



# Kvantitativne metode

## PRAKTIKUM

Biljana Radić



Beograd, 2025.

UNIVERZITET SINGIDUNUM

*PRAKTIKUM*  
*IZ*  
*KVANTITATIVNIH*  
*METODA*

Biljana Radičić

# PRAKTIKUM IZ KVANTITATIVNIH METODA

## *Autor:*

Prof. dr Biljana Radičić

## *Recenzenti:*

Prof. dr Zoran Petrović

Prof. dr Slađana Spasić

## *Izdavač:*

UNIVERZITET SINGIDUNUM

Beograd, Danijelova 32

## *Za izdavača:*

Prof. dr Milovan Stanišić

## *Tehnička obrada:*

Biljana Radičić

## *Priprema za štampu:*

Miloš Višnjić

## *Dizajn korica:*

Aleksandar Mihajlović, MA

## *Godina izdanja:*

2025.

## *Tiraž:*

1700 primeraka

## *Štampa:*

Birograf, Beograd

ISBN: 978-86-7912-789-1

## Copyright:

© 2025. Univerzitet Singidunum

Izdavač zadržava sva prava.

Reprodukcija pojedinih delova ili celine ove publikacije nije dozvoljena.

”SUŠTINA MATEMATIKE NIJE U FORMULAMA,

*NEGO U PROCESU RAZMIŠLJANJA*

PUTEM KOJEG SE DOLAZI DO FORMULA”

V. Le

# Sadržaj

|                                                     |           |
|-----------------------------------------------------|-----------|
| <b>Predgovor</b>                                    | <b>i</b>  |
| <b>1. Determinante</b>                              | <b>1</b>  |
| 1.1. Determinante reda 2 . . . . .                  | 1         |
| 1.2. Determinante reda 3 . . . . .                  | 4         |
| 1.3. Determinante reda većeg od 3 . . . . .         | 11        |
| <b>2. Matrice</b>                                   | <b>19</b> |
| 2.1. Operacije sa matricama . . . . .               | 19        |
| 2.2. Inverzna matrica . . . . .                     | 26        |
| 2.3. Matrične jednačine . . . . .                   | 31        |
| 2.4. Rang matrice . . . . .                         | 35        |
| <b>3. Sistemi linearnih jednačina</b>               | <b>38</b> |
| 3.1. Gausova metoda . . . . .                       | 38        |
| 3.2. Kramerova metoda . . . . .                     | 44        |
| 3.3. Matrična metoda . . . . .                      | 50        |
| 3.4. Homogeni sistemi linearnih jednačina . . . . . | 53        |
| <b>4. Finansijska matematika</b>                    | <b>59</b> |
| 4.1. Proporcionalnost veličina . . . . .            | 59        |
| 4.2. Procentni račun . . . . .                      | 62        |
| 4.3. Kamatni račun . . . . .                        | 65        |
| <b>5. Realne funkcije jedne realne promenljive</b>  | <b>74</b> |
| 5.1. Domen funkcije . . . . .                       | 74        |
| 5.2. Nule funkcije . . . . .                        | 91        |
| 5.3. Znak funkcije . . . . .                        | 99        |
| 5.4. Parnost i neparnost funkcije . . . . .         | 108       |
| 5.5. Granična vrednost funkcije . . . . .           | 111       |
| 5.6. Izvod funkcije . . . . .                       | 115       |

|                                                                |            |
|----------------------------------------------------------------|------------|
| 5.7. Ispitivanje funkcije i crtanje grafika funkcije . . . . . | 125        |
| 5.8. Integrali . . . . .                                       | 143        |
| <b>6. Ekonomske funkcije</b>                                   | <b>154</b> |
| <b>7. Statistika i verovatnoća</b>                             | <b>166</b> |
| 7.1. Statistika . . . . .                                      | 166        |
| 7.2. Verovatnoća . . . . .                                     | 183        |
| <b>8. Modeli zadataka za proveru znanja</b>                    | <b>195</b> |
| 8.1. Modeli zadataka za proveru znanja – I deo . . . . .       | 195        |
| 8.2. Modeli zadataka za proveru znanja – II deo . . . . .      | 198        |
| <b>9. Primeri rešenih modela zadataka</b>                      | <b>201</b> |
| 9.1. Rešeni model zadataka – I deo . . . . .                   | 201        |
| 9.2. Rešeni model zadataka – II deo . . . . .                  | 207        |
| <b>Literatura</b>                                              | <b>212</b> |

## *Predgovor*

Ovaj Praktikum je napisan prema planu i programu predmeta *KVANTITATIVNE METODE* koji studenti sledećih fakulteta Univerziteta Singidunum imaju na I godini osnovnih akademskih studija: *Poslovni fakultet, Fakultet za turistički i hotelijerski menadžment, Fakultet za menadžment u sportu i Životna sredina i održivi razvoj*. Predmet *KVANTITATIVNE METODE* je jednosemestralni predmet koji studenti navedenih fakulteta imaju u zimskom ili letnjem semestru, zavisno od fakulteta, tokom I godine osnovnih akademskih studija. Praktikum je nastao kako bi se izašlo u susret potrebi i zahtevu studenata tokom dosadašnjeg rada sa njima za što većim brojem primera zadataka pri pripremi kolokvijuma i ispita što bi im omogućilo lakše i brže savladavanje gradiva. Uz udžbenik, Praktikum će svakako, s obzirom na prirodu predmeta, dati veliki doprinos savladavanju predviđenog gradiva. Iako je Praktikum namenjen pre svega studentima navedenih fakulteta, Praktikum može koristiti i drugim čitaocima čija se interesovanja poklapaju sa gradivom (ili delom gradiva) koje je u njemu obrađeno.

Praktikum je podeljen u 9 poglavlja. *Poglavljja 1.- 7.* sadrže zadatke za vežbanje uz napomenu da se na početku svakog od tih poglavlja nalazi nekoliko potpuno rešenih reprezentativnih primera zadataka. Zadaci za vežbanje sadrže više primera, od najjednostavnijih prema složenijim, što omogućava studentima da se što bolje pripreme za polaganje ispita. Modeli zadataka, i za I i za II deo gradiva, koji su dati u *8. poglavlju*, omogućavaju studentima uvid u broj, tip, težinu zadataka kao i oblasti iz kojih dolaze u obzir zadaci na proveru znanja. Poslednje, *9. poglavlje*, sadrži rešenja za jedan model zadataka iz I dela gradiva i za jedan model zadataka iz II dela gradiva.

E-mail adresa na koju čitaoci mogu poslati svoje sugestije, predloge i komentare glasi: *bradicic@singidunum.ac.rs*. U cilju poboljšanja

kvaliteta narednog izdanja ovog Praktikuma sve primljene sugestije, predlozi i komentari biće razmotreni.

Na kraju bih želela da se zahvalim recenzentima *prof. dr Zoranu Petroviću*, redovnom profesoru Matematičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu i *prof. dr Slađani Spasić*, redovnom profesoru Univerziteta Singidunum čiji su veoma korisni komentari doprineli povećanju kvaliteta Praktikuma.

AUTOR

Beograd, 2022.

## 1. Determinante

Literatura u kojoj možete pronaći neophodne informacije o determinantama: [1], [2], [4], [6], [9]-[12] ili [14].

### 1.1. Determinante reda 2

**Primer 1.** Izračunati vrednost sledeće determinante.

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - 2 \cdot (-2) = -3 - (-4) = -3 + 4 = 1. \blacklozenge$$

**Zadaci za vežbu:**

1. Izračunati vrednost sledećih determinanti.

$$1) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad 3) \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}, \quad 4) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \quad 5) \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Izračunati vrednost sledećih determinanti.

$$1) \begin{vmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -4 \end{vmatrix}, \quad 2) \begin{vmatrix} \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{5} \end{vmatrix}, \quad 3) \begin{vmatrix} 2-\sqrt{3} & 1-\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} & 2+\sqrt{3} \end{vmatrix}, \quad 4) \begin{vmatrix} \sqrt{3} & 1+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} & \sqrt{3} \end{vmatrix}.$$

3. Izračunati vrednost sledećih determinanti ( $i = \sqrt{-1}$ ).

$$1) \begin{vmatrix} i & 1 \\ 3 & i \end{vmatrix}, \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & i\sqrt{3} \\ i\sqrt{3} & 1 \end{vmatrix}, \quad 3) \begin{vmatrix} i+2 & \sqrt{3}+1 \\ \sqrt{3}-1 & i-2 \end{vmatrix}, \quad 4) \begin{vmatrix} \sqrt{2}+3i & i-\sqrt{3} \\ i+\sqrt{3} & \sqrt{2}-3i \end{vmatrix}.$$

4. Izračunati vrednost sledećih determinanti.

$$1) \begin{vmatrix} \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \\ -1 & \sqrt{2} \end{vmatrix}, \quad 2) \begin{vmatrix} \sin \frac{\pi}{6} & \sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \sin \frac{\pi}{6} \end{vmatrix}, \quad 3) \begin{vmatrix} \cos \pi & \sin \frac{\pi}{2} \\ \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \end{vmatrix}, \quad 4) \begin{vmatrix} \sin \frac{\pi}{2} & \cos \pi \\ \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{2} \end{vmatrix}.$$

5. Izračunati vrednost sledećih determinanti.

$$1) \begin{vmatrix} 1 & \log_3 3 \\ \log_2 1 & 1 \end{vmatrix}, 2) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \log_3 9 & \log_2 8 \end{vmatrix}, 3) \begin{vmatrix} \log_2 \frac{1}{2} & -4 \\ 1 & \log_2 4 \end{vmatrix}, 4) \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ -2 & \log_4 8 \end{vmatrix}.$$

6. Proveriti tačnost sledećih jednakosti.

$$1) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1, 2) \begin{vmatrix} \sqrt{5} & 2 \\ -2 & \sqrt{5} \end{vmatrix} = 1, 3) \begin{vmatrix} -2i & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & i \end{vmatrix} = -1, 4) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{vmatrix} = 0.$$

7. Odrediti nepoznatu  $x$  tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} x & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4, 2) \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ x & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}, 3) \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & x \end{vmatrix} = 3, 4) \begin{vmatrix} 3 & x \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

8. Odrediti nepoznatu  $x$  tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 2, 2) \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ x-\frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix} = 3, 3) \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & \frac{2}{3}-x \end{vmatrix} = -1.$$

9. Odrediti nepoznatu  $x$  tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} x+1 & x-2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 1, 2) \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ x+\frac{2}{3} & 1+x \end{vmatrix} = -1, 3) \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ \frac{3}{2}x+\frac{4}{3} & \frac{3}{2}-x \end{vmatrix} = -\frac{3}{2}.$$

10. Odrediti nepoznatu  $x$  tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} x+3 & x+2 \\ x-2 & x+3 \end{vmatrix} = -3, 2) \begin{vmatrix} x+1 & x-2 \\ x-3 & x+4 \end{vmatrix} = -2, 3) \begin{vmatrix} \frac{4}{3}-x & x+2 \\ \frac{3}{2}-x & x+\frac{1}{3} \end{vmatrix} = 1.$$

**11.** Odrediti nepoznatu  $x$  tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) x^2 + x = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad 2) x^2 + 3x = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad 3) 2x^2 + x = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

**12.** Odrediti nepoznatu  $x$  tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} x & x \\ 2 & x \end{vmatrix} = 8, \quad 2) \begin{vmatrix} x & -1 \\ x & 2x \end{vmatrix} = 6, \quad 3) \begin{vmatrix} 5x & 3x \\ -x & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad 4) \begin{vmatrix} -1 & 2x \\ 4x & 2x \end{vmatrix} = -1.$$

**13.** Odrediti nepoznatu  $x$  tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} x+4 & 1 \\ x & x+1 \end{vmatrix} = 1, \quad 2) \begin{vmatrix} x - \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ x & x+3 \end{vmatrix} = -1, \quad 3) \begin{vmatrix} -4 & 2x-3 \\ x+2 & x \end{vmatrix} = 3.$$

**14.** Odrediti nepoznatu  $x$  tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} x^2-2 & x \\ x & x^2-2 \end{vmatrix} = 0, \quad 2) \begin{vmatrix} x^2-1 & 5x \\ x & x^2-3 \end{vmatrix} = 0, \quad 3) \begin{vmatrix} x^2+3 & x \\ -2x & x^2-4 \end{vmatrix} = 0.$$

**15.** Odrediti nepoznatu  $x$  tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} x & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \leq 0, \quad 2) \begin{vmatrix} -2 & x \\ 3 & -1 \end{vmatrix} < 1, \quad 3) \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ x & -4 \end{vmatrix} \leq \frac{1}{2}, \quad 4) \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & x \end{vmatrix} < 1.$$

**16.** Odrediti nepoznatu  $x$  tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} x+3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \geq -1, \quad 2) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ x + \frac{3}{2} & -1 \end{vmatrix} < -2, \quad 3) \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & \frac{4}{3} + x \end{vmatrix} \leq 0.$$

**17.** Odrediti nepoznatu  $x$  tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} x+1 & x-1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \geq 0, \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ x+\frac{1}{3} & 2-x \end{vmatrix} < 2, \quad 3) \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ \frac{3}{2}x+\frac{5}{4} & \frac{3}{2}-x \end{vmatrix} \leq -\frac{1}{2}.$$

**18.** Odrediti nepoznatu  $x$  tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} x-1 & x+3 \\ x+3 & x-1 \end{vmatrix} < 0, \quad 2) \begin{vmatrix} x+1 & x+3 \\ x-2 & x-1 \end{vmatrix} \leq -1, \quad 3) \begin{vmatrix} x+\frac{1}{2} & \frac{3}{2}-x \\ \frac{3}{2}-x & x-\frac{1}{2} \end{vmatrix} \leq \frac{1}{2}.$$

**19.** Odrediti nepoznatu  $x$  tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) -x^2 + x > \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}, \quad 2) x^2 + 4x \leq \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad 3) -3x^2 + 5x < \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

**20.** Odrediti nepoznatu  $x$  tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} 3 & x \\ x & x \end{vmatrix} > -4, \quad 2) \begin{vmatrix} x & x \\ \frac{1}{4} & x \end{vmatrix} \geq 0, \quad 3) \begin{vmatrix} x & -5 \\ x & 2x \end{vmatrix} \geq -2, \quad 4) \begin{vmatrix} 3x & x \\ 5 & x \end{vmatrix} < 2.$$

**21.** Odrediti nepoznatu  $x$  tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} x+4 & 1 \\ x & x+1 \end{vmatrix} < 1, \quad 2) \begin{vmatrix} x+\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ x & x-2 \end{vmatrix} > -2, \quad 3) \begin{vmatrix} -1 & 3x+2 \\ x-1 & x \end{vmatrix} \leq -1.$$

## 1.2. Determinante reda 3

**Primer 1.** Sarusovim pravilom izračunati vrednost sledeće determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 \cdot (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 0 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) \cdot 2 - (-1) \cdot (-1) \cdot 3 - 2 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) \cdot 2 \\
 &= -2 + 0 + (-12) - 3 - 0 - (-8) = -9. \blacklozenge
 \end{aligned}$$

**Primer 2.** Laplasovim razvojem po drugoj koloni izračunati vrednost sledeće determinante.

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} &= \sum_{k=1}^3 a_{k,2} A_{k,2} = \sum_{k=1}^3 a_{k,2} (-1)^{k+2} M_{k,2} \\
 &= -a_{1,2} M_{1,2} + a_{2,2} M_{2,2} - a_{3,2} M_{3,2} \\
 &= -2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= -2 \cdot (-4) - 1 \cdot 5 - 2 \cdot 6 \\
 &= -9. \blacklozenge
 \end{aligned}$$

**Primer 3.** Laplasovim razvojem po trećem redu izračunati vrednost sledeće determinante.

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} &= \sum_{k=1}^3 a_{3,k} A_{3,k} = \sum_{k=1}^3 a_{3,k} (-1)^{3+k} M_{3,k} \\
 &= a_{3,1} M_{3,1} - a_{3,2} M_{3,2} + a_{3,3} M_{3,3} \\
 &= -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\
 &= -1 \cdot 3 - 2 \cdot 6 + 2 \cdot 3 \\
 &= -9. \blacklozenge
 \end{aligned}$$

***Zadaci za vežbu:***

1. Sarusovim pravilom izračunati vrednost sledećih determinanti.

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad 2) \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad 3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad 4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

2. Sarusovim pravilom izračunati vrednost sledećih determinanti.

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad 3) \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad 4) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

3. Sarusovim pravilom proveriti tačnost sledećih jednakosti.

$$1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad 3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad 4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

4. Sarusovim pravilom odrediti sledeće determinante.

$$1) \begin{vmatrix} x & x & 1 \\ x & 1 & x \\ 1 & x & x \end{vmatrix}, \quad 2) \begin{vmatrix} x & x & 1 \\ x & 2 & x \\ 3 & x & x \end{vmatrix}, \quad 3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad 4) \begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ 1 & x & 2 \\ x & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

5. Sarusovim pravilom odrediti sledeće determinante.

$$1) \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & y & x \\ 1 & x & y \end{vmatrix}, \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & y & x \\ 1 & x+y & x-y \end{vmatrix}, \quad 3) \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & y & x \\ 1 & xy & xy \end{vmatrix}, \quad 4) \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x-y & x+y \\ 1 & x+y & x-y \end{vmatrix}.$$

**6.** Sarusovim pravilom izračunati vrednost sledećih determinanti ( $i = \sqrt{-1}$ ).

$$1) \begin{vmatrix} -1 & 2 & i \\ 1 & 3 & i \\ -1 & 4 & i \end{vmatrix}, \quad 2) \begin{vmatrix} i & 1 & 1 \\ -2 & i & 0 \\ i & 1 & i \end{vmatrix}, \quad 3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -i \\ 1 & i & 2 \\ 1 & 2i & 2i \end{vmatrix}, \quad 4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+i & 1-i \\ 1 & 1-i & 1+i \end{vmatrix}.$$

**7.** Proveriti rezultate iz prethodnih zadataka koristeći Laplasov razvoj po proizvoljnoj koloni (ili proizvoljnom redu).

**8.** Odrediti nepoznatu  $x$  tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad 2) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 4, \quad 3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & x & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{5}{2},$$

$$4) \begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad 5) \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & x & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad 6) \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & x & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

**9.** Odrediti nepoznatu  $x$  tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad 2) \begin{vmatrix} -2 & 1 & x+2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad 3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3-2x & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & x+1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad 5) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 2-x \end{vmatrix} = -2, \quad 6) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2+3x & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

**10.** Odrediti nepoznatu  $x$  tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) x^2 - 4x = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad 2) x^2 + 4x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}, \quad 3) -3x^2 + x = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$4) x^2 + 3x = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad 5) x^2 - 3x = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad 6) -2x^2 + 3x = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

**11.** Odrediti nepoznatu  $x$  tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 2 & 3 & -1 \\ x & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & -1 & 1 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad 3) \begin{vmatrix} -2 & x & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ x & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$4) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & x \\ 1 & x & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad 5) \begin{vmatrix} -2 & x & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ x & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad 6) \begin{vmatrix} -1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = 0.$$

**12.** Odrediti nepoznatu  $x$  tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} 1-x & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 3+x \end{vmatrix} = 0, \quad 2) \begin{vmatrix} -2 & 1 & x-1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2+x & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad 3) \begin{vmatrix} -1 & 3+x & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3-x & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$4) \begin{vmatrix} 2-x & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & x+1 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad 5) \begin{vmatrix} 1 & x-1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & x+1 \end{vmatrix} = 0, \quad 6) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2+x \\ 1 & 2-x & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

**13.** Odrediti nepoznatu  $x$  tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} x & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} > 0, \quad 2) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & x & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \leq 2, \quad 3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} \geq \frac{1}{2},$$

$$4) \begin{vmatrix} 2 & -1 & x \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} < 0, \quad 5) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \geq 2, \quad 6) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ x & -1 & 3 \end{vmatrix} < \frac{2}{3}.$$

**14.** Odrediti nepoznatu  $x$  tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} > 2, \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & x+2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \leq 0, \quad 3) \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & x-3 \end{vmatrix} < 0,$$

$$4) \begin{vmatrix} 1 & -1 & x+2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} > 4, \quad 5) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & x+1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \leq 2, \quad 6) \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ x-2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \geq 3.$$

**15.** Odrediti nepoznatu  $x$  tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) 3x^2+x \leq \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad 2) x^2+2x > \begin{vmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad 3) 2x^2-3x \geq \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix},$$

$$4) x^2+2x < \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad 5) x^2-2x > \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad 6) -2x^2+x \geq \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

**16.** Odrediti nepoznatu  $x$  tako da bude ispunjeno sledeće:

$$\begin{aligned}
 &1) \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 2 & x & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \geq 0, \quad 2) \begin{vmatrix} -1 & 0 & x \\ 1 & x & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \leq 0, \quad 3) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} < 0, \\
 &4) \begin{vmatrix} 3 & x & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} \geq 0, \quad 5) \begin{vmatrix} -1 & x & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ x & -1 & 1 \end{vmatrix} < 0, \quad 6) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & x \\ 1 & x & 1 \end{vmatrix} \geq 0.
 \end{aligned}$$

**17.** Odrediti nepoznatu  $x$  tako da bude ispunjeno sledeće:

$$\begin{aligned}
 &1) \begin{vmatrix} x+1 & -1 & 0 \\ 2 & x-1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} < 0, \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & x-1 \\ 1 & x+2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \geq 0, \quad 3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & x-1 & -1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} > 0, \\
 &4) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2-x \\ 1 & 1+x & -1 \end{vmatrix} > 0, \quad 5) \begin{vmatrix} 1 & x-2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ x+3 & -1 & 1 \end{vmatrix} < 0, \quad 6) \begin{vmatrix} 3 & x-2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3-x \end{vmatrix} \leq 0.
 \end{aligned}$$

**18.** Odrediti nepoznatu  $x$  tako da bude ispunjeno sledeće:

$$\begin{aligned}
 &1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & x+\frac{1}{2} & 1 \\ x+1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \leq 0, \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{4}+x & 1 \\ 0 & 1 & x-1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \geq 0, \quad 3) \begin{vmatrix} \frac{1}{3}-x & 0 & 1 \\ -1 & 1-x & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} > 0, \\
 &4) \begin{vmatrix} -1 & x-3 & 1 \\ \frac{1}{2}-x & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \leq 1, \quad 5) \begin{vmatrix} 0 & x+2 & 2 \\ 1 & 2 & x+\frac{3}{2} \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \geq 6, \quad 6) \begin{vmatrix} x-\frac{1}{3} & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \leq 1.
 \end{aligned}$$

### 1.3. Determinante reda većeg od 3

**Primer 1.** Laplasovim razvojem po trećoj koloni izračunati vrednost sledeće determinante.

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= \sum_{k=1}^4 a_{k,3} A_{k,3} = \sum_{k=1}^4 a_{k,3} (-1)^{k+3} M_{k,3} \\
 &= a_{1,3} M_{1,3} - a_{2,3} M_{2,3} + a_{3,3} M_{3,3} - a_{4,3} M_{4,3} \\
 &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= 1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-2) \\
 &= 2. \blacklozenge
 \end{aligned}$$

**Primer 2.** Laplasovim razvojem po četvrtom redu izračunati vrednost sledeće determinante.

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= \sum_{k=1}^4 a_{4,k} A_{4,k} = \sum_{k=1}^4 a_{4,k} (-1)^{4+k} M_{4,k} \\
 &= -a_{4,1} M_{4,1} + a_{4,2} M_{4,2} - a_{4,3} M_{4,3} + a_{4,4} M_{4,4} \\
 &= -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
 &= -1 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 \\
 &= 2. \blacklozenge
 \end{aligned}$$

**Zadaci za vežbu:**

**1.** Izračunati vrednost sledećih determinanti koristeći Laplasov razvoj (po drugoj koloni).

$$1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad 2) \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad 3) \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix},$$

$$4) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad 5) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad 6) \begin{vmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

**2.** Proveriti rezultate iz zadatka **1** koristeći Laplasov razvoj (po proizvoljnom redu).

**3.** Izračunati vrednost sledećih determinanti koristeći Laplasov razvoj (po trećem redu).

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad 2) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -4 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad 3) \begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$4) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad 5) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad 6) \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

**4.** Proveriti rezultate iz zadatka **3** koristeći Laplasov razvoj (po proizvoljnoj koloni).

5. Proveriti tačnost sledećih nejednakosti.

$$1) \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} > 0, \quad 2) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} < 0, \quad 3) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} > 0,$$

$$4) \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \leq 0, \quad 5) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} > 0, \quad 6) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \leq 0.$$

6. Odrediti nepoznatu  $x$  tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & x & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0, \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ x & 1 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad 3) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & x \\ -1 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2,$$

$$4) \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ x & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad 5) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = -3, \quad 6) \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ x & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

7. Odrediti nepoznatu  $x$  tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & x-1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2+3x \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad 3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2x-1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3,$$

$$4) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2-x & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad 5) \begin{vmatrix} 3+2x & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad 6) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1-2x \end{vmatrix} = 1.$$

8. Odrediti nepoznatu  $x$  tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) x^2 - 4x = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad 2) x^2 + \frac{3}{2}x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix},$$

$$3) x^2 + 5x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}, \quad 4) x^2 + \frac{8}{3}x = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$5) x^2 + 3x = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}, \quad 6) x^2 - \frac{5}{4}x = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

9. Odrediti nepoznatu  $x$  tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & x & 2 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad 2) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & x \end{vmatrix} = 6, \quad 3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & x \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & x & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6,$$

$$4) \begin{vmatrix} -2 & 0 & x & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ x & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad 5) \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & x & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3, \quad 6) \begin{vmatrix} 3 & x & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & x & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 4.$$

**10.** Odrediti nepoznatu  $x$  tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & x+1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -3, \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3-2x \\ 1 & 2 & 1+2x & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$3) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & x+1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2-x & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad 4) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1-2x \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1+3x & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2,$$

$$5) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x+1 \\ x-3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad 6) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2x-1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3x+1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

**11.** Odrediti nepoznatu  $x$  tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) 4x^2 + 3x \geq \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}, \quad 2) x^2 - 6x > \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix},$$

$$3) x^2 + 3x \leq \begin{vmatrix} -3 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \end{vmatrix},$$

$$4) 4x^2 - x < \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix},$$

$$5) x^2 - \frac{1}{2}x > \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -\frac{3}{2} & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix},$$

$$6) x^2 + \frac{11}{2}x \leq \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

**12.** Odrediti nepoznatu  $x$  tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ x & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \geq -1,$$

$$2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & x & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} < 2,$$

$$3) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & x & -2 & 1 \end{vmatrix} > -3,$$

$$4) \begin{vmatrix} 3 & x & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \leq 0,$$

$$5) \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} < -3,$$

$$6) \begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 2 & x \\ 3 & 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} \geq 2.$$

**13.** Odrediti nepoznatu  $x$  tako da bude ispunjeno sledeće:

$$\begin{array}{ll}
 1) \left| \begin{array}{cccc} 3 & 1 & x+2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ x-1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right| < -3, & 2) \left| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & x+1 & 3 \\ x+1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right| \geq 4, \\
 3) \left| \begin{array}{cccc} 2+x & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2+x & 2 \end{array} \right| > -1, & 4) \left| \begin{array}{cccc} 1 & x+1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & x-1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right| \leq 2, \\
 5) \left| \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 1 & x+1 \\ x-1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \end{array} \right| \leq -2, & 6) \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & x-1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & x+2 & 2 & 2 \end{array} \right| < 0.
 \end{array}$$

**14.** Izračunati vrednost sledećih determinanti koristeći Laplasov razvoj (po proizvoljnoj koloni).

$$\begin{array}{ll}
 1) \left| \begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right|, & 2) \left| \begin{array}{ccccc} 2 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right|, & 3) \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right|, \\
 4) \left| \begin{array}{ccccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right|, & 5) \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right|, & 6) \left| \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right|,
 \end{array}$$

$$7) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}, 8) \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}, 9) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$10) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}, 11) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}, 12) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

**15.** Proveriti rezultate iz zadatka **14** koristeći Laplasov razvoj (po proizvoljnom redu).

## 2. Matrice

Literatura u kojoj možete pronaći neophodne informacije o matricama: [1], [2], [4], [6], [9]-[12] ili [14].

### 2.1. Operacije sa matricama

**Primer 1.** Ako su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

tada je:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad 2 \cdot A = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{bmatrix},$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+2 \\ -1+2 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-3 & 2-2 \\ -1-2 & 3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \\ (-1) \cdot 3 + 3 \cdot 2 & (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}. \blacklozenge$$

**Napomena.** Kada su u pitanju oznake napominjemo da će proizvod realnog broja  $\alpha$  i matrice  $A$  ( $\alpha \cdot A$ ), kao i proizvod matrica  $A$  i  $B$  ( $A \cdot B$ ) biti kraće zapisan, redom, sa  $\alpha A$  i  $AB$ , dok će se za jediničnu matricu odgovarajućeg reda koristiti oznaka  $I$ .

**Zadaci za vežbu:**

1. Ako je  $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ , izračunati:

- 1)  $3A$ , 2)  $-\frac{1}{2}A$ , 3)  $A^T$ , 4)  $\frac{1}{3}A^T$ , 5)  $(A^T)^T$ , 6)  $A+3I$ , 7)  $A-I$ ,  
8)  $2A-A^T$ , 9)  $A+A^T$ , 10)  $(A^T-I)^T$ , 11)  $(A+3A^T)^T$ , 12)  $(A-2A^T+I)^T$ .

2. Ako su  $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ , proveriti sledeće rezultate.

- 1)  $A-2B = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ , 2)  $A^T+B = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ , 3)  $A^T-3B^T = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}$ ,  
4)  $B-3A = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ , 5)  $B^T-A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ , 6)  $B^T-2A^T = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ .

3. Ako su  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ , izračunati:

- 1)  $A+3B$ , 2)  $3A-B+2I$ , 3)  $2A+B^T-I$ , 4)  $(A^T-B)^T$ , 5)  $(A-2B+3I)^T$ ,  
6)  $B-2A$ , 7)  $2B+A+3I$ , 8)  $B-3A^T+I$ , 9)  $(B^T-A)^T$ , 10)  $(B+3A-2I)^T$ .

4. Ako su  $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ , izračunati:

- 1)  $A-2B$ , 2)  $A+3B$ , 3)  $A^T-2B^T$ , 4)  $(A+B)^T$ , 5)  $(A-3B)^T$ ,  
6)  $B+3A$ , 7)  $B-2A$ , 8)  $B^T+3A^T$ , 9)  $(B-A)^T$ , 10)  $(B+2A)^T$ .

5. Ako su  $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ , izračunati:

- 1)  $A - 2B$ ,   2)  $3A + 2B$ ,   3)  $A^T - 3B^T$ ,   4)  $(A + B)^T$ ,   5)  $(2A - B)^T$ ,  
 6)  $B + 3A$ ,   7)  $2B - 3A$ ,   8)  $B^T + 2A^T$ ,   9)  $(B - A)^T$ ,   10)  $(3B + A)^T$ .

6. Ako su  $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , izračunati:

- 1)  $A + 3B^T$ ,   2)  $2A^T - B$ ,   3)  $A^T + 3B$ ,   4)  $(A - B^T)^T$ ,   5)  $(3A^T + B)^T$ ,  
 6)  $B - 3A^T$ ,   7)  $3B^T - A$ ,   8)  $B^T + 2A$ ,   9)  $(B + A^T)^T$ ,   10)  $(2B^T + A)^T$ .

7. Ako su  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ , proveriti sledeće rezultate.

1)  $3A + B = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ , 2)  $A^T - B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ , 3)  $A^T + 2B^T = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,

4)  $B - 2A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 3 \\ -4 & -1 & 5 \\ -4 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ , 5)  $B^T + A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ , 6)  $B^T - 3A^T = \begin{bmatrix} 5 & -5 & -6 \\ 2 & -1 & -5 \\ 4 & -7 & 4 \end{bmatrix}$ .

**8.** Ako su  $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ , izračunati:

- 1)  $A+2B$ , 2)  $A^T-3B$ , 3)  $A+B^T-3I$ , 4)  $(A-B-2I)^T$ , 5)  $(2A-B^T)^T-I$ ,  
6)  $B+3A$ , 7)  $B^T-2A$ , 8)  $B+A^T-2I$ , 9)  $(B-A-3I)^T$ , 10)  $(3B-A^T)^T+I$ .

**9.** Ako su  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ , izračunati:

- 1)  $A^T-2B$ , 2)  $B-3A^T$ , 3)  $B^T-A$ , 4)  $3A-2B^T$ , 5)  $\frac{1}{2}B^T+\frac{4}{3}A$ .

**10.** Ako su  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix}$ , izračunati:

- 1)  $A^TB$ , 2)  $BA^T$ , 3)  $AB^T$ , 4)  $B^TA$ , 5)  $A^TB-3I$ , 6)  $B^TA+2I$ ,  
7)  $(AB^T)^2$ , 8)  $(BA^T)^2$ , 9)  $(AB^T)^2-(BA^T)^2$ , 10)  $(B^TA)^2$ , 11)  $(A^TB)^2$ ,  
12)  $(B^TA)^2-2I$ , 13)  $(A^TB)^2+I$ , 14)  $(B^TA)^2-(A^TB)^2$ , 15)  $(A^TB)^2+3(B^TA)^2$ .

**11.** Ako su  $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ , izračunati:

- 1)  $AB$ , 2)  $AB^T$ , 3)  $A^TB$ , 4)  $A^TB^T$ , 5)  $BA$ , 6)  $BA^T$ , 7)  $B^TA$ ,  
8)  $B^TA^T$ , 9)  $A^2B^T$ , 10)  $B^2A^T$ , 11)  $A^2B^2+2I$ , 12)  $B^2A^2-3I$ ,  
13)  $A^2B^2+B^TA^T-2I$ , 14)  $A^TB^T-B^2A^2+I$ , 15)  $A^TB^2+B^2A^T-I$ .

**12.** Ako su  $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ , izračunati:

- 1)  $AB^T - 3I$ , 2)  $BA^T + I$ , 3)  $(A^TB)^2$ , 4)  $(B^TA)^2$ , 5)  $(AB^T)^2$ , 6)  $(BA^T)^2$ ,  
 7)  $(AB^T)^2 + 2I$ , 8)  $(BA^T)^2 - 3I$ , 9)  $(A^TB)^2 + (B^TA)^2$ , 10)  $(AB^T)^2 - (BA^T)^2$ .

**13.** Ako su  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ , izračunati:

- 1)  $AB^T - 3I$ , 2)  $A^TB + I$ , 3)  $BA^T - I$ , 4)  $B^TA + 2I$ , 5)  $(A^TB)^2$ , 6)  $(B^TA)^2$ ,  
 7)  $(AB^T)^2$ , 8)  $(BA^T)^2$ , 9)  $(A^TB)^2 + 2I$ , 10)  $(B^TA)^2 - 3I$ , 11)  $(AB^T)^2 + I$ ,  
 12)  $(BA^T)^2 - 2I$ , 13)  $(B^TA)^2 - (A^TB)^2 + 3I$ , 14)  $(AB^T)^2 - (BA^T)^2 - 2I$ .

**14.** Ako su  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ , izračunati:

- 1)  $AB$ , 2)  $AB^T$ , 3)  $A^TB$ , 4)  $A^TB^T$ , 5)  $BA$ , 6)  $BA^T$ , 7)  $B^TA$ , 8)  $B^TA^T$ ,  
 9)  $A^2B^T$ , 10)  $B^2A^T$ , 11)  $A^2B^2 - 3I$ , 12)  $B^2A^2 + 2I$ , 13)  $A^TB^2 - B^2A^T + I$ ,  
 14)  $B^TA^2 - A^2B^T - 3I$ , 15)  $A^2B^2 + B^TA^T + 2I$ , 16)  $A^TB^T + B^2A^2 - I$ .

**15.** Neka je  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ . Izračunati  $p(A)$  ako je:

1)  $p(x) = x+2$ , 2)  $p(x) = -x+1$ , 3)  $p(x) = 3x-2$ , 4)  $p(x) = -2x+3$ .

**16.** Neka je  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ . Izračunati  $p(A)$  ako je:

1)  $p(x) = \frac{2}{3}x^2$ , 2)  $p(x) = -\frac{1}{3}x^2$ , 3)  $p(x) = x^2-2x$ , 4)  $p(x) = -x^2+3x$ ,

5)  $p(x) = x^2-1$ , 6)  $p(x) = -x^2+2$ , 7)  $p(x) = x^2-x+3$ , 8)  $p(x) = -3x^2+x+2$ .

**17.** Neka je  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$  i  $p(x) = x^2 - x - 2$ . Proveriti tačnost

sledeće jednakosti:  $p(A) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ .

**18.** Neka je  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  i  $p(x) = -x^2 + 3x + 1$ . Proveriti tačnost

sledeće jednakosti:  $p(A) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ .

**19.** Neka je  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ . Izračunati  $p(A)$  ako je:

1)  $p(x) = x-2$ , 2)  $p(x) = -x+3$ , 3)  $p(x) = 2x-3$ , 4)  $p(x) = -3x+4$ ,

5)  $p(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}$ , 6)  $p(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}$ , 7)  $p(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{3}$ , 8)  $p(x) = -\frac{1}{3}x - \frac{3}{2}$ .

**20.** Neka je  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ . Izračunati  $p(A)$  ako je:

1)  $p(x) = x^2 - 2$ , 2)  $p(x) = -2x^2 + 3$ , 3)  $p(x) = 3x^2 - x$ , 4)  $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x$ ,

5)  $p(x) = x^2 - 3x + 2$ , 6)  $p(x) = -3x^2 + 2x + 4$ , 7)  $p(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{2}$ .

**21.** Neka je  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  i  $p(x) = 2x^2 - 3x - 4$ . Proveriti tačnost

sledeće jednakosti:  $p(A) = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 11 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ .

**22.** Neka je  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  i  $p(x) = -x^2 + 3x + 1$ . Proveriti tačnost

sledeće jednakosti:  $p(A) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 9 & 3 & 9 \\ 10 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ .

**23.** Neka je  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  i  $p(x) = 3x^2 - 4x + 2$ . Proveriti tačnost

sledeće jednakosti:  $p(A) = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 5 \\ -4 & 1 & 1 \\ 15 & 0 & 10 \end{bmatrix}$ .

## 2.2. Inverzna matrica

**Primer 1.** Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tada je,  $|A| = 2$ ,  $A_{1,1} = -1$ ,  $A_{1,2} = -1$ ,  $A_{2,1} = 4$  i  $A_{2,2} = 2$ .

Dakle,

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}. \blacklozenge$$

**Primer 2.** Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tada je,  $|A| = 5$ ,

$$A_{1,1} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{2,1} = - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{3,1} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{1,2} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{2,2} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{3,2} = - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{1,3} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{2,3} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{3,3} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Dakle,

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & -4 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 3 & -4 & -1 \end{bmatrix}. \blacklozenge$$

**Zadaci za vežbu:**

1. Naći inverznu matricu  $A^{-1}$ , ako je:

$$1) A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad 2) A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad 3) A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad 4) A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$5) A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad 6) A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, \quad 7) A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad 8) A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. Neka je  $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ . Tada je  $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ . Proveriti.

3. Neka je  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ . Tada je  $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ . Proveriti.

4. Odrediti u zavisnosti od realnog parametra  $a$  kada postoji inverz matrice  $A$  i (u slučaju kada postoji) naći inverznu matricu  $A^{-1}$ , ako je:

$$1) A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad 2) A = \begin{bmatrix} -3 & a \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad 3) A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ a & -5 \end{bmatrix}, \quad 4) A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & a \end{bmatrix},$$

$$5) A = \begin{bmatrix} a & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad 6) A = \begin{bmatrix} 3 & a \\ -4 & -2 \end{bmatrix}, \quad 7) A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ a & 3 \end{bmatrix}, \quad 8) A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & a \end{bmatrix}.$$

5. Odrediti u zavisnosti od realnog parametra  $a$  kada postoji inverz matrice  $A$  i (u slučaju kada postoji) naći inverznu matricu  $A^{-1}$ , ako je:

$$1) A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ -3 & a \end{bmatrix}, \quad 2) A = \begin{bmatrix} -3 & a \\ a & -1 \end{bmatrix}, \quad 3) A = \begin{bmatrix} -3 & a \\ a & 1 \end{bmatrix}, \quad 4) A = \begin{bmatrix} a & 3 \\ 4 & a \end{bmatrix},$$

$$5) A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ -3 & a \end{bmatrix}, \quad 6) A = \begin{bmatrix} a & -1 \\ -9 & a \end{bmatrix}, \quad 7) A = \begin{bmatrix} -1 & a \\ -a & 5 \end{bmatrix}, \quad 8) A = \begin{bmatrix} 6 & a \\ a & 3 \end{bmatrix}.$$

6. Ako je  $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ , izračunati vrednost sledećih izraza:

- 1)  $A - A^{-1}$ , 2)  $A + A^{-1}$ , 3)  $-3A + 2A^{-1}$ , 4)  $2A - 3A^{-1}$ , 5)  $-3A + 4A^{-1}$ ,  
6)  $A - 3A^{-1} + I$ , 7)  $-A + A^{-1} - 3I$ , 8)  $2A + 3A^{-1} - 4I$ , 9)  $-4A + 3A^{-1} + 2I$ .

7. Neka je  $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ . Tada je  $A^{-1} - 3A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ . Proveriti.

8. Neka je  $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ . Tada je  $2A - A^{-1} = \begin{bmatrix} 11 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ . Proveriti.

9. Naći inverznu matricu  $A^{-1}$ , ako je:

1)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ , 2)  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ , 3)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ ,

4)  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ , 5)  $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ , 6)  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ .

10. Neka je  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ . Tada je  $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ .

Proveriti.

11. Neka je  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ . Tada je  $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ .

Proveriti.

