,550]$

25. Uzorak od 55 studenata na testu imao je srednji broj poena 68, od mogućih 100 i standardno odstupanje od 5 poena. Odrediti 95% i 99% intervale poverenja za srednju vrednost broja poena na testu.
26. Pretpostavimo da u 220 pokušaja imamo 100 uspeha. Odrediti interval poverenja za verovatnoću p sa nivoom poverenja 0,95.
27. Iz populacije uzet je uzorak obima $n = 10$, čija je aritmetička sredina $\bar{X} = 4,2$ i uzoračka disperzija $s^2 = 49$. Zatim je uočen drugi uzorak obima $n = 8$, čija je aritmetička sredina $\bar{X} = 3,4$ i uzoračka disperzija $s^2 = 32$. Uporediti dužine 90% intervala poverenja.
28. Koliki uzorak treba posmatrati da bi se sa pouzdanošću od 95% dobio interval poverenja od 0,04, za procenat p lica koja su glasala za nekog kandidata na izborima?

9. TESTIRANJE HIPOTEZA

Hipoteza je pretpostavka zasnovana na iskustvenim i naučnim činjenicama. Kada se postavi služi za donošenje zaključaka o posmatranom problemu korišćenjem statističkih metoda

Postavljene hipoteze podvrgavaju se **statističkom proveravanju, verifikaciji ili testiranju**, pomoću koga se donose odluke, da li sa određenom verovatnoćom, hipoteze se prihvataju ili odbacuju. Zaključci se donose na osnovu uzorka, odnosno izračunatoj statistici. Kako nijedan zaključak o populaciji na osnovu uzorka nije apsolutno tačan, tako odbacivanje hipoteze ne znači da je ona netačna. Pravilnije je reći da na osnovu uzorka postoji razlog za odbacivanje hipoteze.

Teoriju testiranja hipoteza dali su Nojman i Pirson (1928, 1933)

Testovi mogu biti:

- **Parametarski**- koji se odnose na nepoznate parametre raspodela obeležja
- **Ne parametarski**- koje se odnose na raspodele obeležja.

Primer:

Kocku bacamo 1000 puta i broj 6 se pojavio 185 puta

Parametarska hipoteza se odnosi na parametar p i glasila bi: Da li je verovatnoća $p = \frac{1}{6}$?

Ne parametarska hipoteza se odnosi na raspodelu, odnosno pitanje bi bilo: Da li je u pitanju binomna raspodela?

$$p = \frac{1}{6}, \quad n = 1000, \quad k = 185$$

$$p = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{1000}{185} \left(\frac{1}{6}\right)^{185} \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{1000-185}$$

9.1 TESTIRANJE PARAMETERSKIH HIPOTEZA

Postupak testiranja hipoteza sastoji se od nekoliko koraka.

1. Prvo se definišu dve hipoteze:

H_0 - **polazna-nulta hipoteza** i H_1 -**suprotna- alternativna hipoteza**.

2. Definiše se **test- statistika** na osnovu čijih vrednosti se donose odluke

3. Zadaje se prag značajnosti α , odnosno verovatnoća $\beta = 1 - \alpha$.
4. Određuje se kritična oblast testa i na osnovu tablica raspodele nalazi se vrednost koja predstavlja kriterijum.
5. Vrš se upoređivanje tabličnog kriterijuma sa statistikom testa.
6. Na osnovu toga donosi se odluka. Ako izračunata vrednost statistike pripada kritičnom području hipoteza H_0 se odbacuje i prihvata alternativna hipoteza H_1 , u suprotnom hipoteza H_0 se prihvata i odbacuje hipoteza H_1 .

Hipoteza H_0 je tvrdjenje o vrednosti parametra populacije koji se testira. Odbacuje se kao posledica eksperimenta na uzorku i prihvata se H_1 . Ako se hipoteza H_0 ne odbaci, to ne mora da znači da je tačna, već samo, da na osnovu eksperimenta nema dokaza protiv nje. H_0 je hipoteza o izostanku efekta, dok je u suštini hipoteza istraživača.

Odluke o prihvatanju ili odbacivanju nulte hipoteze koja se odnosi na parametar θ donose se na osnovu nove vrednosti slučajne promenljive $\bar{\theta}$ koja je rezultat eksperimenta na uočenom uzorku.

Nulta hipoteza je obično oblika $H_0(\theta = \bar{\theta})$

Alternativne hipoteze H_1 mogu da budu:

$H_1(\theta \neq \bar{\theta})$ ocena se značajno razlikuje

$H_1(\theta < \bar{\theta})$ ocena je značajno manja

$H_1(\theta > \bar{\theta})$ ocena je značajno veća

Sa unapred zadatom **verovatnoćom** određujemo oblast prihvatanja hipoteze i ako vrednost $\bar{\theta}$ pripada toj oblasti nema razloga za odbacivanjem nulte hipoteze. Granice te oblasti nazivamo gornji i donji **prag značajnosti**.

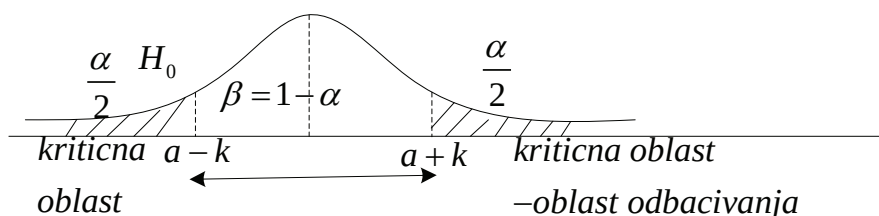
Na primer, za verovatnoću od 0,95, prag značajnosti je $\alpha = 0,05$. To znači da postoji 5% rizika da vrednosti $\bar{\theta}$ ne pripada izračunatoj oblasti.

Razlikujemo dve vrste testova, dvostrane i jednostrane.

Dvostrani test

Na osnovu praga značajnosti α izračunava se broj c , takav da je $P(|\bar{\theta} - \theta| \geq c) = \alpha$ a sa njime i kritična oblast za nultu hipotezu H_0 , odnosno intervali $(-\infty, \theta - c)$ i $(\theta + c, \infty)$ kojima pripadaju vrednosti koje jako odstupaju od vrednosti θ .

Ako je $P(|\bar{\theta} - \theta| < c) = 1 - \alpha = \beta$ dobija se oblast prihvatanja nulte hipoteze $(\theta - c, \theta + c)$.



Jednostrani test

Zasniva se na verovatnoćama $P(\bar{\theta} - \theta \geq k) = \alpha$ ili $P(\bar{\theta} - \theta \leq -k) = \alpha$. U ovim slučajevima kritična oblast za hipotezu H_0 je $(-\infty, \theta - k)$ ili $(\theta + k, \infty)$.

Izuzetak se pojavljuje kod testiranja hipoteze za disperziju. U tom slučaju koristimo statistiku koja ima χ^2 raspodelu čija je funkcija gustine definisana na intervalu $(0, +\infty)$, umesto intervala $(-\infty, +\infty)$ kako je definisana funkcija gustine kod normalne i studentove raspodele.

9.2. GREŠKE TESTIRANJA HIPOTEZA

Prilikom testiranja hipoteza zaključci se donose na osnovu uzorka uz zadatu verovatnoću. Moguće je načiniti 2 vrste grešaka:

1. **Greške prvog tipa** - α greške,

Ove greške nastaju kada nultu hipotezu H_0 odbacimo, a tačna je.

U tom slučaju $\bar{\theta} \in (-\infty, \theta - k] \cup [\theta + k, \infty)$

2. **Greške drugog tipa**, β greške

Ove greške nastaju kada nultu hipotezu H_0 ne odbacimo a pogrešna je.

U tom slučaju je $\bar{\theta} \in (\theta - k, \theta + k)$.

Verovatnoća $\beta = 1 - \alpha$ se zove pouzdanost ili poverenje.

Idealan test imao bi male greške i prvog i drugog tipa. Uslovi za istovremeno smanjenje grešaka i prvog i drugog reda su suprotni. Ako se jedna greška smanjuje, druga greška raste. Rešenje problema je u povećanju uzorka. Obično se vodi računa da greška drugog tipa bude minim

9.3. TESTIRANJE HIPOTEZE $H_0(\mu = \mu_0)$ AKO σ JE POZNATA

U slučaju testiranja nulte hipoteze H_0 protiv alternativne hipoteze H_1 , ako slučajna promenljiva X ima normalnu raspodelu $N(\mu, \sigma^2)$ i σ je poznato, koristi se statistika

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}},$$

koja ima standardnu normalnu raspodelu $N(0,1)$.

U ovom izrazu, sredina populacije μ je nepoznata, a nultom hipotezom se pretpostavlja da je ona μ_0 , $\bar{X}$ je aritmetička sredina dobijena iz uzorka, σ je poznato standardno odstupanje populacije i n je obim uzorka.

Verovatnoća $\alpha = 1 - \beta$, **prag značajnosti**, daje kritičnu oblast. Obično se uzima da iznosi 0,01 ili 0,05, a za izračunavanja koriste se tablice standardne normalne raspodele.

Normalna raspodela se koristi uvek kada je $n \geq 30$.

Dvostrani test:

Testiramo hipotezu $H_0 (\mu = \mu_0)$ protiv alternativne hipoteze $H_1 (\mu \neq \mu_0)$

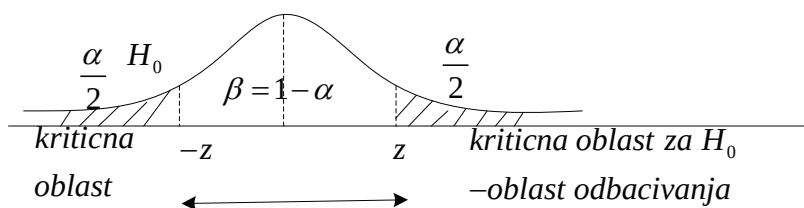
Oblast **prihvatanja** nulte hipoteze se dobija iz uslova

$$P(|Z| < z) = \beta \text{ i iznosi } (-z, z).$$

Kritična oblast, oblast odbacivanja nulte hipoteze je

$$(-\infty, -z) \cup (z, +\infty)$$

Vrednost z se čita iz tablica dvostrane normalne raspodele.



Jednostrani desni i levi testovi:

Testiramo hipotezu $H_0 (\mu = \mu_0)$ protiv alternativne hipoteze

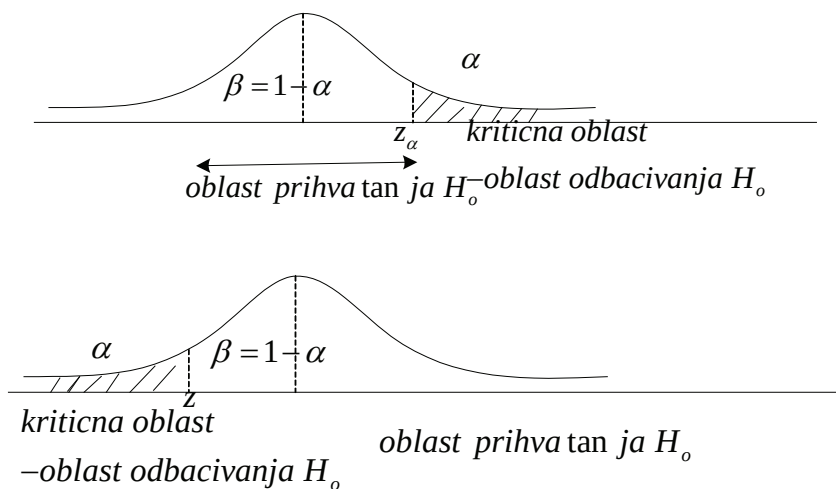
1. $H_1 (\mu > \mu_0)$ **kritična oblast** se dobija iz uslova

$P(Z > z) = \alpha$ $P(Z < z) = 1 - \alpha = \beta$ pa je oblast odbacivanja nulte hipoteze $(z; +\infty)$.

2. $H_1 (\mu < \mu_0)$ **kritična oblast** se dobija iz uslova

$P(Z < z) = \alpha$ pa je oblast odbacivanja nulte hipoteze $(-\infty, z)$

Vrednost z se čita iz tablica jednostrane normalne raspodele.



Kritična oblast za nultu hipotezu mogla bi da se odredi pomoću izračunavanja granica oblasti prihvatanja (ili odbacivanja) nulte hipoteze.

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| < \frac{k - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = P\left(|Z| < \frac{k - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = \beta$$

$$k_1 = \mu_0 - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, k_2 = \mu_0 + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

Ako je $\bar{X} \in (k_1; k_2)$ nulta hipoteza se prihvata

Ako je $\bar{X} \in (-\infty; k_1) \cup (k_2; +\infty)$ nulta hipoteza se odbacuje.

Određivanje kritične oblasti u slučaju jednostranog testa je identičan.

Primer:

Srednja dužina trajanja sijalica jedne fabrike je 1600h. Zna se da je dužina trajanja slučajna promenljiva, normalne raspodele, sa standardnim odstupanjem od 120h. Za ispitivanje kvaliteta sijalica uzet je uzorak od 100 sijalica čija je srednja dužina trajanja 1570h. Testirati

hipotezu $H_0 (\mu = 1600)$ protiv hipoteze $H_1 (\mu \neq 1600)$, koristeći prag značajnosti 0,05.

Rešenje:

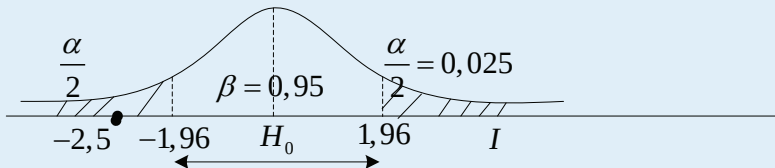
Oblast prihvatanja nulte hipoteze H_0 se dobija iz uslova $P(|Z| < z) = 0,95$.

Pomoću tablica dobijamo da je $z = z_{0,95} = 1,96$

Znači, oblast prihvatanja nulte hipoteze je $(-1,96; 1,96)$.

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{1570 - 1600}{\frac{120}{\sqrt{100}}} = -2,5$$

Kako $-2,50 \notin (-1,96; 1,96)$ nulta hipoteza se odbacuje sa rizikom od 5% i prihvata alternativna hipoteza H_1 .



Oblast prihvatanja-odbacivanja nulte hipoteze H_0 može se odrediti računanjem kritičnih granica oblasti na sledeći način:

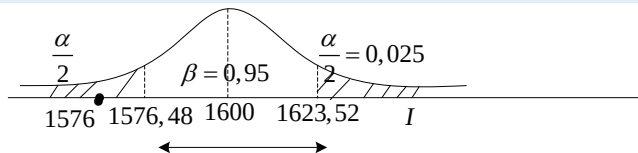
$$P(|\bar{X}| < k) = P\left(|Z| < \frac{k - 1600}{\frac{120}{\sqrt{100}}}\right) = 0,95 \Rightarrow \left|\frac{k - 1600}{12}\right| = 1,96$$

$$k_1 = \mu_0 - z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1600 - 1,96 \cdot 12 = 1576,48$$

$$k_2 = \mu_0 + z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1600 + 1,96 \cdot 12 = 1623,52$$

$$\bar{X} = 1570 \notin (1576,48; 1623,52)$$

Znači nulta hipoteza se odbacuje.

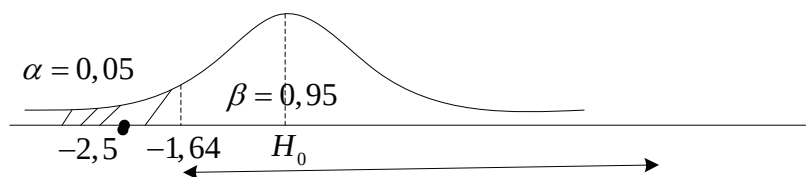


Ako bi alternativna hipoteza bila $H_1 (\mu < 1600)$, kritična oblast nulte hipoteze H_0 dobila bi se iz uslova $P(Z < z) = 0,05$.

Iz tablica dobijamo da je $z = z_{0,05} = -1,64$.

Znači, kritična oblast nulte hipoteze je $(-\infty; -1,64)$.

Kako $-2,50 \in (-\infty; -1,64)$ nulta hipoteza se odbacuje sa rizikom od 5% i prihvata alternativna hipoteza H_1 .

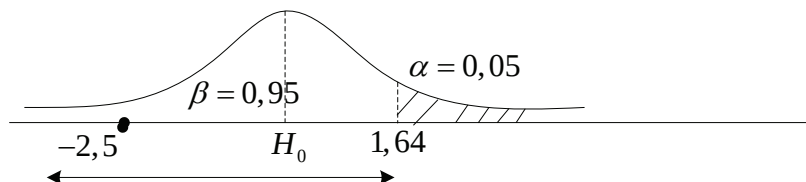


Ako je alternativna hipoteza $H_1 (\mu > 1600)$, tada se kritična oblast nulte hipoteze H_0 dobija iz uslova $P(Z > z) = 0,05$ odnosno računa se iz uslova $P(Z < z) = 0,95$.

Iz tablica dobijamo da je $z = z_{0,95} = 1,64$.

Znači, oblast prihvatanja nulte hipoteze je $(-\infty; 1,64)$.

Kako $-2,5 \in (-\infty; 1,64)$ nulta hipoteza se prihvata.



9.4. TESTIRANJE HIPOTEZE $H_0(\mu = \mu_0)$ AKO σ JE NEPOZNATO.

Postupak testiranja je identičan prethodnom slučaju, ali se ovog puta koristi slučajna promenljiva-statistika

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Statistika T ima studentovu - t raspodelu sa $n-1$ stepenom slobode, a s je uzoračko standardno odstupanje.

Studentova raspodela se koristi kada je $n \leq 30$. Za $n > 30$ studentova raspodela se aproksimira normalnom raspodelom.

Testovi mogu biti jednostrani i dvostrani.

Dvostrani test

Testiramo hipotezu $H_0(\mu = \mu_0)$ protiv alternativne hipoteze $H_1(\mu \neq \mu_0)$

Oblast prihvatanja nulte hipoteze dobija se iz uslova $P(|T| < t) = \beta = 1 - \alpha$, i iznosi $(-t, t)$, gde se $t = t_{1-\alpha/2}(n-1)$ izračunava iz tablica za studentovu - t raspodelu, a **oblast odbacivanja** je $(-\infty, -t) \cup (t, \infty)$.

Jednostrani test

Kada testiramo nultu hipotezu $H_0(\mu = \mu_0)$ protiv alternativne hipoteze

1. $H_1(\mu > \mu_0)$ **kritična oblast** se dobija iz uslova

$$P(T > t) = \alpha, \text{ odnosno } P(T < t) = 1 - \alpha = \beta \text{ i iznosi } (t; +\infty)$$

2. $H_1(\mu < \mu_0)$ **kritična oblast** se dobija iz uslova

$$P(T < t) = \alpha \text{ i iznosi } (-\infty, t)$$

Vrednost t se čita iz tablica jednostrane studentove raspodele

Primer:

Mašina proizvodi kuglice prečnika 0,5cm. Da bi proverili da li kuglice imaju propisani prečnik uzima se uzorak od 10 kuglica. Ako je aritmetička sredina prečnika uzorka 0,53cm i uzoračko standardno odstupanje 0,03cm, testirati hipotezu da mašina proizvodi kuglice propisanog prečnika sa pragom značajnosti 0,05.

$$\bar{X} = 0,53 \quad s = 0,03 \quad n = 10 \quad \alpha = 0,05$$

a) Jednostrani test

$$H_0 (\mu = 0,5); H_1 (\mu > 0,5)$$

$$t = t_{1-\alpha} (n-1) = t_{0,95} (9) = 1,83 \text{ (jednosmerna tablica)}$$

$$P(T > t) = \alpha, \text{ kritična oblast je } (t; \infty) = (1,83; \infty)$$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{0,53 - 0,5}{\frac{0,03}{\sqrt{10}}} = 3,16$$

Kako $3,16 \in (1,83; \infty)$, nulta hipoteza se odbacuje.

b) Dvostrani test:

$$H_0 (\mu = 0,5); H_1 (\mu \neq 0,5)$$

$$t = t_{1-\alpha/2} (n-1) = t_{0,95} (9) = 2,262$$

$$P(|T| < t) = 1 - \alpha, \text{ oblast prihvatanja nulte hipoteze je } (-t; t) = (-2,26; 2,26)$$

$$T = 3,16$$

Kako $3,16 \notin (-2,26; 2,26)$, nulta hipoteza se odbacuje.

Ili određivanjem graničnih vrednosti kritične oblasti

$$k_1 = \mu_0 - t \frac{s}{\sqrt{n}} = 0,5 - 2,262 \cdot \frac{0,03}{\sqrt{10}} = 0,478$$

$$k_2 = \mu_0 + t \frac{s}{\sqrt{n}} = 0,5 + 2,262 \cdot \frac{0,03}{\sqrt{10}} = 0,521$$

$$0,53 \notin (0,478; 0,521)$$

Nulta hipoteza se odbacuje.

Često je potrebno upoređivati dva nezavisna uzorka, odnosno testirati značajnost razlike između uzoraka, naprimer dva fakulteta, ženske i muške ispitanike, starije i mlađe, stanovništvo sela i grada i sl.

Tada se koristi Studentov test.

Za **upoređivanje** dve normalne populacije, gde su matematička očekivanja $\mu_1 = \mu_2$, a disperzije σ_1 i σ_2 poznate koristi se statistika

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Za **očekivanje** jedne od dve normalne populacije, gde su matematička očekivanja $\mu_1 = \mu_2$, a disperzije ne σ_1, σ_2 ne poznate, koristi se statistika

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}},$$

Statistika T ima normalnu raspodelu $N(0,1)$, stepen slobode je $k = (n_1 + n_2 - 2)$ i koristi se dvostrana tablica t raspodele.

Hipoteze su $H_0(\mu = \mu_0)$ i $H_1(\mu \neq \mu_0)$

Primer:

Vršena je analiza da li u razvoju govora kod dečaka i devojčica postoji razlika. U svrhu ispitivanja posmatrano je 31 dečaka i 31 devojčica prvog razreda jedne osnovne škole. Prosečan broj bodova na testu za dečake je 80 sa odstupanjem od 20 bodova, a za devojčice 83 sa odstupanjem od 20 bodova. Pitamo se da li na osnovu ovih rezultata možemo smatrati da postoji značajna razlika u razvoju govora kod dečaka i devojčica koristeći prag značajnosti 0,05?

Nulta hipoteza – ne razlikuju se

$$T = \frac{80 - 83}{\sqrt{\frac{20^2}{31} + \frac{20^2}{31}}} = -0,59$$

$k = 31 + 31 - 2 = 60$ i iz tablica t raspodele dobijamo $t_{0,95}(60) = 2$

$t=2$, i kako je vrednost T van intervala $(-2,2)$ može se smatrati da je razlika značajna, odnosno polazna hipoteza se odbacuje.

Primer:

Vršena je analiza da li u razvoju govora kod dečaka i devojčica postoji razlika. U svrhu ispitivanja posmatrano je 700 dečaka i 750 devojčica prava 4 razreda jedne osnovne škole. Prosečan broj bodova na testu za dečake je 80 sa odstupanjem od 20 bodova, a za devojčice 83 sa odstupanjem od 20 bodova. Da li se na osnovu ovih rezultata može smatrati da postoji značajna razlika u razvoju govora kod dečaka i devojčica koristeći prag značajnosti 0,05?

Nulta hipoteza – ne razlikuju se

$$T = \frac{80 - 83}{\sqrt{\frac{20^2}{700} + \frac{20^2}{750}}} = -2,34$$

$$k = 700 + 750 - 2 = 1448$$

Imajući u vidu da su uzorci veliki vršimo aproksimaciju normalnom raspodelom

i $z=1,96$. Kako $T = -2,34 \notin (-1,96; 1,96)$ nulta hipoteza se odbacuje, odnosno postoji značajna razlika, devojčice su bolje.

9.5. TESTIRANJE HIPOTEZE $H_0(\sigma = \sigma_0)$

Ovo je jedan od najstarijih i najčešće korišćenih testova. Definisao ga je 1900g. Pirson.

Kao što znamo, disperzija kao mera rasturanja je dobar pokazatelj stabilnosti procesa, tačnosti instrumenata, nezavisnosti obeležja i sl. pa se često se u primenama pojavljuju hipoteze o disperziji.

Najčešće pitanje sa kojim se tada srećemo je, da li na osnovu slučajnog uzorka $X_1, X_2, \dots, X_n$ možemo da proverimo da li je proces prošao propisane granice disperzije.

U ovom slučaju se koristi statistika χ^2 koja ima hi-kvadrat raspodelu sa $k=n-1$ stepena slobode.

$$\chi^2 = \frac{ns^2}{\sigma^2}$$

U ovom izrazu, disperzija populacije σ je nepoznata, a nultom hipotezom se pretpostavlja da je ona σ_0 , s je poznato standardno odstupanje uzorka i n je obim uzorka.

Nulta hipoteza je $H_0(\sigma = \sigma_0)$, a alternativne hipoteze su $H_1(\sigma \neq \sigma_0)$,
 $H_1(\sigma < \sigma_0)$ i $H_1(\sigma > \sigma_0)$

Dvostrani test

Oblast prihvatanja za nultu hipotezu dobija se iz uslova $P(|H| < \chi^2) = \beta = 1 - \alpha$
 , gde se $\chi^2 = \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$ izračunava iz tablica.

$$k = n - 1$$

$$\left(\chi^2_{k, \frac{\alpha}{2}}, \chi^2_{k, 1 - \frac{\alpha}{2}} \right)$$

Kritična oblast , oblast odbacivanja hipoteze H_0 je

$$\left(0, \chi^2_{k, \frac{\alpha}{2}} \right) \cup \left(\chi^2_{k, 1 - \frac{\alpha}{2}}, +\infty \right)$$

Jednostrani test

Oblast prihvatanja za nultu hipotezu dobija se iz uslova $P(H < \chi^2_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$
 , gde se $\chi^2 = \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$ izračunava iz tablica.

$$(0, \chi^2_{k, 1-\alpha}),$$

Kritična oblast , oblast odbacivanja hipoteze H_0 je $(\chi^2_{k, 1-\alpha}, +\infty)$

Primer:

Neka je uzet uzorak veličine 20 artikala. Pod pretpostavkom da slučajna promenljiva ima normalnu raspodelu $N(\mu, 1)$ i uzoračko odstupanje $s = 1,15$, sa pragom značajnosti 0,1 testirati nultu hipotezu $H_0(\sigma^2 = 1)$ protiv alternativne

$$a) H_1(\sigma^2 > 1), b) H_1(\sigma^2 \neq 1)$$

a) Jednostrana kritična oblast

$$k = k_{\beta}(n-1) = k_{0,9}(19) = 27,2$$

$$s = 1,15, n = 20,$$

Kritična oblast se dobija iz uslova $P(\chi^2 > k) = \alpha \Rightarrow [27,2; \infty)$

$$\chi^2 = \frac{ns^2}{\sigma^2} = \frac{20 \cdot 1,15^2}{1} = 26,45$$

Kako $26,45 \notin [27,2; \infty)$, nulta hipoteza se ne odbacuje.

b) Dvostrana kritična oblast se dobija iz uslova

$$k_1 = \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0,05}(19) = 10,117$$

$$k_2 = \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) = \chi^2_{0,95}(19) = 30,144$$

Kako $26,45 \notin [0; 10,117] \cup [30,144; \infty)$, nulta hipoteza se ne odbacuje.