**12.** Odrediti u zavisnosti od realnog parametra  $a$  kada postoji inverz matrice  $A$  i (u slučaju kada postoji) naći inverznu matricu  $A^{-1}$ , ako je:

$$\begin{aligned} 1) A &= \begin{bmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, & 2) A &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ a & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, & 3) A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & a \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \\ 4) A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ a & 1 & -1 \end{bmatrix}, & 5) A &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}, & 6) A &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & a & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**13.** Odrediti u zavisnosti od realnog parametra  $a$  kada postoji inverz matrice  $A$  i (u slučaju kada postoji) naći inverznu matricu  $A^{-1}$ , ako je:

$$\begin{aligned} 1) A &= \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ a & 2 & 1 \end{bmatrix}, & 2) A &= \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & a \end{bmatrix}, & 3) A &= \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \\ 4) A &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, & 5) A &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a \\ a & -1 & 1 \end{bmatrix}, & 6) A &= \begin{bmatrix} 2 & a & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ a & 3 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**14.** Ako je  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ , izračunati vrednost sledećih izraza:

- 1)  $A + A^{-1}$ , 2)  $A - 3A^{-1}$ , 3)  $3A - 2A^{-1}$ , 4)  $2A + 3A^{-1}$ , 5)  $-A - 5A^{-1}$ ,  
6)  $A + 2A^{-1} - I$ , 7)  $-3A + A^{-1} + 2I$ , 8)  $A - A^{-1} + 3I$ , 9)  $-2A + 3A^{-1} - 3I$ .

**15.** Neka je  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ . Tada je  $A^{-1} - 3A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -4 \\ -1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$ .

Proveriti.

**16.** Neka je  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ . Tada je  $A^2 + 4A^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

Proveriti.

**17.** Ako su  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ , izračunati:

- 1)  $A^{-1} - 2B$ ,   2)  $2A^{-1} + B^{-1}$ ,   3)  $A^{-1}B - AB^{-1}$ ,   4)  $A^{-1}B^{-1} + A - 2I$ ,  
 5)  $B^{-1} + 3A$ ,   6)  $3B^{-1} - A^{-1}$ ,   7)  $B^{-1}A + BA^{-1}$ ,   8)  $B^{-1}A^{-1} - B + 3I$ .

**18.** Neka su  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ .

Tada je  $A^{-1} - 2B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Proveriti.

**19.** Neka su  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ .

Tada je  $B^{-1} - 3A^{-1} = \begin{bmatrix} -8 & 6 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ . Proveriti.

**20.** Ako su  $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ , izračunati:

- 1)  $A^{-1} + B$ ,   2)  $2A^{-1} - B^{-1}$ ,   3)  $AB^{-1} + A^{-1}B$ ,   4)  $A^{-1}B^{-1} - 3A + I$ ,  
 5)  $B^{-1} - A$ ,   6)  $3B^{-1} + A^{-1}$ ,   7)  $BA^{-1} - B^{-1}A$ ,   8)  $B^{-1}A^{-1} + 2B - I$ .

21. Neka su  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

Tada je  $A^{-1} - 4B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \\ -3 & 3 & -4 \end{bmatrix}$ . Proveriti.

22. Neka su  $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ .

Tada je  $B^{-1} + 3A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 3 \\ \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & 1 \end{bmatrix}$ . Proveriti.

### 2.3. Matrične jednačine

**Primer 1.** Date su matrice  $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Rešiti matričnu jednačinu:  $XA = B^T + X$ .

*Rešenje.* Iz  $XA = B^T + X$  sledi  $XA - X = B^T$  tj.  $X(A - I) = B^T$ .

Neka je  $C = A - I$  tj.  $XC = B^T$ , iz čega, pod uslovom da postoji inverz matrice  $C$ , dobijamo da je  $X = B^T C^{-1}$ .

Potrebno je naći  $C^{-1}$  tj.

$$\left( \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \quad \text{odnosno} \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Pošto je

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

i

$$C_{1,1} = -1, \quad C_{1,2} = -1, \quad C_{2,1} = 3, \quad C_{2,2} = 1,$$

dobijamo da je

$$C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Prema tome, rešenje date matrične jednačine je

$$X = B^T C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \blacklozenge$$

**Zadaci za vežbu:**

1. Ako je  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ , rešiti matrične jednačine:

- 1)  $AX = I$ , 2)  $XA = I$ , 3)  $XA = A^T$ , 4)  $AX = A^{-1}$ , 5)  $XA = A^{-1} - I$ ,  
 6)  $AX + I = A^T$ , 7)  $XA - 3I = A^2$ , 8)  $AX = A^T + X$ , 9)  $XA + 3X = A - I$ .

2. Ako su  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ , rešiti matrične jednačine:

- 1)  $XA = B$ , 2)  $BX = A$ , 3)  $XA = B^T$ , 4)  $BX = A^T$ , 5)  $AX = B^{-1}$ ,  
 6)  $AX - I = B^T$ , 7)  $BX + 3I = A^2$ , 8)  $XA + 2X = B$ , 9)  $XB = A^T + X$ .

3. Ako su  $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ , rešiti matrične jednačine:

- 1)  $BXA = I$ , 2)  $A^{-1}XB^{-1} = I$ , 3)  $B^T XA^{-1} = I$ , 4)  $B^T X = A^{-1} - X$ ,  
 5)  $(X^T - B)^T = 3I + XA$ , 6)  $(BX^{-1})^{-1} = A - I + X$ , 7)  $(A - X)^{-1} = B$ .

4. Ako su  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ , rešiti matrične jednačine:

- 1)  $AX = B$ , 2)  $XA = B^T$ , 3)  $A^T X = B$ , 4)  $XA^T = B^T$ , 5)  $AX - 3X = B$ ,  
6)  $XA = B^T - X$ , 7)  $A^T X = B + 2X$ , 8)  $A^T X - AX = B$ , 9)  $XA + XA^T = B^T$ .

5. Ako su  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ , rešiti matrične jednačine:

- 1)  $AX = B^T$ , 2)  $XA = B$ , 3)  $A^T X = B^T$ , 4)  $XA^T = B$ , 5)  $AX + 2X = B^T$ ,  
6)  $XA = B + X$ , 7)  $A^T X = B^T - 2X$ , 8)  $AX + A^T X = B^T$ , 9)  $XA - XA^T = B$ .

6. Ako su  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , rešiti matrične jednačine:

- 1)  $BX = A$ , 2)  $XB = A^T$ , 3)  $B^T X = A$ , 4)  $XB^T = A^T$ , 5)  $XB - X = A^T$ ,  
6)  $BX = A + 2X$ , 7)  $B^T X = A - X$ , 8)  $BX + B^T X = A$ , 9)  $XB - XB^T = A^T$ .

7. Ako su  $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ , rešiti matrične jednačine:

- 1)  $BX = A^T$ , 2)  $XB = A$ , 3)  $B^T X = A^T$ , 4)  $XB^T = A$ , 5)  $BX - 3X = A^T$ ,  
6)  $XB = A - 2X$ , 7)  $B^T X = A^T + X$ , 8)  $B^T X - BX = A^T$ , 9)  $XB + XB^T = A$ .

8. Ako je  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ , rešiti matrične jednačine:

- 1)  $AX = I$ , 2)  $XA = I$ , 3)  $AX = A^T$ , 4)  $XA = A^T$ , 5)  $AX = A^T - 3I$ ,  
6)  $XA = A^2 + 2I$ , 7)  $AX - I = A^{-1}$ , 8)  $XA = A^T + X$ , 9)  $AX + X = A + I$ .

**9.** Ako su  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ , rešiti matrice jednačine:

- 1)  $XA = B$ , 2)  $XB = A$ , 3)  $AX = B^T$ , 4)  $BX = A^T$ , 5)  $AX = B^T + I$ ,  
6)  $BX - 2I = A^2$ , 7)  $XA + I = B^{-1}$ , 8)  $XB = A^T + X$ , 9)  $XA - 3X = B - I$ .

**10.** Ako su  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ , rešiti matrice jednačine:

- 1)  $AXB = I$ , 2)  $BXA = I$ , 3)  $A^T X B^{-1} = I$ , 4)  $B^T X - I = A^T + 2X$ ,  
6)  $(X^T - A)^T = BX$ , 7)  $(AX^T)^T = X + B$ , 8)  $(X^{-1}B)^{-1} = A$ , 9)  $(X - B)^{-1} = A$ .

**11.** Ako su  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ , rešiti matrice jednačine:

- 1)  $XA = B$ , 2)  $A^T X = B^T$ , 3)  $AX = B^T$ , 4)  $XA^T = B$ , 5)  $XA + X = B$ ,  
6)  $AX = B^T + X$ , 7)  $XA^T = B - 3X$ , 8)  $XA + XA^T = B$ , 9)  $AX - A^T X = B^T$ .

**12.** Ako su  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ , rešiti matrice jednačine:

- 1)  $XA = B$ , 2)  $A^T X = B^T$ , 3)  $AX = B^T$ , 4)  $XA^T = B$ , 5)  $XA - 3X = B$ ,  
6)  $AX = B^T - X$ , 7)  $XA^T = B + 2X$ , 8)  $XA - XA^T = B$ , 9)  $AX + A^T X = B^T$ .

**13.** Ako su  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ , rešiti matrične jednačine:

- 1)  $BX = A^T$ , 2)  $B^T X = A^T$ , 3)  $XB = A$ , 4)  $XB^T = A$ , 5)  $BX + 2X = A^T$ ,  
6)  $XB = A - 3X$ , 7)  $B^T X = A^T + X$ , 8)  $BX + B^T X = A^T$ , 9)  $XB - XB^T = A$ .

**14.** Ako su  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ , rešiti matrične jednačine:

- 1)  $BX = A^T$ , 2)  $B^T X = A^T$ , 3)  $XB = A$ , 4)  $XB^T = A$ , 5)  $BX + 3X = A^T$ ,  
6)  $XB = A - 2X$ , 7)  $B^T X = A^T + X$ , 8)  $BX - B^T X = A^T$ , 9)  $XB + XB^T = A$ .

## 2.4. Rang matrice

**Primer 1.** Odrediti rang matrice  $A$ .

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 6 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Iz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 6 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

zaključujemo da je  $\text{rang}(A) = 2$ .

***Napomena.***

Napomenimo da se  $\blacktriangle$  dobija primenom sledećih elementarnih operacija:

- 1) prvi red se dodaje drugom redu;
- 2) prvi red se pomnoži sa -2 i dodaje trećem redu;
- 3) prvi red se pomnoži sa 3 i dodaje četvrtom redu;

Napomenimo da se  $\blacktriangledown$  dobija primenom sledećih elementarnih operacija:

- 1) drugi red se pomnoži sa -1 i dodaje trećem redu;
- 2) drugi red se pomnoži sa -2 i dodaje četvrtom redu.  $\blacklozenge$

1. Odrediti rang sledećih matrica.

$$1) A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, 2) A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, 3) A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, 4) A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix},$$

$$5) A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}, 6) A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, 7) A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ -5 & -3 & -2 \end{bmatrix},$$

$$8) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, 9) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -3 & -3 & 6 \\ 2 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, 10) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$11) A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, 12) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, 13) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Odrediti rang matrice  $A$  u zavisnosti od realnog parametra  $a$ .

$$1) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & a \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, 2) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, 3) A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \\ 1 & a \end{bmatrix}, 4) A = \begin{bmatrix} a & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix},$$

$$5) A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & a \end{bmatrix}, 6) A = \begin{bmatrix} 2 & a & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, 7) A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ a & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$8) A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & a & 1 \\ 1 & -4 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, 9) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & a \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, 10) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & -3 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$11) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & a \\ 2 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}, 12) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}, 13) A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & a & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

### 3. Sistemi linearnih jednačina

Literatura u kojoj možete pronaći neophodne informacije o metodama rešavanja sistema linearnih jednačina: [1], [2], [4], [6], [10]-[12] ili [14].

#### 3.1. Gausova metoda

**Primer 1.** Rešiti Gausovom metodom sledeći sistem:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 0 \\ 2x + 5y - 4z &= 3 \\ 3x - 4y + 2z &= 1 \end{aligned} \tag{1}$$

*Rešenje.* Množenjem prve jednačine sistema (1) sa  $-2$  i dodavanjem drugoj jednačini, kao i množenjem prve jednačine istog sistema sa  $-3$  i dodavanjem trećoj jednačini dobijamo sledeći (ekvivalentan) sistem:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 0 \\ y + 2z &= 3 \\ -10y + 11z &= 1 \end{aligned} \tag{2}$$

Množenjem druge jednačine sistema (2) sa  $10$  i dodavanjem trećoj jednačini istog sistema dobijamo sledeći (ekvivalentan) sistem:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 0 \\ y + 2z &= 3 \\ 31z &= 31 \end{aligned} \tag{3}$$

Iz poslednje jednačine sistema (3) sledi da je  $z = 1$ . Iz pretposlednje jednačine istog sistema sledi da je  $y = 1$ . Na kraju, iz prve jednačine istog sistema sledi da je  $x = 1$ .

Dakle, rešenje sistema (3), a time i njemu ekvivalentnog sistema (1), je uređena trojka  $(x, y, z) = (1, 1, 1)$  tj. sistem (1) ima jedinstveno rešenje – *određen* sistem. ♦

**Primer 2.** Rešiti Gausovom metodom sledeći sistem:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ 3x + 5y + 2z &= 5 \\ 2x + y - z &= 1 \end{aligned} \tag{4}$$

*Rešenje.* Množenjem prve jednačine sistema (4) sa  $-3$  i dodavanjem drugoj jednačini, kao i množenjem prve jednačine istog sistema sa  $-2$  i dodavanjem trećoj jednačini dobijamo sledeći (ekvivalentan) sistem:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ -y - z &= -1 \\ -3y - 3z &= -3 \end{aligned} \tag{5}$$

Množenjem druge jednačine sistema (5) sa  $-3$  i dodavanjem trećoj jednačini istog sistema dobijamo sledeći (ekvivalentan) sistem:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ -y - z &= -1 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Identitet  $0 = 0$  možemo izostaviti iz sistema (6), pa se sistem (6) svodi na sledeći sistem od dve jednačine:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ y + z &= 1 \end{aligned} \tag{7}$$

Iz poslednje jednačine sistema (7) sledi da je  $y = 1 - z$ . Na kraju, iz prve jednačine istog sistema sledi da je  $x = z$ .

Dakle, rešenje sistema (7), a time i njemu ekvivalentnog sistema (4), je svaka uređena trojka oblika  $(x, y, z) = (t, 1 - t, t)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ , tj. sistem (4) ima beskonačno mnogo rešenja — *neodređen* sistem. ♦

**Primer 3.** Rešiti Gausovom metodom sledeći sistem:

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 1 \\ -x + 3y - 2z &= -2 \\ 2x - y - z &= 3 \end{aligned} \tag{8}$$

*Rešenje.* Dodavanjem prve jednačine sistema (8) drugoj jednačini, kao i množenjem prve jednačine istog sistema sa  $-2$  i dodavanjem trećoj jednačini dobijamo sledeći (ekvivalentan) sistem:

$$\begin{aligned}x - 2y + z &= 1 \\y - z &= -1 \\3y - 3z &= 1\end{aligned}\tag{9}$$

Množenjem druge jednačine sistema (9) sa  $-3$  i dodavanjem trećoj jednačini istog sistema dobijamo sledeći (ekvivalentan) sistem:

$$\begin{aligned}x - 2y + z &= 1 \\y - z &= -1 \\0 &= 4\end{aligned}\tag{10}$$

Iz poslednje jednakosti sistema (10) koja je nemoguća sledi da sistem (10), a time i njemu ekvivalentan sistem (8), nema rešenja – *nemoguć* sistem. ♦

**Zadaci za vežbu:**

1. Rešiti Gausovom metodom sledeći sistem linearnih jednačina.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{aligned}x - 3y + 2z &= 0 \\1) \quad 2x - 2y - z &= -1 \\x + y - z &= 1 \\x + 2y + z &= 4 \\3) \quad 4x + 3y - 2z &= -4 \\3x - y - z &= 6 \\x - 3y + 2z &= -5 \\5) \quad 2x - 3y + z &= -4 \\x - 4y + 3z &= -7 \\x + y + 2z &= 3 \\7) \quad 2x - 2y + 3z &= -3 \\3x - y + z &= -4\end{aligned}$ | $\begin{aligned}x + 3y + 2z &= 0 \\2) \quad 2x + 2y + z &= 1 \\-x + y + z &= 1 \\3x - 2y + z &= 4 \\4) \quad x - 3y + 2z &= 3 \\2x + y - z &= 1 \\x - 3y - 2z &= 1 \\6) \quad 2x - 3y - 2z &= 1 \\2x + 3y + 2z &= 3 \\x - 2y - 3z &= 3 \\8) \quad x + 3y + 5z &= 5 \\2x - 5y - 3z &= 1\end{aligned}$ |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**2.** Rešiti Gausovom metodom sledeći sistem linearnih jednačina.

|                              |                               |
|------------------------------|-------------------------------|
| $3x + 2y - 2z = 3$           | $2x + 3y + 4z = 3$            |
| $1) \quad 4x + 3y - 5z = 1$  | $2) \quad -3x + 4y - 5z = 5$  |
| $2x + 5y + 3z = -1$          | $3x + 5y - 3z = -4$           |
| $4x - 2y - 3z = 5$           | $2x + 3y + 2z = 0$            |
| $3) \quad 3x + 4y - 5z = 1$  | $4) \quad -4x + 2y - 2z = -3$ |
| $x + 4y - 3z = -1$           | $4x + 2y + 3z = 1$            |
| $7x - 2y - 3z = -9$          | $4x + 3y + 2z = -2$           |
| $5) \quad 2x - 3y + 4z = -5$ | $6) \quad -2x + 4y - 3z = 7$  |
| $4x - 3y + 2z = -7$          | $3x - 2y + 4z = -9$           |
| $4x + 2y + 3z = 2$           | $-4x + 2y - 3z = 6$           |
| $7) \quad 2x + 3y - 4z = -6$ | $8) \quad 3x + 4y - 2z = -2$  |
| $3x - 4y + 5z = -4$          | $2x + 3y - 4z = -6$           |

**3.** Rešiti Gausovom metodom sledeći sistem linearnih jednačina.

|                              |                                          |
|------------------------------|------------------------------------------|
| $x - 4y + 3z = -3$           | $3x + 4y - 3z = 6$                       |
| $1) \quad 3x + 5y - 2z = 1$  | $2) \quad 2x \quad \quad + \quad z = -3$ |
| $5x + 2y \quad \quad = 1$    | $3x - 3y + 4z = -8$                      |
| $3x + 4y + 5z = 7$           | $x - 2y \quad \quad = -1$                |
| $3) \quad \quad 2y - 3z = 1$ | $4) \quad 4x + \quad y - 3z = -4$        |
| $2x + 3y - 4z = -2$          | $x - 5y + \quad z = -1$                  |
| $4x + 5y - 2z = -5$          | $2x + 3y - 4z = -2$                      |
| $5) \quad 3x + 4y - 5z = -8$ | $6) \quad \quad - 2y + 3z = 3$           |
| $5x + 3y \quad \quad = 6$    | $3x + 4y + 2z = 5$                       |

$$\begin{array}{ll}
 2x & + 3z = -8 \\
 7) & 4x - 3y + 5z = -9 \\
 & 3x + 5y + 2z = -7
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 2x + 4y - 3z & = -1 \\
 8) & 6y - 5z = 0 \\
 & x + 5y - 4z = -1
 \end{array}$$

4. Rešiti Gausovom metodom sledeći sistem linearnih jednačina.

$$\begin{array}{ll}
 & x + 2y - 3z = 4 \\
 1) & 2x + 3y - 4z = 8 \\
 & 3x - 2y + z = 6 \\
 & x - 4y - 2z = -7 \\
 \\
 & 3x + y - 2z = 5 \\
 3) & x + 3y + 4z = -3 \\
 & 2x + 4y + 3z = -1 \\
 & x - 3y - z = 2 \\
 \\
 & 2x + 3y + 4z = -3 \\
 5) & x + y + z = 0 \\
 & 4x + y + 3z = -1 \\
 & x + 2y - 2z = 1 \\
 \\
 & -x - 4y + 3z = -6 \\
 7) & 2x - 2y - z = 7 \\
 & x + 2y - 2z = 5 \\
 & x - 4y + z = 2
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 & x - 2y - 3z = 3 \\
 2) & 2x + 3y + 4z = 3 \\
 & x + y - z = 4 \\
 & 3x + 4y + 5z = 5 \\
 \\
 & 4x + 3y + 2z = 3 \\
 4) & 3x + 2y + z = 3 \\
 & x + y + z = 0 \\
 & 5x + 4y + 3z = 3 \\
 \\
 & 4x + 3y + 7z = 9 \\
 6) & x + y + 2z = 3 \\
 & 3x + 2y + 5z = 6 \\
 & 2x + y + 3z = 3 \\
 \\
 & x - 4y + 5z = 3 \\
 8) & 2x - 5y + 4z = 6 \\
 & 3x + 2y - 5z = 1 \\
 & 4x + 3y - 7z = 1
 \end{array}$$

5. Rešiti Gausovom metodom sledeći sistem linearnih jednačina.

$$\begin{array}{ll}
 & 3x - 5y + 4z = 2 \\
 1) & 2x + 4y - 5z = 1 \\
 & -4x + 3y + 2z = 1 \\
 & 3x - 4y + 3z = 2 \\
 \\
 & 3x - 2y - 4z = 1 \\
 2) & -2x - 3y + 5z = -3 \\
 & 4x + 2y - 3z = -1 \\
 & 3x + 4y + 2z = -5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 3) \quad \begin{array}{l}
 -2x + 5y - 3z = 2 \\
 5x - 3y - 2z = -5 \\
 -7x + 3y + 4z = 7 \\
 5x - 2y - 3z = -5
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 5) \quad \begin{array}{l}
 2x + 3y - 4z = 1 \\
 -3x + 4y - 5z = -5 \\
 4x - 2y + 3z = 4 \\
 -3x + 2y - 5z = 2
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 7) \quad \begin{array}{l}
 2x + 5y + 3z = 6 \\
 5x + 3y - 2z = -4 \\
 -5x - 2y + 3z = 6 \\
 7x + 3y - 4z = -8
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 4) \quad \begin{array}{l}
 -3x + 3y - 3z = -6 \\
 2x - 4y + 2z = 2 \\
 -2x + 5y - 4z = -1 \\
 4x - 3y + 5z = 9
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 6) \quad \begin{array}{l}
 3x - 4y + 5z = 8 \\
 -4x + 2y - 3z = 0 \\
 5x - 3y + 4z = 1 \\
 2x + 5y + 3z = -3
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 8) \quad \begin{array}{l}
 3x - 4y + 4z = -5 \\
 4x - 3y + 5z = -6 \\
 -2x + 5y - 3z = 4 \\
 3x + 3y - 2z = 7
 \end{array}
 \end{array}$$

6. Rešiti Gausovom metodom sledeći sistem linearnih jednačina.

$$\begin{array}{l}
 1) \quad \begin{array}{l}
 3x + 2y + 5z = 2 \\
 x \quad \quad + 3z = 0 \\
 2x + y + 4z = 1 \\
 -x - y - z = -1
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 3) \quad \begin{array}{l}
 x + 2y - 4z = -3 \\
 3x + 5y - 2z = 2 \\
 x \quad \quad - 3z = 0 \\
 2x + y - 5z = 1
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 5) \quad \begin{array}{l}
 x - 2y - 4z = -3 \\
 x + 3y \quad \quad = 0 \\
 2x + y - 3z = -1 \\
 3x + 4y - 5z = -5
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 2) \quad \begin{array}{l}
 x - 2y - z = -5 \\
 -3x + 2y + 4z = 4 \\
 -2x + y - 3z = -4 \\
 4x - 3y \quad \quad = -1
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 4) \quad \begin{array}{l}
 x + 2y + z = 6 \\
 y + 2z = 4 \\
 -2x + 3y - 5z = -1 \\
 x - 2y + 3z = 0
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 6) \quad \begin{array}{l}
 x + y - z = 2 \\
 -3x - 2y + z = 0 \\
 y + 2z = -2 \\
 2x + 5y + 3z = 0
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 x - 2y - 3z = 2 \\
 7) \quad -x \quad \quad + z = -2 \\
 \quad 2x + 3y + z = 4 \\
 \quad 2x + y - z = 4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 x + y + 2z = 3 \\
 8) \quad -2x - 3y - z = -2 \\
 \quad \quad y - z = -2 \\
 \quad x + 4y + 3z = 1
 \end{array}$$

7. Rešiti Gausovom metodom sledeći sistem linearnih jednačina.

$$\begin{array}{l}
 2x - 3y + 4z = 1 \\
 1) \quad 4x + 3y - 5z = -7 \\
 \quad -3x + 5y = -2 \\
 \quad 3x - 4y + 2z = 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 4y + 3z = 1 \\
 2) \quad 5x + 2y + 4z = 3 \\
 \quad 3x - 4y - 2z = -1 \\
 \quad -2x + 3y + 4z = 8
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 -4x + 6y + 3z = 5 \\
 3) \quad 3x - 5y - 2z = -4 \\
 \quad 2x \quad \quad - 3z = -1 \\
 \quad -2x - 4y + 5z = -1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 2x + 5y + 3z = 0 \\
 4) \quad 4x + 3y + 5z = -4 \\
 \quad \quad 4y + 3z = -5 \\
 \quad -3x - 5y - 4z = 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 2x - 3y = 5 \\
 5) \quad 5x - 4y + 2z = 8 \\
 \quad -4x + 2y - 3z = -7 \\
 \quad 3x + 3y + 4z = -3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 2x - 3y - 4z = -1 \\
 6) \quad 4y + 3z = -3 \\
 \quad 4x + 5y + 2z = -5 \\
 \quad -3x + 2y + 4z = 3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 -5x \quad \quad + 4z = 1 \\
 7) \quad 3x + 2y - 5z = 0 \\
 \quad 4x - 3y + 2z = -3 \\
 \quad 2x - 4y + 3z = -2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 -3x + 4y - 2z = 5 \\
 8) \quad 4x \quad \quad + 5z = 8 \\
 \quad 5x + 2y + 3z = -1 \\
 \quad 2x - 3y + 4z = 7
 \end{array}$$

### **3.2. Kramerova metoda**

**Primer 1.** Rešiti Kramerovom metodom sledeći sistem:

$$\begin{array}{l}
 x + 2y - 3z = 0 \\
 2x + 5y - 4z = 3 \\
 3x - 4y + 2z = 1
 \end{array} \tag{11}$$

*Rešenje.* Treba odrediti  $D$  determinantu sistema (11) i  $D_x$ ,  $D_y$  i  $D_z$  determinante koje odgovaraju, redom, nepoznatoj  $x$ ,  $y$  i  $z$ .

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 5 \cdot 2 + 2 \cdot (-4) \cdot 3 + (-3) \cdot 2 \cdot (-4) - 3 \cdot 5 \cdot (-3) - (-4) \cdot (-4) \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = 31,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 0 \cdot 5 \cdot 2 + 2 \cdot (-4) \cdot 1 + (-3) \cdot 3 \cdot (-4) - 1 \cdot 5 \cdot (-3) - (-4) \cdot (-4) \cdot 0 - 2 \cdot 3 \cdot 2 = 31,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 3 \cdot 2 + 0 \cdot (-4) \cdot 3 + (-3) \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 3 \cdot (-3) - 1 \cdot (-4) \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 0 = 31,$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 5 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \cdot (-4) - 3 \cdot 5 \cdot 0 - (-4) \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 2 = 31,$$

Dakle,

$$x = \frac{D_x}{D} = 1, \quad y = \frac{D_y}{D} = 1, \quad z = \frac{D_z}{D} = 1.$$

Prema tome, rešenje sistema (11) je uređena trojka  $(x, y, z) = (1, 1, 1)$  tj. sistem (11) ima jedinstveno rešenje – *određen* sistem. ♦

**Primer 2.** Rešiti Kramerovom metodom sledeći sistem:

$$\begin{aligned}x + 2y + z &= 2 \\3x + 5y + 2z &= 5 \\2x + y - z &= 1\end{aligned}\tag{12}$$

*Rešenje.* Treba odrediti  $D$  determinantu sistema (12) i  $D_x$ ,  $D_y$  i  $D_z$  determinante koje odgovaraju, redom, nepoznatoj  $x$ ,  $y$  i  $z$ .

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 5 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 5 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - (-1) \cdot 3 \cdot 2 = 0,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

**Napomena.**  $D_y = 0$  jer je  $D_y = D$ ,  $D_x = D_z = 0$  na osnovu osobine determinanti koja glasi: *Vrednost determinante je jednaka 0 ako su elementi jednog reda (kolone) jednaki (ili proporcionalni) odgovarajućim elementima nekog drugog reda (kolone).*

Dakle,

$$D = D_x = D_y = D_z = 0.$$

Na osnovu toga zaključujemo da sistem (12) može biti *neodređen* ili *nemoguć*.

Iz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

zaključujemo da je rang matrice sistema (12) jednak 2.

Iz sistema (12), prebacivanjem jedne (razlika između broja nepoznatih sistema i ranga matrice sistema) nepoznate npr.  $x$ , na drugu stranu jednakosti, dobijamo:

$$\begin{aligned} 2y + z &= 2 - x \\ 5y + 2z &= 5 - 3x \\ y - z &= 1 - 2x \end{aligned} \tag{13}$$

Da bismo odredili zavisnost nepoznatih  $y$  i  $z$  od nepoznate  $x$  dovoljno je, imajući u vidu da je rang matrice sistema (12) jednak 2, izabrati bilo koje dve jednačine sistema (13). Izborom prve dve jednačine dobijamo:

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 5-3x & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}} = 1 - x, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2-x \\ 5 & 5-3x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}} = x.$$

Lako se proverom može utvrditi da svaka uređena trojka oblika  $(x, y, z) = (t, 1 - t, t)$ ,  $t \in \mathbf{R}$ , ispunjava i treću jednačinu sistemu (13) odnosno da je sistem (13), a time i sistem (12), neodređen sistem (po jednoj nepoznatoj).

**Napomena.** U navedenom primeru smo kod sistema (12) prebacili nepoznatu  $x$  na drugu stranu jednakosti i određivali zavisnost nepoznatih  $y$  i  $z$  od nepoznate  $x$ . Međutim, kod sistema (12) možemo: prebaciti nepoznatu  $y$  na drugu stranu jednakosti i određivati zavisnost nepoznatih  $x$  i  $z$  od nepoznate  $y$ , ili prebaciti nepoznatu  $z$  na drugu stranu jednakosti i određivati zavisnost nepoznatih  $x$  i  $y$  od nepoznate  $z$ . ♦

**Primer 3.** Rešiti Kramerovom metodom sledeći sistem:

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 1 \\ -x + 3y - 2z &= -2 \\ 2x - y - z &= 3 \end{aligned} \tag{14}$$

*Rešenje.* Treba odrediti  $D$  determinantu sistema (14) i  $D_x$ ,  $D_y$  i  $D_z$  determinante koje odgovaraju, redom, nepoznatoj  $x$ ,  $y$  i  $z$ .

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 3 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-2) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot (-1) - 2 \cdot 3 \cdot 1 - (-1) \cdot (-2) \cdot 1 - (-1) \cdot (-2) \cdot (-2) = 0,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 3 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-2) \cdot 3 + 1 \cdot (-2) \cdot (-1) - 3 \cdot 3 \cdot 1 - (-1) \cdot (-2) \cdot 1 - (-1) \cdot (-2) \cdot (-2) = 4.$$

Pošto je determinanta sistema (14) jednaka 0, i determinanta koja odgovara bar jednoj nepoznatoj, a to je u ovom slučaju determinanta  $D_x$ , različita od 0, zaključujemo da sistem (14) nema rešenje – *nemoguć sistem*. ♦

### **Zadaci za vežbu:**

1. Rešiti Kramerovom metodom sledeći sistem linearnih jednačina.

|                                                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                              |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{aligned} x - 3y - 2z &= -1 \\ 1) \quad 2x + 4y + 3z &= 1 \\ 3x - 5y - z &= -4 \\ 2x + 4y - 3z &= -4 \\ 3) \quad 4x + 3y + 2z &= -2 \\ 3x + 2y + 4z &= 3 \\ x + 3y + 2z &= -4 \\ 5) \quad 3x - 2y - 4z &= 7 \\ 2x + 5y + 3z &= -6 \end{aligned}$ | $\begin{aligned} 4x + 3y - 4z &= 4 \\ 2) \quad 2x - 4y - 3z &= 5 \\ 2x - 3y - 4z &= 8 \\ x - 3y + 2z &= 0 \\ 4) \quad 2x + y - z &= 1 \\ 3x - 2y + z &= 1 \\ x + y + 2z &= 6 \\ 6) \quad 2x + y + z &= 2 \\ 3x + 2y + 3z &= 8 \end{aligned}$ |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

$$\begin{array}{ll}
 x + 3y + z = -7 & 4x + y - z = 2 \\
 7) \quad 3x - 2y - 4z = -2 & 8) \quad x + 4y + z = 1 \\
 2x + y + 3z = 3 & 3x - 3y - 2z = 2
 \end{array}$$

**2.** Rešiti Kramerovom metodom sledeći sistem linearnih jednačina.

$$\begin{array}{ll}
 2x - 3y + 4z = 3 & 5x + y - 4z = -1 \\
 1) \quad x + y - 3z = -1 & 2) \quad 2y - 3z = -2 \\
 3x - 4y = 4 & 3x + y - 3z = -1 \\
 \\ 
 3x - 2y + z = -7 & x - y - 3z = -1 \\
 3) \quad x + 3y - 2z = -1 & 4) \quad x + 2z = 1 \\
 4y + 3z = 7 & 3x - y + z = -1 \\
 \\ 
 x - y + z = -3 & 2x - z = -6 \\
 5) \quad 3x - y = -1 & 6) \quad x + 2y + 3z = 4 \\
 5x - 3y + 2z = -7 & 4x - 3y + 2z = -4 \\
 \\ 
 x + 2y - 4z = 3 & 2x + 3z = 5 \\
 7) \quad -y + 2z = -1 & 8) \quad x + 3y - 2z = 4 \\
 2x - y + 2z = 4 & 3x - y + z = -7
 \end{array}$$

**3.** Diskutovati i rešiti primenom Kramerove metode, u zavisnosti od realnog parametra  $a$ , sledeći sistem linearnih jednačina.

$$\begin{array}{ll}
 x + ay - z = a & 2x + ay + z = a \\
 1) \quad x + z = a & 2) \quad ax + 3y - 2z = -2 \\
 ay + z = a & x - ay + 2z = 2 \\
 \\ 
 ax + y + z = 1 & x + y + az = a \\
 3) \quad x + ay + z = 2 & 4) \quad x + ay + z = a \\
 x + y + az = 3 & ax + y + z = a
 \end{array}$$

$$\begin{aligned} & ax + y + z = -1 \\ 5) \quad & -x + 3y + z = 3 \\ & ax + y + 3z = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ax - y + z = 1 \\ 7) \quad & x + ay - z = 1 \\ & -x + y + az = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ax + ay + z = 1 \\ 9) \quad & a^2x + y + z = 0 \\ & x + y + z = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x + y + az = a^2 \\ 6) \quad & x + ay + z = a^2 \\ & ax + y + z = a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -x + y + az = 1 \\ 8) \quad & x + ay - z = a \\ & ax - y + z = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ax + y + z = a^2 \\ 10) \quad & x + ay + z = a \\ & x + y + az = 1 \end{aligned}$$

### 3.3. Matrična metoda

**Primer 1.** Rešiti matričnom metodom sledeći sistem linearnih jednačina.

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 0 \\ 2x + 5y - 4z &= 3 \\ 3x - 4y + 2z &= 1 \end{aligned} \tag{15}$$

*Rešenje.* Sistem (15) možemo zapisati u obliku:  $AX=B$ , gde je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Prema tome,  $X=A^{-1}B$ . Dakle, potrebno je naći  $A^{-1}$ . Iz

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot 5 \cdot 2 + 2 \cdot (-4) \cdot 3 + (-3) \cdot 2 \cdot (-4) - 3 \cdot 5 \cdot (-3) - (-4) \cdot (-4) \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = 31, \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
 A_{1,1} &= \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -6, & A_{2,1} &= - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 8, & A_{3,1} &= \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 7, \\
 A_{1,2} &= - \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -16, & A_{2,2} &= \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 11, & A_{3,2} &= - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -2, \\
 A_{1,3} &= \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -23, & A_{2,3} &= - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 10, & A_{3,3} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1,
 \end{aligned}$$

dobijamo da je

$$A^{-1} = \frac{1}{31} \begin{bmatrix} -6 & -16 & -23 \\ 8 & 11 & 10 \\ 7 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{31} \begin{bmatrix} -6 & 8 & 7 \\ -16 & 11 & -2 \\ -23 & 10 & 1 \end{bmatrix}$$

tj.

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{31} \begin{bmatrix} -6 & 8 & 7 \\ -16 & 11 & -2 \\ -23 & 10 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{31} \begin{bmatrix} 31 \\ 31 \\ 31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

odnosno  $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ . ♦

### ***Zadaci za vežbu:***

1. Rešiti matricnom metodom sledeći sistem linearnih jednačina.

$$\begin{array}{ll}
 x - 3y + 2z = 1 & x + 4y - 3z = 0 \\
 1) \quad -3x + 4y - 2z = -1 & 2) \quad 2x + 3y - 4z = -4 \\
 2x + 5y - 4z = 0 & 3x - y + 2z = 7 \\
 \\ 
 x + 3y - z = 7 & x + 2y + 3z = 2 \\
 3) \quad 3x - 4y + 2z = -5 & 4) \quad 2x + 3y - z = -3 \\
 -5x + 2y + z = -1 & 3x + y - 2z = -5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + 2y - 3z = 0 \\ 5) \quad -2x + y + 2z = 1 \\ \quad \quad x + 3y - 5z = -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3x - 2y - 4z = -3 \\ 7) \quad -2x + 3y + 5z = 5 \\ \quad \quad x + y + 2z = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + 2y - 3z = 4 \\ 9) \quad -3x + 2y - 4z = -3 \\ \quad \quad x - 4y + 2z = -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + 3y - 2z = -6 \\ 11) \quad -3x + y + 4z = -4 \\ \quad \quad x - 2y - 5z = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ 13) \quad -2x + 3y + 4z = -5 \\ \quad \quad x - 4y + 5z = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x - 2y + 3z = -1 \\ 6) \quad 2x + 3y + 3z = 5 \\ \quad \quad 3x - y + 2z = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3x + 2y + z = -3 \\ 8) \quad 2x - y + 3z = 5 \\ \quad \quad 4x + 3y + 2z = -5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + 4y - 3z = 4 \\ 10) \quad 2x - 5y + z = -4 \\ \quad \quad 5x - 3y + 2z = 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + 5y + 2z = 4 \\ 12) \quad 2x - 3y - 4z = 1 \\ \quad \quad x + 2y + 3z = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3x - 2y + 4z = -6 \\ 14) \quad 5x - 3y - 2z = 5 \\ \quad \quad 4x - 5y + 3z = 8 \end{array}$$

**2.** Rešiti matricečnom metodom sledeći sistem linearnih jednačina.

$$\begin{array}{l} 2x + 3y + 3z = -1 \\ 1) \quad \quad \quad 3y + 2z = -1 \\ \quad \quad 3x - 2y - 4z = 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3x - y = 2 \\ 3) \quad x + 2y - z = -2 \\ \quad \quad 2x + y - 3z = -4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x - y + 2z = 5 \\ 5) \quad 2x - 3z = -7 \\ \quad \quad 3x - 2y + z = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + 3y - 4z = 1 \\ 2) \quad \quad \quad 2y + 3z = -8 \\ \quad \quad x - 4y + z = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ 4) \quad \quad \quad 3y + 4z = -2 \\ \quad \quad x - 4y + 5z = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + 3y - 2z = 4 \\ 6) \quad x - 2y = -2 \\ \quad \quad x + 4y - 5z = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 3x - 2y + 4z = -6 & -x + 4y - 3z = -2 \\
 7) \quad 5x - 3y - 2z = 5 & 8) \quad x - 3y + 2z = 1 \\
 4x - 5y = -3 & 3x - 2z = -3 \\
 \\ 
 -y + 3z = 1 & -x + 3y - 2z = 4 \\
 9) \quad 2x + 3y - z = -5 & 10) \quad 3x - 2y = -2 \\
 x - 4y - 5z = -2 & 4x + 5y + 6z = 2 \\
 \\ 
 3x + y + 4z = 3 & -x + 2z = 4 \\
 11) \quad x + 2y = -1 & 12) \quad 2x + y + 3z = -1 \\
 2x + 3y - z = 1 & 3x - 2y - 4z = -2 \\
 \\ 
 2x + y - 5z = 3 & 3x + z = -2 \\
 13) \quad x - 3y = -3 & 14) \quad -x + 4y - 3z = 2 \\
 3x - 2y - 3z = 2 & 2x + 3y - z = 1
 \end{array}$$

### 3.4. Homogeni sistemi linearnih jednačina

**Primer 1.** Rešiti homogeni sistem linearnih jednačina.

$$\begin{array}{l}
 x + 2y - 3z = 0 \\
 2x + 5y - 4z = 0 \\
 3x - 4y + 2z = 0
 \end{array} \tag{16}$$

*Rešenje.* Treba odrediti  $D$  determinantu sistema (16).

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} \\
 &= 1 \cdot 5 \cdot 2 + 2 \cdot (-4) \cdot 3 + (-3) \cdot 2 \cdot (-4) - 3 \cdot 5 \cdot (-3) - (-4) \cdot (-4) \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = 31,
 \end{aligned}$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

**Napomena.**  $D_x = D_y = D_z = 0$  na osnovu osobine determinanti koja glasi: *Vrednost determinante je jednaka 0 ako su svi elementi jednog reda (kolone) jednaki 0.*

Pošto je  $D \neq 0$ , sistem (16) ima jedinstveno rešenje:

$$x = \frac{D_x}{D} = 0, \quad y = \frac{D_y}{D} = 0, \quad z = \frac{D_z}{D} = 0.$$

Prema tome, rešenje sistema (16) je uređena trojka  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$  tj. sistem (16) ima jedinstveno rešenje - *određen* sistem. ♦

**Primer 2.** Rešiti homogeni sistem linearnih jednačina.

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 0 \\ 3x + 5y + 2z &= 0 \\ 2x + y - z &= 0 \end{aligned} \tag{17}$$

*Rešenje.* Treba odrediti  $D$  determinantu sistema (17).

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot 5 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 5 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - (-1) \cdot 3 \cdot 2 = 0, \end{aligned}$$

Pošto je  $D = 0$  sistem (17) nema jedinstveno rešenje (a to je uređena trojka  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ ), već ima beskonačno mnogo rešenja - *neodređen* sistem.

Iz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

zaključujemo da je rang matrice sistema (17) jednak 2 tj. da je sis-

tem (17) neodređen sistem po jednoj, razlika između broja nepoznatih sistema i ranga matrice sistema, (slobodnoj) nepoznatoj.

Iz sistema (17), prebacivanjem jedne nepoznate, npr.  $x$ , na drugu stranu jednakosti, dobijamo:

$$\begin{aligned} 2y + z &= -x \\ 5y + 2z &= -3x \\ y - z &= -2x \end{aligned} \tag{18}$$

Da bismo odredili zavisnost nepoznatih  $y$  i  $z$  od nepoznate  $x$  dovoljno je, imajući u vidu da je rang matrice sistema (17) jednak 2, izabrati bilo koje dve jednačine sistema (18). Primenom Kramerove metode, na npr. prve dve jednačine sistema (18), dobijamo:

$$y = -\frac{\begin{vmatrix} x & 1 \\ 3x & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}} = -x, \quad z = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & x \\ 5 & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}} = x,$$

odakle sledi da je svaka uređena trojka oblika  $(x, y, z) = (t, -t, t), t \in \mathbf{R}$ , rešenje sistema (17).

**Napomena.** U navedenom primeru smo kod sistema (17) prebacili nepoznatu  $x$  na drugu stranu jednakosti i određivali zavisnost nepoznatih  $y$  i  $z$  od nepoznate  $x$ . Međutim, kod sistema (17) možemo: prebaciti nepoznatu  $y$  na drugu stranu jednakosti i određivati zavisnost nepoznatih  $x$  i  $z$  od nepoznate  $y$ , ili prebaciti nepoznatu  $z$  na drugu stranu jednakosti i određivati zavisnost nepoznatih  $x$  i  $y$  od nepoznate  $z$ . ♦

### **Zadaci za vežbu:**

1. Rešiti homogeni sistem linearnih jednačina.

$$\begin{array}{ll} x + 2y + z = 0 & x + 2y - z = 0 \\ 1) \quad 5x - 2y - 3z = 0 & 2) \quad 3x + 5y - 2z = 0 \\ 2x - 5y - 4z = 0 & x - 2y + 3z = 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} & x + 2y - 3z = 0 \\ 3) \quad & 3x - 2y - z = 0 \\ & 2x - y + z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x - y - z = 0 \\ 5) \quad & 3x - 2y + z = 0 \\ & 2x - 3y + 2z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x - 2y + z = 0 \\ 7) \quad & x + y - z = 0 \\ & 2x + 5y - 4z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x + y + 3z = 0 \\ 9) \quad & 2x + 2y + 3z = 0 \\ & x + 3y + 2z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x + y + 2z = 0 \\ 11) \quad & 3x - 4y + 2z = 0 \\ & x - 3y - z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 3x - y - 4z = 0 \\ 4) \quad & x - y - 2z = 0 \\ & 2x + 3y + z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x + 4y - z = 0 \\ 6) \quad & 3x - 3y + 2z = 0 \\ & x - 5y + 2z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2x - 2y + 3z = 0 \\ 8) \quad & x + 2y - 3z = 0 \\ & 2x - y + z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x + y - z = 0 \\ 10) \quad & 2x - y - z = 0 \\ & x + 4y - 2z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x + y + z = 0 \\ 12) \quad & 4x + y + 2z = 0 \\ & x - 2y - z = 0 \end{aligned}$$

**2.** Rešiti homogeni sistem linearnih jednačina.

$$\begin{aligned} & 3x - 2z = 0 \\ 1) \quad & 5x - y - 3z = 0 \\ & 3x - 3y - z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 4x + 2y - z = 0 \\ 3) \quad & 2y + z = 0 \\ & 5x + y - 2z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x - 3y + 2z = 0 \\ 2) \quad & y - z = 0 \\ & 3x + 2y - z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x - 2y - z = 0 \\ 4) \quad & 3x - 2y - 2z = 0 \\ & 4y + z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} 3x - y - 2z = 0 \\ 5) \quad x - 3y = 0 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x - 2y + z = 0 \\ 7) \quad x + 3z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x - z = 0 \\ 9) \quad 3x - y - 2z = 0 \\ x - 5y - 3z = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3x - 5y + z = 0 \\ 11) \quad y - 2z = 0 \\ 3x - 4y - z = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4x - 2y - z = 0 \\ 6) \quad x + y + 5z = 0 \\ 2x + 3z = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x + 3y = 0 \\ 8) \quad 3x + 4y - z = 0 \\ x + 4y + 5z = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + 3y - 2z = 0 \\ 10) \quad 3x - y = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3x - 2y - 4z = 0 \\ 12) \quad x - 2z = 0 \\ 2x + y - 3z = 0 \end{array}$$

**3.** Odrediti, u zavisnosti od realnog parametra  $a$ , kada homogeni sistem linearnih jednačina ima i netrivialnih rešenja i, u tom slučaju, odrediti ih.

$$\begin{array}{l} -x + 3y + 2z = 0 \\ 1) \quad -2y + az = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} -x + (a+2)y + z = 0 \\ 2) \quad (a-1)x - y + (a+1)z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} ax + y - az = 0 \\ 3) \quad x + ay - az = 0 \\ ax - ay - z = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} -2x + y - az = 0 \\ 4) \quad x + (a-2)y - z = 0 \\ x - 3y + az = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} ax + 2y - z = 0 \\ 5) \quad 3x - y + 2z = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} -x + 2y + (a-2)z = 0 \\ 6) \quad x + ay + 3z = 0 \\ -x + 3y + (a+1)z = 0 \end{array}$$

|                                                                                                     |                                                                                                               |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{aligned} 3x - y - 2z &= 0 \\ 7) \quad 2x + ay - z &= 0 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$         | $\begin{aligned} x - ay + 3z &= 0 \\ 8) \quad (2+a)x + y + (2-a)z &= 0 \\ 2x + (1+a)y - z &= 0 \end{aligned}$ |
| $\begin{aligned} ax + 2y - az &= 0 \\ 9) \quad 2x - ay - z &= 0 \\ 2x + ay - 2z &= 0 \end{aligned}$ | $\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ 10) \quad (a+2)x - ay + (a-1)z &= 0 \\ -x + ay + 2z &= 0 \end{aligned}$   |
| $\begin{aligned} ax + y - 2z &= 0 \\ 11) \quad 2x - 2y + az &= 0 \\ x + ay - 3z &= 0 \end{aligned}$ | $\begin{aligned} x - 2y + 2z &= 0 \\ 12) \quad x + ay - z &= 0 \\ (a-1)x - 3y + (a+2)z &= 0 \end{aligned}$    |

## 4. *Finansijska matematika*

Literatura u kojoj možete pronaći neophodne informacije o proporcionalnosti veličina, procentnom i kamatnom računu: [2], [9], [12] ili [14].

### 4.1. *Proporcionalnost veličina*

**Primer 1.** Odrediti nepoznatu  $x$  tako da važi sledeće:

$$\left(x - \frac{3}{4}\right) : \left(x + \frac{1}{3}\right) = 3 : 4$$

*Rešenje:* Iz  $a : b = c : d \iff ad = bc$  dobijamo:

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{3}{4}\right) : \left(x + \frac{1}{3}\right) = 3 : 4 &\iff 4\left(x - \frac{3}{4}\right) = 3\left(x + \frac{1}{3}\right) \iff 4x - 3 = 3x + 1 \\ &\iff x = 4. \blacklozenge \end{aligned}$$

**Primer 2.** Odrediti  $a : b : c : d$ , ako je

$$a : b = 2 : 3, \quad b : c = 6 : 7 \quad \text{ i } \quad c : d = 7 : 8.$$

*Rešenje:*

$$\text{Iz } a : b = 2 : 3 \text{ dobijamo } b = \frac{3}{2}a,$$

$$\text{iz } b : c = 6 : 7 \text{ dobijamo } c = \frac{7}{6}b \quad \text{ tj. } \quad c = \frac{7}{6} \cdot \frac{3}{2}a = \frac{7}{4}a,$$

$$\text{iz } c : d = 7 : 8 \text{ dobijamo } d = \frac{8}{7}c \quad \text{ tj. } \quad d = \frac{8}{7} \cdot \frac{7}{4}a = 2a.$$

$$\text{Dakle, } a : b : c : d = a : \frac{3}{2}a : \frac{7}{4}a : 2a.$$

Množenjem svakog člana razmere na desnoj strani prethodne proporcije sa  $\frac{4}{a}$  dobijamo:

$$a : b : c : d = 4 : 6 : 7 : 8. \blacklozenge$$

**Primer 3.** Ako se u 5 kamiona može prevesti 12 435 kg robe, koliko je kamiona potrebno da bi se prevezlo 32 331 kg robe?

*Rešenje:* Broj kamiona i količina robe su *direktno proporcionalne veličine*, jer što je **više** kamiona **više** će se i robe prevesti.

Dakle,

$$\begin{array}{cc} 5 \text{ kamiona} & 12\,435 \text{ kg robe} \\ \uparrow & \\ x \text{ kamiona} & 32\,331 \text{ kg robe} \end{array} \uparrow$$

Prateći smer strelica dobijamo sledeću proporciju:

$$x : 5 = 32\,331 : 12\,435,$$

odakle, imajući u vidu da je  $a : b = c : d \iff ad = bc$ , dobijamo:

$$x : 5 = 32\,331 : 12\,435 \iff 12\,435 x = 5 \cdot 32\,331 \iff x = \frac{5 \cdot 32\,331}{12\,435} = 13.$$

Potrebno je 13 kamiona da bi se prevezlo 32 331 kg robe. ♦

**Primer 4.** Ako 16 učenika očisti školsko dvorište za 5 sati, koliko je vremena potrebno da 20 učenika očisti isto školsko dvorište?

*Rešenje:* Broj učenika i vreme su *obrnuto proporcionalne veličine*, jer što je **više** učenika potrebno je **manje** vremena da se očisti dvorište.

Dakle,

$$\begin{array}{cc} 5 \text{ sati} & 16 \text{ učenika} \\ \uparrow & \\ x \text{ sati} & 20 \text{ učenika} \end{array} \downarrow$$

Prateći smer strelica dobijamo sledeću proporciju:

$$x : 5 = 16 : 20,$$

odakle, imajući u vidu da je  $a : b = c : d \iff ad = bc$ , dobijamo:

$$x : 5 = 16 : 20 \iff 20 x = 5 \cdot 16 \iff x = \frac{5 \cdot 16}{20} = 4.$$

Potrebno je 4 sata da 20 učenika očisti isto školsko dvorište. ♦

**Zadaci za vežbu:**

**1.** Odrediti nepoznatu  $x$  tako da važi sledeće:

- a)  $x : 132 = 5 : 6$ ,      b)  $15 : 8 = x : 0,32$ ,      c)  $0,54 : x = 0,3 : 0,25$ ,  
 d)  $4\frac{1}{2} : x = 3\frac{1}{3} : 1\frac{1}{2}$ ,      e)  $3\frac{2}{3} : 5\frac{1}{4} = x : 2\frac{1}{3}$ ,      f)  $\frac{3}{5} : 3\frac{1}{2} = 1,5 : x$ .

**2.** Odrediti nepoznatu  $x$  tako da važi sledeće:

- a)  $(x + 3) : (x - 1) = 3 : 2$ ,      b)  $(x - \frac{1}{4}) : 3 = (\frac{2}{3} - x) : 2$ ,  
 c)  $\frac{4}{3} : \frac{1}{2} = (x - \frac{1}{2}) : (3x - 1)$ ,      d)  $(x - 2,5) : 2,4 = (x - 3) : 2$ .

**3.** Odrediti nepoznatu  $x$  tako da važi sledeće:

- a)  $(x + \sqrt{2}) : (x + 3) = 3 : 2$ ,      b)  $\sqrt{3} : \sqrt{2} = (x - \sqrt{2}) : (x + \sqrt{3})$ ,  
 c)  $(x - 2\sqrt{2}) : 3 = (x - 1) : 2$ ,      d)  $\sqrt{2} : (x + \sqrt{3}) = \sqrt{3} : (x + \sqrt{2})$ .

**4.** Odrediti nepoznatu  $x$  tako da važi sledeće:

- a)  $(x - 2i) : (x + i) = 3 : 4$ ,      b)  $i : 2 = (x - i) : (x + 2i)$ ,  
 c)  $(x + 3i) : 2 = (i - x) : i$ ,      d)  $2 : (2i - x) = 3 : (x - 3i)$ ,

pri čemu je  $i$  imaginarna jedinica ( $i = \sqrt{-1}$ ).

**5.** Odrediti  $a : b : c$ , ako je

- a)  $a : b = 1 : 3$  i  $b : c = 4 : 5$ ,      b)  $a : b = 5 : 3$  i  $b : c = 4 : 5$ ,  
 c)  $a : b = 5 : 6$  i  $b : c = 3 : 2$ ,      d)  $a : b = 4 : 3$  i  $b : c = 7 : 5$ .

**6.** Odrediti  $a : b : c : d$ , ako je

- a)  $a : b = 3 : 4$ ,  $b : c = 8 : 9$  i  $c : d = 9 : 11$ ,  
 b)  $a : b = 2 : 3$ ,  $b : c = 4 : 7$  i  $c : d = 5 : 6$ ,  
 c)  $a : b = 1 : 3$ ,  $b : c = 7 : 3$  i  $c : d = 7 : 5$ ,  
 d)  $a : b = 7 : 6$ ,  $b : c = 4 : 3$  i  $c : d = 9 : 8$ .

**7.** Za 15 knjiga potrebno je platiti 21 420 dinara. Koliko je dinara potrebno platiti za 24 knjige?

**8.** Za 12 kg voća plaćeno je 804 dinara. Koliko se kilograma voća može kupiti za 1 407 dinara?

9. Jedan posao 6 radnika završi za 3 sati. Za koliko će sati isti posao završiti 9 radnika?
10. Koliko je radnika potrebno da bi se određeni posao završio za 3 sata, ako je poznato da taj posao 6 radnika može da završi za 4 sata?
11. Sonja je krenula na put koji može da pređe za 3 sata ako se kreće brzinom od  $80 \frac{km}{h}$ . Kojom brzinom treba da se kreće Sonja da bi isti put prešla za 2,5 sata?
12. Nikola je krenuo na more. Put do mora Nikola pređe za 5 sati ako se kreće brzinom od  $60 \frac{km}{h}$ . Koliko će minuta ranije Nikola stići na more, ako brzinu kretanja poveća za  $15 \frac{km}{h}$ ?
13. Koliko će dinara zaraditi 18 radnika za 40 dana radeći dnevno 7 sati, ako 12 radnika za 42 dana radeći dnevno 8 sati zaradi 360 000 dinara?
14. Koliko sati dnevno treba da radi 18 radnika da bi za 45 dana zaradili 480 000 dinara, ako 12 radnika radeći dnevno 9 sati za 48 dana zaradi 512 000 dinara?
15. Koliko radnika treba da radi 8 sati dnevno da bi za 200 dana zaradili 4 020 000 dinara, ako 24 radnika radeći dnevno 7 sati za 180 dana zaradi 4 041 000 dinara?
16. Koliko dana treba da radi 28 radnika 6 sati dnevno da bi zaradili 2 004 000 dinara, ako 20 radnika radeći dnevno 7 sati za 20 dana zaradi 2 000 000 dinara?

## 4.2. Procentni račun

**Primer 1.** Cene robe je sa 3 025 dinara snižena na 2 541 dinara. Za koliko procenata je snižena cena robe?

*Rešenje:*

*I način:*

$$\begin{array}{rcl} & 3\,025 \text{ dinara} & 100 \% \\ \uparrow & & \uparrow \\ & 2\,541 \text{ dinara} & x \% \end{array}$$

Prateći smer strelica dobijamo sledeću proporciju:

$$2\,541 : 3\,025 = x : 100,$$

odakle, imajući u vidu da je  $a : b = c : d \iff ad = bc$ , dobijamo:

$$2\,541 : 3\,025 = x : 100 \iff 3\,025x = 2\,541 \cdot 100 \iff x = \frac{254\,100}{3\,025} = 84.$$

Cena robe je snižena za 16% ( $= 100\% - 84\%$ ).

*II način:* Cene robe je snižena za 484 dinara ( $= 3\,025 - 2\,541$ ). Dakle,

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & 3\,025 \text{ dinara} & 100\% \\ & 484 \text{ dinara} & x\% \end{array} \uparrow$$

Prateći smer strelica dobijamo sledeću proporciju:

$$484 : 3\,025 = x : 100,$$

odakle, imajući u vidu da je  $a : b = c : d \iff ad = bc$ , dobijamo:

$$484 : 3\,025 = x : 100 \iff 3\,025x = 484 \cdot 100 \iff x = \frac{48\,400}{3\,025} = 16.$$

Cena robe je snižena za 16%. ♦

**Primer 2.** Cena robe nakon poskupljenja za 25% iznosi 5 345 dinara. Koliko je iznosila cena robe pre poskupljenja?

*Rešenje:*

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & 5\,345 \text{ dinara} & 125\% \\ & x \text{ dinara} & 100\% \end{array} \uparrow$$

Prateći smer strelica dobijamo sledeću proporciju:

$$x : 5\,345 = 100 : 125,$$

odakle, imajući u vidu da je  $a : b = c : d \iff ad = bc$ , dobijamo:

$$x : 5\,345 = 100 : 125 \iff 125x = 5\,345 \cdot 100 \iff x = \frac{534\,500}{125} = 4\,276.$$

Cena robe pre poskupljenja je iznosila 4 276 dinara. ♦

***Zadaci za vežbu:***

1. Cene robe je sa 1 255 dinara povećana na 1 757 dinara. Za koliko procenata je povećana cena robe?
2. Cene robe iznosi 4 200 dinara. Koliko procenata treba da iznosi povećanje da bi nova cena robe iznosila 4 746 dinara?
3. Cene robe je sa 2 540 dinara snižena na 2 159 dinara. Za koliko procenata je snižena cena robe?
4. Cene robe iznosi 5 825 dinara. Koliko procenata treba da iznosi sniženje da bi nova cena robe iznosila 4 947 dinara?
5. Cene robe je iznosila 3 120 dinara i povećana je za 35%. Odrediti novu cenu robe.
6. Cene robe je iznosila 4 250 dinara i snižena je za 18%. Odrediti novu cenu robe.
7. Nakon poskupljenja za 34% cena robe iznosi 3 012 dinara. Koliko je iznosila cena robe pre poskupljenja?
8. Nakon sniženja za 27% cena robe iznosi 4 874 dinara. Koliko je iznosila cena robe pre sniženja?
9. Knjiga ima 350 strana. Ako je student pročitao 62% knjige, koliko je još strana ostalo studentu da bi pročitao knjigu do kraja?
10. Polaganju pismenoga ispita iz Kvantitativnih metoda pristupilo je ukupno 120 studenata. Nakon objave rezultata utvrđeno je da je prolaznost na pismenom ispitu iznosila 60%. Koliko je studenata položilo pismeni ispit, a koliko studenata nije položilo pismeni ispit iz Kvantitativnih metoda?
11. Za ispit iz Kvantitativnih metoda student treba da pripremi 450 ispitnih pitanja. Koji procenat ispitnih pitanja je student već pripremio ako mu je ostalo još da pripremi 99 ispitnih pitanja?
12. Nikola je krenuo na put. Ako je prešao 15 km što predstavlja 30% puta, kolika je dužina celog puta na koji je krenuo Nikola?

**13.** Proizvodnja u jednoj fabrici je iznosila 845 000 tona. Ako je plan proizvodnje u toj fabrici prebačen za 10%, koliko tona je iznosila planirana proizvodnja?

**14.** Proizvodnja u jednoj fabrici je, umesto planiranih 950 000 tona, iznosila 1 112 456 tona. Za koliko procenata je ostvarena veća proizvodnja od planirane?

**15.** Cena robe je iznosila 3 136 dinara i povećana je za 25%. Za koliko procenata treba sniziti novu cenu da bi se roba opet prodavala po početnoj ceni?

**16.** Cena robe je iznosila 5 400 dinara i snižena je za 16%. Za koliko procenata treba povećati novu cenu da bi se roba opet prodavala po početnoj ceni?

**17.** Cena robe je snižena za 18% i prodaje se za 6 068 dinara. Za koliko procenata tu cenu treba povećati da bi se roba prodavala po prvobitnoj ceni tj. ceni od pre navedenog sniženja?

**18.** Cena robe je povećana za 16% i prodaje se za 7 221 dinara. Za koliko procenata tu cenu treba smanjiti da bi se roba prodavala po prvobitnoj ceni tj. ceni od pre navedenog povećanja?

**19.** Cena robe je prvo povećana za 14%, a zatim je povećana za još 21%. Nakon toga je cena robe snižena za 35%. Koliko je iznosila početna cena robe, ako se roba nakon navedenih povećanja i sniženja prodaje po ceni od 1 200 dinara?

**20.** Cena robe je prvo snižena za 11%, a zatim je snižena za još 15%. Nakon toga je cena robe povećana za 26%. Koliko je iznosila početna cena robe, ako se roba nakon navedenih sniženja i povećanja prodaje po ceni od 2 354 dinara?

### **4.3. Kamatni račun**

**Napomena.** U svim zadacima reč je o kamatnoj (interesnoj) stopi na godišnjem nivou.

**Primer 1.** Na koliko je godina uložen kapital od 45 200 dinara po ka-

matnoj (interesnoj) stopi od 8%, ako je doneo kamatu (interes) od 14 464 dinara?

*Rešenje:*  $K = 45\,200$  dinara,  $p = 8\%$  i  $i = 14\,464$  dinara.

Iz  $K : i = 100 : (g \cdot p)$  tj.

$$45\,200 : 14\,464 = 100 : (g \cdot 8),$$

imajući u vidu da je  $a : b = c : d \iff ad = bc$ , dobijamo:

$$45\,200 : 14\,464 = 100 : (g \cdot 8) \iff 45\,200 \cdot g \cdot 8 = 14\,464 \cdot 100$$

$$\iff g = \frac{1\,446\,400}{361\,600} = 4 \text{ godine}.$$

Kapital od 45 200 dinara koji je doneo kamatu (interes) od 14 464 dinara uložen je po kamatnoj (interesnoj) stopi od 8% na period od 4 godine. ♦

**Primer 2.** Koliku će kamatu (interes) doneti kapital od 72 000 dinara uložen na 7 meseci po kamatnoj (interesnoj) stopi od 14%?

*Rešenje:*  $K = 72\,000$  dinara,  $m = 7$  meseci i  $p = 14\%$ .

Iz  $K : i = 1\,200 : (m \cdot p)$  tj.

$$72\,000 : i = 1\,200 : (7 \cdot 14),$$

imajući u vidu da je  $a : b = c : d \iff ad = bc$ , dobijamo:

$$72\,000 : i = 1\,200 : (7 \cdot 14) \iff 1\,200i = 72\,000 \cdot 7 \cdot 14$$

$$\iff i = \frac{7\,056\,000}{1\,200} = 5\,880 \text{ dinara}.$$

Kapital od 72 000 dinara uložen na 7 meseci po kamatnoj (interesnoj) stopi od 14% donosi 5 880 dinara kamate (interesa). ♦

**Primer 3.** Po kojoj je kamatnoj (interesnoj) stopi uložen kapital od 54 000 dinara u periodu od 14. maja 2021. do 16. avgusta 2021. (30,360), ako je doneo kamatu (interes) od 966 dinara?

*Rešenje:*  $K=54\,000$  dinara,  $d=14.$  maj 2021. – 16. avgusta 2021. = 92 dana i  $i=966$  dinara.

Iz  $K : i = 36\,000 : (d \cdot p)$  tj.

$$54\,000 : 966 = 36\,000 : (92 \cdot p),$$

imajući u vidu da je  $a : b = c : d \iff ad = bc$ , dobijamo:

$$54\,000 : 966 = 36\,000 : (92 \cdot p) \iff 54\,000 \cdot 92 \cdot p = 966 \cdot 36\,000$$

$$\iff p = \frac{34\,776\,000}{4\,968\,000} = 7\%.$$

Kapital od 54 000 dinara koji je u periodu od 14. maja 2021. do 16. avgusta 2021. (30,360) doneo kamatu (interes) od 966 dinara uložen je po kamatnoj (interesnoj) stopi od 7%. ♦

**Primer 4.** Dužnik je poveriocu vratio dug, zajedno sa kamatom, od 32 450 dinara uz kamatnu (interesnu) stopu od 8,5%, za period od 14. juna 2021. do 21. avgusta 2021. (30,360). Koliki je bio dug, a kolika kamata (interes)?

*Rešenje:*  $K+i=32\,450$  dinara,  $d=14.$  jun 2021. – 21. avgust 2021. = 67 dana i  $p=8,5\%$ .

Iz  $K : (K+i) = 36\,000 : (36\,000 + d \cdot p)$  tj.

$$K : 32\,450 = 36\,000 : (36\,000 + 67 \cdot 8,5),$$

imajući u vidu da je  $a : b = c : d \iff ad = bc$ , dobijamo:

$$K : 32\,450 = 36\,000 : (36\,000 + 67 \cdot 8,5)$$

$$\iff K \cdot (36\,000 + 67 \cdot 8,5) = 32\,450 \cdot 36\,000$$

$$\iff K = \frac{1\,168\,200\,000}{36\,569,5} = 31\,944,65 \text{ dinara.}$$

Dug je 31 944,65 dinara, a kamata (interes) 505,35 ( $= (K+i)-K=32\,450-31\,944,65$ ) dinara. ♦

**Primer 5.** Po odbitku 5,5% kamate (interesa) za 9 meseci dužnik je vratio 12 545 dinara. Koliki je dug, a kolika kamata (interes)?

*Rešenje:*  $K - i = 12\,545$  dinara,  $m = 9$  meseci i  $p = 5,5\%$ .

Iz  $K : (K - i) = 1\,200 : (1\,200 - m \cdot p)$  tj.

$$K : 12\,545 = 1\,200 : (1\,200 - 9 \cdot 5,5),$$

imajući u vidu da je  $a : b = c : d \iff ad = bc$ , dobijamo:

$$K : 12\,545 = 1\,200 : (1\,200 - 9 \cdot 5,5)$$

$$\iff K \cdot (1\,200 - 9 \cdot 5,5) = 12\,545 \cdot 1\,200$$

$$\iff K = \frac{15\,054\,000}{1\,150,5} = 13\,084,75 \text{ dinara.}$$

Dug je 13 084,75 dinara, a kamata (interes) 539,75 ( $=K-(K-i)=13\,084,75-12\,545$ ) dinara. ♦

**Primer 6.** Bošku i Branki je banka odobrila zajam i to: Bošku je odobren zajam od 35 350 dinara na 2 meseca i 12 dana po kamatnoj (interesnoj) stopi od 8,1%, dok je Branki odobren zajam od 42 420 dinara na 75 dana po kamatnoj (interesnoj) stopi od 8,5% (30,360). Koliku će kamatu (interes) ostvariti banka?

*Rešenje:*  $K_1=35\,350$  dinara,  $d_1=2$  meseca + 12 dana  $=2 \cdot 30 + 12 = 72$  dana i  $p_1=8,1\%$ ,  $K_2=42\,420$  dinara,  $d_2=75$  dana i  $p_2=8,5\%$ .

Iz  $K : i = 36\,000 : (d \cdot p)$ , imajući u vidu da je  $a : b = c : d \iff ad = bc$ , dobijamo:

$$K : i = 36\,000 : (d \cdot p) \iff 36\,000 \cdot i = K \cdot d \cdot p \iff i = \frac{K \cdot d \cdot p}{36\,000}$$

Kamata (interes) banke  $i$  je:

$$i = i_1 + i_2 = \frac{K_1 \cdot d_1 \cdot p_1 + K_2 \cdot d_2 \cdot p_2}{36\,000} = \frac{35\,350 \cdot 72 \cdot 8,1 + 42\,420 \cdot 75 \cdot 8,5}{36\,000}$$

$$= \frac{47\,658\,870}{36\,000} = 1\,323,86 \text{ dinara.}$$

Banka će ostvariti kamatu (interes) od 1 323,86 dinara. ♦

***Zadaci za vežbu:***

1. Koji kapital će za 5 godina, uz kamatnu (interesnu) stopu od 8%, doneti 1 240 dinara kamate (interesa)?
2. Koliko iznosi kamata (interes) na pozajmljenu sumu od 45 500 dinara za 7 godina uz kamatnu (interesnu) stopu od 9%?
3. Za koliko će godina kapital od 9 870 dinara, uz kamatnu (interesnu) stopu od 25%, doneti 7 402,50 dinara kamate (interesa)?
4. Po kojoj je kamatnoj (interesnoj) stopi uložen kapital od 1 500 dinara ako je za 6 godina doneo 350 dinara kamate (interesa)?
5. Koji kapital će za 10 meseci, uz kamatnu (interesnu) stopu od 6%, doneti 545 dinara kamate (interesa)?
6. Koliko iznosi kamata (interes) na pozajmljenu sumu od 32 500 dinara za 8 meseci uz kamatnu (interesnu) stopu od 6%?
7. Za koliko će meseci kapital od 5 000 dinara, uz kamatnu (interesnu) stopu od 4%, doneti 150 dinara kamate (interesa)?
8. Po kojoj je kamatnoj (interesnoj) stopi uložen kapital od 1 320 dinara ako je za 9 meseci doneo 156 dinara kamate (interesa)?
9. Koji kapital će za 72 dana, uz kamatnu (interesnu) stopu od 9%, doneti 936 dinara kamate (interesa) (30,360)?
10. Koliko iznosi kamata (interes) na pozajmljenu sumu od 9 370 dinara za 55 dana uz kamatnu (interesnu) stopu od 7% (k,365)?
11. Za koliko će dana kapital od 100 000 dinara, uz kamatnu (interesnu) stopu od 3%, doneti 450 dinara kamate (interesa) (30,360)?
12. Po kojoj je kamatnoj (interesnoj) stopi uložen kapital od 56 500 dinara ako je za 64 dana doneo 452 dinara kamate (interesa) (k,360)?

- 13.** Koji će kapital, sa kamatnom (interesnom) stopom od 35%, doneti 350 dinara kamate (interesa) od 2. marta 2021. do 12. septembra 2021. (30, 360)?
- 14.** Koji će kapital, sa kamatnom (interesnom) stopom od  $6\frac{2}{3}\%$ , doneti 1 000 dinara kamate (interesa) od 7. septembra 2021. do 25. decembra 2021. (30,360)?
- 15.** Koji će kapital, sa kamatnom (interesnom) stopom od 27%, doneti 512 dinara kamate (interesa) od 17. aprila 2021. do 13. oktobra 2021. (k,365)?
- 16.** Koji će kapital, sa kamatnom (interesnom) stopom od  $5\frac{1}{2}\%$ , doneti 176 dinara kamate (interesa) od 14. aprila 2021. do 13. jula 2021. (k,360)?
- 17.** Koliko iznosi kamata (interes) na pozajmljenu sumu od 69 350 dinara za period od 15. maja 2021. do 12. oktobra 2021. (k,365) uz kamatnu (interesnu) stopu od 5%?
- 18.** Koliko iznosi kamata (interes) na pozajmljenu sumu od 82 000 dinara za period od 16. juna 2021. do 21. novembra 2021. (30,360) uz kamatnu (interesnu) stopu od 9,5%?
- 19.** Koliko iznosi kamata (interes) na pozajmljenu sumu od 115 500 dinara za period od 4. jula 2021. do 24. novembra 2021. (k,360) uz kamatnu (interesnu) stopu od 11,5%?
- 20.** Kapital od 2 000 dinara uložen je 4. avgusta 2021. po kamatnoj (interesnoj) stopi od 12%. Do kog datuma treba da bude uložen taj kapital da bi doneo kamatu (interes) od 240 dinara (k,360)?
- 21.** Kapital od 50 000 dinara uložen je 13. aprila 2021. po kamatnoj (interesnoj) stopi od 6%. Do kog datuma treba da bude uložen taj kapital da bi doneo kamatu (interes) od 600 dinara (k, 365)?
- 22.** Po kojoj je kamatnoj (interesnoj) stopi uložen kapital od 34 176 dinara ako je za period od 21. maja 2021. do 21. oktobra 2021. (30,360) doneo 712 dinara kamate (interesa)?

- 23.** Sa kojom će kamatnom (interesnom) stopom kapital od 10 950 dinara doneti 114 dinara kamate (interesa) od 30. avgusta 2021. do 3. decembra 2021. (k,365)?
- 24.** Po kojoj je kamatnoj (interesnoj) stopi uložen kapital od 1 500 dinara ako je za period od 4. maja 2021. do 28. septembra 2021. (k,360) doneo 90 dinara kamate (interesa)?
- 25.** Koliko dinara je iznosio pozajmljeni kapital koji je dužnik primio uz kamatnu (interesnu) stopu od 6%, ako je za 2 godine i 2 meseca platio 4 300 dinara kamate (interesa)?
- 26.** Koji će kapital, sa kamatnom (interesnom) stopom od 4,5%, doneti 16 500 dinara kamate (interesa) za 2 godine, 3 meseca i 15 dana (30,360)?
- 27.** Koliko iznosi kamata (interes) na pozajmljenu sumu od 18 000 dinara za 1 godinu i 5 meseca uz kamatnu (interesnu) stopu od 6,5%?
- 28.** Koliko iznosi kamata (interes) na pozajmljenu sumu od 56 000 dinara za 2 godine, 4 meseca i 20 dana (30,360) uz kamatnu (interesnu) stopu od 11,5%?
- 29.** Na koji vremenski period je uložen kapital od 42 000 dinara, sa kamatnom (interesnom) stopom od 15%, ako je doneo kamatu (interes) u iznosu od 15 575 dinara (30,360)?
- 30.** Banka je 15. maja 2021. odobrila zajam. Dužnik je 26. juna 2021. vratio dug uvećan za kamatu (interes) i ukupno platio 75 200 dinara. Kolika je visina odobrenog zajma, ako je kamatna (interesna) stopa 4% (k,360)?
- 31.** Zajedno sa kamatom (interesom) od 8,4% za 125 dana dužnik je poveriocu vratio 425 000 dinara. Koliki je dug, a kolika je kamata (30,360)?
- 32.** Dužnik je poveriocu vratio dug, zajedno sa kamatom od 52 292,5 dinara uz kamatnu (interesnu) stopu od 7,5% (k,360), za period od 17. jula 2021. do 13. avgusta 2021. Koliki je bio dug, a kolika kamata?

- 33.** Banka je 20. aprila 2021. odobrila zajam od 16 200 dinara uz kamatnu (interesnu) stopu od 10%. Kada je vraćen zajam, ako je zajedno sa kamatom (interesom) vraćeno 16 224 dinara (k,365)?
- 34.** Zajam od 48 000 dinara odobren je od banke 15. maja 2021. Po kojoj je kamatnoj stopi odobren zajam, ako je dužnik 13. juna 2021. zajedno sa kamatom (interesom) vratio 48 280 dinara duga (30,360)?
- 35.** Po odbitku 10,5% kamate (interesa) za 2 godine dužnik je vratio 465 000 dinara. Koliki je dug, a kolika kamata?
- 36.** Po odbitku 6,5% kamate (interesa) za 8 meseci dužnik je vratio 56 560 dinara. Koliki je dug, a kolika kamata?
- 37.** Po odbitku 7,2% kamate (interesa) za 75 dana dužnik je vratio 325 155 dinara. Koliki je dug, a kolika kamata (30,360)?
- 38.** Po odbitku 4,8% kamate (interesa) od 28. marta 2021. do 3. juna 2021. dužnik je vratio 60 400 dinara. Koliki je dug, a kolika kamata (30,360)?
- 39.** Po odbitku 5,3% kamate (interesa) od 22. aprila 2021. do 14. jula 2021. dužnik je vratio 85 320 dinara. Koliki je dug, a kolika kamata (k,360)?
- 40.** Po odbitku 6% kamate (interesa) od 3. maja 2021. do 5. avgusta 2021. dužnik je vratio 74 650 dinara. Koliki je dug, a kolika kamata (k,365)?
- 41.** Banka je Aleksandru, Ani i Bojani odobrila zajam od, redom, 30 000 dinara na 7 godina, 34 000 dinara na 6 godina i 27 000 dinara na 8 godina. Kamatna (interesna) stopa po kojoj su odobreni navedeni zajmovi iznosi 9,4%. Koliki će interes ostvariti banka?
- 42.** Banka je Aleksandri, Bojanu i Anji odobrila zajam od, redom, 9 450 dinara na 8 meseci, 11 530 dinara na 7 meseci i 10 460 dinara na 9 meseci. Kamatna (interesna) stopa po kojoj su odobreni navedeni zajmovi iznosi 7,3%. Koliki će interes ostvariti banka?

**43.** Banka je Nemanji, Anastasiji i Moniki odobrila zajam od, redom, 110 450 dinara na 94 dana, 108 230 dinara na 85 dana i 112 735 dinara na 88 dana. Kamatna (interesna) stopa po kojoj su odobreni navedeni zajmovi iznosi 8,8%. Koliki će interes ostvariti banka (30,360)?

**44.** Banka je Sanji odobrila zajam od 15 000 dinara na 6 godina po kamatnoj (interesnoj) stopi od 10%, Nikoli zajam od 12 460 dinara na 5 godina po kamatnoj (interesnoj) stopi od 8% i Marku zajam od 13 500 dinara na 7 godina po kamatnoj (interesnoj) stopi od 9%. Koliki će interes ostvariti banka?

**45.** Banka je Mariji odobrila zajam od 113 000 dinara na 7 meseci po kamatnoj (interesnoj) stopi od 7,5%, Mirku zajam od 115 500 dinara na 6 meseci po kamatnoj (interesnoj) stopi od 7% i Sonji zajam od 110 640 dinara na 7 meseci po kamatnoj (interesnoj) stopi od 6%. Koliki će interes ostvariti banka?

**46.** Banka je Branimiru odobrila zajam od 43 720 dinara na 75 dana po kamatnoj (interesnoj) stopi od 5,5%, Moniki zajam od 54 240 dinara na 70 dana po kamatnoj (interesnoj) stopi od 6,8% i Stefanu zajam od 50 350 dinara na 72 dana po kamatnoj (interesnoj) stopi od 6,4%. Koliki će interes ostvariti banka?

**47.** Banka je Nikoliji odobrila zajam od 65 550 dinara na 1 godinu i 2 meseca po kamatnoj (interesnoj) stopi od 7,3% i Nevenu zajam od 72 150 dinara na 10 meseci po kamatnoj (interesnoj) stopi od 7,7%. Koliki će interes ostvariti banka?

**48.** Banka je Nenadu odobrila zajam od 100 500 dinara na 1 godinu, 3 meseca i 25 dana po kamatnoj (interesnoj) stopi od 6,3%, Marijani zajam od 104 450 dinara na 11 meseci i 10 dana po kamatnoj (interesnoj) stopi od 6,1% i Strahinji zajam od 102 560 dinara na 455 dana po kamatnoj (interesnoj) stopi od 6,6%. Koliki će interes ostvariti banka (30,360)?

## 5. Realne funkcije jedne realne promenljive

Literatura u kojoj možete pronaći neophodne informacije o realnim funkcijama jedne realne promenljive: [2], [3], [5], [6], [9], [12] ili [14].