9.6. TESTIRANJE HIPOTEZE $H_0(p = p_0)$.

U ovom slučaju se koristi statistika Z , koja ima normalnu raspodelu $N(0,1)$.

$$Z = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

gde je n veličina uzorka, S_n broj elemenata iz uzorka koji imaju ispitivano svojstvo i p verovatnoća.

Može da se koristi i statistika $Z = \frac{p - p_0}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$.

Testiranje hipoteze se vrši u odnosu na hipoteze:

Nulta hipoteza $H_0(p = p_0)$

i alternativne hipoteze $H_1(p \neq p_0)$, $H_1(p < p_0)$, $H_1(p > p_0)$

Postupak je identičan testiranju hipoteze o nepoznatom matematičkom očekivanju.

Primer:

Proizvođač lekova tvrdi da novi lek pomaže bolesnicima u 90% slučajeva. Grupi od 200 pacijenata dat je lek. Njih 160 je dobro reagovalo na lek i ozdravilo. Da li je tačno tvrđenje proizvođača? Uzeti prag značajnosti od 0,01.

$H_0(p = 0,9)$, a $H_1(p \neq 0,9)$

$p = 0,9$ $n = 200$ $S_n = 160$

$$Z = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{160 - 200 \cdot 0,9}{\sqrt{200 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} = -4,71$$

$$P(|X| < z) = 0,99, \quad z_{0,99} = 2,576$$

Oblast prihvatanja nulte hipoteze je $(-2,576; 2,572)$ i kako statistika $Z = -4,71$ pripada ovoj oblasti nulta hipoteza se odbacuje.

ILI

$$P(a < S_n < b) = P\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}} < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} < \frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) = 0,99 \text{ -oblast prihvatanja}$$

$$\frac{a - np}{\sqrt{npq}} = -2,576 \Rightarrow \frac{a - 100 \cdot 0,9}{\sqrt{100 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} = -2,576 \Rightarrow a = 66,82$$

$$\frac{b - np}{\sqrt{npq}} = 2,576 \Rightarrow b = 113,18$$

Kako $160 \notin (66,82; 113,18)$ oblasti prihvatanja hipoteze, nulta hipoteza se odbacuje, odnosno tvrđenje proizvođača nije u ispravno.

Primer:

U uzorku od 3000 bacanja novčića dobijeno je 1578 grbova. Verovatnoća dobijanja grba je 0,5. Testirati nultu hipotezu o broju grbova sa pragom značajnosti od 0,01.

$$H_0 (p = 0,5), H_1 (p > 0,5) .$$

$$Z = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{1578 - 3000 \cdot 0,5}{\sqrt{3000 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = 2,85$$

Kritična oblast $P(Z > z) = 0,01$, $z_{0,99} = 2,33$

Kako $2,85 \notin (-\infty; 2,33)$, nulta hipoteza se odbacuje odnosno tvrđenje nije ispravno.

9.7. TESTIRANJE NEPARAMETERSKIH HIPOTEZA- χ^2 TEST

Testiranje parametarskih hipoteza svodilo bi se na pitanje: Ako znamo da neko obeležje ima normalnu raspodelu $N(\mu, \sigma^2)$ koliki su μ i σ ?

Testiranje neparametarskih hipoteza svodilo bi se onda na pitanje: Da li obeležje ima normalnu raspodelu $N(\mu, \sigma^2)$?

Znači, neparametarska hipoteza je ona hipoteza koja se odnosi na raspodelu verovatnoća obeležja X u populaciji.

Postoji više vrsta neparametarskih testova, ali jedan od najviše korišćenih je Pirsonov - χ^2 test (1900g).

Ovim testom se meri odstupanje teorijske (očekivane) frekvence f_{ti} od empirijske (izmerene) frekvence f_i , odnosno saglasnost f_{ti} teorijske (očekivane) frekvence sa f_i empirijskom (izmerenom) frekvencom.

Ako je razlika $f_i - f_{ti}$ mala, smatra se da je polazna hipoteza H_0 dobra i da nema razloga za njeno odbacivanje, a ako je razlika velika, ima razloga za odbacivanje nulte hipoteze H_0 .

Potrebno je da empirijska frekvencija f_i bude veća od 5. Ako to nije ispunjeno objedinjujemo klase.

χ^2 raspodela se uvek koristi ako su podaci kvalitativni ili ako im distribucija značajno odstupa od normalne. U ovoj raspodeli u račun se ne unose merne jedinice.

Teorema:

Neka je slučajna promenljiva X određena sa empirijskom frekvencom f_i i teorijskom frekvencom f_{ti} .

Slučajna promenljiva –statistika

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(f_i - f_{ti})^2}{f_{ti}}$$

ima χ^2 raspodelu, sa $k = n - r - 1$ stepena slobode,

gde je r broj nepoznatih parametara pretpostavljene raspodele, a n broj elemenata uzorka.

χ^2 test se uvek može primeniti kada je moguće izračunati teorijske frekvencije na osnovu postavljene hipoteze i želi utvrditi njihovo odstupanje. χ^2 test koristi isključivo frekvence.

Hipotezu H_0 bi odbacili, uz zadati prag značajnosti ako

$$P(H > \chi_{1-\alpha}^2) = \alpha,$$

odnosno kritična oblast je $(\chi_{1-\alpha}^2(n-r-1); +\infty)$.

Primer:

U raskrsnicama A, B i C u jednom gradu se tokom jednog meseca dogodi 13,19,22 sabračaj-nih nesreća. Može li se na osnovu ovih podataka smatrati da je treća raskrsnica najopasnija, pod pretpostavkom da se broj nesreća bitno ne razlikuje i sa pragom značajnosti od 0,05.

Raskrsnice	f_i	p_i	$f_{ti} = np$	$(f_i - f_{ti})^2$	$(f_i - f_{ti})^2$	$\frac{(f_i - f_{ti})^2}{f_{ti}}$
A	13	$\frac{1}{3}$	18	-5	25	1,389

B	19	$\frac{1}{3}$	18	1	1	0,056
C	22	$\frac{1}{3}$	18	4	16	0,889
Σ	54	1	54			$\chi^2 = 2,334$

Broj stepena slobode je $k = n - r - 1 = 3 - 1 = 2$

$$\chi^2_{0,95}(2) = 5,99$$

Kritična oblast je $(5,99; \infty)$, i kako izračunata statistika $2,234 \notin (5,99; \infty)$, nulta hipoteza se ne odbacuje.

Znači teorijska frekvenaca se ne protivi empirijskoj frekvenci i može se smatrati da je broj saobraćajnih nesreća slučajan.

Primer:

Fabrika lekova tvrdi da je novi lek bolji. Napravljeno je testiranje o korisnosti novog leka. Testirano je 48 lekara, i od toga 26 lekara je izjavilo da je novi lek bolji, 12 se nije izjasnilo i 10 je odgovorilo da nije.

Testirati hipotezu da nema razlike između dobijenih odgovora lekara i mišljenja proizvođača.

odgovori	f_i	p_i	$f_{ti} = np$	$f_i - f_{ti}$	$(f_i - f_{ti})^2$	$\frac{(f_i - f_{ti})^2}{f_{ti}}$
da	26	$\frac{1}{3}$	16	10	100	6,25
2,25ne	12	$\frac{1}{3}$	16	-4	16	1
ne znam	10	$\frac{1}{3}$	16	-6	36	2,25
Σ	48	1	48			$\chi^2 = 9,5$

Kako je $k = n - r - 1 = 3 - 1 = 2$ imamo 2 stepena slobode i pod pretpostavkom

da je prag značajnosti 0,05 iz tablica dobijamo $\chi^2_{0,99}(2) = 9,21$

Kritična oblast je $(9,21; \infty)$, i kako $9,50 \in (9,21; \infty)$, nulta hipoteza se odbacuje. Znači, novi lek nije bolji.

SAGLASNOSTI 2 NEZAVISNA STATISTIČKA OBELEŽJA.

Za podatke koji su svrstani u tabelu sa s vrsta i t kolona, tablica frekvencija bi izgledala:

X / Y	$y_1 y_2 \dots y_t$	Σ
x_1	$f_{11} f_{12} \dots f_{1t}$	f_1
x_2	$f_{21} f_{22} \dots f_{2t}$	f_2
.		
.		
x_s	$f_{s1} f_{s2} \dots f_{st}$	f_s
Σ	$g_1 g_2 \dots g_t$	n

Teorijske frekvence-pretpostavke H_0 se računaju na osnovu veze $f_{ij} = np_i p_j = n \frac{f_i}{n} \frac{g_j}{n} = \frac{f_i g_j}{n}$ gde su p_i i p_j verovatnoće dva zadata obeležja.

Stepen slobode se računa po obrascu $k = (s-1)(t-1)$, gde je s broj vrsta, a t broj kolona u tablici.

Primer:

Lekari tvrde da od 80 ljudi starosti 40 godina 21 slabo vidi i nosi naočare, dok kod ljudi od 60 godina u grupi od 90 njih 34 slabo vidi.

Da li su lekari u pravu?

Broj	Nose naočare	Ne nose naočare	Σ
40 godina	21	59	$f_1 = 80$
60 godina	34	56	$f_2 = 90$
Σ	$g_1 = 55$	$g_2 = 115$	170

$$f_{ij} = \frac{f_i g_j}{n}$$

Frekvence	Nose naočare	Ne nose naočare	Σ
f_{1j}	$\frac{55 \cdot 80}{170} = 25,9$	$\frac{115 \cdot 80}{170} = 54,1$	80
f_{2j}	$\frac{55 \cdot 90}{170} = 29,1$	$\frac{115 \cdot 90}{170} = 60,9$	90
Σ	55	115	170

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_i - f_{ii})^2}{f_{ii}} = \frac{(21 - 25,9)^2}{25,9} + \frac{(59 - 54,1)^2}{54,1} + \frac{(34 - 29,1)^2}{29,1} + \frac{(56 - 60,9)^2}{60,9} = 2,59$$

Broj stepena slobode je $k = (s-1)(t-1) = (2-1)(2-1) = 1$

Za $\alpha = 0,05$ $\chi^2_{0,95}(1) = 3,84$ i kritična oblast za nultu hipotezu je $(3,84; +\infty)$.

Kako $2,59 \notin (3,84; +\infty)$, nulta hipoteza se ne odbacuje. Lekari su u pravu.

9.8. VAŽNI OBRASCI

Testovi o parametrima normalne raspodele

1. Ako je $X : N(\mu, \sigma^2)$, μ testiramo, a σ je poznato

$$\text{Statistika } Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad Z : N(0,1)$$

Nulta hipoteza $H_0(\mu = \mu_0)$

Alternativne hipoteze su $H_1(\mu \neq \mu_0)$

$$\text{kritična oblast } \left(-\infty, -z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \cup \left(z_{\frac{\alpha}{2}}, +\infty\right)$$

$H_1(\mu > \mu_0)$. kritična oblast $(z_{\alpha}, +\infty)$

$H_1(\mu < \mu_0)$ kritična oblast $(-\infty, -z_{\alpha})$

2. Ako je $X : N(\mu, \sigma^2)$, μ testiramo, a σ je ne poznato

$$\text{Statistika } T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \quad T : t(n-1)$$

Nulta hipoteza $H_0(\mu = \mu_0)$

Alternativne hipoteze

$$H_1(\mu \neq \mu_0) \text{ kritična oblast } \left(-\infty, -t_{\frac{\alpha}{2}}\right) \cup \left(t_{\frac{\alpha}{2}}, +\infty\right)$$

$H_1(\mu > \mu_0)$. kritična oblast $(t_{\alpha}, +\infty)$

$H_1(\mu < \mu_0)$ kritična oblast $(-\infty, -t_{\alpha})$

3. Ako je $X : N(\mu, \sigma^2)$, a testiramo nepoznato σ

$$\text{Statistika } \chi^2 = \frac{ns^2}{\sigma^2} \quad \chi^2 : k = (n-1)$$

Nulta hipoteza $H_0 (\sigma = \sigma_0)$

Alternativne hipoteze

$$H_1 (\sigma \neq \sigma_0) \text{ kritična oblast } \left(0, \chi^2_{k, \frac{\alpha}{2}}\right) \cup \left(\chi^2_{k, 1-\frac{\alpha}{2}}, +\infty\right)$$

$$H_1 (\sigma < \sigma_0) \text{ kritična oblast } (0; \chi^2_{k, 1-\alpha})$$

4. Test o proporciji

Ako slučajna promenljiva ima $X : B(n, p)$

$$\text{Statistika } Z = \frac{S_n - p}{\sqrt{np(1-p)}} \quad Z \approx N(0,1)$$

Nulta hipoteza $H_0 (p = p_0)$

Alternativna hipoteza

$$H_1 (p \neq p_0) \text{ kritična oblast } \left(-\infty, -z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \cup \left(z_{\frac{\alpha}{2}}, +\infty\right)$$

$$H_1 (p > p_0) \text{ kritična oblast } (z_{\alpha}, +\infty)$$

$$H_1 (p < p_0) \text{ kritična oblast } (-\infty, -z_{\alpha})$$

5. Neparametarske hipoteze

Neka je slučajna promenljiva X određena sa empirijskom frekvencom f_i i teorijskom frekvencom f_{ti} .