### 5.1. Domen funkcije

**Primer 1.** Odrediti domen sledećih funkcija.

$$1) y = \frac{x}{x^2-2x-3}, \quad 2) y = \frac{1}{\sqrt{2-3x}}, \quad 3) y = \frac{x+1}{e^{2x+1}-1}, \quad 4) y = \ln\left(\frac{x+3}{2-x}\right).$$

Rešenje:

1)  $D_y = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 2x - 3 \neq 0\} = \mathbf{R} \setminus \{-1, 3\}$ . Poslednja jednakost sledi iz

$$x^2 - 2x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Leftrightarrow x \neq -1 \wedge x \neq 3.$$

2)  $D_y = \{x \in \mathbf{R} \mid 2 - 3x > 0\} = (-\infty, \frac{2}{3})$ . Poslednja jednakost sledi iz

$$2 - 3x > 0 \Leftrightarrow -3x > -2 \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}.$$

3)  $D_y = \{x \in \mathbf{R} \mid e^{2x+1} - 1 \neq 0\} = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ . Poslednja jednakost sledi iz

$$e^{2x+1} - 1 \neq 0 \Leftrightarrow e^{2x+1} \neq 1 \Leftrightarrow e^{2x+1} \neq e^0 \Leftrightarrow 2x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{2}.$$

4)  $D_y = \{x \in \mathbf{R} \mid \frac{x+3}{2-x} > 0\} = (-3, 2)$ . Poslednja jednakost sledi iz

|                   |           |      |     |           |   |
|-------------------|-----------|------|-----|-----------|---|
|                   | $-\infty$ | $-3$ | $2$ | $+\infty$ |   |
| $x+3$             | -         | +    | +   |           |   |
| $2-x$             | +         | +    | -   |           |   |
| $\frac{x+3}{2-x}$ | -         | +    | -   |           | ♦ |

**Zadaci za vežbu:**

1. Odrediti domen sledećih funkcija.

$$1) y = \frac{3}{x}, \quad 2) y = \frac{2}{1-2x}, \quad 3) y = \frac{x}{3x+2}, \quad 4) y = \frac{2-x}{x+3}, \quad 5) y = \frac{1+x^2}{3-4x},$$

$$6) y = \frac{x^2+x}{2x-1}, \quad 7) y = \frac{1}{x^2}, \quad 8) y = \frac{3}{1-2x^2}, \quad 9) y = \frac{2x}{3x^2-4}, \quad 10) y = \frac{2-x}{x^2+2},$$

$$11) y = \frac{x^2+3}{4-x^2}, \quad 12) y = \frac{4-x^2}{x^2-3}, \quad 13) y = \frac{3x^2+x}{2-x^2}, \quad 14) y = \frac{x^2-x}{9x^2-1},$$

$$15) y = \frac{1}{x^2-3x}, \quad 16) y = \frac{2}{3x^2+x}, \quad 17) y = \frac{x-3}{x^2+3x}, \quad 18) y = \frac{x+1}{2x-x^2},$$

$$19) y = \frac{3-x}{x-3x^2}, \quad 20) y = \frac{4-x^2}{2x^2+x}, \quad 21) y = \frac{2x^2-3}{x^2+3x}, \quad 22) y = \frac{3x^2+2}{4x-3x^2}.$$

2. Odrediti domen sledećih funkcija.

$$1) y = \frac{3}{x^2+3x+4}, \quad 2) y = \frac{2}{4x^2-5x+1}, \quad 3) y = \frac{1}{x^2+x-12},$$

$$4) y = \frac{x}{x^2-6x+9}, \quad 5) y = \frac{3x}{4x^2+7x+3}, \quad 6) y = \frac{2x}{4x-x^2-4},$$

$$7) y = \frac{x-3}{x^2-3x-10}, \quad 8) y = \frac{3x+4}{2+3x-2x^2}, \quad 9) y = \frac{3-2x}{x^2+2x+1},$$

$$10) y = \frac{x^2}{x^2+2x-8}, \quad 11) y = \frac{3-x^2}{x^2-8x+7}, \quad 12) y = \frac{x^2-2}{4-5x-9x^2},$$

$$13) y = \frac{x^2+x}{x^2+x-6}, \quad 14) y = \frac{4x-3x^2}{8x-3x^2-4}, \quad 15) y = \frac{x^2-2x}{4-4x-3x^2},$$

$$16) y = \frac{x^2 + 4x - 5}{5x^2 + 3x - 2}, \quad 17) y = \frac{x^2 + 3x + 2}{7x - x^2 - 6}, \quad 18) y = \frac{3x^2 + 2x - 3}{1 + 8x - 9x^2}.$$

3. Odrediti domen sledećih funkcija.

$$1) y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x+3}, \quad 2) y = \frac{3}{1+3x} - \frac{x}{2-x^2}, \quad 3) y = \frac{x}{2-x} + \frac{1-x}{3x^2-x},$$

$$4) y = \frac{2-x}{x+3} + \frac{3x^2}{2x^2-x-3}, \quad 5) y = \frac{3}{x^2-4} - \frac{2}{2x-x^2}, \quad 6) y = \frac{x+3}{3x^2-1} + \frac{x-2}{1-9x^2},$$

$$7) y = \frac{x}{x^2+3} + \frac{1-x}{x^2-5x+4}, \quad 8) y = \frac{2}{x^2-x} - \frac{x+3}{3x+2}, \quad 9) y = \frac{3x-4}{x^2+2x} + \frac{3x+4}{x^2+3},$$

$$10) y = \frac{x+1}{x^2+3x} - \frac{2}{2x-x^2}, \quad 11) y = \frac{3x-5}{2x^2-x} + \frac{3x}{5x-x^2-4}, \quad 12) y = \frac{3+2x}{x^2-x+2} - \frac{1}{x},$$

$$13) y = \frac{x^2+2}{x-x^2-2} + \frac{2}{x^2+2} - \frac{x}{x^2-2}, \quad 14) y = \frac{3x-4}{x^2-3x+2} + \frac{2}{x^2-3x} - \frac{1}{x^2},$$

$$15) y = \frac{1+3x}{x^2+3x+2} + \frac{3}{x^2+2x+1}, \quad 16) y = \frac{2x-1}{x^2+6x+9} - \frac{x}{x^2+2x-3}.$$

4. Odrediti domen sledećih funkcija.

$$1) y = \sqrt{x}, \quad 2) y = \sqrt{-x}, \quad 3) y = \sqrt{x^2}, \quad 4) y = \sqrt{-x^2}, \quad 5) y = \sqrt{x^3},$$

$$6) y = \sqrt{-x^3}, \quad 7) y = \sqrt{2+x}, \quad 8) y = \sqrt{3-x}, \quad 9) y = \sqrt{-x(x+1)},$$

$$10) y = \sqrt{x(2-3x)}, \quad 11) y = \sqrt{(x+3)(2-x)}, \quad 12) y = \sqrt{(2x+1)(3x-1)},$$

$$13) y = \sqrt{x^2-2}, \quad 14) y = \sqrt{x^2+5}, \quad 15) y = \sqrt{2x^2-1}, \quad 16) y = \sqrt{\frac{1}{9}-x^2},$$

$$17) y = \sqrt{x^2 + 3x}, \quad 18) y = \sqrt{x^2 - x}, \quad 19) y = \sqrt{\frac{4}{3}x - x^2}, \quad 20) y = \sqrt{x - \frac{3}{4}x^2},$$

$$21) y = \sqrt{6x^2 - 4x - 2}, \quad 22) y = \sqrt{7 - 6x - x^2}, \quad 23) y = \sqrt{x^2 + 2x + 2},$$

$$24) y = \sqrt{x(x+1)(2-x)}, \quad 25) y = \sqrt{-x(3x-2)(4-5x)}, \quad 26) y = \sqrt{x^3 - 3x},$$

$$27) y = \sqrt{x^3 + 5x^2 + 4x}, \quad 28) y = \sqrt{x^3 - 4x^2 - x + 4}, \quad 29) y = \sqrt{x^3 - 3x^2 + 4}.$$

5. Odrediti domen sledećih funkcija.

$$1) y = \sqrt{\frac{2}{x}}, \quad 2) y = \sqrt{2 + \frac{1}{x}}, \quad 3) y = \sqrt{\frac{3}{x} - 1}, \quad 4) y = \sqrt{\frac{2}{3x - 2}},$$

$$5) y = \sqrt{\frac{1}{2 - x}}, \quad 6) y = \sqrt{\frac{x}{x + 1}}, \quad 7) y = \sqrt{\frac{1 - x}{x - 2}}, \quad 8) y = \sqrt{1 - \frac{x + 2}{x - 3}},$$

$$9) y = \sqrt{\frac{x^2}{x - 3}}, \quad 10) y = \sqrt{\frac{x^2 - 4}{x}}, \quad 11) y = \sqrt{\frac{x^2 - 3x}{2 - x}}, \quad 12) y = \sqrt{\frac{x^2 + 4x + 4}{x}},$$

$$13) y = \sqrt{\frac{x^2 - x - 2}{x - 1}}, \quad 14) y = \sqrt{\frac{x - 3}{x^2 - 1} - 2}, \quad 15) y = \sqrt{2 + \frac{x - 2}{x^2 - 2}},$$

$$16) y = \sqrt{2 - \frac{3x^2 - 1}{x^2}}, \quad 17) y = \sqrt{\frac{x^2 + 2x}{x^2 + 1} - 1}, \quad 18) y = \sqrt{\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 4}},$$

$$19) y = \sqrt{\frac{x^2 - 3x - 4}{4 - x^2} + 1}, \quad 20) y = \sqrt{\frac{3x + 2}{x^2 + 3x}}, \quad 21) y = \sqrt{1 - \frac{x^2 + 3}{x^2 + x}},$$

$$\begin{aligned}
 22) y &= \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x}}, \quad 23) y = \sqrt{\frac{4x - x^2 - 4}{x^2 - 3x}}, \quad 24) y = \sqrt{\frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 + x}} - 3, \\
 25) y &= \sqrt{\frac{1}{x^2 + 6x + 9}}, \quad 26) y = \sqrt{\frac{2x + 1}{5x - x^2 + 6}}, \quad 27) y = \sqrt{2 - \frac{x^2 + 3}{x^2 + 3x + 2}}, \\
 28) y &= \sqrt{\frac{x^2 + 3x}{x^2 - 4x + 4}}, \quad 29) y = \sqrt{\frac{10x - x^2 - 25}{x^2 + 2x - 3}}, \quad 30) y = \sqrt{\frac{3x^2 + x + 2}{3x^2 + x - 2}} - 1.
 \end{aligned}$$

6. Odrediti domen sledećih funkcija.

$$\begin{aligned}
 1) y &= \frac{3}{\sqrt{2 + 3x}}, \quad 2) y = \frac{x}{\sqrt{3 - 4x}}, \quad 3) y = \frac{1 - x}{\sqrt{1 + 3x}}, \quad 4) y = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{4 - 5x}}, \\
 5) y &= \frac{x - 2x^2}{\sqrt{4 - x}}, \quad 6) y = \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{3x + 5}}, \quad 7) y = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 9}}, \quad 8) y = \frac{3x}{\sqrt{9x^2 - 1}}, \\
 9) y &= \frac{4 + 3x}{\sqrt{3x^2 + 4}}, \quad 10) y = \frac{3 + x^2}{\sqrt{x^2 - 3}}, \quad 11) y = \frac{x^2 - x}{\sqrt{4 - 3x^2}}, \quad 12) y = \frac{x^2 + 2x + 1}{\sqrt{4 - x^2}}, \\
 13) y &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3x}}, \quad 14) y = \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 - x}}, \quad 15) y = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{2x - x^2}}, \quad 16) y = \frac{x^2 + 4x - 12}{\sqrt{x - 4x^2}}, \\
 17) y &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x - 18}}, \quad 18) y = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}, \quad 19) y = \frac{3x - 5}{\sqrt{2 - 3x + 2x^2}}, \\
 20) y &= \frac{x^2 - 2}{\sqrt{x^2 - 5x + 4}}, \quad 21) y = \frac{2x - x^2}{\sqrt{x^2 - 6x + 10}}, \quad 22) y = \frac{2x - 3x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 14x + 49}}.
 \end{aligned}$$

7. Odrediti domen sledećih funkcija.

$$\begin{aligned}
 1) y &= \frac{2}{x} + \sqrt{3x + 2}, \quad 2) y = \frac{x}{2 - 3x} - \sqrt{x + 1}, \quad 3) y = \frac{1 - x}{x + 2} + \sqrt{4 - 3x}, \\
 4) y &= \frac{x - 2}{x - 3} - \sqrt{x^2 - 5}, \quad 5) y = \frac{3}{x} + \sqrt{1 - 3x^2}, \quad 6) y = \frac{x}{2 - x} - \sqrt{x^2 + 3},
 \end{aligned}$$

$$7) y = \frac{2-x}{1+x} + \sqrt{x^2-x}, \quad 8) y = \frac{3x}{x-3} - \sqrt{2x-x^2}, \quad 9) y = \frac{1}{x} + \sqrt{3x^2-x},$$

$$10) y = \frac{3}{x} - \sqrt{x^2-x-2}, \quad 11) y = \frac{1}{x} + \sqrt{2-x-x^2}, \quad 12) y = \frac{x+2}{x-4} - \sqrt{x^2-x-6}.$$

8. Odrediti domen sledećih funkcija.

$$1) y = \frac{1}{x^2-4} + \sqrt{5x+3}, \quad 2) y = \frac{1-x}{x^2+3} - \sqrt{4-x}, \quad 3) y = \frac{3x}{1-4x^2} + \sqrt{1-3x},$$

$$4) y = \frac{x}{2-x^2} - \sqrt{x^2+3}, \quad 5) y = \frac{2}{1-9x^2} + \sqrt{9-x^2}, \quad 6) y = \frac{1+x}{2x^2+3} - \sqrt{x^2-3},$$

$$7) y = \frac{3}{x^2+x} + \sqrt{x+2}, \quad 8) y = \frac{x+1}{x-3x^2} - \sqrt{1-4x}, \quad 9) y = \frac{3-x}{x^2-2x} + \sqrt{x+4},$$

$$10) y = \frac{3}{x^2-3x} - \sqrt{4x-x^2}, \quad 11) y = \frac{x+2}{4x-x^2} + \sqrt{x^2+x}, \quad 12) y = \frac{x-4}{x^2+x} - \sqrt{x^2-x},$$

$$13) y = \frac{x^2+2x-3}{3x^2+x} - \sqrt{2+x-x^2} + \frac{2x}{x+1}, \quad 14) y = \frac{x-2}{x^2+4x} + \sqrt{x^2+3x+2},$$

$$15) y = \sqrt{x+3} - \frac{x}{x^2+6x+8}, \quad 16) y = \sqrt{2-x} + \frac{3}{x^2+4x+4} + \sqrt{x},$$

$$17) y = \frac{2+x}{3x^2-x-4} - \sqrt{4-x^2}, \quad 18) y = \frac{3x-1}{x^2-8x+16} + \sqrt{4x^2+1} - \frac{3x}{x-4},$$

$$19) y = \frac{x}{x^2-4x+3} + \sqrt{4x-x^2} - \frac{2}{3-x}, \quad 20) y = \frac{4+3x}{x^2-x-6} - \sqrt{x^2+x} + \frac{3}{x},$$

$$21) y = \frac{1-4x}{3x^2+4x-4} - \sqrt{10+3x-x^2}, \quad 22) y = \frac{x+3}{3x^2+x-2} + \sqrt{2x^2+3x+1}.$$

9. Odrediti domen sledećih funkcija.

$$1) y = \log_3 x, \quad 2) y = \log_{\frac{1}{2}} x, \quad 3) y = \ln(x+3), \quad 4) y = \log_{\frac{2}{3}}(3x-4),$$

$$5) y = \log_2(2x+1), \quad 6) y = \ln(1-3x), \quad 7) y = \log_{\frac{3}{4}}(3-x), \quad 8) y = \log_{\frac{3}{2}}(2-3x),$$

$$\begin{aligned}
 9) y &= \ln\left(\frac{1}{x} + 3\right), & 10) y &= \log_2\left(\frac{3}{x} - 2\right), & 11) y &= \log_{\frac{1}{2}}\left(2 - \frac{1}{x}\right), \\
 12) y &= \log_{\frac{3}{4}}\left(\frac{2}{3x+2}\right), & 13) y &= \log_{\frac{5}{4}}\left(\frac{1}{3x-2}\right), & 14) y &= \ln\left(\frac{3}{4-5x}\right), \\
 15) y &= \log_{\frac{4}{5}}\left(\frac{3}{2-x}\right), & 16) y &= \ln\left(\frac{x+3}{x-2}\right), & 17) y &= \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x+2}{1-3x}\right), \\
 18) y &= \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{3-4x}{x+3}\right), & 19) y &= \ln\left(\frac{3x-4}{2x+1}\right), & 20) y &= \log_{\frac{5}{3}}\left(\frac{4-3x}{1-2x}\right), \\
 21) y &= \log_{\frac{3}{4}}\left(1 - \frac{2}{x+3}\right), & 22) y &= \ln\left(\frac{3}{2x+1} - 1\right), & 23) y &= \log_{\frac{4}{3}}\left(3 - \frac{2}{1+x}\right), \\
 24) y &= \log_{\frac{5}{4}}\left(3 + \frac{1-2x}{x+1}\right), & 25) y &= \log_{\frac{3}{5}}\left(2 - \frac{3x-1}{x-2}\right), & 26) y &= \ln\left(\frac{3x+4}{2x-1} - 1\right).
 \end{aligned}$$

**10.** Odrediti domen sledećih funkcija.

$$\begin{aligned}
 1) y &= \ln(x^2 - 3), & 2) y &= \log_{\frac{4}{3}}(1 - 4x^2), & 3) y &= \log_{\frac{1}{2}}(3x^2 + 2), \\
 4) y &= \log_{\frac{3}{2}}(x^2 + 2x), & 5) y &= \ln(x - 4x^2), & 6) y &= \log_{\frac{1}{3}}(4x^2 - 3x), \\
 7) y &= \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{3}{2-x^2}\right), & 8) y &= \log_2\left(\frac{2}{9x^2-1}\right), & 9) y &= \ln\left(\frac{1}{x^2-5}\right), \\
 10) y &= \log_{\frac{4}{5}}\left(\frac{x-2}{1-3x^2}\right), & 11) y &= \ln\left(\frac{1-3x}{x^2-1}\right), & 12) y &= \log_3\left(\frac{4x+3}{x^2+2}\right), \\
 13) y &= \ln\left(\frac{x^2-x}{x^2-16}\right), & 14) y &= \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2+3x}{2x^2+3}\right), & 15) y &= \log_4\left(\frac{3x-4x^2}{4-x^2}\right).
 \end{aligned}$$

**11.** Odrediti domen sledećih funkcija.

$$\begin{aligned}
 &1) y = \log_{\frac{4}{5}}(x^2 - 6x + 5), \quad 2) y = \log_{\frac{5}{3}}(x^2 + 8x + 16), \quad 3) y = \ln(2x - x^2 + 8), \\
 &4) y = \ln\left(\frac{3}{x^2 - 4x + 4}\right), \quad 5) y = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{5x - x^2 - 4}\right), \quad 6) y = \log_2\left(\frac{2}{x^2 + 4x - 5}\right), \\
 &7) y = \log_3\left(\frac{3x - 1}{x^2 + 6x + 8}\right), \quad 8) y = \ln\left(\frac{3 - 4x}{3x^2 - 5x - 2}\right), \quad 9) y = \log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{x + 3}{5x^2 + 7x + 2}\right), \\
 &10) y = \log_{\frac{3}{4}}\left(\frac{x^2 - 4}{4x^2 + 3x - 1}\right), \quad 11) y = \log_3\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 + x - 2}\right), \quad 12) y = \ln\left(\frac{3 - x^2}{3x^2 - 4x - 4}\right), \\
 &13) y = \ln\left(\frac{3x^2 + x}{x^2 + 5x + 4}\right), \quad 14) y = \log_{\frac{3}{4}}\left(\frac{x^2 - 4x}{8x^2 - 2x - 1}\right), \quad 15) y = \log_{\frac{5}{4}}\left(\frac{x - 2x^2}{2x^2 + 3x + 1}\right), \\
 &16) y = \log_{\frac{5}{3}}\left(\frac{x^2 - 5x - 6}{x^2 + 3x - 4}\right), \quad 17) y = \ln\left(\frac{x - x^2 + 2}{x^2 + 2x - 8}\right), \quad 18) y = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{3x^2 - 8x + 4}{3x - 2x^2 + 5}\right).
 \end{aligned}$$

**12.** Odrediti domen sledećih funkcija.

$$\begin{aligned}
 &1) y = \sqrt{\ln(3 + x)}, \quad 2) y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(5x - 3)}, \quad 3) y = \sqrt{\log_3(4 - 3x)}, \\
 &4) y = \sqrt{\log_2\left(\frac{2}{x - 2}\right)}, \quad 5) y = \sqrt{\ln\left(\frac{3}{x + 4}\right)}, \quad 6) y = \sqrt{\log_{\frac{3}{5}}\left(\frac{1}{3x - 2}\right)}, \\
 &7) y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2x}{x - 2}\right)}, \quad 8) y = \sqrt{\log_3\left(\frac{3x}{4 + 3x}\right)}, \quad 9) y = \sqrt{\ln\left(\frac{x}{4x + 3}\right)}, \\
 &10) y = \sqrt{\ln\left(\frac{3x}{x + 4}\right)}, \quad 11) y = \sqrt{\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{2x}{3x - 1}\right)}, \quad 12) y = \sqrt{\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{3x}{3 - 4x}\right)},
 \end{aligned}$$

$$13) y = \sqrt{\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{x-3}{x+1}\right)}, \quad 14) y = \sqrt{\log_{\frac{3}{5}}\left(\frac{2-x}{1-3x}\right)}, \quad 15) y = \sqrt{\ln\left(\frac{x+2}{3x-4}\right)}.$$

**13.** Odrediti domen sledećih funkcija.

$$1) y = \sqrt{\log_3(x^2 + 5)}, \quad 2) y = \sqrt{\ln(2x^2 - 1)}, \quad 3) y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(1 - x^2)},$$

$$4) y = \sqrt{\ln\left(\frac{3}{x^2 + 2}\right)}, \quad 5) y = \sqrt{\log_{\frac{3}{4}}\left(\frac{2}{3 - x^2}\right)}, \quad 6) y = \sqrt{\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{5}{3 - 2x^2}\right)},$$

$$7) y = \sqrt{\log_{\frac{3}{4}}\left(\frac{5x}{3x^2 + 2}\right)}, \quad 8) y = \sqrt{\log_{\frac{5}{4}}\left(\frac{x}{2x^2 - 1}\right)}, \quad 9) y = \sqrt{\ln\left(\frac{2x}{3 - x^2}\right)},$$

$$10) y = \sqrt{\ln\left(\frac{x + 4}{x^2 + 2}\right)}, \quad 11) y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x + 1}{3x^2 - 1}\right)}, \quad 12) y = \sqrt{\log_{\frac{5}{3}}\left(\frac{4 - 3x}{4 - 3x^2}\right)},$$

$$13) y = \sqrt{\log_2\left(\frac{x^2}{x^2 - 4}\right)}, \quad 14) y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x^2 - 3}{x^2}\right)}, \quad 15) y = \sqrt{\ln\left(\frac{x^2}{x^2 - 5}\right)},$$

$$16) y = \sqrt{\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{4x^2}{x^2 - 1}\right)}, \quad 17) y = \sqrt{\ln\left(\frac{3 + x^2}{4 - x^2}\right)}, \quad 18) y = \sqrt{\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x^2 - 1}{2x^2 - 3}\right)},$$

$$19) y = \sqrt{\ln\left(\frac{x^2 + 3x}{x^2 + 3}\right)}, \quad 20) y = \sqrt{\log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{2x^2 + x}{2x^2 - 3}\right)}, \quad 21) y = \sqrt{\log_{\frac{3}{5}}\left(\frac{x - x^2}{5 - x^2}\right)},$$

$$22) y = \sqrt{\ln\left(\frac{x^2 + 2x}{4x^2 - 1}\right)}, \quad 23) y = \sqrt{\log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{3x^2 - x}{x^2 + 1}\right)}, \quad 24) y = \sqrt{\log_{\frac{3}{5}}\left(\frac{3x - x^2}{x^2 - 5}\right)}.$$

**14.** Odrediti domen sledećih funkcija.

$$1) y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{x^2 + 4x + 6}\right)}, \quad 2) y = \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2x^2 - 5x + 3}\right)},$$

$$3) y = \sqrt{\log_2 \left( \frac{3}{x^2 - x - 3} \right)},$$

$$4) y = \sqrt{\ln \left( \frac{x+1}{x^2 + 3x - 4} \right)},$$

$$5) y = \sqrt{\log_{\frac{3}{2}} \left( \frac{x-1}{x^2 + 5x + 4} \right)},$$

$$6) y = \sqrt{\log_{\frac{1}{4}} \left( \frac{3-x}{x^2 - 6x + 4} \right)},$$

$$7) y = \sqrt{\log_{\frac{2}{5}} \left( \frac{x^2 + 2}{x^2 - 3x - 4} \right)},$$

$$8) y = \sqrt{\ln \left( \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 2x - 8} \right)},$$

$$9) y = \sqrt{\log_3 \left( \frac{1 - 3x^2}{x^2 - x - 2} \right)},$$

$$10) y = \sqrt{\log_4 \left( \frac{x^2 - x}{x^2 + 4x - 3} \right)},$$

$$11) y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}} \left( \frac{x^2 - 3x}{3 + x - 4x^2} \right)}$$

$$12) y = \sqrt{\ln \left( \frac{x - 2x^2}{x^2 + 2x - 1} \right)},$$

$$13) y = \sqrt{\ln \left( \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 3x + 2} \right)},$$

$$14) y = \sqrt{\log_2 \left( \frac{x - x^2 - 1}{2 + x - x^2} \right)}.$$

$$15) y = \sqrt{\log_{\frac{3}{4}} \left( \frac{x^2 + 3x - 4}{2x^2 + 3x - 2} \right)}$$

$$16) y = \sqrt{\log_{\frac{4}{3}} \left( \frac{x^2 - 2x - 3}{3x^2 - 2x - 1} \right)}.$$

**15.** Odrediti domen sledećih funkcija.

$$1) y = \sqrt{1 - \log_2(x+2)},$$

$$2) y = \sqrt{\log_{\frac{1}{4}}(3x-1) - 1},$$

$$3) y = \sqrt{3 + \log_{\frac{1}{2}}(3-5x)},$$

$$4) y = \sqrt{1 + \log_2 \left( \frac{1}{x+2} \right)},$$

$$5) y = \sqrt{2 - \log_{\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{x-3} \right)},$$

$$6) y = \sqrt{\log_{\frac{1}{4}} \left( \frac{1}{3-4x} \right) - 1},$$

$$7) y = \sqrt{1 + \log_3\left(\frac{x}{1+2x}\right)},$$

$$8) y = \sqrt{1 - \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{3-4x}\right)},$$

$$9) y = \sqrt{\log_4\left(\frac{2-x}{2+x}\right) - \frac{1}{2}},$$

$$10) y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2-x}{x+1}\right) + 1},$$

$$11) y = \sqrt{\frac{1}{2} - \log_{\frac{9}{4}}\left(\frac{2-3x}{x+1}\right)},$$

$$12) y = \sqrt{\log_{\frac{3}{4}}\left(\frac{1-3x}{3x-4}\right) - 1}.$$

**16.** Odrediti domen sledećih funkcija.

$$1) y = \sqrt{\log_3(5-x^2) - 1},$$

$$2) y = \sqrt{1 + \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 1)},$$

$$3) y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 5) + 2},$$

$$4) y = \sqrt{\log_2\left(\frac{3}{1-x^2}\right) - 1},$$

$$5) y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{x^2+1}\right) - 2},$$

$$6) y = \sqrt{1 - \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{3}{x^2+3}\right)},$$

$$7) y = \sqrt{1 + \log_4\left(\frac{x}{x^2+3}\right)},$$

$$8) y = \sqrt{1 - \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{x^2-3}\right)},$$

$$9) y = \sqrt{\log_9\left(\frac{1-4x}{x^2-2}\right) - \frac{1}{2}},$$

$$10) y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2-x}{x^2-2}\right) + 1},$$

$$11) y = \sqrt{\frac{1}{2} - \log_{\frac{9}{4}}\left(\frac{x^2-4}{x^2-3}\right)},$$

$$12) y = \sqrt{\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{3-x^2}{4+x^2}\right) - 1},$$

$$13) y = \sqrt{1 - \log_2\left(\frac{x^2+x}{2-x^2}\right)},$$

$$14) y = \sqrt{\log_{\frac{4}{9}}\left(\frac{x^2+x}{x^2+2}\right) - \frac{1}{2}},$$

$$15) y = \sqrt{1 - \log_{\frac{3}{4}}\left(\frac{x - x^2}{4 - 3x^2}\right)}, \quad 16) y = \sqrt{\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{x^2 + 2x}{2 + x - x^2}\right) - 1}.$$

**17.** Odrediti domen sledećih funkcija.

$$1) y = \sqrt{\log_4(x^2 + 3x) - 1}, \quad 2) y = \sqrt{1 + \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x)},$$

$$3) y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(5x - 2x^2) + 1}, \quad 4) y = \sqrt{1 - \log_2\left(\frac{6}{x^2 + 2x}\right)},$$

$$5) y = \sqrt{\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{x^2 + 3x}\right) - 1}, \quad 6) y = \sqrt{2 - \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x^2 - 3x}\right)},$$

$$7) y = \sqrt{\log_4\left(\frac{x + 3}{3x^2 - x}\right) - \frac{1}{2}}, \quad 8) y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1 - 2x}{x - 3x^2}\right) + 1},$$

$$9) y = \sqrt{\frac{1}{2} - \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x^2 + 1}{3x - x^2}\right)}, \quad 10) y = \sqrt{\log_{\frac{3}{4}}\left(\frac{2 - 3x^2}{3x - 4x^2}\right) - 1},$$

$$11) y = \sqrt{1 + \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - x}\right)}, \quad 12) y = \sqrt{\log_{\frac{3}{4}}\left(\frac{3x^2 + 2x}{2x^2 - x - 1}\right) - 1}.$$

**18.** Odrediti domen sledećih funkcija.

$$1) y = \sqrt{\log_2(x^2 + 4x + 5) - 1}, \quad 2) y = \sqrt{1 + \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 3x + 5)},$$

$$3) y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 4x + 8) + 2}, \quad 4) y = \sqrt{1 - \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{x^2 + 2x + 3}\right)},$$

$$5) y = \sqrt{\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{x^2 + 2x + 1}\right) + 1}, \quad 6) y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{3 + 4x - x^2}\right) - 1},$$

$$7) y = \sqrt{1 + \log_{\frac{4}{3}}\left(\frac{3x}{x^2 + 4x - 12}\right)}, \quad 8) y = \sqrt{1 - \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x}{3x^2 + 4x + 1}\right)},$$

$$9) y = \sqrt{\log_4\left(\frac{x-3}{x^2-x-6}\right) - \frac{1}{2}}, \quad 10) y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1-x}{x^2-3x-4}\right) - 1},$$

$$11) y = \sqrt{\frac{1}{2} - \log_{\frac{4}{9}}\left(\frac{2x^2+1}{3x^2+4x+1}\right)}, \quad 12) y = \sqrt{\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{4-x^2}{x^2+5x+6}\right) - 1},$$

$$13) y = \sqrt{\log_4\left(\frac{x^2+x}{x^2+2x-3}\right) + \frac{1}{2}}, \quad 14) y = \sqrt{1 - \log_{\frac{3}{4}}\left(\frac{x^2-3x}{x^2-4x+3}\right)},$$

$$15) y = \sqrt{\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x^2+2x-3}{x^2+4x-5}\right) - \frac{1}{2}}, \quad 16) y = \sqrt{1 - \log_{\frac{4}{3}}\left(\frac{x^2-4x-12}{x^2-3x+2}\right)}.$$

**19.** Odrediti domen sledećih funkcija.

$$1) y = e^{3x}, \quad 2) y = e^{\frac{x}{2}}, \quad 3) y = e^{\frac{3-4x}{5}}, \quad 4) y = e^{\frac{2}{x-3}}, \quad 5) y = e^{\frac{1}{3-4x}},$$

$$6) y = e^{\frac{x}{4x+3}}, \quad 7) y = e^{\frac{3-4x}{3x-1}}, \quad 8) y = e^{\frac{2}{x^2+2}}, \quad 9) y = e^{\frac{3}{9-x^2}}, \quad 10) y = e^{\frac{x}{1-4x^2}},$$

$$11) y = e^{\frac{x+1}{5x^2-4}}, \quad 12) y = e^{\frac{3-4x}{x^2+1}}, \quad 13) y = e^{\frac{x^2+3}{1-9x^2}}, \quad 14) y = e^{\frac{2-x^2}{3-x^2}},$$

$$15) y = e^{\frac{x^2-3x}{x^2-4}}, \quad 16) y = e^{\frac{2x-3x^2}{4x^2-1}}, \quad 17) y = e^{\frac{1}{3x^2+4x}}, \quad 18) y = e^{\frac{3}{x-2x^2}},$$

$$19) y = e^{\frac{x+3}{x^2-3x}}, \quad 20) y = e^{\frac{2+x}{3x-4x^2}}, \quad 21) y = e^{\frac{3+x^2}{2x^2+x}}, \quad 22) y = e^{\frac{3x^2-1}{x-3x^2}},$$

$$23) y = e^{\frac{3}{5x^2+x-4}}, \quad 24) y = e^{\frac{2+x}{x^2+6x+9}}, \quad 25) y = e^{\frac{x^2+1}{x-3x^2+2}}, \quad 26) y = e^{\frac{x^2-x}{3x^2-x-4}}.$$

**20.** Odrediti domen sledećih funkcija.

$$1) y = 1 + \frac{3}{e^x}, 2) y = \frac{4}{1 - e^x} + x, 3) y = \frac{3}{x + 2} - \frac{1}{1 - e^x}, 4) y = \frac{2}{e^{x-2} - 1} + \frac{3}{x},$$

$$5) y = 1 + \frac{x}{1 - e^{4x-3}}, 6) y = \frac{3}{e^{3x+2} - 1} + \frac{x}{x - 3}, 7) y = \frac{2}{x^2 - 4} - \frac{x}{1 - e^{x-2}},$$

$$8) y = \frac{4x}{e^{3x+4} - 1} + \frac{2}{1 - x^2}, 9) y = \frac{1}{x^2 - x} - \frac{3x}{e^{4x+3} - 1}, 10) y = \frac{3x}{e^{x-3} - 1} + \frac{2}{3x - x^2},$$

$$11) y = \frac{1}{e^x - 1} + \frac{x}{x^2 - 3x - 4}, 12) y = \frac{3}{5x^2 + 3x - 2} - \frac{x + 2}{1 - e^{2-3x}},$$

$$13) y = \frac{1}{e^{3x+1} - 1} - \frac{4x}{4 + 4x - 3x^2}, 14) y = \frac{x}{x - 4} + \frac{2}{1 - e^{x^2+3}} - \frac{2}{5 - 3x},$$

$$15) y = \frac{2x}{e^{x^2-3} - 1}, 16) y = \frac{1}{1 - e^{x^2-9}} + \frac{3}{x}, 17) y = \frac{2}{2x + 3} + \frac{3x}{e^{2-x^2} - 1},$$

$$18) y = \frac{2}{e^{1-9x^2} - 1} - \frac{3x}{1 - 4x}, 19) y = \frac{1}{1 - e^{x^2+3x}}, 20) y = \frac{1}{x} + \frac{x}{e^{2x^2+3x} - 1},$$

$$21) y = \frac{x+2}{1 - e^{x-x^2}} + \frac{2}{x+1}, 22) y = \frac{3}{x^2} + \frac{x}{e^{x-3x^2} - 1}, 23) y = \frac{x}{e^{3x-x^2} - 1} - \frac{4-x}{x^2+x},$$

$$24) y = \frac{x+1}{e^{x^2+3x-4} - 1}, 25) y = \frac{x}{1 - e^{2x^2-5x+2}} + \frac{1}{2}, 26) y = \frac{1}{x} + \frac{2}{e^{x-2x^2-1} - 1},$$

$$27) y = \frac{x}{e^{x^2+5x+4} - 1} - \frac{1}{2x + 1}, 28) y = \frac{x - 1}{1 - e^{x-2x^2+3}} + \frac{3x + 2}{x^2 + 4},$$

$$29) y = \frac{1}{x^2 + x} + \frac{1 - 2x}{1 - e^{3+5x-2x^2}}, 30) y = \frac{3}{e^{x^2+10x-11} - 1} + \frac{4x - 1}{4x^2 - 13x + 9}.$$

**21.** Odrediti domen sledećih funkcija.

$$1) y = \frac{1}{e^x} - \sqrt{x+2}, \quad 2) y = \sqrt{3-x} + \frac{2x}{e^x - 1}, \quad 3) y = \frac{x+3}{1-e^{x-3}} - \frac{x}{\sqrt{3x+1}},$$

$$4) y = \sqrt{x^2-1} - \frac{1}{e^{2-x}-1}, \quad 5) y = \frac{3+x}{1-e^{2x+1}} + \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}, \quad 6) y = \frac{1}{\sqrt{x^2}} - \frac{x-2}{e^{x+3}-1},$$

$$7) y = \frac{3}{1-e^x} + \frac{1+x}{\sqrt{x^2+2x}}, \quad 8) y = \sqrt{x+x^2} - \frac{2}{e^{1-x}-1}, \quad 9) y = \frac{1}{\sqrt{x^2-x}} + \frac{x}{1-e^{2x+1}},$$

$$10) y = \frac{x}{\sqrt{x^2+2x-3}} - \frac{2}{1-e^{3x+2}}, \quad 11) y = \frac{3x}{e^{x+1}-1} - \sqrt{2x-x^2+3},$$

$$12) y = \frac{2+x}{2-x} + \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+4}} - \frac{x}{1-e^{x-2}}, \quad 13) y = \frac{2}{x} + \frac{3}{e^{x^2-x}-1} - \sqrt{x},$$

$$14) y = \frac{x}{1-e^{1-3x^2}}, \quad 15) y = \frac{x+3}{e^{x^2-4}-1} + \sqrt{1-x}, \quad 16) y = \frac{1}{\sqrt{3x-1}} - \frac{2x}{1-e^{1-3x^2}},$$

$$17) y = \frac{1+x}{e^{2x^2-x}-1}, \quad 18) y = \sqrt{x} - \frac{x-2}{1-e^{x^2-2x}}, \quad 19) y = \frac{x}{\sqrt{1-3x}} + \frac{3}{e^{x-3x^2}-1},$$

$$20) y = \frac{1-x}{e^{2x^2+3x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x^2-2}} + \frac{x}{x-2}, \quad 21) y = \sqrt{1-x^2} + \frac{x+2}{1-e^{x^2+x}} - \frac{1}{x},$$

$$22) y = \frac{3}{x+2} + \sqrt{x^2-2x} - \frac{x}{1-e^{x^2-3x}}, \quad 23) y = \frac{x+2}{e^{x^2-x}-1} - \frac{1}{x} + \frac{3}{\sqrt{3x-x^2}},$$

$$24) y = \sqrt{x^2-3x+2} - \frac{x}{e^{x^2-3x}-1} + \frac{2}{1-4x}, \quad 25) y = \frac{3}{1-e^{3x-x^2}} + \frac{2x+1}{\sqrt{3x-x^2+4}},$$

$$26) y = \sqrt{3x+4} - \frac{x+2}{e^{2x^2+x-1}-1} + \frac{2}{4x+1}, \quad 27) y = \frac{1-x}{1-e^{2x-3x^2+5}} + \frac{1}{\sqrt{3-x}} - \frac{3}{x},$$

$$28) y = \frac{2}{1 - e^{x^2+5x+4}} - \frac{3+x}{\sqrt{x^2+x}} + \frac{x}{x-2}, \quad 29) y = \frac{1}{x} + \sqrt{3x-x^2} + \frac{x+1}{e^{2x-x^2+3}-1},$$

$$30) y = \frac{3}{\sqrt{x^2-8x-9}} + \sqrt{x} - \frac{x+1}{e^{x^2+5x+6}-1}, \quad 31) y = \frac{1}{1 - e^{6x-x^2+7}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-3x-4}}.$$

**22.** Odrediti domen sledećih funkcija.

$$1) y = \sqrt{e^x - 1}, \quad 2) y = \sqrt{1 - e^{x-2}} + \frac{2}{x+3}, \quad 3) y = \sqrt{e^{3x+4} - 1} + \frac{x}{1-x},$$

$$4) y = \sqrt{e^{3-x^2} - 1}, \quad 5) y = \sqrt{1 - e^{x^2-2}} + \frac{3}{2x+1}, \quad 6) y = \sqrt{1 - e^{1-5x^2}} + \frac{1+x}{1-2x},$$

$$7) y = \sqrt{1 - e^{x^2+x}}, \quad 8) y = \frac{3-4x}{3x-2} + \sqrt{e^{x^2+2x}-1}, \quad 9) y = \sqrt{1 - e^{x-3x^2}} - \frac{2}{3-4x},$$

$$10) y = \sqrt{e^{x^2+x-2}-1}, \quad 11) y = \sqrt{1 - e^{x^2+5x+6}} - \frac{x}{2x+5}, \quad 12) y = \frac{1}{x} + \sqrt{e^{x-x^2+2}-1},$$

$$13) y = \frac{2}{x^2} - \sqrt{1 - e^x}, \quad 14) y = \sqrt{e^{2x-3}-1} - \frac{x}{x^2-4}, \quad 15) y = \frac{1}{1-x^2} + \sqrt{1 - e^{1+3x}},$$

$$16) y = \sqrt{1 - e^{4-3x^2}} + \frac{3}{x^2}, \quad 17) y = \frac{1}{x^2-3} + \sqrt{e^{4-x^2}-1}, \quad 18) y = \sqrt{1 - e^{x^2-2}} - \frac{2}{3-x^2},$$

$$19) y = \frac{1}{x^2} + \sqrt{1 - e^{3x^2+x}}, \quad 20) y = \frac{x+3}{x^2+2} + \sqrt{e^{2x-x^2}-1}, \quad 21) y = \sqrt{1 - e^{x^2-3x}} - \frac{x+2}{5-x^2},$$

$$22) y = \sqrt{1 - e^{x^2-x-2}} + \frac{3-4x}{3x^2+1} - \frac{2}{1-x^2}, \quad 23) y = \frac{3x-4}{x^2-3} - \sqrt{e^{2x-3x^2+1}-1},$$

$$24) y = \sqrt{e^x-1} + \frac{2}{x^2+x}, \quad 25) y = \frac{x-4}{x^2+x} - \sqrt{1 - e^{x-3}}, \quad 26) y = \sqrt{e^{2-x}-1} + \frac{1+x}{3x-x^2},$$

$$27) y = \frac{3}{x^2 - x} - \sqrt{1 - e^{x^2+x}} + \frac{2+x}{2x-3x^2}, \quad 28) y = \sqrt{e^{x+5x^2} - 1} + \frac{x-1}{x+2x^2},$$

$$29) y = \frac{x+1}{x^2-2x} + \sqrt{1 - e^{x^2-4x-5}}, \quad 30) y = \frac{x+1}{x^2-x} - \sqrt{e^{3x-4x^2+1} - 1} + \frac{2}{3x-2x^2},$$

$$31) y = \sqrt{1 - e^{4x+1}} - \frac{x+1}{2x^2-x-1}, \quad 32) y = \frac{x-2}{x-x^2+6} + \sqrt{e^{4-x} - 1} - \frac{1}{x},$$

$$33) y = \frac{4-x}{2x^2-x-3} - \sqrt{e^{5x^2-1} - 1}, \quad 34) y = \sqrt{1 - e^{16-x^2}} + \frac{3}{x-4x^2+3},$$

$$35) y = \sqrt{1 - e^{x^2-2x}} - \frac{2x+1}{x^2-2x+1}, \quad 36) y = \frac{1}{x-3x^2+4} + \sqrt{e^{5x-3x^2} - 1},$$

$$37) y = \frac{x}{x^2+10x-11} + \sqrt{e^{x^2-4x+4} - 1}, \quad 38) y = \sqrt{1 - e^{3x-4x^2+1}} - \frac{3-x}{2x-x^2-1},$$

$$39) y = \sqrt{e^{x-1} - 1} - \frac{x+5}{x^3-5x^2+6x}, \quad 40) y = \frac{2x}{x^3-3x^2-x+3} + \sqrt{1 - e^{4x-5}}.$$

**23.** Odrediti domen sledećih funkcija.

$$1) y = \frac{1}{\sin x}, \quad 2) y = -\frac{2}{\cos x}, \quad 3) y = \frac{\sin x}{\sin x - 1}, \quad 4) y = \frac{\cos x}{1 + \cos x},$$

$$5) y = \frac{\cos x - 1}{\sin x + 1}, \quad 6) y = \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x}, \quad 7) y = \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}, \quad 8) y = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x},$$

$$9) y = \frac{2 + \cos x}{\sqrt{3} + 2 \sin x}, \quad 10) y = \frac{\sin x - 2}{2 \cos x - \sqrt{3}}, \quad 11) y = \frac{\cos x + 1}{\cos x - 2}, \quad 12) y = \frac{1 - \sin x}{2 + \sin x},$$

$$13) y = \frac{2+\sin x}{1-2\sin x}, 14) y = \frac{\cos x - 2}{2\cos x + 1}, 15) y = \frac{1}{\sin x + \cos x}, 16) y = \frac{2}{\sin x - \cos x},$$

$$17) y = \frac{\cos x - 1}{\sin 2x - 1}, 18) y = \frac{1 - \sin x}{1 + \cos 2x}, 19) y = \frac{\sin x + 2}{\cos 3x - 1}, 20) y = \frac{2 + \cos x}{1 + \sin 3x},$$

$$21) y = \frac{\cos 2x}{2\sin^2 x - 1}, 22) y = \frac{\sin 2x}{1 - 2\cos^2 x}, 23) y = \frac{\cos 3x}{4\sin^2 x - 3}, 24) y = \frac{\sin 3x}{3 - 4\cos^2 x},$$

$$25) y = -\frac{2}{\operatorname{tg} x}, \quad 26) y = \frac{3}{\operatorname{ctg} x}, \quad 27) y = \frac{\sin x + 1}{\operatorname{ctg} x + 1}, \quad 28) y = \frac{\cos x - 1}{\operatorname{tg} x - 1}.$$

## 5.2. Nule funkcije

**Primer 1.** Odrediti nule sledećih funkcija.

$$1) y = \frac{1-x^2}{x^2+x-6}, \quad 2) y = \frac{x+2}{\sqrt{3x+4}}, \quad 3) y = \frac{e^{x^2-3x-1}}{\sqrt{x^2+3x-4}}, \quad 4) y = \ln\left(\frac{x+1}{2-x}\right).$$

*Rešenje:*

$$1) y = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{x^2+x-6} = 0 \Leftrightarrow 1-x^2 = 0 \Leftrightarrow (1+x)(1-x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1.$$

Pošto je  $D_y = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + x - 6 \neq 0\} = \mathbf{R} \setminus \{-3, 2\}$ , pri čemu poslednja jednakost sledi iz

$$x^2 + x - 6 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x \neq -3 \wedge x \neq 2,$$

zaključujemo da  $x = -1 \in D_y$  i  $x = 1 \in D_y$ . Prema tome, data funkcija ima nule za  $x = -1$  i  $x = 1$  tj. data funkcija seče  $x$ -osu u tačkama  $A(-1, 0)$  i  $B(1, 0)$ .

$$2) y = 0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{\sqrt{3x+4}} = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

Pošto je  $D_y = \{x \in \mathbf{R} \mid 3x + 4 > 0\} = (-\frac{4}{3}, +\infty)$ , pri čemu poslednja jednakost sledi iz

$$3x + 4 > 0 \Leftrightarrow 3x > -4 \Leftrightarrow x > -\frac{4}{3},$$

zaključujemo da  $x = -2 \notin D_y$ . Prema tome, data funkcija nema nula tj. data funkcija ne seče  $x$ -osu.

$$\begin{aligned} 3) \ y=0 &\Leftrightarrow e^{x^2-3x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x^2-3x} = 1 \Leftrightarrow e^{x^2-3x} = e^0 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x-3) = 0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=3. \end{aligned}$$

Pošto je  $D_y = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 3x - 4 > 0\} = (-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$ , pri čemu poslednja jednakost sledi iz

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 1,$$

odnosno, imajući u vidu da je  $x^2 + 3x - 4 = (x+4)(x-1)$ , iz

$$-\infty \quad -4 \quad 1 \quad +\infty$$

|                  |   |   |   |
|------------------|---|---|---|
| $x + 4$          | - | + | + |
| $x - 1$          | - | - | + |
| $(x + 4)(x - 1)$ | + | - | + |

zaključujemo da  $x = 0 \notin D_y$  i  $x = 3 \in D_y$ . Prema tome, data funkcija ima nulu samo za  $x = 3$  tj. data funkcija seče  $x$ -osu u tački  $A(3, 0)$ .

$$4) \ y=0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+1}{2-x}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+1}{2-x}\right) = \ln 1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{2-x} = 1 \Leftrightarrow \frac{x+1}{2-x} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-1}{2-x} = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Pošto je  $D_y = \{x \in \mathbf{R} \mid \frac{x+1}{2-x} > 0\} = (-1, 2)$ , pri čemu poslednja jednakost sledi iz

$$-\infty \quad -1 \quad 2 \quad +\infty$$

|                   |   |   |   |
|-------------------|---|---|---|
| $x + 1$           | - | + | + |
| $2 - x$           | + | + | - |
| $\frac{x+1}{2-x}$ | - | + | - |

zaključujemo da  $x = \frac{1}{2} \in D_y$ . Prema tome, data funkcija ima nulu za  $x = \frac{1}{2}$  tj. data funkcija seče  $x$ -osu u tački  $A(\frac{1}{2}, 0)$ . ♦

**Zadaci za vežbu:**

1. Odrediti (ako postoje) nule funkcija iz zadatka **1** (5.1.).

2. Odrediti (ako postoje) nule funkcija iz zadatka **2** (5.1.).

3. Odrediti (ako postoje) nule sledećih funkcija.

$$1) y = \frac{2}{3x+1}, \quad 2) y = \frac{x+2}{x}, \quad 3) y = \frac{4-3x}{x-2}, \quad 4) y = \frac{3+4x}{x+3}, \quad 5) y = 1 - \frac{1}{x+2},$$

$$6) y = 3 + \frac{5}{x-2}, \quad 7) y = \frac{x^2-9}{x-2}, \quad 8) y = \frac{x^2+2}{3x+2}, \quad 9) y = \frac{x^2-4}{x} - 3,$$

$$10) y = 1 - \frac{x^2}{x+2}, \quad 11) y = \frac{x^2+x}{x+3}, \quad 12) y = \frac{2x-x^2}{3x+2}, \quad 13) y = \frac{3x^2-2x}{1-x} + 2,$$

$$14) y = 1 - \frac{3x^2-4x}{x-2}, \quad 15) y = \frac{x^2+2x+1}{x-3}, \quad 16) y = \frac{x-x^2+2}{1-2x}, \quad 17) y = \frac{x^2+x+1}{x+3} + 1,$$

$$18) y = \frac{x^2+3x-4}{2-3x} + 1, \quad 19) y = \frac{3}{x^2-3}, \quad 20) y = \frac{2+x}{5-x^2}, \quad 21) y = \frac{4-3x}{2x^2+1},$$

$$22) y = 2 - \frac{3x^2+1}{3x^2+2}, \quad 23) y = \frac{x^2+5}{4-x^2} - 1, \quad 24) y = 1 - \frac{2}{x^2-x}, \quad 25) y = \frac{2-3x}{3x-x^2},$$

$$26) y = \frac{3+x^2}{x^2-4x}, \quad 27) y = 3 + \frac{1-2x^2}{x^2+x} - \frac{1}{x}, \quad 28) y = \frac{2}{x^2+4x+2} - 1,$$

$$29) y = \frac{1}{x} - \frac{x+3}{x^2+3x-4}, \quad 30) y = \frac{3x^2-1}{x^2+x-6}, \quad 31) y = 1 - \frac{3+x^2}{x^2+4x+4},$$

$$32) y = \frac{2x^2+x}{3x^2-x-4}, \quad 33) y = \frac{x-4x^2}{x-2x^2+3} - 2, \quad 34) y = 2 - \frac{x^2+7x+4}{x^2+6x+5}.$$

4. Odrediti (ako postoje) nule funkcija iz zadatka 4 (5.1.).

5. Odrediti (ako postoje) nule funkcija iz zadatka 5 (5.1.).

6. Odrediti (ako postoje) nule sledećih funkcija.

$$1) y = \sqrt{\frac{1}{3} - 2x}, \quad 2) y = \sqrt{\frac{x}{x+1}}, \quad 3) y = \sqrt{\frac{1-2x}{x+3}}, \quad 4) y = \sqrt{\frac{x-3}{x+2}} + 2,$$

$$5) y = \frac{3x+2}{\sqrt{x+3}}, \quad 6) y = \frac{\sqrt{2x-1}}{x}, \quad 7) y = \sqrt{3 - \frac{x^2+3}{x+1}}, \quad 8) y = \frac{x^2-3}{\sqrt{x+1}},$$

$$9) y = \frac{\sqrt{2+3x}}{2x^2-1}, \quad 10) y = \frac{x^2-2x}{\sqrt{x-1}}, \quad 11) y = \frac{\sqrt{2x+3}}{x-3x^2}, \quad 12) y = \sqrt{\frac{x^2-x}{2-x}} - 1,$$

$$13) y = \frac{\sqrt{3x-1}}{x^2-2x-3}, \quad 14) y = \frac{6+5x-x^2}{\sqrt{4x+3}}, \quad 15) y = \sqrt{1 - \frac{x+3x^2-1}{x+2}},$$

$$16) y = \sqrt{\frac{1}{2} - x^2}, \quad 17) y = \frac{3-2x}{\sqrt{3x^2-1}}, \quad 18) y = \frac{\sqrt{3-x^2}}{2x+1}, \quad 19) y = \sqrt{1 - \frac{7-5x}{3-x^2}},$$

$$20) y = \frac{2-x^2}{\sqrt{3x^2-1}}, \quad 21) y = \frac{\sqrt{3+x^2}}{x^2+2}, \quad 22) y = \sqrt{\frac{x^2+3}{2x^2-1}} - 1, \quad 23) y = \frac{\sqrt{x^2+3}}{x^2+2x},$$

$$24) y = \frac{3x-x^2}{\sqrt{2-x^2}}, \quad 25) y = \frac{\sqrt{1-3x^2}}{x^2-2x+1}, \quad 26) y = \frac{3x-x^2+4}{\sqrt{x^2-2}}, \quad 27) y = \sqrt{1 - \frac{x^2-x+4}{x^2+1}},$$

$$28) y = \frac{\sqrt{x^2-x}}{x+2}, \quad 29) y = \frac{3-2x}{\sqrt{x-x^2}}, \quad 30) y = \sqrt{\frac{1-3x}{x+5x^2}} - 1, \quad 31) y = \frac{x^2-2}{\sqrt{3x-x^2}},$$

$$\begin{aligned}
 32) y &= \frac{\sqrt{x^2+x}}{x^2+3}, \quad 33) y = \frac{\sqrt{x-3x^2}}{x^2-x-2}, \quad 34) y = \frac{4x-x^2-3}{\sqrt{x^2-2x}}, \quad 35) y = \sqrt{\frac{x-x^2+1}{x^2-x}} + 1, \\
 36) y &= \frac{3+4x}{\sqrt{x^2-5x-6}}, \quad 37) y = \frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{3+2x}, \quad 38) y = \sqrt{2 + \frac{3x}{x^2-2x-3}}, \\
 39) y &= \frac{\sqrt{x^2+4x-5}}{x^2+2}, \quad 40) y = \frac{3-x^2}{\sqrt{x^2+x-2}}, \quad 41) y = \sqrt{\frac{x^2-5}{4x-x^2+5}} + 1, \\
 42) y &= \frac{x^2-2x}{\sqrt{2x^2+x-1}}, \quad 43) y = \frac{\sqrt{4x^2+4x+1}}{x-3x^2}, \quad 44) y = \sqrt{1 - \frac{x^2+5x}{3x^2+5x-2}}, \\
 45) y &= \frac{x^2-3x+3}{\sqrt{x^2-8x+16}}, \quad 46) y = \frac{\sqrt{5-x-4x^2}}{x^2+3x+4}, \quad 47) y = \sqrt{\frac{x^2-4x-5}{x^2-3x-4}} - 1.
 \end{aligned}$$

7. Odrediti (ako postoje) nule funkcija iz zadatka **9** (5.1.).
8. Odrediti (ako postoje) nule funkcija iz zadatka **10** (5.1.).
9. Odrediti (ako postoje) nule funkcija iz zadatka **11** (5.1.).
10. Odrediti (ako postoje) nule funkcija iz zadatka **12** (5.1.).
11. Odrediti (ako postoje) nule funkcija iz zadatka **13** (5.1.).
12. Odrediti (ako postoje) nule funkcija iz zadatka **14** (5.1.).
13. Odrediti (ako postoje) nule funkcija iz zadatka **15** (5.1.).
14. Odrediti (ako postoje) nule funkcija iz zadatka **16** (5.1.).
15. Odrediti (ako postoje) nule funkcija iz zadatka **17** (5.1.).
16. Odrediti (ako postoje) nule funkcija iz zadatka **18** (5.1.).
17. Odrediti (ako postoje) nule sledećih funkcija.

$$1) y = \frac{\ln(2-x)}{x}, \quad 2) y = \frac{\log_{\frac{1}{2}}(3x-2)}{1-x}, \quad 3) y = \frac{4+5x}{\log_3(2-3x)}, \quad 4) y = \frac{4x+3}{\ln(x+1)},$$

$$\begin{aligned}
 5) y &= \frac{\log_{\frac{5}{4}}(2-x)}{x^2}, \quad 6) y = \frac{\ln(3x-2)}{2-x^2}, \quad 7) y = \frac{x^2+3}{\log_{\frac{3}{4}}(1+5x)}, \quad 8) y = \frac{3x^2-x}{\ln(x-3)}, \\
 9) y &= \frac{\log_{\frac{1}{2}}(2-x)-2}{x^2+4x+3}, \quad 10) y = \frac{x^2+x+1}{\ln(4x+3)}, \quad 11) y = \frac{1+\log_{\frac{1}{3}}(4x-1)}{2x-x^2+3}, \\
 12) y &= \frac{1-\log_{\frac{3}{2}}(3-x^2)}{x}, \quad 13) y = \frac{4-x^2}{\ln(3x^2-1)}, \quad 14) y = \frac{\log_{\frac{1}{3}}(3x^2+2)+1}{3x^2+2x}, \\
 15) y &= \frac{1+2x^2}{\ln(x^2-2x+1)}, \quad 16) y = \frac{1-\log_3(4x-x^2)}{x-4}, \quad 17) y = \frac{x^2}{\ln(3x^2+x)}, \\
 18) y &= \frac{\log_{\frac{1}{4}}(x^2-3x)+1}{3x^2-x}, \quad 19) y = \frac{2x^2-5}{\ln(x^2-3x-4)}, \quad 20) y = \frac{2+\log_{\frac{1}{4}}(x^2+6x+9)}{3-x}, \\
 21) y &= \frac{x^2+2}{\ln(3x^2+x-2)}, \quad 22) y = \frac{\log_{\frac{4}{3}}(x^2-4x+4)}{3x-x^2}, \quad 23) y = \frac{4x-x^2-4}{\log_{\frac{3}{4}}(5x-x^2+6)}.
 \end{aligned}$$

18. Odrediti (ako postoje) nule sledećih funkcija.

$$\begin{aligned}
 1) y &= \frac{\ln(1-3x)}{\sqrt{x+3}}, \quad 2) y = \frac{\log_{\frac{2}{3}}(3x+4)}{\sqrt{x+2}}, \quad 3) y = \frac{3-2x}{\sqrt{\log_3(2x-5)}}, \\
 4) y &= \frac{3-x}{\sqrt{\ln(x+1)}}, \quad 5) y = \frac{\log_{\frac{3}{5}}(2+3x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad 6) y = \frac{\ln(2x-3)}{\sqrt{x^2-3}}, \\
 7) y &= \frac{2+x^2}{\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(1-2x)}}, \quad 8) y = \frac{\log_{\frac{4}{3}}(x+5)}{\sqrt{x^2+3x}}, \quad 9) y = \frac{4x^2-x}{\sqrt{\ln(x+1)}}, \\
 10) y &= \frac{\log_{\frac{1}{4}}(3-x)+1}{\sqrt{x^2+3x+3}}, \quad 11) y = \frac{3x-x^2-4}{\sqrt{\ln(2x+1)}}, \quad 12) y = \frac{\log_4(3x+2)-\frac{1}{2}}{\sqrt{4x^2-x-3}}, \\
 13) y &= \frac{1-\log_{\frac{3}{2}}(1+x^2)}{\sqrt{x+2}}, \quad 14) y = \frac{1-x^2}{\sqrt{\ln(3x^2-1)}}, \quad 15) y = \frac{\log_{\frac{1}{3}}(x^2+4x)+1}{\sqrt{x^2+2}},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 16) y &= \frac{1+3x^2}{\sqrt{\ln(x^2-4x+4)}}, \quad 17) y = \frac{\log_2(x^2+3x)-2}{\sqrt{x}}, \quad 18) y = \frac{x^2-2}{\sqrt{\ln(2x^2-x)}}, \\
 19) y &= \frac{\log_{\frac{1}{3}}(4x-x^2)+1}{\sqrt{x^2-2x}}, \quad 20) y = \frac{x^2-2}{\sqrt{\ln(x^2-2x-3)}}, \quad 21) y = \frac{1+\log_{\frac{1}{4}}(x^2+2x+5)}{\sqrt{2-x}}, \\
 22) y &= \frac{x^2-5}{\sqrt{\ln(x^2+4x-4)}}, \quad 23) y = \frac{\log_2(x^2-6x+9)}{\sqrt{5x-x^2}}, \quad 24) y = \frac{3x-2x^2+5}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x^2-3x-4)}}.
 \end{aligned}$$

**19.** Odrediti (ako postoje) nule sledećih funkcija.

$$\begin{aligned}
 1) y &= \frac{1-e^{2-x}}{\sqrt{x+1}}, & 2) y &= \frac{5-2x}{\sqrt{e^{x-2}-1}}, & 3) y &= \frac{e^{9-x^2}-1}{\sqrt{3x+2}}, \\
 4) y &= \frac{2+3x}{\sqrt{1-e^{x^2-3}}}, & 5) y &= \frac{1-e^{x^2+3x}}{\sqrt{x+2}}, & 6) y &= \frac{2-5x}{\sqrt{1-e^{x^2-x}}}, \\
 7) y &= \frac{e^{2x^2+x-1}-1}{\sqrt{2x+1}}, & 8) y &= \frac{4+3x}{\sqrt{e^{x^2+3x+3}-1}}, & 9) y &= \frac{e^{3-x^2}-1}{\sqrt{x^2-2}}, \\
 10) y &= \frac{1+3x^2}{\sqrt{1-e^{x^2-2}}}, & 11) y &= \frac{1-e^{x^2-3x}}{\sqrt{x^2+2}}, & 12) y &= \frac{1-4x^2}{\sqrt{e^{x^2-2x}-1}}, \\
 13) y &= \frac{1-e^{x^2-4x+4}}{\sqrt{9-x^2}}, & 14) y &= \frac{1-2x^2}{\sqrt{e^{3-x-2x^2}-1}}, & 15) y &= \frac{1-e^{3x^2-1}}{\sqrt{x^2-2x}}, \\
 16) y &= \frac{4x^2-3x}{\sqrt{e^{2-x^2}-1}}, & 17) y &= \frac{e^{2x^2+5x}-1}{\sqrt{x^2-x}}, & 18) y &= \frac{x^2+3x}{\sqrt{1-e^{x^2+4x}}}, \\
 19) y &= \frac{1-e^{x^2+x-2}}{\sqrt{x^2-x}}, & 20) y &= \frac{4x^2-5x}{\sqrt{e^{2x-x^2+3}-1}}, & 21) y &= \frac{1-e^{2+3x}}{\sqrt{x^2+3x+3}}, \\
 22) y &= \frac{x^2+4x+4}{\sqrt{e^{x+3}-1}}, & 23) y &= \frac{e^{x^2-x}-1}{\sqrt{5x^2-x-4}}, & 24) y &= \frac{2x-x^2+3}{\sqrt{1-e^{2x-x^2}}}.
 \end{aligned}$$

**20.** Odrediti (ako postoje) nule sledećih funkcija.

$$\begin{aligned}
 1) y &= \frac{e^{2x-1}-1}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(1-x)}}, & 2) y &= \frac{\log_{\frac{2}{3}}(4+3x)}{\sqrt{1-e^{x-2}}}, & 3) y &= \frac{e^{2-x^2}-1}{\sqrt{\ln(2x+1)}}, \\
 4) y &= \frac{\log_{\frac{1}{5}}(1-4x)}{\sqrt{1-e^{2-x^2}}}, & 5) y &= \frac{e^{x^2-3x}-1}{\sqrt{\ln(x-1)}}, & 6) y &= \frac{\log_{\frac{4}{3}}(2+3x)}{\sqrt{1-e^{x^2+x}}}, \\
 7) y &= \frac{e^{x^2-2x-3}-1}{\sqrt{\log_{\frac{4}{3}}(2x-3)}}, & 8) y &= \frac{\log_{\frac{2}{3}}(5+4x)}{\sqrt{e^{x^2+2x+3}-1}}, & 9) y &= \frac{1-e^{3+x^2}}{\sqrt{\ln(x^2+1)}}, \\
 10) y &= \frac{\log_{\frac{1}{2}}(3-x^2)}{\sqrt{e^{x^2-1}-1}}, & 11) y &= \frac{1-e^{x^2-3x}}{\sqrt{\ln(x^2-2)}}, & 12) y &= \frac{\log_{\frac{5}{3}}(2-x^2)}{\sqrt{e^{2x-x^2}-1}}, \\
 13) y &= \frac{1-e^{x^2-2x+1}}{\sqrt{\ln(4-x^2)}}, & 14) y &= \frac{\log_{\frac{4}{5}}(1-3x^2)}{\sqrt{e^{1+2x-3x^2}-1}}, & 15) y &= \frac{1-e^{3x^2-1}}{\sqrt{\log_2(2x^2+x)}}, \\
 16) y &= \frac{\log_{\frac{2}{3}}(x^2-3x)}{\sqrt{1-e^{4-x^2}}}, & 17) y &= \frac{e^{x^2+2x}-1}{\sqrt{\ln(x^2+x)}}, & 18) y &= \frac{\log_3(x^2+4x)}{\sqrt{e^{x^2+3x}-1}}, \\
 19) y &= \frac{e^{x^2-2x-3}-1}{\sqrt{\log_{\frac{4}{3}}(x^2-2x)}}, & 20) y &= \frac{\log_{\frac{1}{3}}(2x^2+x)}{\sqrt{1-e^{x-x^2+2}}}, & 21) y &= \frac{1-e^{4x+1}}{\sqrt{\ln(x^2+3x+2)}}, \\
 22) y &= \frac{\log_{\frac{4}{5}}(x^2+2x+1)}{\sqrt{e^{x+1}-1}}, & 23) y &= \frac{e^{x^2+4x}-1}{\sqrt{\ln(x^2-x-12)}}, & 24) y &= \frac{\log_{\frac{4}{3}}(2x-x^2+3)}{\sqrt{1-e^{4x-x^2}}}.
 \end{aligned}$$

**21.** Odrediti (ako postoje) nule sledećih funkcija.

$$1) y = \frac{3}{\sin x}, \quad 2) y = \frac{2}{\cos x + 1}, \quad 3) y = \frac{\cos x + 1}{\sin x}, \quad 4) y = \frac{\sin x - 1}{\cos x},$$

$$\begin{aligned}
 &5) y = \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}, \quad 6) y = \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}, \quad 7) y = \frac{2 - \sin x}{1 - \cos x}, \quad 8) y = \frac{\cos x + 2}{1 + \sin x}, \\
 &9) y = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x + 1}, \quad 10) y = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x - 1}, \quad 11) y = \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \sin x}, \quad 12) y = \frac{\sin^2 x - 1}{1 - \cos x}, \\
 &13) y = \frac{2 \sin x - 1}{\cos x - 1}, \quad 14) y = \frac{1 + 2 \cos x}{\sin x - 1}, \quad 15) y = \frac{\sqrt{3} + 2 \sin x}{1 + \cos x}, \quad 16) y = \frac{2 \cos x - \sqrt{3}}{1 + \sin x}, \\
 &17) y = \frac{4 \sin^2 x - 3}{1 + \cos x}, \quad 18) y = \frac{3 - 4 \cos^2 x}{1 + \sin x}, \quad 19) y = \frac{1 - 2 \cos^2 x}{1 - \sin x}, \quad 20) y = \frac{2 \sin^2 x - 1}{\cos x - 1}, \\
 &21) y = \frac{\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x - 1}, \quad 22) y = \frac{1 - \operatorname{ctg} x}{1 + \operatorname{ctg} x}, \quad 23) y = \frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x, \quad 24) y = \operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin x}.
 \end{aligned}$$

### 5.3. Znak funkcije

**Primer 1.** Odrediti znak sledećih funkcija.

$$1) y = \frac{x^2 - 1}{9 - x^2}, \quad 2) y = \frac{x}{\sqrt{5 - 4x}}, \quad 3) y = \frac{x + 1}{1 - e^{2x + 3}}, \quad 4) y = \log_3 \left( \frac{2 + x}{2 - x} \right).$$

*Rešenje:*

1)  $D_y = \{x \in \mathbf{R} \mid 9 - x^2 \neq 0\} = \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$ , pri čemu poslednja jednakost sledi iz

$$9 - x^2 \neq 0 \Leftrightarrow (3 + x)(3 - x) \neq 0 \Leftrightarrow 3 + x \neq 0 \wedge 3 - x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3 \wedge x \neq 3.$$

Iz

|         |           |      |      |     |     |           |
|---------|-----------|------|------|-----|-----|-----------|
|         | $-\infty$ | $-3$ | $-1$ | $1$ | $3$ | $+\infty$ |
| $x + 1$ | $-$       | $-$  | $+$  | $+$ | $+$ |           |
| $x - 1$ | $-$       | $-$  | $-$  | $+$ | $+$ |           |
| $3 + x$ | $-$       | $+$  | $+$  | $+$ | $+$ |           |
| $3 - x$ | $+$       | $+$  | $+$  | $+$ | $-$ |           |
| $y$     | $-$       | $+$  | $-$  | $+$ | $-$ |           |

sledi:

$$y > 0 \text{ za } x \in (-3, -1) \cup (1, 3),$$

$$y < 0 \text{ za } x \in (-\infty, -3) \cup (-1, 1) \cup (3, +\infty).$$

2)  $D_y = \{x \in \mathbf{R} \mid 5 - 4x > 0\} = (-\infty, \frac{5}{4})$ , pri čemu poslednja enakost sledi iz

$$5 - 4x > 0 \Leftrightarrow -4x > -5 \Leftrightarrow x < \frac{5}{4}.$$

Iz

|                 |           |     |               |
|-----------------|-----------|-----|---------------|
|                 | $-\infty$ | $0$ | $\frac{5}{4}$ |
| $x$             | $-$       | $-$ | $+$           |
| $\sqrt{5 - 4x}$ | $+$       | $+$ | $+$           |
| $y$             | $-$       | $-$ | $+$           |

sledi:

$$y > 0 \text{ za } x \in (0, \frac{5}{4}),$$

$$y < 0 \text{ za } x \in (-\infty, 0).$$

3)  $D_y = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 - e^{2x+3} \neq 0\} = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$ , pri čemu poslednja enakost sledi iz

$$1 - e^{2x+3} \neq 0 \Leftrightarrow e^{2x+3} \neq 1 \Leftrightarrow e^{2x+3} \neq e^0 \Leftrightarrow 2x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{3}{2}.$$

Iz

|                |           |                |     |           |
|----------------|-----------|----------------|-----|-----------|
|                | $-\infty$ | $-\frac{3}{2}$ | $1$ | $+\infty$ |
| $x - 1$        | $-$       | $-$            | $+$ |           |
| $1 - e^{2x+3}$ | $+$       | $-$            | $-$ |           |
| $y$            | $-$       | $+$            | $-$ |           |

sledi:

$$y > 0 \text{ za } x \in (-\frac{3}{2}, 1),$$

$$y < 0 \text{ za } x \in (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (1, +\infty).$$

4)  $D_y = \{x \in \mathbf{R} \mid \frac{2+x}{2-x} > 0\} = (-2, 2)$ , pri čemu poslednja jednakost sledi iz

$$\begin{array}{cccc}
 & -\infty & -2 & 2 & +\infty \\
 \hline
 2+x & - & + & + \\
 2-x & + & + & - \\
 \hline
 \frac{2+x}{2-x} & - & + & - \\
 \hline
 \end{array} .$$

Iz

$$\begin{aligned}
 y > 0 &\Leftrightarrow \log_3\left(\frac{2+x}{2-x}\right) > 0 \Leftrightarrow \log_3\left(\frac{2+x}{2-x}\right) > \log_3 1 \Leftrightarrow \frac{2+x}{2-x} > 1 \Leftrightarrow \frac{2+x}{2-x} - 1 > 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{2x}{2-x} > 0
 \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{array}{ccc}
 & -2 & 0 & 2 \\
 \hline
 2x & - & + \\
 2-x & + & + \\
 \hline
 \frac{2x}{2-x} & - & + \\
 \hline
 \end{array}$$

sledi:

$$\begin{aligned}
 y &> 0 \quad \text{za } x \in (0, 2), \\
 y &< 0 \quad \text{za } x \in (-2, 0). \blacklozenge
 \end{aligned}$$

### ***Zadaci za vežbu:***

1. Ispitati znak sledećih funkcija.

$$1) y = \frac{4}{x}, \quad 2) y = \frac{1}{x-1}, \quad 3) y = \frac{3}{x+2}, \quad 4) y = \frac{2}{4-x}, \quad 5) y = \frac{3-x}{x},$$

$$6) y = \frac{2+x}{x}, \quad 7) y = \frac{1+x}{x+3}, \quad 8) y = \frac{2-x}{x-3}, \quad 9) y = \frac{x+2}{2-x}, \quad 10) y = \frac{x-3}{2+x},$$

$$\begin{aligned}
 11) y &= \frac{2}{(x+2)(x+3)}, \quad 12) y = -\frac{1}{(x-2)(x+2)}, \quad 13) y = \frac{3}{(x-5)(x-1)}, \\
 14) y &= \frac{1}{(3+x)(4+x)}, \quad 15) y = -\frac{4}{(4+x)(2-x)}, \quad 16) y = \frac{3}{(3-x)(5-x)}, \\
 17) y &= \frac{x}{(x+1)(x+2)}, \quad 18) y = \frac{x-2}{(x-4)(x+3)}, \quad 19) y = \frac{1-x}{(x-3)(x-4)}, \\
 20) y &= \frac{(x+2)(x+3)}{(x+4)(x+5)}, \quad 21) y = \frac{(x+3)(x-2)}{(x-4)(x+2)}, \quad 22) y = \frac{(4-x)(5-x)}{(x-2)(x-1)}, \\
 23) y &= \frac{(4+3x)(2-x)}{(x+4)(x-3)}, \quad 24) y = \frac{(1+x)(1+3x)}{(x+2)(3x+2)}, \quad 25) y = \frac{(2x-3)(3x-4)}{(5x-2)(x-1)}.
 \end{aligned}$$

**2.** Ispitati znak sledećih funkcija.

$$\begin{aligned}
 1) y &= \frac{2}{x} + 3, \quad 2) y = \frac{3}{x} - 2, \quad 3) y = 1 - \frac{4}{x}, \quad 4) y = -2 - \frac{5}{x}, \\
 5) y &= \frac{1}{x+2} - 3, \quad 6) y = \frac{2}{4-x} + 1, \quad 7) y = 1 - \frac{3}{x-4}, \quad 8) y = -2 - \frac{4}{2+x}, \\
 9) y &= \frac{x}{4x-3} - 1, \quad 10) y = \frac{3x}{2-x} + 1, \quad 11) y = 2 - \frac{x}{x+3}, \quad 12) y = -1 - \frac{2x}{2+3x}, \\
 13) y &= \frac{3x+2}{3x-4} + 1, \quad 14) y = \frac{2+x}{3-x} - 2, \quad 15) y = 1 - \frac{x-2}{x+2}, \quad 16) y = -1 - \frac{3-4x}{3+4x}, \\
 17) y &= \frac{3}{3x-4} - \frac{1}{x}, \quad 18) y = \frac{2}{2-x} + \frac{3}{x}, \quad 19) y = \frac{3}{x} - \frac{2}{x+2}, \quad 20) y = -\frac{2}{x} - \frac{3}{1+3x}, \\
 21) y &= \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}, \quad 22) y = \frac{2}{1-3x} + \frac{3}{x+3}, \quad 23) y = \frac{3}{x-2} - \frac{2}{2x+1}.
 \end{aligned}$$

3. Ispitati znak sledećih funkcija.

$$1) y = \frac{1}{x^2}, \quad 2) y = -\frac{3}{x^2}, \quad 3) y = \frac{2}{x^2 - 4}, \quad 4) y = \frac{3}{1 - x^2}, \quad 5) y = \frac{1 + x}{x^2},$$

$$6) y = \frac{2 - x}{x_2}, \quad 7) y = \frac{x}{x^2 + 2}, \quad 8) y = \frac{3 - x}{x^2 - 2}, \quad 9) y = \frac{x + 2}{3 - x^2}, \quad 10) y = \frac{x - 3}{1 + x^2},$$

$$11) y = \frac{2 + x^2}{3x^2 - 1}, \quad 12) y = \frac{1 - 3x^2}{x^2 + 3}, \quad 13) y = \frac{x^2 - 3}{5 - x^2}, \quad 14) y = \frac{1 - 5x^2}{3x^2 - 1},$$

$$15) y = \frac{1}{(3 - x)(x^2 - 3)}, \quad 16) y = -\frac{2}{(x + 3)(1 + x^2)}, \quad 17) y = \frac{3}{(x + 1)(2 - x^2)},$$

$$18) y = -\frac{1 - x}{(x - 2)(x^2 - 3)}, \quad 19) y = \frac{3 + x}{(x - 1)(2 + x^2)}, \quad 20) y = \frac{x + 2}{(3 + x)(1 - x^2)},$$

$$21) y = \frac{(x - 2)(3 - x)}{x^2 - 1}, \quad 22) y = \frac{(x - 1)(1 + 3)}{2 + x^2}, \quad 23) y = -\frac{(x + 1)(2 + x)}{3 - x^2},$$

$$24) y = -\frac{3}{(1 - x^2)(x^2 - 4)}, \quad 25) y = \frac{2}{(x^2 + 3)(1 + x^2)}, \quad 26) y = \frac{1}{(x^2 + 2)(5 - x^2)},$$

$$27) y = \frac{x}{(1 - x^2)(x^2 - 3)}, \quad 28) y = \frac{2 - x}{(x^2 + 3)(1 + x^2)}, \quad 29) y = \frac{x + 3}{(3x^2 + 2)(5 - x^2)},$$

$$30) y = \frac{(x + 2)(x^2 - 3)}{1 - x^2}, \quad 31) y = \frac{x(x^2 + 3)}{2 - x^2}, \quad 32) y = \frac{(x - 5)(x^2 + 3)}{x^2 - 2}.$$

4. Ispitati znak sledećih funkcija.

$$1) y = 3 - \frac{1}{x^2}, \quad 2) y = \frac{3}{x^2 + 1} - 2, \quad 3) y = 1 - \frac{3}{2x^2 + 1}, \quad 4) y = \frac{4}{x^2 - 3} + 2,$$

$$5) y = 1 + \frac{x - 2}{x^2}, \quad 6) y = \frac{x}{x^2 - 2} - 1, \quad 7) y = 1 + \frac{x + 1}{x^2 - 3}, \quad 8) y = \frac{x}{x^2 + 3} + 1,$$

$$\begin{aligned}
 9) y &= \frac{x^2+2}{x^2-4}, & 10) y &= \frac{x^2+5}{x^2-1}+1, & 11) y &= 2-\frac{3x^2+1}{x^2+1}, & 12) y &= 1+\frac{x^2-3}{x^2+4}, \\
 13) y &= 1+\frac{x^2+x}{3-x^2}, & 14) y &= 3-\frac{x^2+2x}{x^2+1}, & 15) y &= \frac{x^2-x}{x^2-2}-1, & 16) y &= \frac{x^2-2x}{x^2+2}-1, \\
 17) y &= \frac{2}{x-1}-\frac{3}{1-x^2}, & 18) y &= \frac{3}{x^2-4}+\frac{2}{x+2}, & 19) y &= \frac{1}{1+2x}-\frac{1}{2-3x^2}, \\
 20) y &= \frac{4}{x^2-2}+\frac{1}{1-x^2}, & 21) y &= \frac{3}{x^2-2}-\frac{2}{x^2+1}, & 22) y &= \frac{2}{1-2x^2}-\frac{3}{1-4x^2}, \\
 23) y &= \frac{2}{x^2+3x}-\frac{1}{9-x^2}, & 24) y &= \frac{5}{x^2-1}+\frac{3}{x^2-2x}, & 25) y &= \frac{4}{x-2x^2}-\frac{5}{1-4x^2}.
 \end{aligned}$$

5. Ispitati znak sledećih funkcija.

$$\begin{aligned}
 1) y &= \frac{2}{x^2-3x+2}-1, & 2) y &= 1-\frac{10}{x^2+5x+4}, & 3) y &= 1+\frac{2}{x-3x^2+2}, \\
 4) y &= 1-\frac{3}{x^2+x+1}, & 5) y &= \frac{6}{3x^2+x+2}-1, & 6) y &= 2+\frac{3}{x-x^2-3}, \\
 7) y &= \frac{x}{4x^2+x-3}-1, & 8) y &= 1-\frac{x-1}{4x^2-x-3}, & 9) y &= \frac{1-3x}{x-2x^2+3}+3, \\
 10) y &= 2-\frac{5+x}{x^2+3x+4}, & 11) y &= \frac{4x-3}{4x-x^2-4}-1, & 12) y &= 1-\frac{3x+5}{x^2+5x+6}, \\
 13) y &= \frac{x^2}{x^2-x-2}-1, & 14) y &= 2-\frac{x^2-2}{2x^2+x-3}, & 15) y &= \frac{5-6x^2}{x-3x^2+4}-2, \\
 16) y &= 1+\frac{2+x^2}{3x^2+x-2}, & 17) y &= \frac{2x^2+3}{6x-x^2-9}+2, & 18) y &= \frac{x^2-2}{x^2+4x+4}-1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19) y &= \frac{x^2+x}{5x^2+x-4} - 1, & 20) y &= 3 - \frac{x^2-3x}{x^2-x-2}, & 21) y &= \frac{x-4x^2}{4x-3x^2-1} + 1, \\
 22) y &= 1 + \frac{2x+x^2}{x^2+x+1}, & 23) y &= \frac{x-3x^2}{4x-5x^2+1} - 1, & 24) y &= 2 - \frac{3x^2+5x}{x^2+2x+1}, \\
 25) y &= \frac{3x^2+5x-2}{2x^2+x-3} - 2, & 26) y &= 1 - \frac{x^2+4x+4}{x^2+3x-4}, & 27) y &= \frac{x-2x^2+3}{x-x^2-1} - 1, \\
 28) y &= 2 - \frac{2x^2+3x+3}{x^2+6x+9}, & 29) y &= \frac{x-5x^2+9}{3x-4x^2+1} - 1, & 30) y &= 1 - \frac{5x-x^2+5}{x^2+5x+4}.
 \end{aligned}$$

6. Ispitati znak sledećih funkcija.

$$\begin{aligned}
 1) y &= x \log_3(x+2), & 2) y &= (x-2)\ln(1-x), & 3) y &= (3-5x)\log_{\frac{1}{3}}(3-2x), \\
 4) y &= (1+4x)\log_2(4x-3), & 5) y &= x^2 \log_{\frac{1}{4}}(x+2), & 6) y &= (1+2x^2)\log_3(4-x), \\
 7) y &= (1-x^2)\log_{\frac{1}{5}}(3x+4), & 8) y &= (x^2-2)\ln(3-x), & 9) y &= (x^2-x)\ln(x+1), \\
 10) y &= (x-3x^2)(x^2-2x)\log_2(3-2x), & 11) y &= (x-x^2)(x^2+3x)\log_{\frac{1}{3}}(3x+4), \\
 12) y &= x(x^2+2x+1)\log_2(x+1), & 13) y &= (x+3)(1+x-2x^2)\ln(2-3x), \\
 14) y &= (2x-3x^2+1)\log_{\frac{1}{4}}(2-3x), & 15) y &= (2+x)(3+2x)\log_3(x^2-2), \\
 16) y &= (x+1)(3x-4)\ln(1-3x^2), & 17) y &= (x-3)(4-5x)\log_{\frac{1}{3}}(3-2x^2), \\
 18) y &= (2-x^2)(x^2-4)\ln(1+x^2), & 19) y &= (3x^2-1)(x^2+3)\log_{\frac{4}{5}}(x^2-1),
 \end{aligned}$$

$$20) y = (1+3x^2)(5-2x^2)\log_{\frac{4}{3}}(1-3x^2), \quad 21) y = (x^2-x)\log_{\frac{2}{3}}(1+2x^2),$$

$$22) y = (x^2+3x)(x^2-2x)\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4), \quad 23) y = (x-3x^2)\ln(1-5x^2),$$

$$24) y = (x^2+3x-4)\log_{\frac{1}{4}}(4x^2-5), \quad 25) y = (5x^2-4x-1)\ln(3x^2+4),$$

$$26) y = (x-x^2+6)\log_{\frac{1}{3}}(3-2x^2), \quad 27) y = (3-5x)\log_{\frac{4}{3}}(2x-3x^2),$$

$$28) y = (2-x)(4x-5)\ln(3x^2+2x), \quad 29) y = (3x+4)\log_2(5x^2-x),$$

$$30) y = (x^2+2)(x^2-5)\ln(3x-x^2), \quad 31) y = (x^2-3)\log_{\frac{1}{4}}(3x^2-4x),$$

$$32) y = (1-3x^2)\log_{\frac{4}{3}}(4x-3x^2), \quad 33) y = (x^2+4x)\log_{\frac{1}{5}}(x^2-3x),$$

$$34) y = (3x^2+4x)\ln(2x^2+3x), \quad 35) y = (x^2+x)\log_{\frac{5}{4}}(2x^2-3x),$$

$$36) y = (1+5x-6x^2)\ln(x^2+2x), \quad 37) y = (x^2+4x-5)\log_{\frac{1}{3}}(3x^2-2x),$$

$$38) y = (x-4x^2+3)\log_{\frac{4}{3}}(3x^2+x), \quad 39) y = (4x-3)\log_{\frac{2}{5}}(x^2-4x-12),$$

$$40) y = (3x+5)\ln(5+3x-2x^2), \quad 41) y = (x-2)(1-3x)\log_{\frac{5}{4}}(5+x-4x^2),$$

$$42) y = (x^2+3)\log_{\frac{4}{3}}(x^2+4x+4), \quad 43) y = (2x^2+1)(4x^2-1)\ln(2+3x-2x^2),$$

$$44) y = (1 - 5x^2) \log_{\frac{1}{4}}(4x - 3x^2 + 7), \quad 45) y = (3x - 4x^2) \log_3(x - 4x^2 + 3),$$

$$46) y = (x^2 - 4x) \ln(x^2 - 6x + 9), \quad 47) y = (x^2 + 3x) \log_{\frac{2}{3}}(x^2 + x + 1),$$

$$48) y = (x^2 + 8x + 7) \log_2(x^2 + 7x + 12), \quad 49) y = (9 - 8x - x^2) \log_{\frac{3}{5}}(6 - x - x^2).$$

7. Ispitati znak sledećih funkcija.

$$1) y = \frac{x}{e^{x+2} - 1}, \quad 2) y = \frac{1 - e^{3x+2}}{1 - 3x}, \quad 3) y = \frac{5x + 2}{e^{1-2x} - 1},$$

$$4) y = \frac{x^2}{1 - e^{3x+4}}, \quad 5) y = \frac{e^{4x-1} - 1}{1 - 9x^2}, \quad 6) y = \frac{x^2 + 1}{1 - e^{4-5x}},$$

$$7) y = \frac{x^2 + 3x}{e^{2x+3} - 1}, \quad 8) y = \frac{1 - e^{3x-4}}{x - 2x^2}, \quad 9) y = \frac{x^2 - x}{e^{2-3x} - 1},$$

$$10) y = \frac{x^2 - 4x + 4}{1 - e^{x+3}}, \quad 11) y = \frac{e^{3x-1} - 1}{x - 3x^2 + 4}, \quad 12) y = \frac{x^2 + x + 2}{1 - e^{3-x}},$$

$$13) y = \frac{x - 3}{e^{x^2-4} - 1}, \quad 14) y = \frac{1 - e^{1-4x^2}}{x + 2}, \quad 15) y = \frac{4 - 3x}{e^{1+x^2} - 1},$$

$$16) y = \frac{x^2 - 5}{1 - e^{x^2-3}}, \quad 17) y = \frac{e^{1-3x^2} - 1}{x^2 + 2}, \quad 18) y = \frac{5 - 4x^2}{1 - e^{1+x^2}},$$

$$19) y = \frac{x^2 + 3x}{e^{x^2-5} - 1}, \quad 20) y = \frac{1 - e^{1-x^2}}{x^2 - 2x}, \quad 21) y = \frac{4x - x^2}{e^{3+2x^2} - 1},$$

$$22) y = \frac{5x^2 - 2x - 3}{1 - e^{2-x^2}}, \quad 23) y = \frac{e^{x^2-4} - 1}{x^2 - 3x + 1}, \quad 24) y = \frac{3x - 2x^2 + 5}{1 - e^{1+3x^2}},$$

$$25) y = \frac{x - 2}{e^{x^2-x} - 1}, \quad 26) y = \frac{1 - e^{x-3x^2}}{x + 2}, \quad 27) y = \frac{5 - 4x}{e^{4x^2-x} - 1},$$

$$28) y = \frac{x^2 - 3}{1 - e^{x^2-2x}}, \quad 29) y = \frac{e^{4x-3x^2} - 1}{x^2 + 1}, \quad 30) y = \frac{1 - 3x^2}{1 - e^{4x^2-5x}},$$

$$31) y = \frac{x^2 - 2x}{e^{x^2-x} - 1}, \quad 32) y = \frac{1 - e^{x-4x^2}}{3x - x^2}, \quad 33) y = \frac{x^2 + 3x}{e^{3x^2-2x} - 1},$$

$$34) y = \frac{3x^2 + 2x - 5}{1 - e^{4x-x^2}}, \quad 35) y = \frac{e^{3x^2-x} - 1}{x^2 - x + 1}, \quad 36) y = \frac{3x - 5x^2 + 2}{1 - e^{4x^2+3x}},$$

$$37) y = \frac{x - 2}{e^{x^2-6x+9} - 1}, \quad 38) y = \frac{1 - e^{x-2x^2+3}}{x + 2}, \quad 39) y = \frac{2 - 3x}{e^{3x^2-x-2} - 1},$$

$$40) y = \frac{x^2 - 3}{1 - e^{x^2+4x+1}}, \quad 41) y = \frac{e^{4x-3x^2-1} - 1}{x^2 + 1}, \quad 42) y = \frac{1 - 3x^2}{1 - e^{4x^2-5x+1}},$$

$$43) y = \frac{x^2 - 2x}{e^{x^2-5x+6} - 1}, \quad 44) y = \frac{1 - e^{x-2x^2+3}}{3x - x^2}, \quad 45) y = \frac{x^2 + x}{e^{2x^2-3x-5} - 1},$$

$$46) y = \frac{5x^2 + 2x - 3}{1 - e^{4x-x^2+5}}, \quad 47) y = \frac{e^{2x^2-x-3} - 1}{x^2 - x + 2}, \quad 48) y = \frac{3x - 2x^2 + 9}{1 - e^{4x^2+3x-1}}.$$

### ***5.4. Parnost i neparnost funkcije***

**Primer 1.** Ispitati da li su sledeće funkcije parne ili neparne.

$$1) y = \frac{x-x^3}{x^2-9}, \quad 2) y = \frac{1+x}{1-e^{2-3x}}, \quad 3) y = \frac{1-\cos x}{x^2}, \quad 4) y = x^3 e^x.$$

Rešenje:

1)  $D_y = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 9 \neq 0\} = \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$ , pri čemu poslednja jednakost sledi iz

$$x^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-3) \neq 0 \Leftrightarrow x+3 \neq 0 \wedge x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3 \wedge x \neq 3.$$

Dakle, domen date funkcije je simetričan u odnosu na 0.