Slučajna promenljiva χ^2 -statistika

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(f_i - f_{ti})^2}{f_{ti}}$$

ima χ^2 raspodelu, sa $k = n - r - 1$ stepena slobode, gde je r broj nepoznatih parametara pretpostavljene raspodele, a n broj elemenata uzorka.

9.9. ZADACI

1. Ako znamo da je prosečna vrednost doze leka 24 gr, da li je potrebno izvršiti povećanje doze na 26 gr? Za ispitivanje je uzet uzorak od 10 doza i na osnovu njega je izračunata srednja vrednost doze od 24,3 gr. Doza leka ima normalnu raspodelu $N(\mu, 9)$. Uzeti prag značajnosti od 5%.

Rešenje:

$$X : N(\mu, 9); \bar{X} = 24,3; \sigma = 3; n = 10; \alpha = 0,05$$

$$H_0(\mu = 24); H_1(\mu > 24)$$

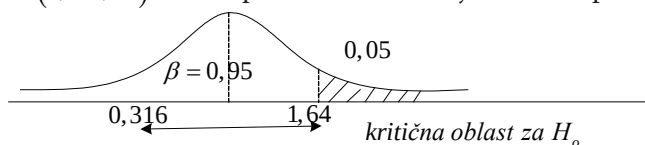
Iz tablica čitamo da je $z = z_{0,95} = 1,64$.

Znači, kritična oblast nulte hipoteze je interval $(1,64; \infty)$.

Statistika:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{24,3 - 24}{\frac{3}{\sqrt{10}}} = 0,316$$

Kako $0,316 \notin (1,64; \infty)$ nulta hipoteza se ne odbacuje. Ne treba povećati doze leka.



Imajući u vidu da je uzorak mali, možda bi bilo pravilnije ispitivanje vršiti t raspodelom, uzimajući da je $\sigma \approx s$. Imamo $k = n - 1 = 9$ stepena slobode pa je $t_{0,95}(9) = 1,83$

Kritična oblast bi bila $(1,833; +\infty)$ i kako $Z = 0,316$, ne pripada ovoj oblasti nulta hipoteza se ne odbacuje

2. Prosečni vek trajanja sijalice je 2000h, sa standardnim odstupanjem od 250h. Izabran je slučajni uzorak od 100 sijalica i na osnovu njega je određena srednja vrednost trajanja sijalice od 1935h. Sa rizikom od 1% može li se pretpostaviti da izabrani uzorak odgovara standardu?

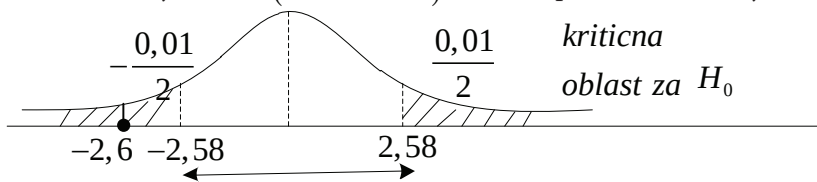
Rešenje:

Neka su $H_0 (\mu = 2000)$ i $H_1 (\mu \neq 2000)$.

Oblast prihvatanja hipoteze je

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{1935 - 2000}{\frac{250}{\sqrt{100}}} = -2,6,$$

Kako statistika Z, tj $-2,6 \notin (-2,58; 2,58)$, nulta hipoteza se odbacuje.



3. Fabrika proizvodi sijalice koje prosečno rade 120 h. sa odstupanjem od 8 h. Na uzorku od 144 sijalice određena je aritmetička sredina dužine rada sijalica i dobijeno je 125h. Sa pragom značajnosti 0,05 postavlja se pitanje da li se zadržati na ovom tipu proizvoda ili izvršiti povećanje dužine rada sijalice?

Rešenje:

$$n = 144, \bar{X} = 125; \sigma = 8; \alpha = 0,05$$

$$H_0 (\mu = 120) \quad H_1 (\mu > 120)$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{125 - 120}{\frac{8}{\sqrt{144}}} = 7,5$$

Kritična oblast $P(Z > z) = 0,05$,

Iz tablica dobijamo $z_{0,95} = 1,64$ i kritičnu oblast $(1,64, +\infty)$

Kako je $Z = 7,5 \in (1,64, +\infty)$ nulta hipoteza se ne prihvata.

Znači treba promeniti tekuću proizvodnju.

4. Šećer se pakuje u kese nominalne težine od 1kg. Potrošači su primetili da u pakovanjima ima manje šećera. Znajući da je standardno odstupanje 30g, testirati hipotezu da u standardnim pakovanjima ima manje šećera, na bazi od 100 slučajnih uzoraka. Uzeti da je prag značajnosti 0,05

Rešenje:

$$\mu = 1000g, \sigma = 30g, n = 100$$

$$H_0 (\mu = 1000), H_1 (\mu < 1000)$$

Zadatak se može rešiti i određivanjem granica intervala u gramima.

Oblast odbacivanja nulte hipoteze se dobija iz uslova:

$$P(X < k) = \alpha, P\left(Z < \frac{k - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 0,05$$

$$z = z_{0,05} = -1,64$$

$$\frac{k - 1000}{\frac{30}{\sqrt{100}}} = -1,64, k = 995$$

Kritična oblast je $(-\infty, 995)$

Znači, ako je srednja vrednost težine šećera manja od 995 gr nulta hipoteza se odbacuj, odnosno potrošači su u pravu.

5. U automatskoj mašini izrađuju se profili srednje dužine 9,72cm, sa standardnim odstupanjem od 1,4cm. Uzet je uzorak od 36 komada i za njega je dobijena srednja dužina od 8,93cm. Testirati hipotezu, protiv alternativne sa rizikom od 0,01.

Rešenje:

$$\mu = 9,72; \bar{X} = 8,93; \sigma = 1,4; n = 36; \alpha = 0,01$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = -3,38$$

Oblast odbacivanja nulte hipoteze dobija se iz uslova $P(Z < z) = 0,01$, i $z_{0,01} = -2,32$, odnosno $(-\infty, -2,32)$.

Kako je $-3,38 \in (-\infty, -2,32)$, hipoteza se odbacuje.

6. Rekord skoka u vis iznosi 8,30m. Metoda merenja visine skokova podleže normalnom zakonu raspodele sa odstupanjem od 0,02m.

Na treningu učestvuje 6 skakača i dobijene su sledeće vrednosti skokova u metrima: 8,29; 8,30; 8,31, 8,30; 8,32; 8,34. Na osnovu dobijenih rezultata, da li možemo očekivati da će na takmičenju doći do promene rekorda. Prag značajnosti $\alpha = 0,05$

Rešenje:

$$H_0(\mu = 8,30), H_1(\mu \neq 8,30)$$

$$\text{Sredina ovog uzorka je } \bar{X} = \frac{8,29 + 8,30 + 8,31 + 8,30 + 8,32 + 8,34}{6} = 8,31 ,$$

$$\sigma = 0,02 \approx s , T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{8,31 - 8,30}{\frac{0,02}{\sqrt{6}}} = 1,22 .$$

Oblast prihvatanja nulte hipoteze je $P(|T| < t) = 0,95$, $t_{0,95}(5) = 2,571$.

Kako statistika T je u okviru oblasti prihvatanja, tj. $-2,571 < 1,22 < 2,571$ nulta hipoteza se ne odbacuje, znači ne očekuje se promena rekorda.

7. Prosečan vek trajanja baterije je 20 h, sa odstupanjem od 1,5 h. Izabran je uzorak od 45 baterija. Prosečan vek trajanja baterije u uzorku je 19,6 h. Može li se prihvatiti pretpostavka da je prosečan vek trajanja dobar i da nije potrebno vršiti poboljšavanja. Testirati na nivou sigurnosti 5% .

Rešenje:

$$\text{Neka su } H_0(\mu = 20) \text{ i } H_1(\mu \neq 20) .$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{19,6 - 20}{\frac{1,5}{\sqrt{45}}} = -1,78$$

Oblast prihvatanja hipoteze se dobija iz uslova

$$P(-z < Z < z) = 0,95 \Rightarrow z = 1,96.$$

Kako je izračunata vrednost $-1,78 \notin (-1,96; 1,96)$, nulta hipoteza se odbacuje. Potrebno je poboljšanje.

8. Na osnovu uzorka obima 50 dobijeno je srednje vreme rada mašine i iznosi 1950h sa standardnim odstupanjem od 200h. Na nivou 5% testirati hipotezu

$$H_0(\mu = 2000) \text{ protiv alternativne } H_1(\mu \neq 2000) \quad H_1(\mu < 2000), \\ H_1(\mu > 2000).$$

Rešenje:

$$s = 200 \approx \sigma$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{1950 - 2000}{\frac{200}{\sqrt{50}}} = -1,75$$

- a) Oblast prihvatanja hipoteze se dobija iz uslova

$$P(-z < Z < z) = 0,95 \Rightarrow z = 1,96.$$

$-1,75 \in (-1,96; 1,96)$, nema razloga da se odbaci nulta hipoteza.

- b) Kritična oblast $P(Z < z) = 0,05$, $z = -1,64$

$$-1,75 \in (-\infty; -1,64)$$

Sa rizikom od 5% odbacujemo nultu hipotezu.

- c) Kritična oblast $P(Z > z) = 0,05$, $z = 1,64$

$$-1,75 \notin (1,64, +\infty)$$

Ne odbacujemo nultu hipotezu.

9. Na osnovu uzorka obima 20 dobijeno je srednje vreme rada uređaja koje iznosi $\bar{X} = 1950h$, sa standardnim odstupanjem od $s = 200h$. Sa pragom značajnosti $\alpha = 0,05$ testirati hipotezu da je srednje vreme rada uređaja 2000h.

Rešenje:

Podaci su isti kao u predhodnom primeru, jedino je uzorak manji, pa se koristi Studentova raspodela.

$$a) H_0 (\mu = 2000) \quad H_1 (\mu < 2000)$$

$$\bar{X} = 1950; s = 200; n = 20$$

Oblast odbacivanja hipoteze je

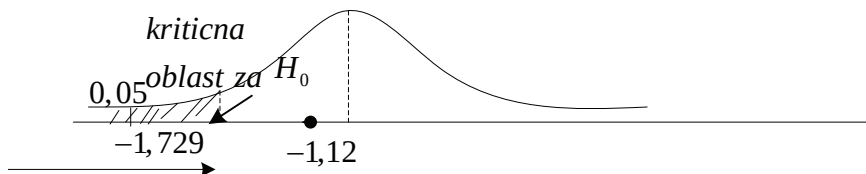
$$P(T < t) = \alpha, P(T < t) = 0,05$$

Kako u tablicama t raspodele nema negativnih vrednosti, važi

$$P(T < -t) = 1 - \alpha, P(T < -t) = 0,95$$

$$-t_{0,95}(19) = 1,729$$

Kako $-1,12 \notin (-\infty; -1,729)$, kritičnoj oblasti nulta hipoteza se ne odbacuje,

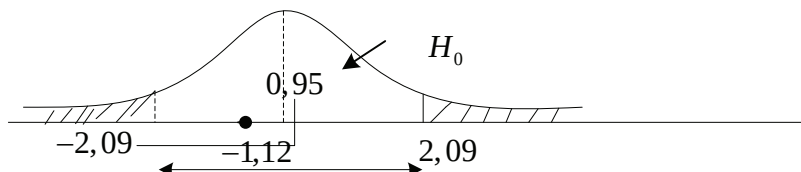


$$b) H_0 (\mu = 2000) \quad H_1 (\mu \neq 2000)$$

Oblast prihvatanja hipoteze je

$$P(-t < T < t) = 1 - \alpha, t_{0,95}(19) = 2,09$$

Kako $-1,12 \in (-2,09; 2,09)$, nulta hipoteza se ne odbacuje.



10. Radi ispitivanja ispravnosti težine proizvedenog artikla posmatran je uzorak od 10 proizvoda i dobijeni su sledeći rezultati u kilogramima:

360; 370; 385; 367; 355; 365; 375; 330; 342; 320

Testirati hipotezu da je prosečna težina artikla 350 kg sa pragom značajnosti 1%.

Rešenje:

$$\bar{X} = \frac{360 + 370 + 385 + 367 + 355 + 365 + 375 + 330 + 342 + 320}{10} = 356,9$$

$$s^2 = \frac{360^2 + 370^2 + 385^2 + 367^2 + 355^2 + 365^2 + 375^2 + 330^2 + 342^2 + 320^2}{10} - 356,9^2 = 377,7$$

$$s = 19,4, \quad n = 10 \quad \mu = 350 \text{ kg}$$

Testirati hipotezu $H_0 (\mu = 350)$ protiv alternativne $H_1 (\mu \neq 350)$.

U pitanju je Studentova - t raspodela

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{356,9 - 350}{\frac{19,4}{\sqrt{10}}} = 1,12$$

Za $\alpha = 0,01 \Rightarrow 1 - \alpha = 0,99$, pa iz tablica za studentovu-t raspodelu dobijamo

$$t = t_{0,99}(9) = 3,250.$$

Kako je $1,12 \in (-3,25; 3,25)$, nulta hipoteza se prihvata, što znači da hipoteza da je prosečna težina artikla 350kg ispravna.