Iz

$$f(-x) = \frac{(-x) - (-x)^3}{(-x)^2 - 9} = \frac{-x + x^3}{x^2 - 9} = -\frac{x - x^3}{x^2 - 9} = -f(x)$$

zaključujemo da je data funkcija *neparna*.

2)  $D_y = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 - e^{2-3x} \neq 0\} = \mathbf{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}$ , pri čemu poslednja jednakost sledi iz

$$1 - e^{2-3x} \neq 0 \Leftrightarrow e^{2-3x} \neq 1 \Leftrightarrow e^{2-3x} \neq e^0 \Leftrightarrow 2 - 3x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{2}{3}.$$

Dakle, domen date funkcije nije simetričan u odnosu na 0 na osnovu čega zaključujemo da data funkcija *nije ni parna ni neparna*.

3)  $D_y = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 \neq 0\} = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ .

Dakle, domen date funkcije je simetričan u odnosu na 0.

Iz

$$f(-x) = \frac{1 - \cos(-x)}{(-x)^2} = \frac{1 - \cos x}{x^2} = f(x)$$

zaključujemo da je data funkcija *parna*.

4)  $D_y = \mathbf{R}$ .

Dakle, domen date funkcije je simetričan u odnosu na 0.

Iz

$$f(-x) = (-x)^3 e^{-x} = -\frac{x^3}{e^x} \neq \begin{matrix} f(x) \\ -f(x) \end{matrix},$$

zaključujemo da data funkcija *nije ni parna ni neparna*. ♦

**Zadaci za vežbu:**

1. Ispitati da li su sledeće funkcije parne ili neparne.

$$1) y = \frac{3}{x}, \quad 2) y = \frac{1}{x+2}, \quad 3) y = \frac{2}{x^2}, \quad 4) y = -\frac{1}{x^3}, \quad 5) y = \frac{3}{x^2-1},$$

$$6) y = \frac{3x}{4-x^2}, \quad 7) y = \frac{x+3}{x^2+2}, \quad 8) y = \frac{x^2-1}{3-x^2}, \quad 9) y = \frac{x^2+2}{x^2-5},$$

$$10) y = \frac{2}{x-3x^2}, \quad 11) y = \frac{1-3x}{x^2+2x}, \quad 12) y = \frac{x^2-3}{x^2-x}, \quad 13) y = \frac{1}{x^3+2},$$

$$14) y = \frac{x^2+2}{x^3}, \quad 15) y = \frac{x-x^3}{x^2+2}, \quad 16) y = \frac{x^3}{2-3x^2}, \quad 17) y = \frac{x}{2} - \frac{2}{x}.$$

2. Ispitati da li su sledeće funkcije parne ili neparne.

$$1) y = \sqrt{4-x^2}, \quad 2) y = \frac{x+3}{\sqrt{x}}, \quad 3) y = \frac{\sqrt{2+x^2}}{x}, \quad 4) y = \frac{x+1}{\sqrt{3-x^2}},$$

$$5) y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^3}, \quad 6) y = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}, \quad 7) y = \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^3}, \quad 8) y = \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}},$$

$$9) y = \frac{\sqrt{x^2+3}}{2x-x^3}, \quad 10) y = \frac{x^3+3x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad 11) y = \frac{\sqrt{2+x^2}}{x-x^3}, \quad 12) y = \frac{x^3}{\sqrt{x^2-3x-4}}.$$

3. Ispitati da li su sledeće funkcije parne ili neparne.

$$1) y = \frac{1+e^x}{1-e^x}, \quad 2) y = \frac{3^x-1}{3^x+1}, \quad 3) y = e^{x^2} \sin x - 2x, \quad 4) y = 3x^2 - 1 - 2 \cos x,$$

$$5) y = \sin x + x^3, \quad 6) y = \frac{\cos x}{x}, \quad 7) y = \frac{\sin x - 1}{x}, \quad 8) y = \frac{\operatorname{ctg} x}{x^3}, \quad 9) y = \frac{\operatorname{tg} x + 1}{x^2},$$

$$10) y = x^3 e^{-x}, \quad 11) y = x^2 e^{x^3}, \quad 12) y = x e^{\frac{1}{x^2}}, \quad 13) y = x^2 e^{\frac{2}{x^3}}, \quad 14) y = x e^{-\frac{1}{x}}.$$

## 5.5. Granična vrednost funkcije

**Primer 1.** Izračunati sledeće granične vrednosti.

$$\begin{array}{lll} 1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6}, & 2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-\sqrt{3x}}{x^2-9}, & 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-2x+3}{3x^2-x}, \\ 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{x^2+3x-1}, & 5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+2x-x^2}{2-x}, & 6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-3}\right)^x. \end{array}$$

*Rešenje:*

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x-3} = \frac{2+2}{2-3} = -4,$$

pri čemu prva jednakost sledi iz

$$x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x=2 \vee x=3,$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-\sqrt{3x}}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-\sqrt{3x}}{x^2-9} \cdot \frac{3+\sqrt{3x}}{3+\sqrt{3x}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{9-3x}{(x-3)(x+3)(3+\sqrt{3x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3(3-x)}{(x-3)(x+3)(3+\sqrt{3x})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3(x-3)}{(x-3)(x+3)(3+\sqrt{3x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3}{(x+3)(3+\sqrt{3x})} = \frac{-3}{(3+3)(3+\sqrt{9})} = -\frac{1}{12},$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-2x+3}{3x^2-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{3-\frac{1}{x}} = \frac{1}{3},$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{x^2+3x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0,$$

$$\begin{aligned} 5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+2x-x^2}{2-x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x}+2-x}{\frac{2}{x}-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right) \left(\frac{3}{x}+2-x\right) = (-1)(-\infty) \\ &= +\infty, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x-3} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{x+3}{x-3} - 1 \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{6}{x-3} \right)^x \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{6}{x-3} \right)^{x-3} \left( 1 + \frac{6}{x-3} \right)^3 = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{6}{t} \right)^t \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{6}{t} \right)^{\frac{6t}{6}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \left( 1 + \frac{6}{t} \right)^{\frac{t}{6}} \right)^6 = e^6. \blacklozenge
 \end{aligned}$$

**Zadaci za vežbu:**

1. Izračunati sledeće granične vrednosti.

$$\begin{aligned}
 1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{3x+2}, \quad 2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2-3x-4}, \quad 3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3}{2x-1}, \quad 4) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+3x+2}{x+2}, \\
 5) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3-x^2+x-1}{x^2+1}, \quad 6) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2}, \quad 7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{1-x^2}, \quad 8) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{x-3x^2}{9x^2-1}, \\
 9) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+x-2}{x+2}, \quad 10) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-2x+3}{1-x}, \quad 11) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{4-x^2}, \\
 12) \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{3x^2+5x+2}{4-9x^2}, \quad 13) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{x^2-6x+9}{9-x^2}, \quad 14) \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2+7x+10}{x^2+x-20}, \\
 15) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-2x-3}{x^3-x}, \quad 16) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2+5x-3}{x^3+3x^2+x+3}, \quad 17) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-1}{2x^2-x-1}.
 \end{aligned}$$

2. Izračunati sledeće granične vrednosti.

$$\begin{aligned}
 1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}+1}, \quad 2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{x+6}-3}, \quad 3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{2x}-2}, \\
 4) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3(2-\sqrt{x+1})}{x^2-9}, \quad 5) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{2(\sqrt{x+3}-3)}{36-x^2}, \quad 6) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+6}-3}, \\
 7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{3-\sqrt{x+9}}, \quad 8) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x}-2}{1-\sqrt{x+3}}, \quad 9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+16}-4}{\sqrt{x^2+1}-1},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \sqrt{x^2 - 3}}{\sqrt{x^2 + 5} - 3}, \quad & 11) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{8\sqrt{x} - x^2}{2 - \sqrt{x}}, \quad & 12) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 27\sqrt{x}}{3 - \sqrt{x}}, \\
 13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 8} - 2}{x^2}, \quad & 14) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt{x}}, \quad & 15) \lim_{x \rightarrow 27} \frac{\sqrt[3]{x} - 3}{27 - x}.
 \end{aligned}$$

3. Izračunati sledeće granične vrednosti.

$$\begin{aligned}
 1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x}, \quad & 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+2}, \quad & 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{1+2x}, \quad & 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2}, \quad & 5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-x^2}{x^2+2}, \\
 6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x-2}, \quad & 7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+3x-2}{2x-3x^2+1}, \quad & 8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x^2}, \quad & 9) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-2x^2+4}{5x^2}, \\
 10) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-3}{x+1}, \quad & 11) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^3}, \quad & 12) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+4x}{3x^3+x^2-2x+5}, \quad & 13) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+2x^2}{x^3-1}, \\
 14) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-x^3+3}{x+x^2-2}, \quad & 15) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2}{x^3+3}, \quad & 16) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+x^3}{3x^3}, \quad & 17) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+x^2-1}{x^2+3x+5}.
 \end{aligned}$$

4. Imajući u vidu da je

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad \text{odnosno} \quad e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}},$$

izračunati sledeće granične vrednosti.

$$\begin{aligned}
 1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^x, \quad & 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^x, \quad & 3) \lim_{x \rightarrow 0} (1+4x)^{\frac{3}{x}}, \quad & 4) \lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{4}{x}}, \\
 5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^x, \quad & 6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x, \quad & 7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+3}{x^2-2}\right)^x, \quad & 8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+2}\right)^x,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 9) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + x - 3} \right)^x, \quad 10) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 - 2x + 3} \right)^x, \quad 11) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2x + 2} \right)^x, \\
 & 12) \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 4x + 4)^{\frac{1}{x-1}}, \quad 13) \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 2x + 2)^{\frac{1}{1+x}}, \quad 14) \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x - 5)^{\frac{1}{2-x}}, \\
 & 15) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{\frac{1}{x - \frac{\pi}{2}}}, \quad 16) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( 1 + \frac{3}{\operatorname{tg}^2 x} \right)^{\operatorname{tg}^2 x}, \quad 17) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}.
 \end{aligned}$$

5. Odrediti asimptote sledećih funkcija.

$$\begin{aligned}
 & 1) y = \frac{1}{x+1}, \quad 2) y = \frac{3x}{x-1}, \quad 3) y = \frac{1-x^2}{x-2}, \quad 4) y = \frac{x^2+3x-1}{1+x}, \\
 & 5) y = \frac{2}{x^2}, \quad 6) y = \frac{3x}{1-x^2}, \quad 7) y = \frac{3-x^2}{x^2+1}, \quad 8) y = \frac{1+2x-x^2}{x^2-3}, \\
 & 9) y = \frac{x^3}{1-x}, \quad 10) y = \frac{x^3}{x^2-1}, \quad 11) y = \frac{x^3+x^2}{4-3x}, \quad 12) y = \frac{x^3-x^2}{3+2x^2}, \\
 & 13) y = e^{\frac{2}{x}}, \quad 14) y = xe^{\frac{3}{x}}, \quad 15) y = x^2e^{\frac{2}{x}}, \quad 16) y = xe^{\frac{3}{x^2}}, \quad 17) y = x^2e^{\frac{2}{x^2}}, \\
 & 18) y = \frac{e^x}{x}, \quad 19) y = \frac{e^x}{x-2}, \quad 20) y = \frac{x}{1-e^x}, \quad 21) y = \frac{x+1}{e^x}, \quad 22) y = \frac{e^x-3}{x-2}, \\
 & 23) y = \frac{e^x}{x^2}, \quad 24) y = \frac{e^x}{x^2+2}, \quad 25) y = \frac{e^x}{x^2-1}, \quad 26) y = \frac{x^2+3}{e^x}, \quad 27) y = \frac{4-x^2}{e^x-1}, \\
 & 28) y = x \ln x, \quad 29) y = \frac{\ln x}{x}, \quad 30) y = \frac{\ln x}{1-x}, \quad 31) y = \ln \frac{x-1}{x+1}, \quad 32) y = \frac{1+\ln x}{1-\ln x}.
 \end{aligned}$$

## 5.6. Izvod funkcije

**Primer 1.** Odrediti prvi izvod sledećih funkcija.

$$1) y = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x, \quad 2) y = (2+x-3x^2)e^x, \quad 3) y = \frac{1-\cos x}{\sin x}, \quad 4) y = \frac{\ln x - 1}{x}.$$

*Rešenje:*

$$\begin{aligned} 1) y' &= \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x\right)' = \left(\frac{1}{6}x^3\right)' - \left(\frac{3}{2}x^2\right)' + (5x)' \\ &= \frac{1}{6}(x^3)' - \frac{3}{2}(x^2)' + 5(x)' = \frac{1}{6} \cdot 3x^2 - \frac{3}{2} \cdot 2x + 5 \cdot 1 \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) y' &= ((2+x-3x^2)e^x)' = (2+x-3x^2)'e^x + (2+x-3x^2)(e^x)' \\ &= (1-6x)e^x + (2+x-3x^2)e^x = e^x(1-6x+2+x-3x^2) \\ &= e^x(-3x^2-5x+3) = -e^x(3x^2+5x-3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) y' &= \left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(1-\cos x)' \sin x - (1-\cos x)(\sin x)'}{(\sin x)^2} = \frac{(\sin x) \sin x - (1-\cos x)(\cos x)}{(\sin x)^2} \\ &= \frac{\sin^2 x - \cos x + \cos^2 x}{(\sin x)^2} = \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x} = \frac{1-\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \frac{1}{1+\cos x}, \end{aligned}$$

$$4) y' = \left(\frac{\ln x - 1}{x}\right)' = \frac{(\ln x - 1)'x - (\ln x - 1)(x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (\ln x - 1) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x + 1}{x^2} = \frac{2 - \ln x}{x^2}. \blacklozenge$$

**Zadaci za vežbu:**

1. Odrediti prvi izvod sledećih funkcija.

$$1) y = 3 + x, \quad 2) y = 2 - 5x, \quad 3) y = x^2 + 3x, \quad 4) y = -3x^2 + 2x + 4,$$

$$5) y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}, \quad 6) y = x^3 + 3x, \quad 7) y = \frac{1}{6}x^3 + x^2 - 4x, \quad 8) y = x^4 + 2x^3,$$

$$9) y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x, \quad 10) y = 2\sqrt{x} + 3\sqrt{x^3}, \quad 11) y = 3\sqrt[3]{x^2} + \frac{3}{2}x\sqrt[3]{x},$$

$$\begin{aligned}
 12) y &= \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}, & 13) y &= \frac{3x}{\sqrt[4]{x^3}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{x^2}, & 14) y &= \frac{4}{\sqrt[4]{x}} - \frac{x}{\sqrt{x^3}} + \frac{3}{x}, \\
 15) y &= \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x^3 + 2e^x, & 16) y &= 3e^x + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{2}{x}, & 17) y &= \frac{x}{\sqrt{x^3}} + e^x - \frac{1}{3}x^2, \\
 18) y &= \frac{2}{x} - \ln x + 3x, & 19) y &= \ln x + \frac{1}{\sqrt{x^3}} - x^4, & 20) y &= \frac{2}{\sqrt{x^4}} - 3 \ln x, \\
 21) y &= \cos x - \sin x - x, & 22) y &= \operatorname{tg} x + x, & 23) y &= \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x.
 \end{aligned}$$

**2.** Odrediti prvi izvod sledećih funkcija.

$$\begin{aligned}
 1) y &= (3-x)(x^2+2x-4), & 2) y &= (1+4x-\frac{3}{2}x^2)(\frac{4}{3}x^3+x^2-3x+2), \\
 3) y &= (\sqrt{x^3}+3)(2-\sqrt{x}), & 4) y &= (\frac{4}{\sqrt{x}}+3x-2\sqrt{x})(\sqrt[3]{x}-2+\frac{1}{\sqrt{x}}), \\
 5) y &= x^3 \sin x, & 6) y &= x^2 \cos x, & 7) y &= (\cos x - 3x)(\sin x + 1), \\
 8) y &= x^3 e^x, & 9) y &= (2-3x+x^2-x^3)e^x, & 10) y &= x(e^x-3), \\
 11) y &= x^2 \ln x, & 12) y &= (3-4x-x^2+2x^3) \ln x, & 13) y &= x(\ln x-1), \\
 14) y &= (x^2+2x-3) \sin x, & 15) y &= (1+3x-2x^2) \cos x, & 16) y &= \sin x \cos x - x.
 \end{aligned}$$

**3.** Odrediti prvi izvod sledećih funkcija.

$$\begin{aligned}
 1) y &= \frac{3}{1+2x}, & 2) y &= \frac{2}{1-3x}, & 3) y &= \frac{x}{x-3}, & 4) y &= \frac{3x}{x+1}, \\
 5) y &= \frac{2+x}{1+3x}, & 6) y &= \frac{1-2x}{3+x}, & 7) y &= \frac{4-x}{3-x}, & 8) y &= \frac{2}{x^2},
 \end{aligned}$$

$$9) y = \frac{3}{1-x^2}, \quad 10) y = \frac{x}{x^2-4}, \quad 11) y = \frac{2-x}{3+x^2}, \quad 12) y = \frac{3x-1}{4-x^2},$$

$$13) y = \frac{3-x^2}{1-x^2}, \quad 14) y = \frac{x^2+2}{x^2-1}, \quad 15) y = \frac{x^2+1}{x^2+2}, \quad 16) y = \frac{x^2+3}{x^2-2},$$

$$17) y = \frac{e^x}{x+1}, \quad 18) y = \frac{x}{e^x}, \quad 19) y = \frac{2+3x}{e^x}, \quad 20) y = \frac{3-x}{e^x},$$

$$21) y = \frac{e^x+1}{x}, \quad 22) y = \frac{3+e^x}{1+e^x}, \quad 23) y = \frac{e^x-2}{e^x+2}, \quad 24) y = \frac{1-e^x}{2-e^x},$$

$$25) y = \frac{\sin x}{e^x}, \quad 26) y = \frac{\cos x}{e^x}, \quad 27) y = \frac{\cos x - \sin x}{e^x}, \quad 28) y = \frac{\sin x - \cos x}{e^x - 1},$$

$$29) y = \frac{1+\cos x}{\sin x}, \quad 30) y = \frac{1-\sin x}{\cos x}, \quad 31) y = \frac{1+\sin x}{\sin x}, \quad 32) y = \frac{1-\cos x}{\cos x},$$

$$33) y = \frac{\sin x}{1-\cos x}, \quad 34) y = \frac{\cos x}{1-\sin x}, \quad 35) y = \frac{1+\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} x}, \quad 36) y = \frac{\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x},$$

$$37) y = \frac{x}{\ln x}, \quad 38) y = \frac{\ln x}{x}, \quad 39) y = \frac{1+\ln x}{\ln x}, \quad 40) y = \frac{\ln x+1}{\ln x-1}.$$

4. Neka je  $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 4x - 2$ . Odrediti  $f'(-1)$ .

5. Neka je  $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x+1}$ . Odrediti  $f'(-2)$ .

6. Neka je  $f(x) = 2x^2 - \ln x$ . Odrediti  $f'(1)$ .

7. Neka je  $f(x) = 3x + 2 - e^x$ . Odrediti  $f'(0)$ .

8. Neka je  $f(x) = \frac{2}{\ln x}$ . Odrediti  $f'(e)$  i  $f'(e^{-1})$ .

9. Neka je  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ . Odrediti  $f'(e)$  i  $f'(e^{-1})$ .

10. Neka je  $f(x) = \frac{3}{e^x}$ . Odrediti  $f'(1)$ ,  $f'(0)$  i  $f'(-1)$ .

11. Neka je  $f(x) = \frac{e^x}{x}$ . Odrediti  $f'(1)$  i  $f'(-1)$ .

12. Neka je  $f(x) = \frac{1-\cos x}{\sin x}$ . Odrediti  $f'(\frac{\pi}{4})$  i  $f'(\frac{\pi}{3})$ .

13. Neka je  $f(x) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ . Odrediti  $f'(\alpha)$ , gde je:

$$1) \alpha = \frac{\pi}{6}, \quad 2) \alpha = \frac{\pi}{3}, \quad 3) \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad 4) \alpha = \frac{5\pi}{6}, \quad 5) \alpha = -\frac{\pi}{4}, \quad 6) \alpha = -\frac{2\pi}{3}.$$

14. Neka je  $f(x) = \frac{1+\sin x}{1-\cos x}$ . Odrediti  $f'(\alpha)$ , gde je:

$$1) \alpha = \frac{\pi}{6}, \quad 2) \alpha = \frac{\pi}{4}, \quad 3) \alpha = \frac{2\pi}{3}, \quad 4) \alpha = \frac{3\pi}{2}, \quad 5) \alpha = -\frac{\pi}{3}, \quad 6) \alpha = -\frac{5\pi}{6}.$$

15. Neka je  $f(x) = \operatorname{ctg} x - x$ . Odrediti  $f'(\alpha)$ , gde je:

$$1) \alpha = \frac{\pi}{3}, \quad 2) \alpha = \frac{2\pi}{3}, \quad 3) \alpha = \frac{5\pi}{6}, \quad 4) \alpha = -\frac{\pi}{6}, \quad 5) \alpha = -\frac{\pi}{4}, \quad 6) \alpha = -\frac{\pi}{2}.$$

16. Naći jednačine tangente i normale grafika funkcije:

1)  $y = x^2 - 3x$  u njenoj tački  $A(1, -2)$ ,

2)  $y = x^2 + x - 3$  u njenoj tački  $A(-2, -1)$ ,

3)  $y = 2x^2 - 3x + 1$  u njenoj tački  $A(1, 0)$ ,

4)  $y = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$  u njenoj tački  $A(-1, -1)$ .

17. Naći jednačinu tangente na grafiku date funkcije u datoj tački koja pripada grafiku:

1)  $y = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + 1$  u njenoj tački  $A(1, y)$ ,

2)  $y = \frac{2}{3}x^3 - 3x - 1$  u njenoj tački  $A(-1, y)$ ,

3)  $y = x - 3 \ln x$  u njenoj tački  $A(1, y)$ ,

4)  $y = e^x - 2x$  u njenoj tački  $A(0, y)$ ,

5)  $y = \sin x - \cos x$  u njenoj tački  $A(\frac{\pi}{4}, y)$ .

**18.** Odrediti jednačine tangente i normale parabole

1)  $y = 4 - x^2$ , 2)  $y = x^2 - 3x$ , 3)  $y = 3x^2 + x - 4$ , 4)  $y = 2x - x^2 + 8$ ,  
u tačkama preseka sa  $x$ -osom. Konstruisati parabolu, tangentu i normalu.

**19.** Odrediti tačke u kojima su tangente krivih

1)  $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$  i  $y = 4x^2 - 6x + 1$ ,

2)  $y = -x^3 + 2x^2 + 4x - 1$  i  $y = -2x^2 + x$ ,

3)  $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 3$  i  $y = -2x^2 + 5x - 4$ ,

4)  $y = x^3 + x^2 + x + 2$  i  $y = \frac{1}{2}x^2 + 5x - 3$ ,

paralelne.

**20.** U kojoj tački parabole

1)  $y = x^2 + 3x - 4$ , 2)  $y = 3x^2 + x - 2$ , 3)  $y = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ , 4)  $y = -x^2 + 2$ ,  
je njena tangenta paralelna  $x$ -osi.

**21.** Odrediti parametre  $m$  i  $n$  tako da parabola  $y = x^2 + mx + n$  dodiruje pravu

1)  $y = -x$ , 2)  $y = 3x - 4$ , 3)  $y = -3x + 2$ , 4)  $y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$ , 5)  $y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ ,  
u tački  $A(1, -1)$ .

**22.** Odrediti prvi izvod sledećih funkcija.

1)  $y = (1 - 2x)^5$ , 2)  $y = (x^2 - 2x + 3)^7$ , 3)  $y = \sqrt{2 - x}$ , 4)  $y = \sqrt{x^2 + 3x - 4}$ ,

$$\begin{aligned}
 &5) y = \sqrt[3]{2x-3}, \quad 6) y = \sin^4 x, \quad 7) y = \cos^6 x, \quad 8) y = \ln^2 x, \quad 9) y = e^{-4x}, \\
 &10) y = e^{x^2+3x-2}, \quad 11) y = \cos 2x, \quad 12) y = \sin(1-x^2), \quad 13) y = \ln(x^2+1), \\
 &14) y = \left(\frac{2+x}{2-x}\right)^3, \quad 15) y = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}, \quad 16) y = \ln\left(\frac{3-x}{x+2}\right), \quad 17) y = \ln\left(\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right).
 \end{aligned}$$

**23.** Primenom Lopitalovog pravila izračunati sledeće granične vrednosti.

$$\begin{aligned}
 &1) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4-x^2}{x^2+x-2}, \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+x^2-x-1}{x^2-5x+4}, \quad 3) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2-36}{\sqrt{6x}-6}, \\
 &4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x}, \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sin x - x}, \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}-1}{\sin x}, \quad 7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^{-2x}}{\ln(1+x)}, \\
 &8) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(3-x)}{3(x-2)}, \quad 9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin 3x)}{2x}, \quad 10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\ln \sqrt{1-x}}, \quad 11) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln^2 x}{1-x}, \\
 &12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x-3^x}{x}, \quad 13) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-2x^2+3x-4}{1-x+x^2-x^3}, \quad 14) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-x^2+2x}{x^2-3x+5}, \\
 &15) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{3-x+x^3}, \quad 16) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}}{x^3}, \quad 17) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x-1}, \quad 18) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-\ln x}{2+\ln x}.
 \end{aligned}$$

**24.** Izračunati sledeće granične vrednosti.

$$\begin{aligned}
 &1) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x} \right), \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right), \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\cos x - 1} \right), \\
 &4) \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x, \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}, \quad 6) \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}, \quad 7) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} \right)^{\ln x}, \\
 &8) \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}, \quad 9) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} \right)^x, \quad 10) \lim_{x \rightarrow 0} (1-\sin x)^{\frac{1}{x}}, \quad 11) \lim_{x \rightarrow 1} (\ln x + 1)^{\frac{1}{x-1}}.
 \end{aligned}$$

**25.** Ispitati monotonost sledećih funkcija i odrediti (ako postoje) njihove ekstremne vrednosti.

$$1) y = x^2 + 2, \quad 2) y = x^2 + x, \quad 3) y = x^2 - 3x, \quad 4) y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x,$$

$$5) y = x^2 + \frac{3}{2}x - 1, \quad 6) y = x^3 - 3x + 2, \quad 7) y = x^3 - \frac{3}{2}x^2, \quad 8) y = -x^3 + 6x^2,$$

$$9) y = x^3 + 9x - 2, \quad 10) y = -x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x, \quad 11) y = x^3 - 6x^2 + 9x - 5,$$

$$12) y = \frac{5}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4, \quad 13) y = \frac{4}{3}x^3 - 3x^2 + x, \quad 14) y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x,$$

$$15) y = \frac{1}{x+2}, \quad 16) y = \frac{2}{1-3x}, \quad 17) y = \frac{1+2x}{2+3x}, \quad 18) y = \frac{2+x}{3-x},$$

$$19) y = \frac{3x^2}{x+2}, \quad 20) y = \frac{x^2+3x}{x-2}, \quad 21) y = \frac{x^2-2x}{3-x}, \quad 22) y = \frac{4x-x^2-4}{x-1},$$

$$23) y = \frac{4}{x+1} + x, \quad 24) y = \frac{3}{x^2-1}, \quad 25) y = \frac{x}{4-x^2}, \quad 26) y = \frac{2x}{x^2+3},$$

$$27) y = \frac{3-x^2}{x^2-2}, \quad 28) y = \frac{x^2+x}{4-x^2}, \quad 29) y = \frac{x^2-6x+9}{x^2+3}, \quad 30) y = \frac{x^2}{x^2+3x+2}.$$

**26.** Ispitati monotonost sledećih funkcija i odrediti (ako postoje) njihove ekstremne vrednosti.

$$1) y = xe^x, \quad 2) y = (2-x)e^x, \quad 3) y = x^2e^x, \quad 4) y = \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2\right)e^x,$$

$$5) y = (2x^2 - 3x)e^x, \quad 6) y = (7 + 2x - x^2)e^x, \quad 7) y = \left(3 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)e^x,$$

$$8) y = \frac{2}{e^x}, \quad 9) y = \frac{x}{e^x}, \quad 10) y = \frac{x-1}{e^x}, \quad 11) y = \frac{1-3x}{e^x}, \quad 12) y = \frac{x^2}{e^x},$$

$$13) y = \frac{x^2-8}{e^x}, \quad 14) y = \frac{x^2-4x}{e^x}, \quad 15) y = \frac{x^2+x-1}{e^x}, \quad 16) y = \frac{e^x}{x},$$

$$17) y = \frac{e^x}{x-2}, \quad 18) y = \frac{e^x}{1-4x}, \quad 19) y = \frac{e^x}{x^2}, \quad 20) y = \frac{e^x}{x^2-8},$$

$$21) y = \frac{e^x}{1-3x^2}, \quad 22) y = \frac{e^x}{x^2+4x+4}, \quad 23) y = \frac{e^x}{4x-x^2-3}.$$

**27.** Ispitati monotonost sledećih funkcija i odrediti (ako postoje) njihove ekstremne vrednosti.

$$1) y = \ln x + 3x, \quad 2) y = \ln x - 2x^2, \quad 3) y = 3 \ln x + \frac{2}{x}, \quad 4) y = \ln x + \frac{1}{4x^2},$$

$$5) y = x \ln x, \quad 6) y = x^2 \ln x, \quad 7) y = (\ln x + 2)x, \quad 8) y = (3 - \ln x)x,$$

$$9) y = \frac{1}{\ln x}, \quad 10) y = \frac{x}{\ln x}, \quad 11) y = \frac{x^2}{\ln x}, \quad 12) y = \frac{\ln x}{x}, \quad 13) y = \frac{\ln x}{x^2},$$

$$14) y = \frac{2-\ln x}{x}, \quad 15) y = \frac{3+\ln x}{x^2}, \quad 16) y = \frac{2-\ln x}{\ln x}, \quad 17) y = \frac{\ln x}{\ln x-1},$$

$$18) y = \frac{2}{x} - \ln x, \quad 19) y = \frac{3}{x^2} + 2 \ln x, \quad 20) y = \frac{1}{x-2} + 3 \ln x, \quad 21) y = \frac{x-2}{x+2} - \ln x.$$

**28.** Odrediti drugi izvod sledećih funkcija.

$$1) y = x^3 - 2x^2 + 3x - 4, \quad 2) y = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 3x, \quad 3) y = (x^3 - 3x^2)(2-x),$$

$$4) y = xe^x, \quad 5) y = x(\cos x - \sin x), \quad 6) y = x^2 \cos x, \quad 7) y = x^2 \sin x,$$

$$8) y = x^2 \ln x, \quad 9) y = x^2 e^x, \quad 10) y = \frac{2}{x}, \quad 11) y = \frac{1}{2-x}, \quad 12) y = \frac{x-2}{e^x}.$$

**29.** Odrediti drugi izvod sledećih funkcija.

$$1) y = \sqrt{x^2 + 4}, \quad 2) y = x^3 e^{-x}, \quad 3) y = x e^{x^2 - x + 1}, \quad 4) y = \ln^2 x, \quad 5) y = \cos^2 x,$$

$$6) y = \sin^2 x, \quad 7) y = \ln(x^2 + 2), \quad 8) y = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right), \quad 9) y = \ln\left(\frac{\cos x + 1}{\cos x - 1}\right).$$

**30.** Odrediti  $n$ -ti izvod sledećih funkcija.

$$1) y = e^x, \quad 2) y = \cos x, \quad 3) y = \sin x, \quad 4) y = \ln x, \quad 5) y = \frac{1}{2+x},$$

$$6) y = e^{-2x}, \quad 7) y = \ln(2-x), \quad 8) y = \cos(2x), \quad 9) y = \sin(3x).$$

**31.** Ispitati konveksnost i konkavnost sledećih funkcija, i odrediti (ako postoje) njihove prevojne tačke.

$$1) y = \frac{1}{3}x - \frac{3}{4}, \quad 2) y = 1 - 2x, \quad 3) y = -2x^2 + 3x, \quad 4) y = x^3 + 6x^2 - 15x - 2,$$

$$5) y = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 1, \quad 6) y = -x^3 + 3x - 2, \quad 7) y = \frac{2}{x}, \quad 8) y = \frac{3x+1}{x},$$

$$9) y = \frac{3-2x}{x}, \quad 10) y = \frac{2+x^2}{x}, \quad 11) y = \frac{4-3x-x^2}{x}, \quad 12) y = \frac{1}{x+2},$$

$$\begin{aligned}
 13) y &= \frac{x}{x-1}, & 14) y &= \frac{3-x}{1-x}, & 15) y &= \frac{x^2}{x+2}, & 16) y &= \frac{x^2-x}{x-4}, \\
 17) y &= \frac{x^2+3x-4}{x-1}, & 18) y &= \frac{1}{x^2}, & 19) y &= \frac{x+2}{x^2}, & 20) y &= \frac{1-3x}{x^2}, \\
 21) y &= \frac{2+x^2}{x^2}, & 22) y &= \frac{3x-4x^2+1}{x^2}, & 23) y &= \frac{1}{x^2+1}, & 24) y &= \frac{x}{x^2-1}, \\
 25) y &= \frac{3-x}{2-x^2}, & 26) y &= \frac{x^2+3}{x^2-2}, & 27) y &= \frac{x^2+2x}{x^2+1}, & 28) y &= \frac{(x+2)^2}{(x+1)^2}.
 \end{aligned}$$

**32.** Ispitati konveksnost i konkavnost sledećih funkcija, i odrediti (ako postoje) njihove prevojne tačke.

$$\begin{aligned}
 1) y &= xe^x, & 2) y &= (4x-5)e^x, & 3) y &= x^2e^x, & 4) y &= (8-x^2)e^x, \\
 5) y &= (x^2-2x)e^x, & 6) y &= (x^2+4x+1)e^x, & 7) y &= (2-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2})e^x, & 8) y &= x^3e^x, \\
 9) y &= (2x^2+x^3)e^x, & 10) y &= (x+2x^2-x^3)e^x, & 11) y &= (1-2x+3x^2-4x^3)e^x, \\
 12) y &= \frac{x}{e^x}, & 13) y &= \frac{2-x}{e^x}, & 14) y &= \frac{x^2}{e^x}, & 15) y &= \frac{x^2+2}{e^x}, & 16) y &= \frac{x^2-x}{e^x}, \\
 17) y &= \frac{x^2-2x+3}{e^x}, & 18) y &= \frac{x^3}{e^x}, & 19) y &= \frac{1-x^3}{e^x}, & 20) y &= \frac{x^3+2x^2-1}{e^x}, \\
 21) y &= \frac{x^3+x+1}{e^x}, & 22) y &= \frac{x^3+x^2+x+1}{e^x}, & 23) y &= \frac{1-2x+3x^2-4x^3}{e^x}.
 \end{aligned}$$

**33.** Ispitati konveksnost i konkavnost sledećih funkcija, i odrediti (ako postoje) njihove prevojne tačke.

$$1) y = \ln x - 2x, \quad 2) y = x^2 - 3 \ln x, \quad 3) y = \ln x - \frac{2}{x}, \quad 4) y = \frac{1}{x^2} - \ln x,$$

$$\begin{aligned}
 &5) y = x \ln x, \quad 6) y = (x - 2) \ln x, \quad 7) y = (1 - 2x) \ln x, \quad 8) y = x^2 \ln x, \\
 &9) y = x^2(\ln x - 2), \quad 10) y = x^2(1 - 2 \ln x), \quad 11) y = x^3 \ln x, \quad 12) y = x^3(1 - 3 \ln x), \\
 &13) y = \frac{1}{1 - \ln x}, \quad 14) y = \frac{x}{\ln x}, \quad 15) y = \frac{x}{1 - \ln x}, \quad 16) y = \frac{x}{\ln x - 2}, \\
 &17) y = \frac{\ln x + 2}{\ln x - 2}, \quad 18) y = \frac{\ln x - 3}{\ln x + 2}, \quad 19) y = \frac{\ln x + 2}{\ln x}, \quad 20) y = \frac{\ln x}{\ln x + 2}, \\
 &21) y = \frac{\ln x}{x}, \quad 22) y = \frac{\ln x - 2}{x}, \quad 23) y = \frac{\ln x}{x^2}, \quad 24) y = \frac{2 - \ln x}{x^2}.
 \end{aligned}$$

### ***5.7. Ispitivanje funkcije i crtanje grafika funkcije***

**Primer 1.** Ispitati sledeće funkcije i nacrtati njihove grafike.

$$1) y = \frac{x}{x^2 - 1}, \quad 2) y = \frac{x^2 + 1}{x}, \quad 3) y = \frac{e^x}{x}, \quad 4) y = \frac{1 + 2 \ln x}{x}.$$

*Rešenje:*

$$1) y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

#### 1. Domen funkcije

$D_y = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 - 1 \neq 0\} = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$ . Poslednja jednakost sledi iz

$$x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \wedge x \neq 1.$$

#### 2. Nule funkcije i znak funkcije

✱ Nule funkcije

$y = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x^2 - 1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ . Dakle, tačka preseka sa  $x$ -osom je  $A(0, 0)$ .

※ Znak funkcije

|           | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|-----------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $x$       | $-$       | $-$  | $+$ | $+$ |           |
| $x^2 - 1$ | $+$       | $-$  | $-$ | $+$ |           |
| $y$       | $-$       | $+$  | $-$ | $+$ |           |

### 3. Parnost i neparnost funkcije

Domen date funkcije je simetričan u odnosu na 0.

Iz

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2-1} = -\frac{x}{x^2-1} = -f(x)$$

zaključujemo da je data funkcija *neparna*.

### 4. Asimptote funkcije

※ Vertikalne asimptote funkcije

$$\lim_{x \rightarrow -1^\pm} \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{-1}{0} = \pm\infty$$

Dakle, prava  $x = -1$  je vertikalna asimptota date funkcije (i sa leve i sa desne strane).

**Napomena.** U prvom slučaju tj. kada  $x \rightarrow -1^+$  rešenje je  $+\infty$  jer je funkcija  $y = \frac{x}{x^2-1} > 0$  za  $x \in (-1, 0)$ . Analogno, kada  $x \rightarrow -1^-$  rešenje je  $-\infty$  jer je funkcija  $y = \frac{x}{x^2-1} < 0$  za  $x \in (-\infty, -1)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{1}{0} = \pm\infty$$

Dakle, prava  $x = 1$  je vertikalna asimptota date funkcije (i sa leve i sa desne strane).

**Napomena.** U prvom slučaju tj. kada  $x \rightarrow 1^+$  rešenje je  $+\infty$  jer je funkcija  $y = \frac{x}{x^2-1} > 0$  za  $x \in (1, +\infty)$ . Analogno, kada  $x \rightarrow 1^-$  rešenje je  $-\infty$  jer je funkcija  $y = \frac{x}{x^2-1} < 0$  za  $x \in (0, 1)$ .

※ Horizontalne asimptote funkcije

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

Dakle, prava  $y = 0$  je horizontalna asimptota date funkcije kada  $x \rightarrow \pm\infty$ .

**Napomena.** Pošto je funkcija  $y = \frac{x}{x^2-1} > 0$  za  $x \in (1, +\infty)$  grafik ove funkcije se približava pravoj  $y = 0$ , kada  $x \rightarrow +\infty$ , sa pozitivne tj. gornje strane. Takođe, pošto je funkcija  $y = \frac{x}{x^2-1} < 0$  za  $x \in (-\infty, -1)$  grafik ove funkcije se približava pravoj  $y = 0$ , kada  $x \rightarrow -\infty$ , sa negativne tj. donje strane.

✱ Kose asimptote funkcije

Data funkcija nema kosu asimptotu ni kada  $x \rightarrow +\infty$  ni kada  $x \rightarrow -\infty$  jer i u jednom i u drugom slučaju ima horizontalnu asimptotu ( $y = 0$ ).

### 5. Monotonost funkcije

$$y' = \frac{x' \cdot (x^2-1) - x \cdot (x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{1 \cdot (x^2-1) - x \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$$

Iz

|               |            |            |            |           |
|---------------|------------|------------|------------|-----------|
|               | $-\infty$  | $-1$       | $1$        | $+\infty$ |
| $-1$          | —          | —          | —          |           |
| $x^2 + 1$     | +          | +          | +          |           |
| $(x^2 - 1)^2$ | +          | +          | +          |           |
| $y'$          | —          | —          | —          |           |
| $y$           | $\searrow$ | $\searrow$ | $\searrow$ |           |

sledi da je data funkcija stalno opadajuća (na celom domenu) i da nema ekstremnih tačaka.

### 6. Konveksnost i konkavnost funkcije

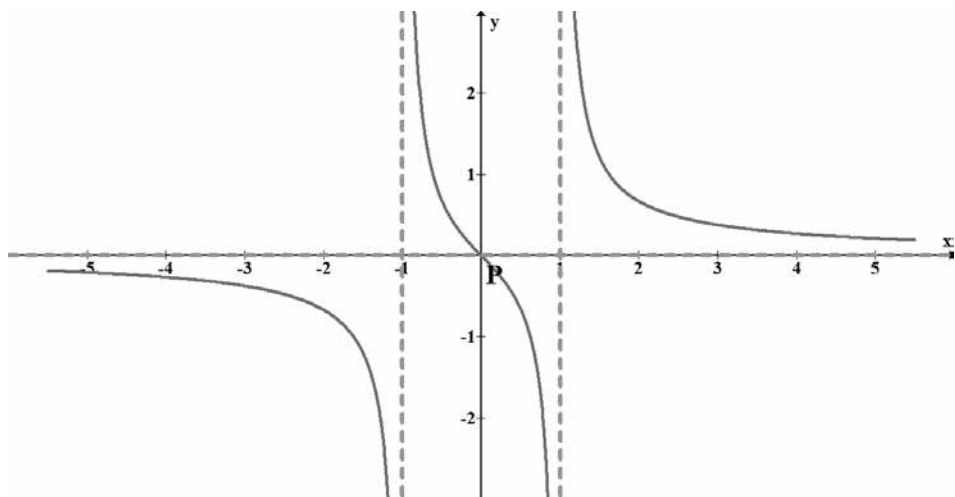
$$\begin{aligned} y'' &= -\frac{(x^2+1)' \cdot (x^2-1)^2 - (x^2+1) \cdot ((x^2-1)^2)'}{(x^2-1)^4} \\ &= -\frac{2x \cdot (x^2-1)^2 - (x^2+1) \cdot (2(x^2-1)2x)}{(x^2-1)^4} = -\frac{2x(x^2-1)(x^2-1-2(x^2+1))}{(x^2-1)^4} \\ &= -\frac{2x(-x^2-3)}{(x^2-1)^3} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} \end{aligned}$$

Iz

|               | $-\infty$ | $-1$   | $0$    | $1$    | $+\infty$ |
|---------------|-----------|--------|--------|--------|-----------|
| $2x$          | $-$       | $-$    | $+$    | $+$    |           |
| $x^2 + 3$     | $+$       | $+$    | $+$    | $+$    |           |
| $(x^2 - 1)^2$ | $+$       | $+$    | $+$    | $+$    |           |
| $x^2 - 1$     | $+$       | $-$    | $-$    | $+$    |           |
| $y''$         | $-$       | $+$    | $-$    | $+$    |           |
| $y$           | $\cap$    | $\cup$ | $\cap$ | $\cup$ |           |

sledi da je prevojna tačka date funkcije:  $P(0, 0)$ .

### 7. Grafik funkcije



2)  $y = \frac{x^2 - 1}{x}$

### 1. Domen funkcije

$$D_y = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

## 2. Nule funkcije i znak funkcije

✱ Nule funkcije

$$y=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x}=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=1$$

S obzirom da  $x=-1 \in D_y$  i  $x=1 \in D_y$  zaključujemo da data funkcija ima nule za  $x=-1$  i  $x=1$  tj. data funkcija seče  $x$ -osu u tačkama  $A(-1, 0)$  i  $B(1, 0)$ .

✱ Znak funkcije

|           | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|-----------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $x^2 - 1$ | +         | -    | -   | +   | +         |
| $x$       | -         | -    | +   | +   | +         |
| $y$       | -         | +    | -   | +   | +         |

## 3. Parnost i neparnost funkcije

Domen date funkcije je simetričan u odnosu na 0.

Iz

$$f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{-x} = -\frac{x^2-1}{x} = -f(x)$$

zaključujemo da je data funkcija *neparna*.

## 4. Asimptote funkcije

✱ Vertikalne asimptote funkcije

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{-1}{0} = \mp \infty$$

Dakle, prava  $x = 0$  je vertikalna asimptota date funkcije (i sa leve i sa desne strane).

**Napomena.** U prvom slučaju tj. kada  $x \rightarrow 0^+$  rešenje je  $-\infty$  jer je funkcija  $y = \frac{x^2+1}{x} < 0$  za  $x \in (0, 1)$ . Analogno, kada  $x \rightarrow 0^-$  rešenje je  $+\infty$  jer je funkcija  $y = \frac{x^2+1}{x} > 0$  za  $x \in (-1, 0)$ .

✱ Horizontalne asimptote funkcije

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( x - \frac{1}{x} \right) = \pm\infty$$

Dakle, data funkcija nema horizontalnu asimptotu ni kada  $x \rightarrow +\infty$  ni kada  $x \rightarrow -\infty$ .

✱ Kose asimptote funkcije

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right) = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^2 - 1}{x} - x \right) = - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Dakle, prava  $y = x$  je kosa asimptota date funkcije kada  $x \rightarrow \pm\infty$ .

### 5. Monotonost funkcije

$$y' = \frac{(x^2-1)' \cdot x - (x^2-1) \cdot x'}{x^2} = \frac{2x \cdot x - (x^2-1) \cdot 1}{x^2} = \frac{x^2+1}{x^2}$$

Iz

|           |           |     |           |
|-----------|-----------|-----|-----------|
|           | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| $x^2 + 1$ | +         | +   | +         |
| $x^2$     | +         | +   | +         |
| $y$       | +         | +   | +         |

sledi da je data funkcija stalno rastuća (na celom domenu) i da nema ekstremnih tačaka.

### 6. Konveksnost i konkavnost funkcije

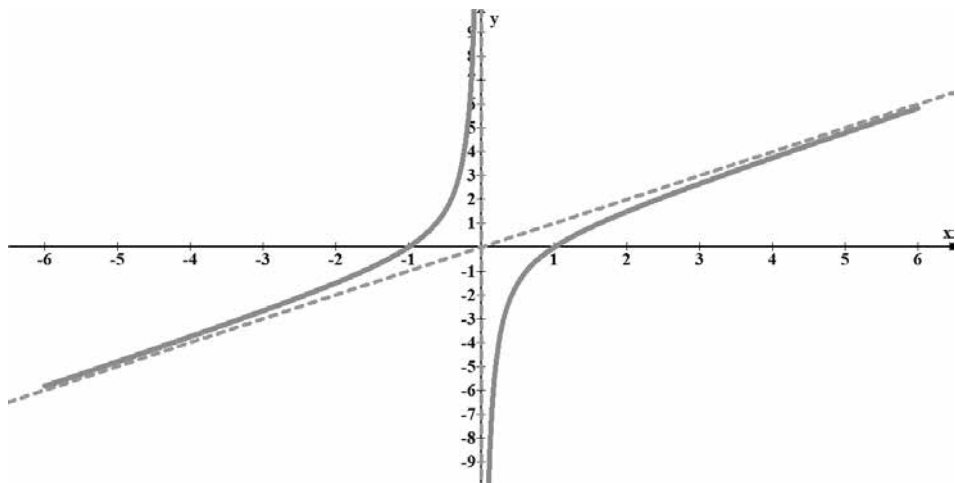
$$y'' = \frac{(x^2+1)' \cdot x^2 - (x^2+1) \cdot (x^2)'}{x^4} = \frac{2x \cdot x^2 - (x^2+1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2x(x^2 - x^2 - 1)}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$$

Iz

|       | $-\infty$ | $0$    | $+\infty$ |
|-------|-----------|--------|-----------|
| $-2$  | $-$       | $-$    | $-$       |
| $x^2$ | $+$       | $+$    | $+$       |
| $x$   | $-$       | $+$    | $+$       |
| $y''$ | $+$       | $-$    | $-$       |
| $y$   | $\cup$    | $\cap$ | $\cap$    |

sledi da data funkcija nema prevojnih tačaka ( $x = 0 \notin D_y$ ).

### 7. Grafik funkcije



3)  $y = \frac{e^x}{x-1}$

#### 1. Domen funkcije

$$D_y = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

## 2. Nule funkcije i znak funkcije

✱ Nule funkcije

$$y = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x}{x-1} = 0 \Leftrightarrow e^x = 0$$

što nije moguće jer je  $e^x > 0$  za svako  $x \in \mathbb{R}$ . Prema tome, data funkcija nema nula tj. data funkcija ne seče  $x$ -osu.

✱ Znak funkcije

|         | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----|-----------|
| $e^x$   | +         | +   | +         |
| $x - 1$ | -         | -   | +         |
| $y$     | -         | -   | +         |

## 3. Parnost i neparnost funkcije

Domen date funkcije nije simetričan u odnosu na 0 odakle zaključujemo da data funkcija *nije ni parna ni neparna*.

## 4. Asimptote funkcije

✱ Vertikalne asimptote funkcije

$$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{e^x}{x-1} = \frac{1}{0} = \pm\infty$$

Dakle, prava  $x=1$  je vertikalna asimptota date funkcije (i sa leve i sa desne strane).

**Napomena.** U prvom slučaju tj. kada  $x \rightarrow 1^+$  rešenje je  $+\infty$  jer je funkcija  $y = \frac{e^x}{x-1} > 0$  za  $x > 1$ . Analogno, kada  $x \rightarrow 1^-$  rešenje je  $-\infty$  jer je funkcija  $y = \frac{e^x}{x-1} < 0$  za  $x < 1$ .

✱ Horizontalne asimptote funkcije

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x-1} \stackrel{\text{Lopital}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x-1} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

Dakle, prava  $y=0$  je horizontalna asimptota date funkcije kada  $x \rightarrow -\infty$ .

**Napomena.** Pošto je funkcija  $y = \frac{e^x}{x-1} < 0$  za  $x \in (-\infty, 1)$  grafik ove funkcije se približava pravoj  $y = 0$ , kada  $x \rightarrow -\infty$ , sa negativne tj. donje strane.

✱ Kose asimptote funkcije

Data funkcija nema kosu asimptotu kada  $x \rightarrow -\infty$  jer ima horizontalnu asimptotu ( $y = 0$ ) kada  $x \rightarrow -\infty$ .

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 - x} \stackrel{\text{Lopital}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x - 1} \stackrel{\text{Lopital}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

Data funkcija nema kosu asimptotu ni kada  $x \rightarrow +\infty$ .

### 5. Monotonost funkcije

$$y' = \frac{(e^x)' \cdot (x-1) - (e^x) \cdot (x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{e^x \cdot (x-1) - e^x \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$$

Iz

|             | $-\infty$  | 1          | 2          | $+\infty$ |
|-------------|------------|------------|------------|-----------|
| $e^x$       | +          | +          | +          |           |
| $x - 2$     | -          | -          | +          |           |
| $(x - 1)^2$ | +          | +          | +          |           |
| $y'$        | -          | -          | +          |           |
| $y$         | $\searrow$ | $\searrow$ | $\nearrow$ |           |

sledi da je ekstremna tačka date funkcije:  $M_{min}(2, e^2)$ .

### 6. Konveksnost i konkavnost funkcije

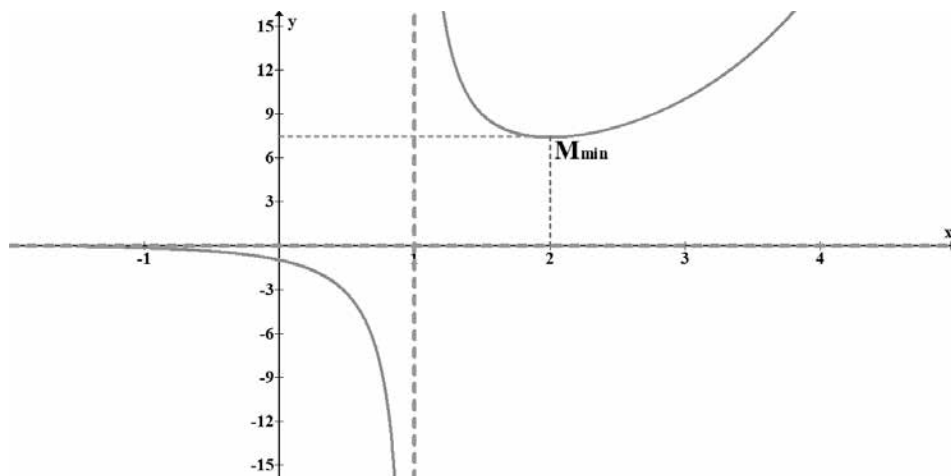
$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(e^x(x-2))' \cdot (x-1)^2 - (e^x(x-2)) \cdot ((x-1)^2)'}{(x-1)^4} \\ &= \frac{e^x(x-1) \cdot (x-1)^2 - (e^x(x-2)) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{e^x(x-1)((x-1)^2 - 2x + 4)}{(x-1)^4} \\ &= \frac{e^x(x^2 - 4x + 5)}{(x-1)^3} \end{aligned}$$

Iz

|                | $-\infty$ | $1$    | $+\infty$ |
|----------------|-----------|--------|-----------|
| $e^x$          | +         | +      |           |
| $x^2 - 4x + 5$ | +         | +      |           |
| $(x - 1)^2$    | +         | +      |           |
| $x - 1$        | -         | +      |           |
| $y''$          | -         | +      |           |
| $y$            | $\cap$    | $\cup$ |           |

sledi da data funkcija nema prevojnih tačaka ( $x = 1 \notin D_y$ ).

### 7. Grafik funkcije



4)  $y = \frac{2\ln x - 1}{x}$

### 1. Domen funkcije

$$D_y = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \wedge x \neq 0\} = (0, +\infty)$$

## 2. Nule funkcije i znak funkcije

✱ Nule funkcije

$$y = 0 \Leftrightarrow \frac{2\ln x - 1}{x} = 0 \Leftrightarrow 2\ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}}.$$

Dakle, tačka preseka sa  $x$ -osom je  $A(\sqrt{e}, 0)$ .

✱ Znak funkcije

|              |                                  |   |
|--------------|----------------------------------|---|
|              | $0 \quad \sqrt{e} \quad +\infty$ |   |
| $x$          | +                                | + |
| $2\ln x - 1$ | -                                | + |
| $y$          | -                                | + |

## 3. Parnost i neparnost funkcije

Domen date funkcije nije simetričan u odnosu na 0 na osnovu čega zaključujemo da data funkcija *nije ni parna ni neparna*.

## 4. Asimptote funkcije

✱ Vertikalne asimptote funkcije

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\ln x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2\ln x - 1) \cdot \frac{1}{x} = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$$

Dakle, prava  $x = 0$  je vertikalna asimptota date funkcije (sa desne strane).

✱ Horizontalne asimptote funkcije

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln x - 1}{x} \stackrel{Lopital}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

Dakle, prava  $y = 0$  je horizontalna asimptota date funkcije kada  $x \rightarrow +\infty$ .

**Napomena.** Pošto je funkcija  $y = \frac{2\ln x - 1}{x} > 0$  za  $x \in (\sqrt{e}, +\infty)$  grafik ove funkcije se približava pravoj  $y = 0$ , kada  $x \rightarrow +\infty$ , sa pozitivne tj. gornje strane.

✱ Kose asimptote funkcije

Data funkcija nema kosu asimptotu kada  $x \rightarrow +\infty$  jer ima horizontalnu asimptotu ( $y = 0$ ) kada  $x \rightarrow +\infty$ .

5. Monotonost funkcije

$$y' = \frac{(2\ln x - 1)' \cdot x - (2\ln x - 1) \cdot x'}{x^2} = \frac{\frac{2}{x} \cdot x - (2\ln x - 1) \cdot 1}{x^2} = \frac{3 - 2\ln x}{x^2}$$

Iz

|              |            |              |           |
|--------------|------------|--------------|-----------|
|              | 0          | $\sqrt{e^3}$ | $+\infty$ |
| $3 - 2\ln x$ | +          | -            |           |
| $x^2$        | +          | +            |           |
| $y'$         | +          | -            |           |
| $y$          | $\nearrow$ | $\searrow$   |           |

sledi da je ekstremna tačka date funkcije:  $M_{\max}(\sqrt{e^3}, \frac{2}{\sqrt{e^3}})$ .

6. Konveksnost i konkavnost funkcije

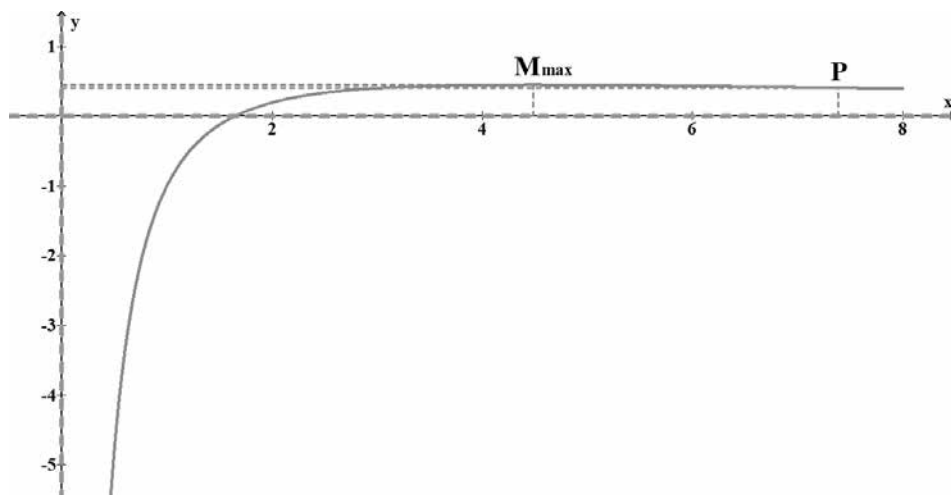
$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(3 - 2\ln x)' \cdot x^2 - (3 - 2\ln x) \cdot (x^2)'}{x^4} = \frac{-\frac{2}{x} \cdot x^2 - (3 - 2\ln x) \cdot 2x}{x^4} \\ &= \frac{-2x - (3 - 2\ln x)2x}{x^4} = \frac{-2x(1 + 3 - 2\ln x)}{x^4} = \frac{-2(4 - 2\ln x)}{x^3} = \frac{4(\ln x - 2)}{x^3} \end{aligned}$$

Iz

|             |        |        |           |
|-------------|--------|--------|-----------|
|             | 0      | $e^2$  | $+\infty$ |
| $\ln x - 2$ | -      | +      |           |
| $x^3$       | +      | +      |           |
| $y''$       | -      | +      |           |
| $y$         | $\cap$ | $\cup$ |           |

sledi da je prevojna tačka date funkcije:  $P(e^2, \frac{3}{e^2})$ .

# 7. Grafik funkcije



## **Zadaci za vežbu:**

1. Ispitati funkciju i nacrtati njen grafik.

1)  $y = \frac{3}{4}x^2$ ,   2)  $y = -\frac{2}{3}x^2$ ,   3)  $y = x^2 + 3$ ,   4)  $y = x^2 - 2$ ,   5)  $y = 1 - x^2$ ,

6)  $y = x^2 + 2x$ ,   7)  $y = -3x^2 + x$ ,   8)  $y = 3x^2 - 2x$ ,   9)  $y = -x^2 - 4x$ ,

10)  $y = x^2 + 4x + 3$ , 11)  $y = -x^2 - 4x + 5$ , 12)  $y = x^2 + 3x + 3$ , 13)  $y = -x^2 + x - 4$ .

2. Ispitati funkciju i nacrtati njen grafik.

1)  $y = x^3 - 6x$ ,   2)  $y = x^3 + 9x$ ,   3)  $y = x^3 - 6x + 5$ ,   4)  $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x - \frac{8}{3}$ ,

5)  $y = x^3 + 3x^2$ ,   6)  $y = x^3 - x^2$ ,   7)  $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$ ,   8)  $y = 4x^3 + 2x^2 - x$ ,

$$9) y = x^3 + 3x^2 - 9x, \quad 10) y = x^3 + 2x^2 - 4x, \quad 11) y = x^3 + 3x^2 + 3x + 9.$$

3. Ispitati funkciju i nacrtati njen grafik.

$$1) y = \frac{1}{x}, \quad 2) y = \frac{1}{1+2x}, \quad 3) y = \frac{1-2x}{2-x}, \quad 4) y = \frac{x^2+1}{x-1}, \quad 5) y = \frac{2x-x^2}{x-3},$$

$$6) y = \frac{x^2-6x+9}{x-1}, \quad 7) y = \frac{6-x-x^2}{x+2}, \quad 8) y = \frac{1}{1-x^2}, \quad 9) y = \frac{3x}{x^2-2},$$

$$10) y = \frac{x}{x^2+2}, \quad 11) y = \frac{x^2}{x^2-1}, \quad 12) y = \frac{x^2-3}{1-x^2}, \quad 13) y = \frac{x^2}{(x+2)^2}, \quad 14) y = \frac{x^3}{x^2-3}.$$

4. Ispitati funkciju i nacrtati njen grafik.

$$1) y = xe^x, \quad 2) y = (3-x)e^x, \quad 3) y = x^2e^x, \quad 4) y = (2-x^2)e^x, \quad 5) y = (x^2+2)^2e^x,$$

$$6) y = \frac{1}{e^x}, \quad 7) y = \frac{x}{e^x}, \quad 8) y = \frac{x+2}{e^x}, \quad 9) y = \frac{x^2}{e^x}, \quad 10) y = \frac{x^2-2}{e^x}, \quad 11) y = \frac{(1-x^2)^2}{e^x},$$

$$12) y = xe^{\frac{1}{x}}, \quad 13) y = xe^{\frac{2}{x}}, \quad 14) y = (x-2)e^{\frac{1}{x}}, \quad 15) y = x^2e^{\frac{1}{x}}, \quad 16) y = (x^2+x)e^{\frac{1}{x}},$$

$$17) y = \frac{e^x}{x}, \quad 18) y = \frac{e^x}{x^2}, \quad 19) y = \frac{e^x}{x^3}, \quad 20) y = \frac{e^x}{x+1}, \quad 21) y = \frac{e^x}{(x+1)^2}.$$

5. Ispitati funkciju i nacrtati njen grafik.

$$1) y = x \ln x, \quad 2) y = x^2 \ln x, \quad 3) y = x(\ln x + 1), \quad 4) y = x^2(1 - \ln x),$$

$$5) y = \ln(x-2), \quad 6) y = \ln(1-x), \quad 7) y = \ln(4-x^2), \quad 8) y = \ln(x^2-2),$$

$$9) y = \ln\left(\frac{2+x}{3-x}\right), \quad 10) y = \ln\left(\frac{x-1}{x+3}\right), \quad 11) y = x \ln 3x, \quad 12) y = x \ln^2 x,$$

$$13) y = \frac{\ln x}{x}, \quad 14) y = \frac{\ln x - 2}{x}, \quad 15) y = \frac{1}{\ln x}, \quad 16) y = \frac{x}{\ln x}, \quad 17) y = \frac{\ln x - 2}{\ln x + 2}.$$

## 5.8. Integrali

### 5.8.1. Neodređeni integrali

**Primer 1.** Odrediti sledeće integrale.

$$1) \int (x^3 - 5x^2 + 3x - 4) dx, \quad 2) \int \frac{\cos x}{\sin^4 x} dx, \quad 3) \int \frac{x+1}{x^2-2x} dx, \quad 4) \int (1-3x)e^x dx.$$

*Rešenje:*

$$\begin{aligned} 1) \int (x^3 - 5x^2 + 3x - 4) dx &= \int x^3 dx - 5 \int x^2 dx + 3 \int x dx - 4 \int dx \\ &= \frac{x^4}{4} - 5 \cdot \frac{x^3}{3} + 3 \cdot \frac{x^2}{2} - 4 \cdot x + C \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 4x + C, \end{aligned}$$

2) Primenimo *smenu*.

$$t = \sin x \quad \text{tj.} \quad dt = \cos x dx \quad (19)$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^4 x} dx \stackrel{(26)}{=} \int \frac{dt}{t^4} = \int t^{-4} dt = \frac{t^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{3t^3} + C = -\frac{1}{3\sin^3 x} + C,$$

3) Iz

$$\frac{x+1}{x(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+Bx}{x(x-2)} = \frac{(A+B)x-2A}{x(x-2)}$$

sledi

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ -2A &= 1 \end{aligned}$$

Iz prethodnog sistema dobijamo da je  $A = -\frac{1}{2}$  i  $B = \frac{3}{2}$ .

Prema tome,

$$\frac{x+1}{x(x-2)} = -\frac{1}{2x} + \frac{3}{2(x-2)}. \quad (20)$$

Dakle,

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^2-2x} dx &\stackrel{(20)}{=} -\int \frac{1}{2x} dx + \int \frac{3}{2(x-2)} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x-2} dx \\ &= -\frac{1}{2} \ln |x| + \frac{3}{2} \ln |x-2| + C, \end{aligned}$$

4) Primenimo *parcijalnu integraciju*.

$$\begin{aligned} u &= 1-3x & \text{tj.} & & du &= -3dx \\ dv &= e^x dx & & & v &= e^x \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \int (1-3x)e^x dx &\stackrel{(21)}{=} (1-3x)e^x + 3 \int e^x dx = (1-3x)e^x + 3e^x + C \\ &= (4-3x)e^x + C. \blacklozenge \end{aligned}$$

### ***Zadaci za vežbu:***

1. Odrediti sledeće integrale.

- 1)  $\int 3x dx$ , 2)  $\int x^4 dx$ , 3)  $\int \frac{\sqrt{x}}{2} dx$ , 4)  $\int \sqrt{x^3} dx$ , 5)  $\int x \sqrt[3]{x} dx$ ,  
 6)  $\int \sqrt{\sqrt{x}} dx$ , 7)  $\int \frac{1}{x^3} dx$ , 8)  $\int \frac{3}{\sqrt{x}} dx$ , 9)  $\int \frac{2x}{\sqrt[3]{x}} dx$ , 10)  $\int \frac{\sqrt{x}}{x^3} dx$ ,  
 11)  $\int 4 \cos x dx$ , 12)  $\int 5e^x dx$ , 13)  $\int 3^x dx$ , 14)  $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$ , 15)  $\int \frac{2}{\sin^2 x} dx$ .

**2.** Odrediti sledeće integrale.

$$\begin{aligned}
 &1) \int \left( \frac{3\sqrt{x}}{4} - 2x + x^2 \right) dx, \quad 2) \int \left( 3\sqrt[3]{x} + \frac{2}{x^2} - 4 \right) dx, \quad 3) \int \left( \frac{\sqrt[3]{x^2}}{4} + \frac{2}{\sqrt{x}} - x \right) dx, \\
 &4) \int \frac{x^4 + \sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x}}{x^2} dx, \quad 5) \int \frac{x^3 + 4x^2 + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx, \quad 6) \int \frac{x^2 + 3x - 2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} dx, \\
 &7) \int \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)}{4x} dx, \quad 8) \int \frac{(x+2)(3-x)}{2x^2} dx, \quad 9) \int \frac{(x^2+2)(x^2-1)}{3x^3} dx, \\
 &10) \int \left( \frac{1}{\sqrt{x}} + \sin x + 3e^x \right) dx, \quad 11) \int \left( \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \cos x - e^x \right) dx, \quad 12) \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx, \\
 &13) \int \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} dx, \quad 14) \int \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} dx, \quad 15) \int \frac{2x-8}{\sqrt{x}+2} dx, \quad 16) \int \frac{8x^2-2}{2x-1} dx.
 \end{aligned}$$

**3.** Odrediti sledeće integrale.

$$\begin{aligned}
 &1) \int (2+3x)^7 dx, \quad 2) \int (x+1)^{\frac{1}{3}} dx, \quad 3) \int (3+x^2)^5 x dx, \quad 4) \int (2-x^4)^6 x^3 dx, \\
 &5) \int x e^{x^2} dx, \quad 6) \int \frac{1}{2} x e^{-3x^2} dx, \quad 7) \int 3x^2 e^{-x^3} dx, \quad 8) \int (2x+5) e^{x^2+5x} dx, \\
 &9) \int \frac{2}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx, \quad 10) \int \frac{3}{x^3} e^{\frac{2}{x^2}} dx, \quad 11) \int \frac{1}{\sqrt{x^3}} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} dx, \quad 12) \int \frac{2\ln^3 x}{x} dx, \\
 &13) \int \frac{\ln^5 x}{x} dx, \quad 14) \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx, \quad 15) \int x \cos(1-x^2) dx, \quad 16) \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx, \\
 &17) \int \frac{3x}{\cos^2 x^2} dx, \quad 18) \int \frac{x^2}{\sin^2 x^3} dx, \quad 19) \int e^{\cos x} \sin x dx, \quad 20) \int 3^{\sin x} \cos x dx.
 \end{aligned}$$

4. Odrediti sledeće integrale.

$$\begin{aligned} & 1) \int \frac{3}{1+2x} dx, \quad 2) \int \frac{x}{3+4x^2} dx, \quad 3) \int \frac{x^2}{1+x^3} dx, \quad 4) \int \frac{x^2}{(3+2x^3)^2} dx, \\ & 5) \int \frac{3}{\sqrt[3]{2x+1}} dx, \quad 6) \int \frac{x}{\sqrt{2-3x^2}} dx, \quad 7) \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+2x^3}} dx, \quad 8) \int \frac{2x+3}{x^2+3x+4} dx, \\ & 9) \int \frac{1+x}{3+2x+x^2} dx, \quad 10) \int \frac{3x+1}{\sqrt{3x^2+2x+1}} dx, \quad 11) \int \frac{\sqrt[4]{1+\ln x}}{x} dx, \quad 12) \int \frac{1}{x \ln x} dx, \\ & 13) \int \frac{1}{x(1+\ln x)} dx, \quad 14) \int \frac{\cos x}{1-\sin x} dx, \quad 15) \int \frac{\sin x}{\sqrt{1-2\cos x}} dx, \quad 16) \int \frac{\cos x}{\sqrt[4]{1+\sin x}} dx. \end{aligned}$$

5. Odrediti sledeće integrale.

$$\begin{aligned} & 1) \int \frac{1}{x^2-4x+3} dx, \quad 2) \int \frac{1}{x^2+5x+6} dx, \quad 3) \int \frac{1}{x^2-6x+8} dx, \\ & 4) \int \frac{x-1}{x^2+x} dx, \quad 5) \int \frac{3x+2}{x^2-x} dx, \quad 6) \int \frac{x-2}{x^2+3x} dx, \quad 7) \int \frac{x+1}{x-2x^2} dx, \\ & 8) \int \frac{x+2}{x^2+4x-5} dx, \quad 9) \int \frac{2x-5}{x^2+4x+3} dx, \quad 10) \int \frac{3x+4}{x^2+x-2} dx, \\ & 11) \int \frac{2-x}{x^3-x} dx, \quad 12) \int \frac{x+4}{x^3-9x} dx, \quad 13) \int \frac{2x-3}{x^3-16x} dx, \quad 14) \int \frac{2+x-x^2}{x^3+x^2-2x} dx. \end{aligned}$$

6. Odrediti sledeće integrale.

$$1) \int \frac{x^2}{x+2} dx, \quad 2) \int \frac{x^2}{x-3} dx, \quad 3) \int \frac{x^2+3}{x+2} dx, \quad 4) \int \frac{2-3x^2}{x-1} dx,$$

$$\begin{aligned}
 &5) \int \frac{1-2x^2}{x-2} dx, \quad 6) \int \frac{x^3}{x-3} dx, \quad 7) \int \frac{x^3}{x+1} dx, \quad 8) \int \frac{1-x^3}{x+2} dx, \\
 &9) \int \frac{x^3-x+2}{x+2} dx, \quad 10) \int \frac{x^3-x^2}{x-3} dx, \quad 11) \int \frac{x^3+2x^2-3x-1}{x+1} dx, \\
 &12) \int \frac{x^3}{x^2+2} dx, \quad 13) \int \frac{x^3+1}{2-x^2} dx, \quad 14) \int \frac{x^3-2}{x^2-x} dx, \quad 15) \int \frac{x^3-x+3}{x^2+x} dx, \\
 &16) \int \frac{2x^3-x^2+x+1}{x^2-x} dx, \quad 17) \int \frac{x^3+3}{x^2-x-2} dx, \quad 18) \int \frac{2x^3-3x+2}{x^2+x-2} dx, \\
 &19) \int \frac{x^3+x^2+2}{x^2+2x-3} dx, \quad 20) \int \frac{2x^3-3x+2}{x^2+x-2} dx, \quad 21) \int \frac{2x^3-3x^2+2x+1}{x^2+2x-3} dx.
 \end{aligned}$$

7. Odrediti sledeće integrale.

$$\begin{aligned}
 &1) \int \ln x \, dx, \quad 2) \int x \ln x \, dx, \quad 3) \int x e^x \, dx, \quad 4) \int x \cos x \, dx, \\
 &5) \int x \sin x \, dx, \quad 6) \int \frac{\ln x}{x^2} \, dx, \quad 7) \int \frac{\ln x}{x^3} \, dx, \quad 8) \int x^2 \ln x \, dx, \\
 &9) \int x^2 e^x \, dx, \quad 10) \int x^2 \cos x \, dx, \quad 11) \int x^2 \sin x \, dx, \quad 12) \int (2x+1) \ln x \, dx, \\
 &13) \int (1+x) e^x \, dx, \quad 14) \int (1-3x) \sin x \, dx, \quad 15) \int (3+2x) \cos x \, dx, \\
 &16) \int (x^2+1) \ln x \, dx, \quad 17) \int \ln^2 x \, dx, \quad 18) \int (2x^2-1) e^x \, dx, \quad 19) \int (1+x^2) \sin x \, dx, \\
 &20) \int (2-x^2) \cos x \, dx, \quad 21) \int e^x \sin x \, dx, \quad 22) \int e^x \cos x \, dx, \quad 23) \int e^{\sqrt{x}} \, dx.
 \end{aligned}$$

### 5.8.2. Određeni integrali

**Primer 1.** Izračunati sledeće integrale.

$$1) \int_{-1}^2 (x^2 + 3x - 4) dx, \quad 2) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x \sin x dx, \quad 3) \int_1^e \ln x dx.$$

*Rešenje:*

$$\begin{aligned} 1) \int_{-1}^2 (x^2 + 3x - 4) dx &= \int_{-1}^2 x^2 dx + 3 \int_{-1}^2 x dx - 4 \int_{-1}^2 dx \\ &= \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^2 + 3 \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^2 - 4x \Big|_{-1}^2 \\ &= \frac{1}{3}(2^3 - (-1)^3) + \frac{3}{2}(2^2 - (-1)^2) - 4(2 - (-1)) \\ &= \frac{1}{3}(8 + 1) + \frac{3}{2}(4 - 1) - 4(2 + 1) = 3 + \frac{9}{2} - 12 = -\frac{9}{2}, \end{aligned}$$

2) Primenimo *smenu*.

$$t = \cos x \quad \text{tj.} \quad dt = -\sin x dx \quad (22)$$

Na osnovu (22) dobijamo:

$$\begin{aligned} \text{Ako je } x = \frac{\pi}{4}, \text{ tada je } t &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{Ako je } x = \frac{\pi}{3}, \text{ tada je } t &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (23)$$

Prema tome,

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x \sin x dx &\stackrel{(22), (23)}{=} - \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} t^2 dt = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= \frac{1}{3} \left( \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 - \left( \frac{1}{2} \right)^3 \right) = \frac{1}{3} \left( \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{8} \right) = \frac{2\sqrt{2}-1}{24}, \end{aligned}$$

3) Primenimo *parcijalnu integraciju*.

$$\begin{aligned} u &= \ln x & du &= \frac{1}{x} dx \\ dv &= dx & \text{tj.} & & v &= x \end{aligned} \quad (24)$$

Prema tome,

$$\begin{aligned}\int_1^e \ln x \, dx &\stackrel{(24)}{=} x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \frac{1}{x} \, dx = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx = x \ln x \Big|_1^e - x \Big|_1^e \\ &= x(\ln x - 1) \Big|_1^e = e(\ln e - 1) - 1(\ln 1 - 1) \\ &= e(1 - 1) - 1(0 - 1) = 1. \blacklozenge\end{aligned}$$

### **Zadaci za vežbu:**

1. Izračunati sledeće integrale.

$$\begin{aligned}1) \int_3^4 5 \, dx, \quad 2) \int_{-3}^{-2} \frac{2}{3} \, dx, \quad 3) \int_0^1 \frac{x}{3} \, dx, \quad 4) \int_{-1}^1 3x^2 \, dx, \quad 5) \int_1^9 \sqrt{x} \, dx, \\ 6) \int_0^{27} \sqrt[3]{x} \, dx, \quad 7) \int_0^9 \sqrt{x^3} \, dx, \quad 8) \int_1^2 x^2 \sqrt{x} \, dx, \quad 9) \int_2^3 \frac{2}{x^2} \, dx, \quad 10) \int_1^4 \frac{3}{\sqrt{x}} \, dx, \\ 11) \int_1^4 \frac{\sqrt[4]{x}}{x} \, dx, \quad 12) \int_{\frac{1}{9}}^{\frac{1}{4}} \frac{x^2}{3\sqrt{x}} \, dx, \quad 13) \int_3^4 \frac{1}{x} \, dx, \quad 14) \int_{-1}^0 2e^x \, dx, \quad 15) \int_1^2 \frac{2^x}{3} \, dx, \\ 16) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x \, dx, \quad 17) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{2} \, dx, \quad 18) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x} \, dx, \quad 19) \int_{-\frac{\pi}{3}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{4}{\cos^2 x} \, dx.\end{aligned}$$

2. Izračunati sledeće integrale.

$$\begin{aligned}1) \int_{-2}^{-1} (4 - 3x + 2x^2) \, dx, \quad 2) \int_1^2 \left(4 + \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^4}\right) \, dx, \quad 3) \int_0^1 \left(\frac{2}{3}\sqrt{x} + 3x - 2x^2\right) \, dx, \\ 4) \int_0^1 \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} \, dx, \quad 5) \int_4^9 \frac{3-3x}{1+\sqrt{x}} \, dx, \quad 6) \int_{-2}^1 \frac{4x^2-1}{2x-1} \, dx, \quad 7) \int_{-3}^{-2} \frac{25x^2-1}{5x+1} \, dx,\end{aligned}$$

$$8) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left( \cos x + \frac{\sin x}{3} \right) dx, \quad 9) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left( \frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx, \quad 10) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx,$$

$$11) \int_{-1}^1 (x - e^x) dx, \quad 12) \int_0^1 (e^x + x^2) dx, \quad 13) \int_1^2 \left( x^3 - \frac{e^x}{3} \right) dx, \quad 14) \int_{-1}^0 \left( \frac{e^x}{2} + x^2 \right) dx.$$

**3.** Izračunati sledeće integrale.

$$1) \int_0^1 (2-3x)^4 dx, \quad 2) \int_0^5 (x+4)^{\frac{3}{2}} dx, \quad 3) \int_0^1 (3-x^2)^5 x dx, \quad 4) \int_0^1 (x^3-1)^6 x^2 dx,$$

$$5) \int_{-2}^{-1} \frac{e^{2x+1}}{2} dx, \quad 6) \int_0^{\sqrt{3}} x e^{x^2} dx, \quad 7) \int_1^{\sqrt{2}} 2x e^{3x^2} dx, \quad 8) \int_{-1}^0 \frac{2}{3} x^2 e^{x^3} dx,$$

$$9) \int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx, \quad 10) \int_{-2}^{-1} \frac{2}{x^3} e^{\frac{3}{x^2}} dx, \quad 11) \int_4^9 \frac{3}{\sqrt{x^3}} e^{\frac{2}{\sqrt{x}}} dx, \quad 12) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x e^{\sin x} dx,$$

$$13) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx, \quad 14) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx, \quad 15) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^2 x dx, \quad 16) \int_{\sqrt{\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} x \sin x^2 dx,$$

$$17) \int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} \frac{x}{\sin^2(2x^2)} dx, \quad 18) \int_{\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{3}}} \frac{x^2}{\cos^2 x^3} dx, \quad 19) \int_1^{e^2} \frac{\ln^3 x}{x} dx, \quad 20) \int_e^{e^3} \frac{1}{x \ln^2 x} dx.$$

**4.** Izračunati sledeće integrale.

$$1) \int_{-3}^{-2} \frac{1}{1-x} dx, \quad 2) \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx, \quad 3) \int_0^{\sqrt[3]{2}} \frac{x^2}{1+x^3} dx, \quad 4) \int_0^1 \frac{x^2}{(1+3x^3)^2} dx,$$

$$5) \int_1^2 \frac{2}{\sqrt[3]{4x-3}} dx, \quad 6) \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}} dx, \quad 7) \int_{-1}^0 \frac{x^2}{\sqrt[3]{4+3x^3}} dx, \quad 8) \int_1^e \frac{1-3\ln x}{x} dx,$$

$$\begin{aligned}
 &9) \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln^3 x} dx, \quad 10) \int_{e^2}^{e^3} \frac{\sqrt[4]{3 - \ln x}}{x} dx, \quad 11) \int_0^1 \frac{5}{4 - x^2} dx, \quad 12) \int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx, \\
 &13) \int_4^5 \frac{3 - 2x}{x^2 - 3x + 2} dx, \quad 14) \int_5^6 \frac{2x - 7}{x^2 - 7x + 12} dx, \quad 15) \int_0^1 \frac{4x + 7}{x^2 + 3x + 2} dx, \\
 &16) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2 - \cos x} dx, \quad 17) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{3 - \cos x}} dx, \quad 18) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \sqrt{2} \cos x}} dx.
 \end{aligned}$$

5. Izračunati sledeće integrale.

$$\begin{aligned}
 &1) \int_e^{e^2} \ln x \, dx, \quad 2) \int_1^e x \ln x \, dx, \quad 3) \int_1^2 x e^x \, dx, \quad 4) \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cos x \, dx, \\
 &5) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx, \quad 6) \int_{e^{-1}}^1 \frac{\ln x}{x^2} \, dx, \quad 7) \int_{e^{-1}}^e \frac{\ln x}{x^3} \, dx, \quad 8) \int_e^{e^2} x^2 \ln x \, dx, \\
 &9) \int_1^2 x^2 e^x \, dx, \quad 10) \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 x^2 \cos x \, dx, \quad 11) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \, dx, \quad 12) \int_1^e (x - 1) \ln x \, dx, \\
 &13) \int_{-1}^0 (1 - 3x) e^x \, dx, \quad 14) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (x - 1) \cos x \, dx, \quad 15) \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + x) \sin x \, dx, \\
 &16) \int_1^{e^2} \ln^2 x \, dx, \quad 17) \int_e^{e^2} (x^2 - 2) \ln x \, dx, \quad 18) \int_0^1 (1 + 3x^2) e^x \, dx, \\
 &19) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - x^2) \cos x \, dx, \quad 20) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 - x^2) \sin x \, dx, \quad 21) \int_4^9 e^{\sqrt{x}} \, dx.
 \end{aligned}$$

**6.** Izračunati površinu figure ograničene pravom  $y = 0$  i lukom krive:

1)  $y = -x^2 + x$ ,    2)  $y = -x^2 + 3x$ ,    3)  $y = x^2 + x$ ,    4)  $y = -x^2 - 2x$ ,

5)  $y = 3x^2 + 4x$ , 6)  $y = -3x^2 + 2x$ , 7)  $y = -x^2 + 3x + 4$ , 8)  $y = -x^2 - x + 6$ ,

9)  $y = x^2 - 3x - 10$ ,            10)  $y = -3x^2 + x + 2$ ,            11)  $y = 4x^2 - 5x + 1$ ,

12)  $y = 2x^2 + x - 6$ ,            13)  $y = -2x^2 + 7x + 9$ ,            14)  $y = -2x^2 + 5x - 3$ .