Određivanjem kritičnih granica imali bismo sledeće rešenje

$$P(|T| < t) = P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right| < \frac{k - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right) = \beta$$

$$k_1 = \mu - t \frac{s}{\sqrt{n}} = 350 - 3,25 \cdot \frac{19,4}{\sqrt{10}} = 330,05$$

$$k_2 = \mu + t \frac{s}{\sqrt{n}} = 350 + 3,25 \cdot \frac{19,4}{\sqrt{10}} = 369,95$$

$$\bar{X} = 356,9 \in (k_1; k_2)$$

Pa se nulta hipoteza prihvata.

11. Mašina proizvodi ploče debljine 0,5mm. Da bi se proverilo da li mašina dobro radi uzet je uzorak od 25 ploča i na osnovu njega određena je aritmetička sredina $\bar{X} = 0,53mm$ sa standardnim odstupanjem od 0,03mm. Testirati hipotezu da su ploče propisane debljine sa pragom značajnosti od 0,01.

Rešenje:

$$\bar{X} = 0,53mm, s = 0,03mm, \mu = 0,5mm$$

$$H_0 (\mu = 0,5) \quad H_1 (\mu \neq 0,5) .$$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{0,53 - 0,5}{\frac{0,03}{\sqrt{25}}} = 5$$

$$t_{0,99}(24) = 2,797$$

Kako je $5 \notin (-2,797; 2,797)$, nulta hipoteza se odbacuje sa rizikom od 1%.

12. Proizvodnjom vina bavi se 350 proizvođača u Srbiji. Prosečno vinarija zapošljava 5 radnika. U slučajnom uzorku od 20 vinarija, prosečan broj zaposlenih je bio 4,8 sa standardnim odstupanjem od 1,9 radnika. Sa rizikom od 5% testirati hipotezu o prosečnom broju radnika.

Rešenje:

$$\bar{X} = 4,8, s = 1,9, n = 20, \mu = 5, \alpha = 0,05$$

$$H_0 (\mu = 5) \quad H_1 (\mu \neq 5) .$$

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{4,8 - 5}{\frac{1,9}{\sqrt{20}}} = -0,47$$

$$t_{0,95}(19) = 2,093$$

Kako je $-0,47 \in (-2,093; 2,093)$, nulta hipoteza se prihvata.

13. Ispitivane su dve metode koje određuju skrob u namirnicama. Razlike u količini skroba dobijene ovim metodama su 2,0,0,1,2,2,3,-3,1,2,3,0,-1,1,-2,1. Testirati hipotezu H_0 , da razlike nisu značajne, na nivou 5% značajnosti.

Rešenje:

Dobija se $\bar{X} = \frac{3}{4}, s = 1,64$.

$H_0 (\mu = 0)$ protiv alternativne $H_1 (\mu \neq 0)$

$$T = \frac{\frac{\bar{X} - \mu}{s}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{\frac{3}{4} - 0}{\frac{1,64}{\sqrt{16}}} = 1,77$$

$$P(-t < T < t) = \beta, t_{0,95}(15) = 2,13$$

$1,77 \in (-2,13; 2,13)$, nema razloga da se odbaci nulta hipoteza.

14. U jednoj firmi testirana je potrošnja dizela na vozilima. Za uzorak je uzeto 15 vozila i dobijeni su sledeći rezultati

Potrošnja dizela	2	6	10
Broj vozila	3	8	4

Ako potrošnja ima normalnu raspodelu, testirati hipotezu da je prosečna potrošnja 7l, sa pragom značajnosti od 0,01.

Rešenje:

$$\bar{X} = 6,27, s = 2,64, \mu = 7, \alpha = 0,01,$$

$$H_0 (\mu = 7) \quad H_1 (\mu \neq 7).$$

$$T = \frac{\frac{\bar{X} - \mu}{s}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = -1,07$$

$$t_{0,99}(14) = 2,977$$

Nulta hipoteza se odbacuje.

15. Izvršeno je 16 merenja pakovanja kafe od 100gr i dobijena srednja težina koja iznosi 100,5gr sa odstupanjem od 1,5gr. Proveriti sa rizikom od 5% da li je očekivano odstupanje težine pakovanja značajno.

Rešenje:

$$H_0(\mu = 100), H_1(\mu \neq 100), T = 1,34, t_{0,95}(15) = 2,13$$

H_0 se ne odbacuje.

16. Na osnovu rezultata merenja na uzorku od 121 i dobijeni su sledeći rezultati:

X	1	2	3	4	5	6		7	8	9
f	7	11	16	17	26	31		11	1	1

- a) Izračunati srednju vrednost uzorka i uzoračku disperziju
 b) Odrediti 99% interval poverenja srednje vrednosti populacije
 c) Testirati hipotezu $H_0(\mu = 5)$ protiv alternativne $H_1(\mu \neq 5)$.
17. Proizvođač objavljuje uvođenje nove tehnologije svoga proizvoda i želi da dužinu života uređaja sa sadašnjih 100 sati poveća. Novi uređaji imaju dužinu života 99, 98, 101, 102, 97, 104, 103, 96, 95, 104 sati. Sa pragom značajnosti od 0,01 testirati hipotezu da li je potrebno uvesti nove tehnologije.
18. Testiran je novi lek. 16 pacijenata je koristilo novi lek i prosečno im je trebalo 6,5 dana da ozdrave sa ostupanjem od 3,5 dana. 14 pacijenata je koristilo strari lek i prosečno im je trebalo 13,8 dana da ozdrave sa ostupanjem od 6 dana. Da li je razlika statistički značajna na nivou značajnosti od 0,05?

Rešenje:

$$\bar{X}_1 = 6,5, s_1 = 3,5, n_1 = 16$$

$$\bar{X}_2 = 13,8, s_2 = 6,0, n_2 = 14$$

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{6,5 - 13,8}{\sqrt{\frac{3,5^2}{16} + \frac{6^2}{14}}} = -3,996$$

$$k = 16 + 14 - 2 = 28, t = 2,04, t_{0,95}(28) = 2,04$$

Kako $-3,996 \notin (-2,04; 2,04)$, nulta hipoteza se odbacuje, odnosno novi lek je bolji.

19. Testirano je znanje iz verovatnoće na dva smera Si i IR. Sa smera Si testirano je 50 studenata, a na smeru IR 40 studenata. Prosečan broj bodova za prvu grupu je 74 sa standardnim odstupanjem od 8 poena, a za drugu grupu prosečan broj poena je 78 sa standardnim odstupanjem od 7 poena. Da li postoji bitna razlika u znanju? Uzeti prag značajnosti od 0,05

Rešenje:

$$\bar{X}_1 = 74, s_1 = 8, n_1 = 40$$

$$\bar{X}_2 = 78, s_2 = 7, n_2 = 50$$

$$T = \frac{\bar{X}_2 - \bar{X}_1}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{74 - 78}{\sqrt{\frac{8^2}{40} + \frac{6^2}{50}}} = -2,49$$

$$k = 40 + 50 - 2 = 88, \quad z_{0,95} = 1,96$$

$-2,49 \notin (-1,96; 1,96)$, nulta hipoteza se odbacuje, odnosno postoji značajna razlika u znanju, druga grupa je bolja.

20. Prosečna težina 50 studenata koji se bave sportom je 69 kg sa standardnim odstupanjem od 2kg, dok je prosečna težina 50 studenata koji se ne bave sportom 74 kg sa standardnim odstupanjem od 2,5kg. Testirati hipotezu da su studenti koji se ne bave sportom teži od onih koji se ne bave sportom na nivou od 5%?

21. Standardno odstupanje težine paketa iznosi 0,25 gr. Uzet je uzorak od 20 paketa i dobijeno uzoračko odstupanje od 0,32g. Može li se tvrditi da da nije došlo do uvećanja standardnog odstupanja na nivou od 5%?

Rešenje:

$$H_0(\sigma = 0,25) \quad H_1(\sigma > 0,25)$$

$$n = 20, \sigma = 0,25, s = 0,32, \alpha = 0,05$$

Uočimo statistiku $\chi^2 = \frac{ns^2}{\sigma^2}$ koja ima χ^2 raspodelu.

$$\chi^2 = \frac{20 \cdot (0,32)^2}{(0,25)^2} = 32,8$$

Kritična oblast se dobija iz uslova $P(\chi^2 > k) = 0,05$,

Pa iz tablica za χ^2 računamo da je $\chi_{19,0,95}^2 = 30,1$

Kritična oblast je $(30,1; +\infty)$, Kako je $32,8 \in (30,1; +\infty)$. Odbacujemo nultu hipotezu.

22. Proizvodni proces je stabilan ako varijansa oštećenja, slučajna promenljiva X, koja ima normalnu raspodelu iznosi 2. Na osnovu uzorka od 25 komada izračunata je srednja vrednost i varijansa uzorka $s^2 = 1,8$. Sa pragom značajnosti 0,05, proveriti da li je sistem stabilan.

Rešenje:

$$H_0(\sigma^2 = 2) \quad H_1(\sigma^2 < 2)$$

$$n = 25, \sigma^2 = 2, s^2 = 1,8, \alpha = 0,05$$

$$\chi^2 = \frac{ns^2}{\sigma^2} = \frac{25 \cdot 1,8}{2} = 22,5$$

Iz uslova $P(\chi^2 < k) = \alpha$, dobija se oblast odbacivanja polazne hipoteze.

Iz tablica za χ^2 računamo da je $\chi_{24,0,05}^2 = 13,8$

Kako je i $22,5 \notin (0; 13,8)$, nulta hipoteza se ne odbacuje. Sistem je stabilan.

23. Standardno odstupanje dužine trajanja sijalica izračunato je na uzorku od 25 sijalica i iznosi 10h. Testirati hipotezu $H_0(\sigma^2 = 110)$ protiv alternativne hipoteze $H_1(\sigma^2 \neq 110)$, sa pragom značajnosti 0,05.

Rešenje:

$$\chi^2 = \frac{ns^2}{\sigma^2} = \frac{25 \cdot 100}{110} = 22,73$$

Oblast prihvatanja nulte hipoteze se dobija iz uslova

$$P(k_1 < \chi^2 < k_2) = 1 - \alpha, \left(\frac{ns^2}{\chi^2_{k,1-\frac{\alpha}{2}}}, \frac{ns^2}{\chi^2_{k,\frac{\alpha}{2}}} \right)$$

$$\chi^2_{k,\frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{24,0,025} = 8,97 \qquad \chi^2_{k,1-\frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{24,0,975} = 32,825$$

$$22,73 \in (8,97; 32,825)$$

Nulta hipoteza se ne odbacuje.

24. Standardi predviđaju da težina proizvoda ima disperziju $\sigma^2 = 9$. Uzet je slučajni uzorak obima 10 i dobijeni su sledeći rezultati težine u gramima.

58,56,57,52,62,55,60,55,61,58

Da li se sa pragom značajnosti od 0,05 na osnovu ovog uzorka može smatrati da je proizvodnja standardna?

Rešenje:

$$H_0(\sigma^2 = 9) H_1(\sigma^2 > 9)$$

$$\bar{X} = 57,4; \quad s^2 = 8,44$$

$$\chi^2 = \frac{ns^2}{\sigma^2} = \frac{10 \cdot 8,44}{9} = 9,38$$

$$\chi^2_{0,95}(9) = 16,9$$

$$9,38 \in (0, 16,9)$$

Nulta hipoteza se ne odbacuje.

25. Standardi predviđaju da težina proizvoda ima disperziju $\sigma^2 = 9$. Uzet je slučajni uzorak obima 10 i dobijeni su sledeći rezultati težine u gramima.

10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19 Da li se sa pragom značajnosti od 0,05 na osnovu ovog uzorka može smatrati da je proizvodnja standardna?

26. Rođenje deteta je slučajan događaj. U uzorku od 2000 rođenja dobijeno je 971 dečaka. Verovatnoća rađanja dečaka je 0,5. Testirati nultu hipotezu da u posmatranom uzorku bude manje od 1000 dečaka, sa pragom značajnosti od 0,05.

Rešenje:

$$H_0 (p = 0,5) \quad H_1 (p < 0,5) .$$

Slučajna promenljiva X predstavlja broj rođenih dečaka i ima binomnu raspodelu. Aproksimiraćemo je normalnom raspodelom.

$$p = 0,5; n = 2000; S_n = 971.$$

$$Z = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} = \frac{971 - 2000 \cdot 0,5}{\sqrt{2000 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = -1,3$$

$$z = z_{0,05} = -1,64$$

Kako $-1,3 \notin (-\infty, -1,64)$ nulta hipoteza se ne odbacuje.

27. Proizvođač iz Beograda smatra da će njegov proizvod nakon dobre reklame kupovati svaki drugi građanin. Za proveru rezultata kampanje uzet je uzorak od 500 kupaca, od kojih je 270 kupilo proizvod ovog proizvođača. Testirati da li je reklamna kampanja bila uspešna, sa dozvoljenim rizikom od 5%.

Rešenje:

$$H_0 (p = 0,5)$$

$$p = 0,5; n = 500; S_n = 270; \alpha = 0,05$$

$$X = \frac{270 - 250}{\sqrt{500 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = 1,79$$

$z = 1,96$ i $1,79 \in (-1,96; 1,96)$ hipotezu H_0 ne odbacujemo.

28. U 4040 bacanja novčića dobilo se 2048 grbova (Bufonov eksperiment). Testirati hipotezu $H_0 (p = 0,5)$, protiv alternativne hipoteze $H_1 (p \neq 0,5)$. Uzeti da je rizik 5%.

Rešenje:

Slučajna promenljiva X predstavlja broj grbova u 4040 bacanja novčića.

Ima binomnu raspodelu, koju aproksimiramo normalnom, sa matematičkim očekivanjem $\mu = np = 4040 \cdot 0,5 = 2020$ i standardnim očekivanjem

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{4040 \cdot 0,5 \cdot 0,5} = \sqrt{1010}.$$

$$z_{0,95} = 1,96,$$

$$Z = \frac{2048 - 2020}{\sqrt{1010}} = 0,88 \in (-1,96; 1,96), \text{ ne odbacimo nultu hipotezu.}$$

29. Iz pošiljke olovaka, izabran je uzorak od 200 komada, među kojima je nađeno 12 oštećenih. Hoće li kupac prihvatiti ovu pošiljku, ako je dogovoreno najviše 3% škarta, sa rizikom od 5%?

30. Neka je slučajna promenljiva X definisana sledećim zakonom raspodele

$$P(X = x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,264 & 0,494 & 0,220 & 0,022 \end{pmatrix}$$

Na osnovu merenja dobijeni su sledeći podaci:

x	0	1	2	3
f	30	45	23	2

Ispitati sa pragom značajnosti od 0,05 da li se kao istinita može prihvatiti hipoteza da podaci dobijeni iz uzorka imaju datu raspodelu.

Rešenje:

Definišimo χ^2 promenljivu

x_i	f_i	p_i	$f_{ri} = 100 \cdot p_i$	$f_i - f_{ri}$	$(f_i - f_{ri})^2$	$\frac{(f_i - f_{ri})^2}{f_{ri}}$
0	30	0,264	3,6	3,6	12,96	0,490
1	45	0,494	4,4	-4,4	19,36	0,39
2	23 }	0,220	0,8	0,8	0,64	0,03
3	2 }	0,022				
Σ	100	1				$\chi^2 = 0,91$

Broj stepena slobode je $k = 4 - 1 = 3$, $\chi^2_{3,0,95} = 7,81$. Kritična oblast je $(7,81; \infty)$ Izračunata vrednost $0,91 \notin (7,81; \infty)$ i nulta hipoteza se prihvata. Odnosno uzorci pripadaju populaciji sa zadatim zakonom raspodele.

Kao što smo već naglasili ako je frekvenca manja od 5 podaci se grupišu.

31. U nekoj fabrici napravljena je analiza učinka proizvodnje. Rukovodstvo tvrdi da se 50% proizvoda uradi u prvom, 22% u drugom i 28% u trećem pogonu. Uzet je uzorak od 500 proizvoda od kojih je 275 iz prvog, 145 iz drugog i 80 iz trećeg pogona.

Testirati hipotezu H_0 da li je rukovodstvo u pravu, sa pragom značajnosti od 0,05.

Rešenje:

Verovatnoće su $p_1 = \frac{50}{100}$, $p_2 = \frac{22}{100}$, $p_3 = \frac{28}{100}$,

i	f_i	p_i	$f_{ti} = np_i$	$f_i - f_{ti}$	$(f_i - f_{ti})^2$	$\frac{(f_i - f_{ti})^2}{f_{ti}}$
1	275	$\frac{50}{100}$	250	25	625	2,4
2	145	$\frac{22}{100}$	110	35	1225	11,14
3	80	$\frac{28}{100}$	140	-60	3600	25,71
Σ	500	1	500			$\chi^2 = 39,35$

Stepeni slobode: $k = n - r - 1 = 3 - 0 - 1 = 2$,

$\chi^2_{0,95}(2) = 5,99$, kritična oblast je $(5,99; \infty)$

Kako $\chi^2 = 39,35$ pripada kritičnoj oblasti, nulta hipoteza se odbacuje. Odnosno, rukovodstvo nije bilo u pravu što se tiče procene produktivnosti pogona.

32. Merena su vremena trajanja putovanja autobusom na jednoj liniji GSB i dobijeni su sledeći rezultati

Vreme u min	20	21	22	23	24	25	26	27
Broj vozila	16	18	19	16	23	19	17	16

Da li su razlike u vremenu putovanja slučajno?

Rešenje:

Vreme x	Br. vozila f_i	f_{ti}	$f_i - f_{ti}$	$(f_i - f_{ti})^2$	$\frac{(f_i - f_{ti})^2}{f_{ti}}$
20	16	18	-2	4	0,22
21	18	18	0	0	0
22	19	18	1	1	0,06
23	16	18	-2	4	0,22
24	23	18	5	25	1,39
25	19	18	1	1	0,06
26	17	18	-1	1	0,06
27	16	18	-2	4	0,22
Σ	144	144			H=2,23

Teorijske frekvence su srazmerne sa srednjom dužinom trajanja putovanja

$$f_{ti} = \frac{\sum f_i}{n} = \frac{144}{8} = 18$$

Stepeni slobode: $k = n - r - 1 = 8 - 0 - 1 = 7$,

$$\chi^2_{0,95}(7) = 14,067, \text{ kritična oblast je } (14,067; \infty)$$

Znači može se smatrati da su odstupanja vremena slučajna.

33. Bacamo 6 novčića 50 puta i registrovan je broj pisama u svakom bacanju.

Broj pisama	0	1	2	3	4	5	6
Broj bacanja	6	7	7	9	8	7	6

Ispitati saglasnost podataka da je broj pisama raspoređen po binomnoj raspodeli sa pragom značajnosti od 0,05.

Rešenje:

$$P(x=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$p = \frac{1}{2}, \quad n = 6, \quad k = 0, 1, \dots, 6$$

$$P(x=0) = \binom{6}{0} \frac{1}{2^6} = 0,016 \quad P(x=1) = \binom{6}{1} \frac{1}{2^6} = 0,094$$

$$P(x=2) = \binom{6}{2} \frac{1}{2^6} = 0,235 \quad P(x=3) = \binom{6}{3} \frac{1}{2^6} = 0,312$$

$$P(x=4) = \binom{6}{4} \frac{1}{2^6} = 0,235 \quad P(x=5) = \binom{6}{5} \frac{1}{2^6} = 0,094$$

$$P(x=6) = \binom{6}{6} \frac{1}{2^6} = 0,016$$

x_i	f_i	p_i	$f_{ri} = 50 \cdot p_i$	$f_i - f_{ri}$	$(f_i - f_{ri})^2$	$\chi^2 = \frac{(f_i - f_{ri})^2}{f_{ri}}$
0	6	0,016	0,8	5,2	27,04	33,8
1	7	0,094	4,7	2,3	5,29	1,125
2	7	0,235	11,75	-4,47	19,98	1,7
3	9	0,312	15,6	-6,6	43,45	2,79
4	8	0,238	11,9	-3,9	15,21	1,28
5	7	0,094	4,7	2,3	5,29	1,125
6	6	0,016	0,8	5,2	27,04	33,8
						$\chi^2 = 75,62$

Stepeni slobode: $k = n - r - 1 = 7 - 0 - 1 = 6$,

$$\chi^2_{0,99}(6) = 16,812 < 75,82,$$

Znači polazna hipoteza se odbacuje

34. U tablici je dat broj automobilskih nesreća u nekom gradu za period od 50 dana.

Broj nesreća	0	1	2	3	4
Broj dana	21	18	7	3	1

Da li je broj nesreća saglasan sa Poasonovom raspodelom. Uzeti da je prag značajnosti 0,05.

Rešenje:

$$\text{Srednja vrednost je } \lambda = \frac{21 \cdot 0 + 18 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 4}{50} = 0,9$$

$$P(x = k) = \frac{e^{-0,9} \cdot 0,9^k}{k!} \quad k = 0, 1, 2, 3, 4 \text{ i za računanje ovih verovatnoća kori-$$

stimo tablice Poasonove raspodele

x_i	f_i	p_i	$f_{ri} = 50 \cdot p_i$	$f_i - f_{ri}$	$(f_i - f_{ri})^2$	$\chi^2 = \frac{(f_i - f_{ri})^2}{f_{ri}}$
0	21	0,4066	20,33	0,67	0,4489	0,0221
1	18	0,3659	18,295	-0,295	0,087	0,0048
2	7	0,1647	8,235	-1,235	1,525	0,1852
3	3	0,0494	0,446	3,554	12,63	28,41
4	1	0,0111				
						$\chi^2 = 28,62$

Stepeni slobode: $k = n - r - 1 = 5 - 0 - 1 = 4$, $\chi^2_{0,95}(4) = 9,49$, kako izračunata vrednost pripada kritičnoj oblasti nulta hipoteza se odbacuje.

35. Bacamo 6 novčića je bačeno 30 puta i registrovan je broj pisama.

Broj pisama	0	1	2	3	4	5	6
Broj bacanja	1	2	7	9	8	2	1

Ispitati saglasnost podataka da je broj pisama raspoređen po binomnoj raspodeli sa pragom značajnosti od 0,05.

36. Posmatrano je 100 porodica sa 3 dece. U tablici su dati rezultati raspodele dečaka i dvojičica po porodicama.

Broj dečaka i d-vojčica	3 dečaka 0dvojčica	2 dečaka 1dvojčica	1 dečak 2dvojčice	0 dečaka 3dvojčice
Broj por.	18	27	35	20

Ispitati saglasnost podataka sa pragom značajnosti od 0,05.

37. Želimo da testiramo novi lek za prevenciju prehlade. Radi odgovora testirano je 200 ljudi i dobijeni sledeći rezultati dati tablicom:

	Pili lek	Nisu pili lek	Σ
Broj ljudi koji su do- bili prehladu	75	25	100
Broj ljudi koji nisu dobili prehladu	65	35	100
zbir	140	60	200

Pitanje je da li je novi lek bolji. Uzeti da je prag značajnosti 0,05.

Rešenje:

	Pili lek	Nisu pili lek	Σ
Broj ljudi koji su dobili prehladu	$\frac{140 \cdot 100}{200} = 70$	$\frac{60 \cdot 100}{200} = 30$	100
Broj ljudi koji nisu dobili prehladu	$\frac{140 \cdot 100}{200} = 70$	$\frac{60 \cdot 100}{200} = 30$	100
zbir	140	60	200

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_i - f_{ti})^2}{f_{ti}} = \frac{(75 - 70)^2}{70} + \frac{(25 - 30)^2}{30} + \frac{(65 - 70)^2}{70} + \frac{(35 - 30)^2}{30} = 2,38$$

Broj stepena slobode je $k = (s - 1)(t - 1) = (2 - 1)(2 - 1) = 1$

Za $\alpha = 0,05$ $\chi_{0,95}^2(1) = 3,84$ i kritična oblast za nultu hipotezu je $(3,84; +\infty)$.

Kako $2,38 \notin (3,84; +\infty)$, nulta hipoteza se ne odbacuje. Znači ne treba preći na novi lek.

38. Testirani su rezultati na ispitima iz matematike, diskretne matematike i verovatnoće. Posmatran je uzorak od 180 studenata i dobijeni su sledeći rezultati dati tablicom

	matematika	Dis. mat	verovatnoća	
položili	50	47	56	153
pali	5	14	8	27
zbir	55	61	64	180

Da li možemo smatrati da je prolaznost ista? Uzeti da je prag značajnosti 0,05

Rešenje:

	matematika	Dis. mat	verovatnoća	
položili	$\frac{55 \cdot 153}{180} = 46,75$	$\frac{61 \cdot 153}{180} = 51,85$	$\frac{64 \cdot 153}{180} = 54,40$	153
pali	$\frac{55 \cdot 27}{180} = 8,25$	$\frac{61 \cdot 27}{180} = 9,15$	$\frac{64 \cdot 27}{180} = 9,60$	27
zbir	55	61	64	180

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_i - f_{ti})^2}{f_{ti}} = \frac{(50 - 46,75)^2}{46,75} + \frac{(47 - 51,85)^2}{51,85} + \frac{(56 - 54,40)^2}{54,40} + \frac{(5 - 8,25)^2}{8,25} + \frac{(14 - 9,15)^2}{9,15} + \frac{(8 - 9,60)^2}{9,60} = 4,84$$

Broj stepena slobode je $k = (s-1)(t-1) = (2-1)(3-1) = 2$

Za $\alpha = 0,05$ $\chi_{0,95}^2(2) = 5,99$ i kritična oblast za nultu hipotezu je $(5,99; +\infty)$.

Kako $4,84 \in (5,99; +\infty)$, nulta hipoteza se odbacuje.

39. Fabrika čokolade je ispitivala vezu između ukusa i pola. Rukovodstvo fabrike tvrdi da ukus ne zavisi od pola, Testirano je 100 ljudi. U tablici su dati rezultati kako su se ljudi opredeljivali prema ukusu i polu. Da li je rukovodstvo fabrike u pravu ?

Čokolada	crna	vanila	kafa	jagoda	ukupno
žene	23	18	8	8	57
muškarci	15	6	12	10	43
ukupno	38	24	20	18	100

Rešenje:

	crna	vanila	kafa	jagoda	Σ
f_{ij}	$\frac{38 \cdot 57}{100} = 21,66$	$\frac{24 \cdot 57}{100} = 13,68$	11,40	10,26	57
	$\frac{38 \cdot 43}{100} = 16,34$	$\frac{24 \cdot 43}{100} = 10,32$	8,6	7,74	43
Σ	38	24	20	18	100

$$\text{Stepeni slobode } (2-1)(4-1) = 3$$

$$\chi^2_{0,95}(3) = 7,81 \quad \chi^2 = 32,40$$

Kako je $32,40 > 7,815$, H_0 hipoteza se odbacuje, rukovodstvo fabrike nije u pravu.

40. Pravljen je analiza o korelaciji između boje kose i očiju kod žena. Za testiranje je uzeto 200 žena. Na osnovu dobijenih rezultata možemo li smatrati da žene plavih očiju imaju i plave oči. Uzeti da je prag značajnosti 0,01.

	Plava kosa	Nije plava kosa
Plave oči	49	25
Nisu plave oči	30	96

41. U tablici se nalaze rezultati studenata koji su polagali matematiku na smerovima SI i IR. Koristeći prag značajnosti od 0,01 testirati hipotezu da nema razlike u uspehu.

	Žene lekari	Muškarci lekari
Žene pacijenti	50	25
Muškarci pacijenti	35	90

43. Želimo da testiramo 4 leka za prevenciju prehlade. Na prvi pogled se čini da je lek 3 najefikasniji. Da li je to tačno sa prag značajnosti od 0,05? Radi odgovora testirano je 495 ljudi i dobijeni sledeći rezultati dati tablicom:

	Lek 1	Lek 2	Lek 3	Lek4	Σ
Broj ljudi koji su dobili prehladu	20	26	9	14	69
Broj ljudi koji nisu dobili prehladu	111	107	96	117	431
ukupno	131	133	105	131	500

INDEKS POJMOVA

Aksiome verovatnoće, 6, 7

Bajesova formula, 38

Bernulijev eksperiment, 93

binomna raspodela, 91

Disperzija, 79,80

Događaj

 Nemoguć, 4

 Nezavisni, 34

 Siguran, 4

 Slučajan, 3

Empirijska funkcija raspodele, 142

Funkcija raspodele, 92, 55

Gausova (normalna) raspodela, 101

greške

 prvog tipa, 212

 drugog tipa, 212

gustina, 103

Hipoteza, 185

Histogram, 149, 55

Intervali poverenja, 185, 186, 187, 188, 189

Ishodi, 125

Laplasova definicija, 13

Matematičko očekivanje, 93

Medijana, 160

Moda, 159

Nivo poverenja, 185

normalna raspodela (Gausova), 101

Obim uzorka, 148

oblast

 kritična, 221

 odbacivanja hipoteze, 221

ocena

 centrirana, 180

 efikasna, 180

 matematičkog očekivanja, 182

 disperzije, 183

ocenjivanje parametara, 179

 intervalno, 185, 186, 187, 188, 189

 tačkasto, 182

Poasonova raspodela, 97

populacija, 147

potpuni sistem hipoteza, 35

pouzdanost, 94

prostor verovatnoće, 10

Raspodela

 apriori, 10

 diskretna, 54

 neprekidna, 55

Slučajna promenljiva, 91

 diskretna, 54

 neprekidna, 59

slučajni proces, 53

standardna devijacija, 165
statistika, 147
statistički eksperiment, 148
studentova (t) raspodela, 113
t raspodela, 113
test, 185

Uslovna verovatnoća, 33
Uzorak, 126

Verovatnoća, 1
Varijansa, 68, 70, 82, 137

Zakon
raspodele, 50
velikih brojeva, 12

LITERATURA

1. M. Spiegel, J. Schiller, R. Srinivasan: Probability and Statistics. Schaum, Mc Graw hill, 2009.
2. D. Downing, J. Klark, E-Z Statistics, Baron's Educational Series, 2009
3. M. Merkle: Verovatnoća i statistika. Akademska misao, Beograd, 2016.
4. S. Vukadinović: Elementi teorije verovatnoće i matematičke statistike .Privredni pregled, Beograd, 1974
5. P. Vasić: Zadaci i problemi teorije verovatnoće. Građevinska knjiga, Beograd, 1974.
6. M. Rajović, D. Stanošević: Verovatnoća i statistika, teorija i primeri. Akademska misao, Beograd, 2006.
7. N. Vuković, M. Delić, Z. Radojičić, D. Vukmirović: Zbirka zadataka iz verovatnoće i statistike, Akademska misao, Beograd, 1998.

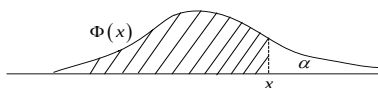
TABLICE

Tablica 1. Vrednosti λ i k za Poasonovu raspodelu

$$P_{\lambda,k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

k / λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0.904837	0.818731	0.740818	0.670320	0.606531	0.548812
1	0.090484	0.163746	0.222245	0.268128	0.303265	0.329287
2	0.004524	0.016375	0.033337	0.053626	0.075800	0.098786
3	0.000151	0.001091	0.003334	0.007150	0.012636	0.019757
4	0.000004	0.000055	0.000250	0.000715	0.001580	0.002964
5	0.000000	0.000002	0.000015	0.000057	0.000158	0.000356
6	0.000000	0.000000	0.000001	0.000004	0.000013	0.000035
7	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000003
k / λ	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0
0	0.496585	0.449329	0.406570	0.367879	0.135335	0.049787
1	0.347610	0.359463	0.365913	0.367879	0.270671	0.149361
2	0.121663	0.143785	0.164661	0.183940	0.270671	0.224042
3	0.028388	0.038343	0.049398	0.061313	0.180447	0.224042
4	0.004968	0.007669	0.011115	0.015328	0.090224	0.168031
5	0.000695	0.001227	0.002001	0.003066	0.036089	0.100819
6	0.000081	0.000164	0.000300	0.000511	0.012030	0.050409
7	0.000008	0.000019	0.000039	0.000073	0.003437	0.021604
8	0.000000	0.000002	0.000004	0.000009	0.000859	0.008101
9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000191	0.002701
10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000038	0.000810
11	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000007	0.000221
12	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000055
13	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000013
14	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000003
15	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001

Tablica 2. Jednosmerna standardna normalna raspodela

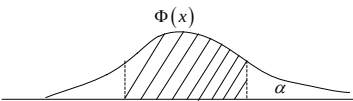


$$P(Z < z) = p$$

a	p	a	p	a	p	a	p	a	p	a	p
-2.99	.0014	-2.49	.0064	-1.99	.0233	-1.49	.0681	-0.99	.1611	-0.49	.3121
-2.98	.0014	-2.48	.0066	-1.98	.0239	-1.48	.0694	-0.98	.1635	-0.48	.3156
-2.97	.0015	-2.47	.0068	-1.97	.0244	-1.47	.0708	-0.97	.1660	-0.47	.3192
-2.96	.0015	-2.46	.0069	-1.96	.0250	-1.46	.0721	-0.96	.1685	-0.46	.3228
-2.95	.0016	-2.45	.0071	-1.95	.0256	-1.45	.0735	-0.95	.1711	-0.45	.3264
-2.94	.0016	-2.44	.0073	-1.94	.0262	-1.44	.0749	-0.94	.1736	-0.44	.3300
-2.93	.0017	-2.43	.0075	-1.93	.0268	-1.43	.0764	-0.93	.1762	-0.43	.3336
-2.92	.0018	-2.42	.0078	-1.92	.0274	-1.42	.0778	-0.92	.1788	-0.42	.3372
-2.91	.0018	-2.41	.0080	-1.91	.0281	-1.41	.0793	-0.91	.1814	-0.41	.3409
-2.90	.0019	-2.40	.0082	-1.90	.0287	-1.40	.0808	-0.90	.1841	-0.40	.3446
-2.89	.0019	-2.39	.0084	-1.89	.0294	-1.39	.0823	-0.89	.1867	-0.39	.3483
-2.88	.0020	-2.38	.0087	-1.88	.0301	-1.38	.0838	-0.88	.1894	-0.38	.3520
-2.87	.0021	-2.37	.0089	-1.87	.0307	-1.37	.0853	-0.87	.1922	-0.37	.3557
-2.86	.0021	-2.36	.0091	-1.86	.0314	-1.36	.0869	-0.86	.1949	-0.36	.3594
-2.85	.0022	-2.35	.0094	-1.85	.0322	-1.35	.0885	-0.85	.1977	-0.35	.3632
-2.84	.0023	-2.34	.0096	-1.84	.0329	-1.34	.0901	-0.84	.2005	-0.34	.3669
-2.83	.0023	-2.33	.0099	-1.83	.0336	-1.33	.0918	-0.83	.2033	-0.33	.3707
-2.82	.0024	-2.32	.0102	-1.82	.0344	-1.32	.0934	-0.82	.2061	-0.32	.3745
-2.81	.0025	-2.31	.0104	-1.81	.0351	-1.31	.0951	-0.81	.2090	-0.31	.3783
-2.80	.0026	-2.30	.0107	-1.80	.0359	-1.30	.0968	-0.80	.2119	-0.30	.3821
-2.79	.0026	-2.29	.0110	-1.79	.0367	-1.29	.0985	-0.79	.2148	-0.29	.3859
-2.78	.0027	-2.28	.0113	-1.78	.0375	-1.28	.1003	-0.78	.2177	-0.28	.3897
-2.77	.0028	-2.27	.0116	-1.77	.0384	-1.27	.1020	-0.77	.2206	-0.27	.3936
-2.76	.0029	-2.26	.0119	-1.76	.0392	-1.26	.1038	-0.76	.2236	-0.26	.3974
-2.75	.0030	-2.25	.0122	-1.75	.0401	-1.25	.1056	-0.75	.2266	-0.25	.4013
-2.74	.0031	-2.24	.0125	-1.74	.0409	-1.24	.1075	-0.74	.2296	-0.24	.4052
-2.73	.0032	-2.23	.0129	-1.73	.0418	-1.23	.1093	-0.73	.2327	-0.23	.4090
-2.72	.0033	-2.22	.0132	-1.72	.0427	-1.22	.1112	-0.72	.2358	-0.22	.4129
-2.71	.0034	-2.21	.0136	-1.71	.0436	-1.21	.1131	-0.71	.2389	-0.21	.4168
-2.70	.0035	-2.20	.0139	-1.70	.0446	-1.20	.1151	-0.70	.2420	-0.20	.4207
-2.69	.0036	-2.19	.0143	-1.69	.0455	-1.19	.1170	-0.69	.2451	-0.19	.4247
-2.68	.0037	-2.18	.0146	-1.68	.0465	-1.18	.1190	-0.68	.2483	-0.18	.4286
-2.67	.0038	-2.17	.0150	-1.67	.0475	-1.17	.1210	-0.67	.2514	-0.17	.4325
-2.66	.0039	-2.16	.0154	-1.66	.0485	-1.16	.1230	-0.66	.2546	-0.16	.4364
-2.65	.0040	-2.15	.0158	-1.65	.0495	-1.15	.1251	-0.65	.2578	-0.15	.4404
-2.64	.0041	-2.14	.0162	-1.64	.0505	-1.14	.1271	-0.64	.2611	-0.14	.4443
-2.63	.0043	-2.13	.0166	-1.63	.0516	-1.13	.1292	-0.63	.2643	-0.13	.4483
-2.62	.0044	-2.12	.0170	-1.62	.0526	-1.12	.1314	-0.62	.2676	-0.12	.4522
-2.61	.0045	-2.11	.0174	-1.61	.0537	-1.11	.1335	-0.61	.2709	-0.11	.4562
-2.60	.0047	-2.10	.0179	-1.60	.0548	-1.10	.1357	-0.60	.2743	-0.10	.4602
-2.59	.0048	-2.09	.0183	-1.59	.0559	-1.09	.1379	-0.59	.2776	-0.09	.4641
-2.58	.0049	-2.08	.0188	-1.58	.0570	-1.08	.1401	-0.58	.2810	-0.08	.4681
-2.57	.0051	-2.07	.0192	-1.57	.0582	-1.07	.1423	-0.57	.2843	-0.07	.4721
-2.56	.0052	-2.06	.0197	-1.56	.0594	-1.06	.1446	-0.56	.2877	-0.06	.4761
-2.55	.0054	-2.05	.0202	-1.55	.0605	-1.05	.1469	-0.55	.2912	-0.05	.4801
-2.54	.0055	-2.04	.0207	-1.54	.0618	-1.04	.1492	-0.54	.2946	-0.04	.4840
-2.53	.0057	-2.03	.0212	-1.53	.0630	-1.03	.1515	-0.53	.2981	-0.03	.4880
-2.52	.0059	-2.02	.0217	-1.52	.0642	-1.02	.1539	-0.52	.3015	-0.02	.4920
-2.51	.0060	-2.01	.0222	-1.51	.0655	-1.01	.1562	-0.51	.3050	-0.01	.4960
-2.50	.0062	-2.00	.0228	-1.50	.0668	-1.00	.1587	-0.50	.3085	0.00	.5000

a	p	a	p	a	p	a	p	a	p	a	p
0.01	.5040	0.51	.6950	1.01	.8438	1.51	.9345	2.01	.9778	2.51	.9940
0.02	.5080	0.52	.6985	1.02	.8461	1.52	.9357	2.02	.9783	2.52	.9941
0.03	.5120	0.53	.7019	1.03	.8485	1.53	.9370	2.03	.9788	2.53	.9943
0.04	.5160	0.54	.7054	1.04	.8508	1.54	.9382	2.04	.9793	2.54	.9945
0.05	.5199	0.55	.7088	1.05	.8531	1.55	.9394	2.05	.9798	2.55	.9946
0.06	.5239	0.56	.7123	1.06	.8554	1.56	.9406	2.06	.9803	2.56	.9948
0.07	.5279	0.57	.7157	1.07	.8577	1.57	.9418	2.07	.9808	2.57	.9949
0.08	.5319	0.58	.7190	1.08	.8599	1.58	.9429	2.08	.9812	2.58	.9951
0.09	.5359	0.59	.7224	1.09	.8621	1.59	.9441	2.09	.9817	2.59	.9952
0.10	.5398	0.60	.7257	1.10	.8643	1.60	.9452	2.10	.9821	2.60	.9953
0.11	.5438	0.61	.7291	1.11	.8665	1.61	.9463	2.11	.9826	2.61	.9955
0.12	.5478	0.62	.7324	1.12	.8686	1.62	.9474	2.12	.9830	2.62	.9956
0.13	.5517	0.63	.7357	1.13	.8708	1.63	.9484	2.13	.9834	2.63	.9957
0.14	.5557	0.64	.7389	1.14	.8729	1.64	.9495	2.14	.9838	2.64	.9959
0.15	.5596	0.65	.7422	1.15	.8749	1.65	.9505	2.15	.9842	2.65	.9960
0.16	.5636	0.66	.7454	1.16	.8770	1.66	.9515	2.16	.9846	2.66	.9961
0.17	.5675	0.67	.7486	1.17	.8790	1.67	.9525	2.17	.9850	2.67	.9962
0.18	.5714	0.68	.7517	1.18	.8810	1.68	.9535	2.18	.9854	2.68	.9963
0.19	.5753	0.69	.7549	1.19	.8830	1.69	.9545	2.19	.9857	2.69	.9964
0.20	.5793	0.70	.7580	1.20	.8849	1.70	.9554	2.20	.9861	2.70	.9965
0.21	.5832	0.71	.7611	1.21	.8869	1.71	.9564	2.21	.9864	2.71	.9966
0.22	.5871	0.72	.7642	1.22	.8888	1.72	.9573	2.22	.9868	2.72	.9967
0.23	.5910	0.73	.7673	1.23	.8907	1.73	.9582	2.23	.9871	2.73	.9968
0.24	.5948	0.74	.7704	1.24	.8925	1.74	.9591	2.24	.9875	2.74	.9969
0.25	.5987	0.75	.7734	1.25	.8944	1.75	.9599	2.25	.9878	2.75	.9970
0.26	.6026	0.76	.7764	1.26	.8962	1.76	.9608	2.26	.9881	2.76	.9971
0.27	.6064	0.77	.7794	1.27	.8980	1.77	.9616	2.27	.9884	2.77	.9972
0.28	.6103	0.78	.7823	1.28	.8997	1.78	.9625	2.28	.9887	2.78	.9973
0.29	.6141	0.79	.7852	1.29	.9015	1.79	.9633	2.29	.9890	2.79	.9974
0.30	.6179	0.80	.7881	1.30	.9032	1.80	.9641	2.30	.9893	2.80	.9974
0.31	.6217	0.81	.7910	1.31	.9049	1.81	.9649	2.31	.9896	2.81	.9975
0.32	.6255	0.82	.7939	1.32	.9066	1.82	.9656	2.32	.9898	2.82	.9976
0.33	.6293	0.83	.7967	1.33	.9082	1.83	.9664	2.33	.9901	2.83	.9977
0.34	.6331	0.84	.7995	1.34	.9099	1.84	.9671	2.34	.9904	2.84	.9977
0.35	.6368	0.85	.8023	1.35	.9115	1.85	.9678	2.35	.9906	2.85	.9978
0.36	.6406	0.86	.8051	1.36	.9131	1.86	.9686	2.36	.9909	2.86	.9979
0.37	.6443	0.87	.8078	1.37	.9147	1.87	.9693	2.37	.9911	2.87	.9979
0.38	.6480	0.88	.8106	1.38	.9162	1.88	.9699	2.38	.9913	2.88	.9980
0.39	.6517	0.89	.8133	1.39	.9177	1.89	.9706	2.39	.9916	2.89	.9981
0.40	.6554	0.90	.8159	1.40	.9192	1.90	.9713	2.40	.9918	2.90	.9981
0.41	.6591	0.91	.8186	1.41	.9207	1.91	.9719	2.41	.9920	2.91	.9982
0.42	.6628	0.92	.8212	1.42	.9222	1.92	.9726	2.42	.9922	2.92	.9982
0.43	.6664	0.93	.8238	1.43	.9236	1.93	.9732	2.43	.9925	2.93	.9983
0.44	.6700	0.94	.8264	1.44	.9251	1.94	.9738	2.44	.9927	2.94	.9984
0.45	.6736	0.95	.8289	1.45	.9265	1.95	.9744	2.45	.9929	2.95	.9984
0.46	.6772	0.96	.8315	1.46	.9279	1.96	.9750	2.46	.9931	2.96	.9985
0.47	.6808	0.97	.8340	1.47	.9292	1.97	.9756	2.47	.9932	2.97	.9985
0.48	.6844	0.98	.8365	1.48	.9306	1.98	.9761	2.48	.9934	2.98	.9986
0.49	.6879	0.99	.8389	1.49	.9319	1.99	.9767	2.49	.9936	2.99	.9986
0.50	.6915	1.00	.8413	1.50	.9332	2.00	.9772	2.50	.9938	3.00	.9987

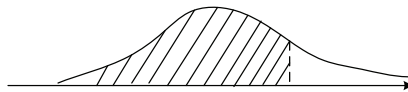
Tablica 3. Dvosmerna standardna normalna raspodela



$$P(|Z| < z) = p$$

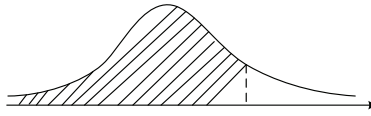
<i>a</i>	<i>p</i>	<i>a</i>	<i>p</i>
0.100	0.0796	1.400	0.8384
0.200	0.1586	1.439	0.8500
0.300	0.2358	1.500	0.8664
0.400	0.3108	1.600	0.8904
0.500	0.3830	1.645	0.9000
0.600	0.4514	1.700	0.9108
0.700	0.5160	1.800	0.9282
0.800	0.5762	1.900	0.9426
0.900	0.6318	1.960	0.9500
1.000	0.6826	2.000	0.9544
1.100	0.7286	2.500	0.9876
1.200	0.7698	2.576	0.9900
1.282	0.8000	3.000	0.9974
1.300	0.8064	3.100	0.9980

Tablica 4. χ^2 raspodela $P(\chi^2 < a) = p$



k	$p = .005$	.01	.025	.05	.25	.5	.75	.9	.95	.975	.99
1	.000	.000	.001	.004	.10	.45	1.32	2.71	3.84	5.02	6.64
2	.010	.020	.051	.10	.58	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21
3	.072	.11	.22	.35	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3
4	.21	.30	.48	.71	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3
5	.41	.55	.83	1.15	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1
6	.68	.87	1.24	1.64	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8
7	.99	1.24	1.69	2.17	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5
8	1.34	1.65	2.18	2.73	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1
9	1.73	2.09	2.70	3.33	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7
10	2.16	2.56	3.25	3.94	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7
12	3.07	3.57	4.40	5.23	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2
13	3.56	4.11	5.01	5.89	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7
14	4.07	4.66	5.63	6.57	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1
15	4.60	5.23	6.26	7.26	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6
16	5.14	5.81	6.91	7.96	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0
17	5.70	6.41	7.56	8.67	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4
18	6.26	7.01	8.23	9.39	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8
19	6.84	7.63	8.91	10.1	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2
20	7.43	8.26	9.59	10.9	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6
21	8.03	8.90	10.3	11.6	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9
22	8.64	9.54	11.0	12.3	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3
23	9.26	10.2	11.7	13.1	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6
24	9.89	10.9	12.4	13.8	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0
25	10.5	11.5	13.1	14.6	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3
26	11.2	12.2	13.8	15.4	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6
27	11.8	12.9	14.6	16.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0
28	12.5	13.6	15.3	16.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3
29	13.1	14.3	16.0	17.7	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6
30	13.8	14.9	16.8	18.5	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9
35	17.2	18.5	20.6	22.5	29.0	34.3	40.2	46.1	49.8	53.2	57.3
40	20.7	22.2	24.4	26.5	33.7	39.3	45.6	51.8	55.8	59.3	63.7
50	28.0	29.7	32.4	34.8	42.9	49.3	56.3	63.2	67.5	71.4	76.2
60	35.5	37.5	40.5	43.2	52.3	59.3	67.0	74.4	79.1	83.3	88.4
70	43.3	45.4	48.8	51.7	61.7	69.3	77.6	85.5	90.5	95.0	100.4
80	51.2	53.5	57.2	60.4	71.1	79.3	88.1	96.6	101.9	106.6	112.3
90	59.2	61.8	65.6	69.1	80.6	89.3	98.6	107.6	113.1	118.1	124.1
100	67.3	70.1	74.2	77.9	90.1	99.3	109.1	118.5	124.3	129.6	135.8

Tablica 5. Jednosmerna t raspodela $P(T < t_p) = p$



k	$p = .750$	$p = .900$	$p = .950$	$p = .975$	$p = .990$	$p = .995$
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
35	0.682	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724
40	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
45	0.680	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690
50	0.679	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678
55	0.679	1.297	1.673	2.004	2.396	2.668
60	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
80	0.678	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639
100	0.677	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626
120	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617

Tablica 6. Dvosmerna t raspodela



$$P(|T| < t_p) = p$$

k	$p = .900$	$p = .950$	$p = .99$
1	6.314	12.706	63.657
2	2.920	4.303	9.925
3	2.353	3.182	5.841
4	2.132	2.776	4.604
5	2.015	2.571	4.032
6	1.943	2.447	3.707
7	1.895	2.365	3.499
8	1.860	2.306	3.355
9	1.833	2.262	3.250
10	1.812	2.228	3.169
11	1.796	2.201	3.106
12	1.782	2.179	3.055
13	1.771	2.160	3.012
14	1.761	2.145	2.977
15	1.753	2.131	2.947
16	1.746	2.120	2.921
17	1.740	2.110	2.898
18	1.734	2.101	2.878
19	1.729	2.093	2.861
20	1.725	2.086	2.845
21	1.721	2.080	2.831
22	1.717	2.074	2.819
23	1.714	2.069	2.807
24	1.711	2.064	2.797
25	1.708	2.060	2.787
26	1.706	2.056	2.779
27	1.703	2.052	2.771
28	1.701	2.048	2.763
29	1.699	2.045	2.756
30	1.697	2.042	2.750
35	1.690	2.030	2.724
40	1.684	2.021	2.704
45	1.679	2.014	2.690
50	1.676	2.009	2.678
55	1.673	2.004	2.668
60	1.671	2.000	2.660
80	1.664	1.990	2.639
100	1.660	1.984	2.626
120	1.658	1.980	2.617

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

519.2(075.8)

КОСТИЋ Ковачевић, Ивана, 1952-

Verovatnoća i statistika sa zbirkom zadataka / Ivana Kostić Kovačević. - 5. izd.
- Beograd : Univerzitet Singidunum, 2025 (Beograd : Caligraph). - XII, 267 str. :
graf. prikazi, tabele ; 24 cm

Tiraž 800. - Registar. - Bibliografija: str. 257.

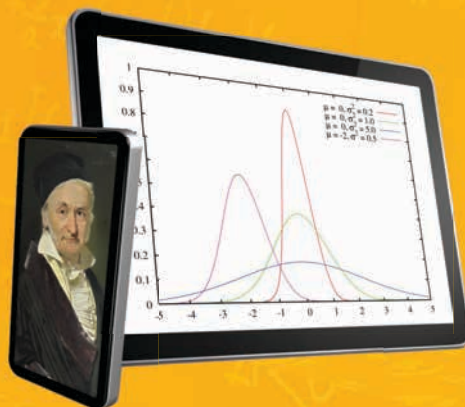
ISBN 978-86-7912-711-2

a) Теорија вероватноће b) Математичка статистика

COBISS.SR-ID 173178889

© 2025.

Sva prava zadržana. Nijedan deo ove publikacije ne može biti reprodukovan u bilo kom vidu i putem bilo kog medija, u delovima ili celini bez prethodne pismene saglasnosti izdavača.



Verovatnoća i statistika

SA ZBIRKOM ZADATAKA

Ivana Kostić Kovačević

Ovaj udžbenik pokriva kurs od jednog semestra osnova verovatnoće i matematičke statistike. Namijenjen je studentima koji se po prvi put susreću sa ovom materijom i to prvenstveno studentima informatike i računarstva. Udžbenik ne sadrži stroge matematičke dokaze, pošto je osnovni cilj da se čitaoci upoznaju sa osnovnim pojmovima teorije i primene, da ih shvate, razumeju i osposobe da ih primene u struci. Uz teorijski deo dat je veliki broj rešenih zadataka koji omogućavaju lakše savladavanje materije. Treba imati u vidu da se danas nijedno statističko izračunavanje ne realizuje i bez upotrebe nekog od softvera koji je predviđen za tu oblast, kao što su Excel, SPSS, Statistica i dr. Novina u odnosu na predhodno izdanje udžbenika je što su u ovom materijali za izračunavanje osim klasičnih metoda izložena i mogućnost korišćenja softverskog paketa Excel. Excel je izabran jer je kao deo Microsoftovog paketa pristupačan većini korisnika, a drugi razlog je što je to relativno jednostavan softver za rad, a dovoljno sadržajan da se većina problema može rešiti njegovim korišćenjem.