**7.** Izračunati površinu figure koja je ograničena linijama:

1)  $y = -x^2 + 6x - 3$     i     $y = x + 1$ ,    2)  $y = -x^2 + 8x - 10$     i     $y = x + 2$ ,

3)  $y = x^2 - 6x + 7$     i     $y = x - 3$ ,    4)  $y = -x^2 + 10x - 15$     i     $y = x + 3$ ,

5)  $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 3$     i     $y = x + 1$ ,    6)  $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 1$     i     $y = x + 1$ ,

7)  $y = -\frac{1}{2}x^2 + x - 3$     i     $y = 1 - 2x$ ,    8)  $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 5$     i     $y = 3 - 2x$ .

**8.** Izračunati površinu figure koja je ograničena linijama:

1)  $y = x^2 - 5x$     i     $y = -x^2 + x$ ,            2)  $y = x^2 - 2x$     i     $y = -x^2 + 3x$ ,

3)  $y = x^2 + x$     i     $y = -x^2 - 4x$ ,            4)  $y = x^2 - x - 2$     i     $y = -x^2 + 2x$ ,

5)  $y = x^2 - 4$     i     $y = -x^2 + x + 2$ ,            6)  $y = x^2 - 3$     i     $y = -x^2 - 1$ ,

7)  $y = x^2 + 3x - 4$     i     $y = -x^2 - x + 2$ ,            8)  $y = x^2$     i     $y = -x^2 + 4$ ,

9)  $y = x^2 - 4$     i     $y = -x^2 + 2$ ,            10)  $y = x^2 + x - 1$     i     $y = -x^2 + 9$ .

**9.** Izračunati zapreminu tela koje nastaje rotacijom oko  $x$ -ose dela površi ograničenog  $x$ -osom i lukom krive:

1)  $y = 3x - x^2$ ,      2)  $y = -x - x^2$ ,      3)  $y = x^2 + 2x$       4)  $y = x^2 - 4x$ ,

5)  $y = -x^2 - x + 6$ , 6)  $y = x^2 + 4x + 3$ , 7)  $y = -2x^2 + x + 1$ , 8)  $y = 2x^2 - x - 6$ .

**10.** Izračunati zapreminu tela koje nastaje rotacijom oko  $x$ -ose površi ograničene linijama:

1)  $y = \frac{3}{2}x^2 + 2$  i  $y = x^2$ , 2)  $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$  i  $y = x^2$ , 3)  $y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}$  i  $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ ,

4)  $y = \frac{1}{3}x^2 + 2$  i  $y = x^2$ , 5)  $y = \frac{2}{3}x^2 + 1$  i  $y = x^2 + \frac{2}{3}$ , 6)  $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$  i  $y = x^2 + \frac{1}{2}$ .

**11.** Izračunati zapreminu tela koje nastaje rotacijom oko  $y$ -ose površi ograničene linijama iz prethodnog zadatka.

**12.** Izračunati dužinu luka

1) krive  $y = x\sqrt{x}$  između tačaka  $O(0, 0)$  i  $A(4, 8)$ ,

2) krive  $y = \frac{1}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}}$  između tačaka  $A(\frac{5}{2}, \frac{8}{3})$  i  $B(5, 9)$ ,

3) krive  $y = \frac{2}{9}(3x-1)^{\frac{3}{2}}$  između tačaka  $A(\frac{5}{3}, \frac{16}{9})$  i  $B(\frac{10}{3}, 6)$ .

4) krive  $y = \frac{1}{6}(4x-1)^{\frac{3}{2}}$  između tačaka  $A(\frac{5}{4}, \frac{4}{3})$  i  $B(\frac{5}{2}, \frac{9}{2})$ .

## 6. Ekonomske funkcije

Literatura u kojoj možete pronaći neophodne informacije o ekonomskim funkcijama: [2], [9], [12] ili [14].

**Primer 1.** Data je funkcija tražnje  $x = -3p + 18$ . Odrediti

a) količinu i cenu pri kojima je ukupan prihod pri prodaji ove robe maksimalan,

b) koliko iznosi maksimalan ukupan prihod.

Rešenje: Iz potrebnih uslova postojanja funkcije  $x = f(p)$  kao funkcije tražnje, a to su:

dobijamo:  $p > 0$ ,  $x > 0$  i  $x' < 0$ ,

$$\left. \begin{array}{l} p > 0 \\ x > 0 \\ x' < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} p > 0 \\ -3p + 18 > 0 \\ -3 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} p > 0 \\ p < 6 \\ \text{za svako } p \end{array} \right\} \Rightarrow p \in (0, 6).$$

Dakle,  $p \in (0, 6)$  iz čega zaključujemo da  $x \in (0, 18)$ .

a) Iz  $P = x \cdot p = (-3p + 18)p = -3p^2 + 18p$  dobijamo:  $P' = -6p + 18$  tj.  $P'' = -6$ . Pošto je  $P' = 0 \iff -6p + 18 = 0 \iff p = 3$  i pri tome je  $P''(3) = -6 < 0$  zaključujemo da je  $p = 3$  cena pri kojoj se postiže maksimalan ukupan prihod, odnosno da je  $x(3) = -3 \cdot 3 + 18 = 9$  količina pri kojoj se postiže maksimalan ukupan prihod,

b)  $P_{max} = P(3) = -3 \cdot 3^2 + 18 \cdot 3 = 27$ . ♦

**Primer 2.** Odrediti (grafički i računski) cenu za koju se postiže ravnoteža tražnje i ponude, ako je funkcija tražnje data sa  $x = -2p + 10$  i funkcija ponude date sa  $y = p^2 + 2$ .

Rešenje: Iz potrebnih uslova postojanja funkcije  $x = f(p)$  kao funkcije tražnje a to su:

dobijamo:  $p > 0$ ,  $x > 0$  i  $x' < 0$ ,

$$\left. \begin{array}{l} p > 0 \\ x > 0 \\ x' < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} p > 0 \\ -2p + 10 > 0 \\ -2 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} p > 0 \\ p < 5 \\ \text{za svako } p \end{array} \right\} \Rightarrow p \in (0, 5).$$

Dakle,  $p \in (0, 5)$  iz čega zaključujemo da  $x \in (0, 10)$ .

Iz potrebnih uslova postojanja funkcije  $y = f(p)$  kao funkcije ponude a to su:

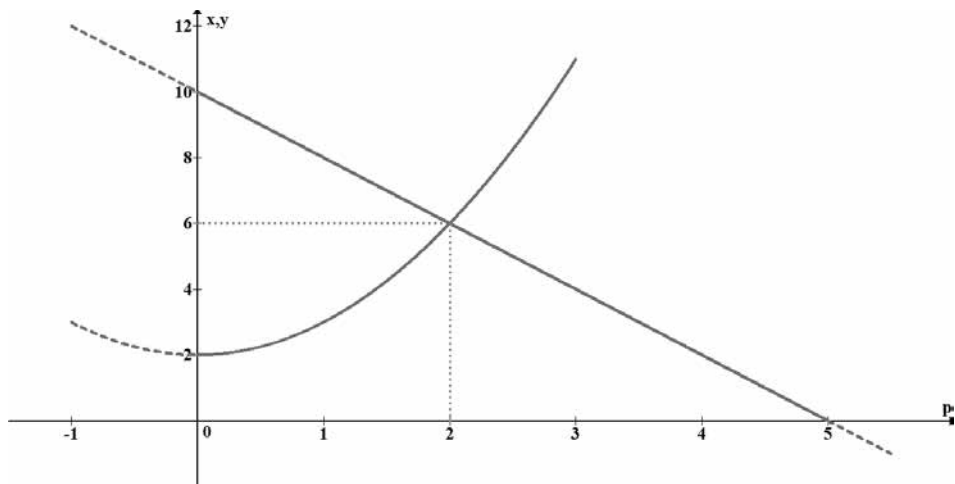
dobijamo:  $p > 0$ ,  $y > 0$  i  $y' > 0$ ,

$$\left. \begin{array}{l} p > 0 \\ y > 0 \\ y' > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} p > 0 \\ p^2 + 2 > 0 \\ 2p > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{za svako } p \left. \begin{array}{l} p > 0 \\ p > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow p \in (0, +\infty).$$

Dakle,  $p \in (0, +\infty)$  iz čega zaključujemo da  $y \in (2, +\infty)$ .

Imajući u vidu da  $p \in (0, 5)$  i  $p \in (0, +\infty)$  dobijamo da je  $p \in (0, 5)$  zajednički uslov koji ispunjava cena.

a) grafičko rešenje:



*Ravnoteža tržišta*  
 $x = -2p + 10$  i  $y = p^2 + 2$

b) računsko rešenje:

Uslov ravnoteže tražnje i ponude tj. ravnoteže tržišta je:  $x = y$ .

Iz navedenog uslova dobijamo  $-2p + 10 = p^2 + 2$  tj.  $p^2 + 2p - 8 = 0$ .

Pošto je,

$$p^2 + 2p - 8 = 0 \Leftrightarrow p = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} \Leftrightarrow p = 2 \vee p = -4,$$

iz uslova  $p \in (0, 5)$ , zaključujemo da je  $p = 2$  cena za koju se postiže ravnoteža tražnje i ponude. ♦

**Primer 3.** Date su funkcija tražnje  $x = -\frac{2}{3}p + 30$  i funkcija prosečnih troškova proizvodnje  $\overline{C} = \frac{3}{2}x - 15 + \frac{288}{x}$ . Odrediti interval rentabilnosti.

Rešenje: Iz potrebnih uslova postojanja funkcije  $x = f(p)$  kao funkcije tražnje a to su:

dobijamo:  $p > 0, \quad x > 0 \quad \text{i} \quad x' < 0,$

$$\left. \begin{array}{l} p > 0 \\ x > 0 \\ x' < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} p > 0 \\ -\frac{2}{3}p + 30 > 0 \\ -\frac{2}{3} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} p > 0 \\ p < 45 \\ \text{za svako } p \end{array} \right\} \Rightarrow p \in (0, 45).$$

Dakle,  $p \in (0, 45)$  iz čega zaključujemo da  $x \in (0, 30)$ .

Iz  $\overline{C} = \frac{3}{2}x - 15 + \frac{288}{x}$ , imajući u vidu da je  $\overline{C} = \frac{C}{x}$ , dobijamo da je  $C = \frac{3}{2}x^2 - 15x + 288$ .

Iz uslova :

dobijamo:  $x > 0, \quad C > 0 \quad \text{i} \quad C' > 0,$

$$\left. \begin{array}{l} x > 0 \\ C > 0 \\ C' > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x > 0 \\ \frac{3}{2}x^2 - 15x + 288 > 0 \\ 3x - 15 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x > 0 \\ \text{za svako } x \\ x > 5 \end{array} \right\} \Rightarrow x \in (5, +\infty).$$

Imajući u vidu da  $x \in (0, 30)$  i  $x \in (5, +\infty)$  dobijamo da je  $x \in (5, 30)$  zajednički uslov.

Iz  $x = -\frac{2}{3}p + 30$  dobijamo da je  $p = -\frac{3}{2}x + 45$ . Dakle,  $P = x \cdot p = x(-\frac{3}{2}x + 45) = -\frac{3}{2}x^2 + 45x$ .

Interval rentabilnosti dobija se iz uslova  $P = C$ . Dakle, potrebno je rešiti jednačinu

$$-\frac{3}{2}x^2 + 45x = \frac{3}{2}x^2 - 15x + 288$$

tj.  $-3x^2 + 60x - 288 = 0$  tj.  $x^2 - 20x + 96 = 0$ .

$$x^2 - 20x + 96 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 384}}{2} = \frac{20 \pm 4}{2} \Leftrightarrow x = 8 \vee x = 12.$$

Dakle, interval rentabilnosti je  $(8, 12)$ . ♦

**Primer 4.** Date su funkcija ukupnih prihoda  $P = -0,5p^2 + 52p$  i funkcija ukupnih troškova proizvodnje  $C = x^2 - 46x + 1728$ . Odrediti

- a) količinu i cenu pri kojima se postiže maksimalna dobit,
- b) koliko iznosi maksimalna dobit.

Rešenje:

Iz  $P = x \cdot p = -0,5p^2 + 52p = (-0,5p + 52)p$  dobijamo:  $x = -0,5p + 52$   
 tj.  $p = -2x + 104$  tj.  $P = -2x^2 + 104x$ .

Iz potrebnih uslova postojanja funkcije  $x = f(p)$  kao funkcije tražnje a to su:

$p > 0,$        $x > 0$       i       $x' < 0,$   
 dobijamo:

$$\left. \begin{array}{l} p > 0 \\ x > 0 \\ x' < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} p > 0 \\ -0,5p + 52 > 0 \\ -0,5 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} p > 0 \\ p < 104 \\ \text{za svako } p \end{array} \right\} \Rightarrow p \in (0, 104).$$

Dakle,  $p \in (0, 104)$  iz čega zaključujemo da  $x \in (0, 52)$ .

Iz  $x = -0,5p + 52$  tj.  $p = -2x + 104$  dobijamo da je  $P = -2x^2 + 104x$  tj.  
 $D = P - C = -2x^2 + 104x - (x^2 - 46x + 1728) = -3x^2 + 150x - 1728$ .

- a) Prema tome  $D' = -6x + 150$  tj.  $D'' = -6$ . Imajući u vidu da je  $D' = 0 \Leftrightarrow -6x + 150 = 0 \Leftrightarrow x = 25$  i pri tome je  $D''(25) = -6 < 0$ ,

zaključujemo da je  $x = 25$  količina pri kojoj se postiže maksimalna dobit, odnosno da je  $p(25) = -2 \cdot 25 + 104 = 54$  cena pri kojoj se postiže maksimalna dobit,

Provera uslova  $C > 0$  i  $C' > 0$

$$C(25) = 25^2 - 46 \cdot 25 + 1\,728 = 1203 > 0, \quad C'(25) = 2 \cdot 25 - 46 = 4 > 0$$

$$\text{b) } D_{max} = D(25) = -3 \cdot 25^2 + 150 \cdot 25 - 1\,728 = 147. \blacklozenge$$

**Primer 5.** Data je funkcija prosečnih troškova proizvodnje  $\overline{C} = x - 32 + \frac{112}{x}$ . Odrediti

- funkciju ukupnih troškova proizvodnje,
- funkciju graničnih troškova proizvodnje,
- koeficijent elastičnosti funkcije ukupnih troškova proizvodnje,
- nivo (obim) proizvodnje za koji je koeficijent elastičnosti funkcije ukupnih troškova proizvodnje veći od 1 tj. funkcija ukupnih troškova proizvodnje elastična,
- elastičnost funkcije ukupnih troškova proizvodnje za  $x = 30$ ,

Rešenje:

a) Iz  $\overline{C} = x - 32 + \frac{112}{x}$ , imajući u vidu da je  $\overline{C} = \frac{C}{x}$ , dobijamo da je  $C = \overline{C} \cdot x = (x - 32 + \frac{112}{x})x = x^2 - 32x + 112$ ,

b) Pošto je funkcija ukupnih troškova proizvodnje  $C = x^2 - 32x + 112$ , dobijamo da je funkcija graničnih troškova proizvodnje  $C' = 2x - 32$ ,

Iz uslova  $x > 0$ ,  $C > 0$  i  $C' > 0$ , imajući u vidu da je,

$$x^2 - 32x + 112 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{32 \pm \sqrt{1024 - 448}}{2} = \frac{32 \pm 24}{2} \Leftrightarrow x = 28 \vee x = 4$$

i

$-\infty \quad 4 \quad 28 \quad +\infty$

|                   |   |   |   |
|-------------------|---|---|---|
| $x - 28$          | - | - | + |
| $x - 4$           | - | + | + |
| $(x - 28)(x - 4)$ | + | - | + |

,

dobijamo da je  $x \in (0, 4) \cup (28, +\infty)$ , dok iz  $2x - 32 > 0$  dobijamo da je  $x > 16$ . Dakle,  $x \in (28, +\infty)$ .

$$c) E_{C,x} = \frac{x}{C} \cdot C' = \frac{x}{x^2 - 32x + 112} \cdot (2x - 32) = \frac{2x^2 - 32x}{x^2 - 32x + 112},$$

$$d) \frac{2x^2 - 32x}{x^2 - 32x + 112} > 1 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 32x}{x^2 - 32x + 112} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 32x - (x^2 - 32x + 112)}{x^2 - 32x + 112} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 112}{x^2 - 32x + 112} > 0 \Leftrightarrow x^2 - 112 > 0 \Leftrightarrow (x + \sqrt{112})(x - \sqrt{112}) > 0.$$

Iz

|                                  |           |              |             |           |
|----------------------------------|-----------|--------------|-------------|-----------|
|                                  | $-\infty$ | $-4\sqrt{7}$ | $4\sqrt{7}$ | $+\infty$ |
| $x + 4\sqrt{7}$                  | -         | +            | +           |           |
| $x - 4\sqrt{7}$                  | -         | -            | +           | ,         |
| $(x + 4\sqrt{7})(x - 4\sqrt{7})$ | +         | -            | +           |           |

zaključujemo da je za  $x \in ((-\infty, -4\sqrt{7}) \cup (4\sqrt{7}, +\infty)) \cap (28, +\infty) = (28, +\infty)$  koeficijent elastičnosti funkcije ukupnih troškova proizvodnje veći od 1,

$$e) E_{C,x}(30) = \frac{2 \cdot 30^2 - 32 \cdot 30}{30^2 - 32 \cdot 30 + 112} = \frac{840}{52} = 16.15. \blacklozenge$$

### **Zadaci za vežbu:**

**1.** Iz potrebnih uslova postojanja funkcije  $x = f(p)$  kao funkcije tražnje odrediti interval na kojem sledeće funkcije predstavljaju funkcije tražnje.

$$a) x = -2p + 7, \quad b) x = -3p + 13, \quad c) x = -5p + 26,$$

$$d) x = -p^2 + 64, \quad e) x = -p^2 + 2p + 3, \quad f) x = -p^2 + 4p + 21.$$

**2.** Iz potrebnih uslova postojanja funkcije  $y = f(p)$  kao funkcije ponude odrediti interval na kojem sledeće funkcije predstavljaju funkcije ponude.

$$a) y = 2p - 1, \quad b) y = 3p - 4, \quad c) y = 5p - 7,$$

$$c) y = p^2 + 1, \quad d) y = p^2 + 3, \quad e) y = p^2 - 4.$$

**3.** Funkcija tražnje nekog proizvoda data je sa  $x = -p + 6$ . Odrediti

a) količinu i cenu pri kojima je ukupan prihod pri prodaji ove robe maksimalan,

b) koliko iznosi maksimalan ukupan prihod.

**4.** Funkcija tražnje nekog proizvoda data je sa  $x = -p + 34$ . Odrediti

a) količinu i cenu pri kojima je ukupan prihod pri prodaji ove robe maksimalan,

b) koliko iznosi maksimalan ukupan prihod.

**5.** Odrediti (grafički i računski) cenu pri kojoj se postiže ravnoteža tražnje i ponude, ako su funkcija tražnje  $x$  i funkcija ponude  $y$  date sa:

a)  $x = -3p + 4$ ,  $y = 2p - 1$ ,

b)  $x = -6p + 10$ ,  $y = 3p - 2$ ,

c)  $x = -4p + 5$ ,  $y = 4p - 1$ ,

d)  $x = -2p + 6$ ,  $y = 6p - 14$ .

**6.** Odrediti (grafički i računski) cenu pri kojoj se postiže ravnoteža tražnje i ponude, ako su funkcija tražnje  $x$  i funkcija ponude  $y$  date sa:

a)  $x = (p - 2)^2$ ,  $y = 2p - 1$ ,

b)  $x = (p - 3)^2$ ,  $y = 3p + 1$ ,

c)  $x = (2 - p)^2$ ,  $y = 4p - 3$ ,

d)  $x = (3 - p)^2$ ,  $y = 2p + 2$ .

**7.** Odrediti (grafički i računski) cenu pri kojoj se postiže ravnoteža tražnje i ponude, ako su funkcija tražnje  $x$  i funkcija ponude  $y$  date sa:

a)  $x = -p^2 + 10p + 600$ ,  $y = 30p - 200$ ,

b)  $x = -p^2 + 10p + 200$ ,  $y = 30p - 100$ ,

c)  $x = -p^2 + 20p + 300$ ,  $y = 30p - 300$ ,

d)  $x = -p^2 + 27p + 124$ ,  $y = 30p - 146$ .

**8.** Odrediti (grafički i računski) cenu pri kojoj se postiže ravnoteža tražnje i ponude, ako su funkcija tražnje  $x$  i funkcija ponude  $y$  date sa:

a)  $x = -p + 7$ ,  $y = p^2 + 1$ ,

b)  $x = -p + 14$ ,  $y = p^2 + 2$ ,

c)  $x = -4p + 6$ ,  $y = p^2 + 1$ ,

d)  $x = -2p + 5$ ,  $y = p^2 + 2$ .

**9.** Funkcija ukupnih troškova proizvodnje data je sa  $C = x^2 + 4x$ .  
Odrediti

a) funkciju prosečnih troškova proizvodnje i kada prosečni troškovi rastu a kada opadaju,

b) funkciju graničnih troškova proizvodnje.

**10.** Funkcija ukupnih troškova proizvodnje data je sa  $C = \frac{1}{3}x^3 - \frac{8}{3}x^2 + 112x$ . Odrediti

a) funkciju prosečnih troškova proizvodnje i kada prosečni troškovi proizvodnje rastu a kada opadaju,

b) funkciju graničnih troškova proizvodnje.

**11.** Funkcija graničnih troškova proizvodnje data je sa  $C' = \frac{4}{3}x + 10$ .  
Odrediti funkciju ukupnih troškova proizvodnje ako je poznato da je  $C(0) = 52$ .

**12.** Funkcija graničnih troškova proizvodnje data je sa  $C' = \frac{1}{5}x^2 - 3x + 5$ .  
Odrediti funkciju ukupnih troškova proizvodnje ako je poznato da je  $C(0) = 17$ .

**13.** Funkcija graničnih prihoda data je sa  $P' = -8x + 120$ . Odrediti funkciju ukupnih prihoda ako je poznato da je  $P(0) = 0$ .

**14.** Funkcija graničnih prihoda data je sa  $P' = -\frac{3}{4}x^2 + 34x + 70$ .  
Odrediti funkciju ukupnih prihoda ako je poznato da je  $P(0) = 0$ .

**15.** Data je funkcija ukupnih prihoda  $P = -3x^2 + 6x$  i funkcija ukupnih troškova proizvodnje  $C = 2x^2 + 1$ . Odrediti (grafički i računski) interval rentabilnosti.

**16.** Odrediti interval rentabilnosti ako su funkcija ukupnih prihoda i funkcija ukupnih troškova date sa:

a)  $P = -\frac{3}{2}x^2 + 21x$ ,  $C = \frac{3}{2}x^2 - 21x + 135$ ,

b)  $P = -\frac{1}{2}x^2 + 21x$ ,  $C = \frac{3}{2}x^2 - 11x + 120$ ,

**17.** Data je funkcija ukupnih prihoda  $P = -0,5x^2 + 100x$  i funkcija ukupnih troškova proizvodnje  $C = 1,5x^2 + 20x + 512$ . Odrediti

- a) interval rentabilnosti,
- b) za koju će proizvedenu i realizovanu količinu proizvoda dobit iznositi 288 novčanih jedinica.

**18.** Data je funkcija ukupnih prihoda  $P = -x^2 + 80x$  i funkcija ukupnih troškova proizvodnje  $C = x^2 + 20x + 418$ . Odrediti

- a) količinu i cenu pri kojima se postiže maksimalna dobit,
- b) koliko iznosi maksimalna dobit,
- c) koliko iznosi dobit pri proizvodnji i realizaciji 17 proizvoda,
- d) za koju će proizvedenu i realizovanu količinu proizvoda dobit iznositi 32 novčane jedinice.

**19.** Data je funkcija ukupnih prihoda  $P = -\frac{3}{2}x^2 + 18x$  i funkcija ukupnih troškova proizvodnje  $C = \frac{1}{2}x^2 - 10x + 90$ . Odrediti

- a) količinu i cenu pri kojima se postiže maksimalna dobit,
- b) koliko iznosi maksimalna dobit.

**20.** Data je funkcija prosečnih prihoda  $\bar{P} = -\frac{1}{2}x + 19$  i funkcija ukupnih troškova proizvodnje  $C = \frac{3}{2}x^2 - 13x + 120$ . Odrediti

- a) količinu i cenu pri kojima se postiže maksimalna dobit,
- b) koliko iznosi maksimalna dobit.

**21.** Date su funkcija ukupnih prihoda  $P = -x^2 + 90x$  i funkcija prosečnih troškova proizvodnje  $\bar{C} = 3x + 50 + \frac{36}{x}$ . Odrediti

- a) količinu i cenu pri kojima se postiže maksimalna dobit,
- b) koliko iznosi maksimalna dobit.

**22.** Date su funkcija tražnje  $x = 40 - 2p$  i funkcija ukupnih troškova proizvodnje  $C = \frac{3}{2}x^2 - 12x + 120$ . Odrediti

- a) interval rentabilnosti,

b) količinu i cenu pri kojima se postiže maksimalna dobit,

c) koliko iznosi maksimalna dobit.

**23.** Date su funkcija tražnje  $x = -\frac{2}{3}p + 20$  i funkcija prosečnih troškova proizvodnje  $\overline{C} = \frac{3}{2}x - 12 + \frac{135}{x}$ . Odrediti

a) interval rentabilnosti,

b) količinu i cenu pri kojima se postiže maksimalna dobit,

c) koliko iznosi maksimalna dobit.

**24.** Date su funkcija ukupnih prihoda  $P = -2p^2 + 20p$  i funkcija ukupnih troškova proizvodnje  $C = \frac{3}{2}x^2 - 18x + 90$ . Odrediti

a) interval rentabilnosti,

b) količinu i cenu pri kojima se postiže maksimalna dobit,

c) koliko iznosi maksimalna dobit.

**25.** Date su funkcija ukupnih prihoda  $P = -\frac{2}{3}p^2 + 10p$  i funkcija prosečnih troškova proizvodnje  $\overline{C} = \frac{1}{2}x - 17 + \frac{120}{x}$ . Odrediti

a) interval rentabilnosti,

b) količinu i cenu pri kojima se postiže maksimalna dobit,

c) koliko iznosi maksimalna dobit.

**26.** Date su funkcija ukupnih prihoda  $P = -1,5p^2 + 9\,000p$  i funkcija ukupnih troškova proizvodnje  $C = 0,5x^2 - 5\,000\,000$ . Odrediti

a) količinu i cenu pri kojima se postiže maksimalna dobit,

b) koliko iznosi maksimalna dobit.

**27.** Date su funkcija tražnje  $x = -p + 105$  i funkcija ukupnih troškova proizvodnje  $C = 4x^2 + 400$ . Odrediti

a) interval rentabilnosti,

b) količinu i cenu pri kojima se postiže maksimalna dobit,

c) koliko iznosi maksimalna dobit,

d) koliko iznosi dobit pri minimalnim prosečnim troškovima.

**28.** Funkcija tražnje nekog proizvoda data je sa  $x = -p + 30$ . Odrediti

- a) koeficijent elastičnosti date funkcije tražnje,
- b) elastičnost za  $p = 20$ ,
- c) karakterističnu cenu tj. cenu za koju funkcija tražnje ima jediničnu elastičnost.

**29.** Data je funkcija ukupnih prihoda proizvodnje  $P = -x^2 + 22x$ . Odrediti

- a) koeficijent elastičnosti date funkcije ukupnih prihoda u odnosu na nivo (obim) proizvodnje i analizirati elastičnost funkcije ukupnih prihoda u odnosu na nivo (obim) proizvodnje,
- b) elastičnost ukupnih prihoda pri nivou (obimu) proizvodnje od 10.

**30.** Funkcija tražnje nekog proizvoda data je sa  $x = -2p + 44$ . Odrediti

- a) funkciju ukupnih prihoda,
- b) koeficijent elastičnosti funkcije ukupnih prihoda u zavisnosti od cene proizvoda i analizirati elastičnost funkcije ukupnih prihoda u zavisnosti od cene proizvoda,
- c) elastičnost ukupnih prihoda pri ceni od 18.

**31.** Funkcija tražnje nekog proizvoda data je sa  $x = -3p + 51$ . Odrediti

- a) funkciju ukupnih prihoda,
- b) koeficijent elastičnosti funkcije ukupnih prihoda u zavisnosti od nivoa (obima) proizvodnje i analizirati elastičnost funkcije ukupnih prihoda u zavisnosti od nivoa (obima) proizvodnje,
- c) odrediti elastičnost ukupnih prihoda pri nivou (obimu) proizvodnje od 21.

**32.** Funkcija tražnje nekog proizvoda data je sa  $x = (p - 8)^2$ . Odrediti

- a) funkciju ukupnih prihoda,
- b) koeficijent elastičnosti funkcije ukupnih prihoda u zavisnosti od

cene proizvoda i analizirati elastičnost funkcije ukupnih prihoda u zavisnosti od cene proizvoda,

c) odrediti elastičnost ukupnih prihoda pri ceni od 2.

**33.** Data je funkcija ukupnih troškova proizvodnje  $C = x^2 - 15x + 36$ .  
Odrediti

a) koeficijent elastičnosti date funkcije ukupnih troškova proizvodnje,

b) elastičnost date funkcije ukupnih troškova proizvodnje za  $x = 15$ ,

c) nivo (obim) proizvodnje za koji je koeficijent elastičnosti date funkcije ukupnih troškova proizvodnje veći od 1 tj. funkcija ukupnih troškova proizvodnje elastična.

**34.** Data je funkcija prosečnih troškova proizvodnje  $\overline{C} = x - 29 + \frac{100}{x}$ .  
Odrediti

a) funkciju ukupnih troškova proizvodnje,

b) funkciju graničnih troškova proizvodnje,

c) koeficijent elastičnosti funkcije ukupnih troškova proizvodnje,

d) elastičnost funkcije ukupnih troškova proizvodnje za  $x = 40$ ,

f) nivo (obim) proizvodnje za koji je koeficijent elastičnosti funkcije ukupnih troškova proizvodnje manji od 1 tj. funkcija ukupnih troškova proizvodnje neelastična.

**35.** Data je funkcija ukupnih troškova proizvodnje  $C = x^2 + 750$ . Dokazati da je:  $E_{C,x} - E_{\overline{C},x} = 1$ .

## 7. Statistika i verovatnoća

Literatura u kojoj možete pronaći neophodne informacije iz oblasti statistike i verovatnoće: [2], [7], [8], [12]-[14].

### 7.1. Statistika

**Primer 1.** Evidentiran je broj prodatih laptopova, na dnevnom nivou, tokom jednog meseca (od 30 dana) u jednoj prodavnici i dobijeni su sledeći podaci:

3, 6, 7, 4, 5, 8, 9, 6, 10, 7, 8, 5, 2, 6, 7,  
4, 7, 8, 6, 5, 8, 6, 9, 4, 7, 5, 3, 1, 2, 6.

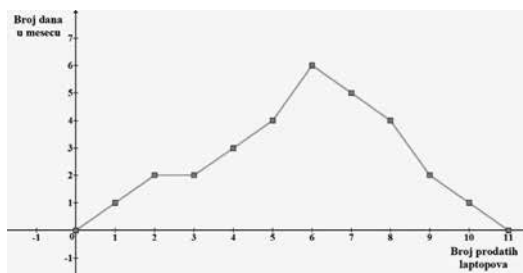
- a) Formirati distribuciju frekvencija na osnovu podataka o prodatim laptopovima,
- b) Nacrtati poligon apsolutnih i relativnih frekvencija i procentualnog učešća za podatke o prodatim laptopovima.

*Rešenje.*

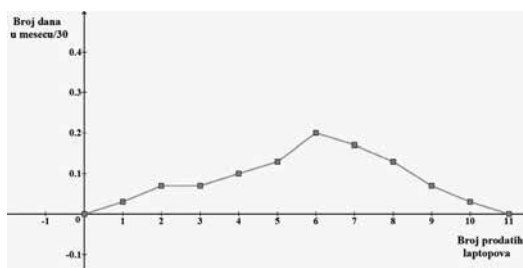
a)

| Broj prodatih laptopova ( $x$ ) | Broj dana u mesecu ( $f$ ) | Relativne frekvencije ( $p = \frac{f}{30}$ ) | Učešće ( $u$ %) |
|---------------------------------|----------------------------|----------------------------------------------|-----------------|
| 1                               | 1                          | 0,03                                         | 3               |
| 2                               | 2                          | 0,07                                         | 7               |
| 3                               | 2                          | 0,07                                         | 7               |
| 4                               | 3                          | 0,10                                         | 10              |
| 5                               | 4                          | 0,13                                         | 13              |
| 6                               | 6                          | 0,20                                         | 20              |
| 7                               | 5                          | 0,17                                         | 17              |
| 8                               | 4                          | 0,13                                         | 13              |
| 9                               | 2                          | 0,07                                         | 7               |
| 10                              | 1                          | 0,03                                         | 3               |

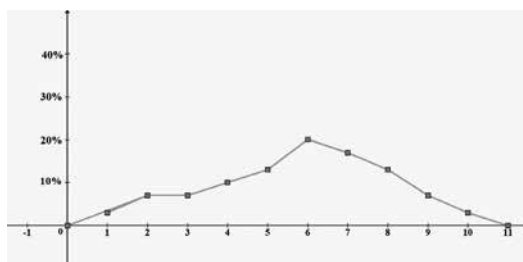
b)



*Poligon apsolutnih frekvencija*



*Poligon relativnih frekvencija*



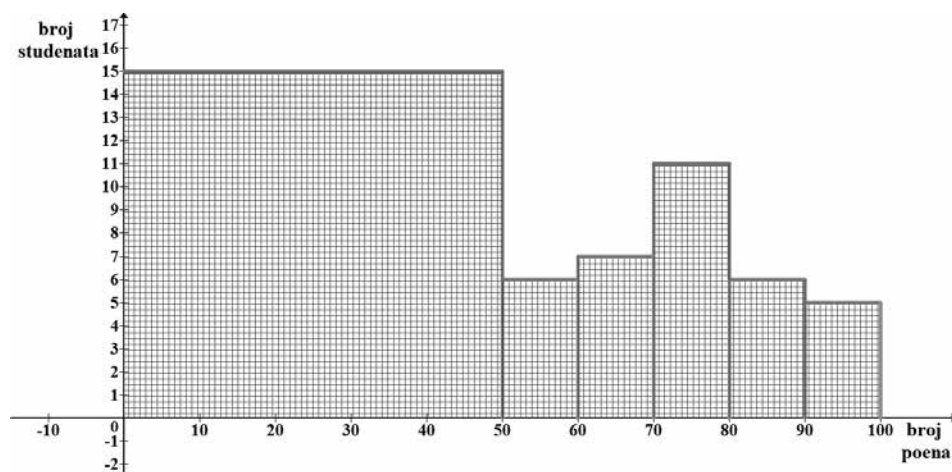
*Poligon procentualnog učešća*

**Primer 2.** U jednoj grupi od 50 studenata pri polaganju ispita iz Statistike dobijeni su sledeći rezultati:

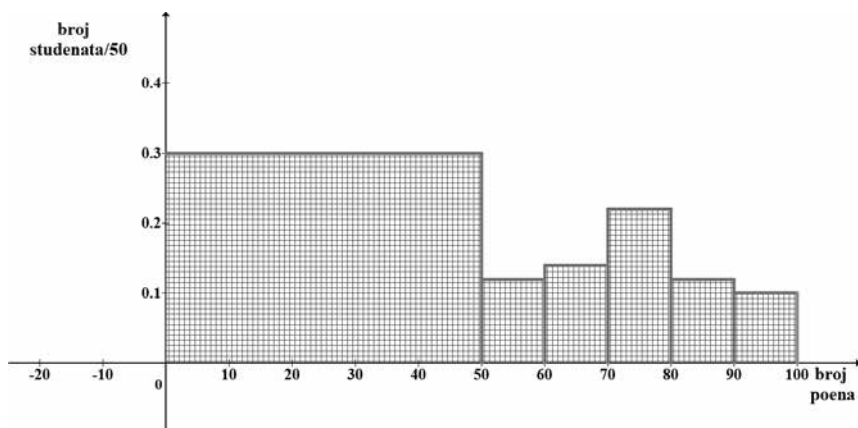
| Poeni na ispitu | Broj studenata | Broj studenata/50 | Učešće (u %) |
|-----------------|----------------|-------------------|--------------|
| 0–50            | 15             | 0,30              | 30           |
| 51–60           | 6              | 0,12              | 12           |
| 61–70           | 7              | 0,14              | 14           |
| 71–80           | 11             | 0,22              | 22           |
| 81–90           | 6              | 0,12              | 12           |
| 91–100          | 5              | 0,10              | 10           |

Nacrtati histogram apsolutnih i relativnih frekvencija i procentualnog učešća za podatke iz prethodne tabele.

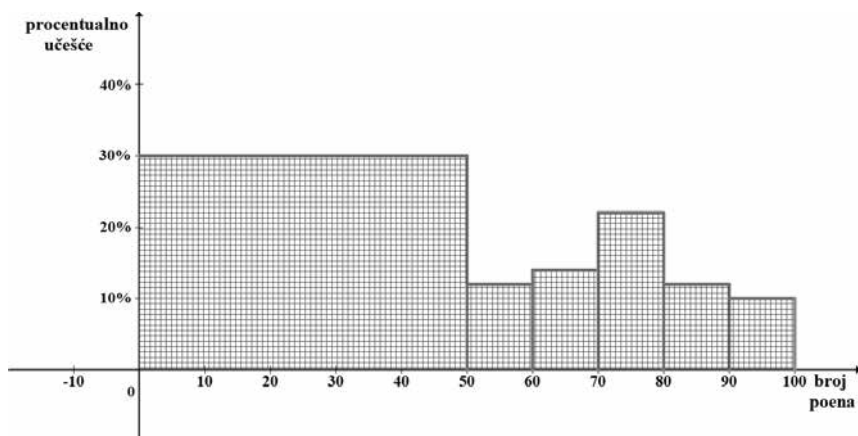
*Rešenje.*



*Histogram apsolutnih frekvencija*



*Histogram relativnih frekvencija*



*Histogram procentualnog učešća*

**Primer 3.** Analizirana je prosečna dnevna potrošnja hleba tokom jedne nedelje u jednoj četvoročlanoj porodici i dobijeni su sledeći podaci: 0,96 kg; 1,21 kg; 0,85 kg; 1,12 kg; 0,87 kg; 0,94 kg; 1,05 kg. Odrediti:

- a) prosečnu potrošnju hleba za datu četvoročlanu porodicu u analiziranoj nedelji,
- b) koliko dana u nedelji je porodica pojela hleba više od proseka,
- c) medijanu.

*Rešenje.*

$$a) \bar{x} = \frac{0,96+1,21+0,85+1,12+0,87+0,94+1,05}{7} = 1 \text{ kg};$$

Dakle, prosečna dnevna potrošnja hleba za datu četvoročlanu porodicu u analiziranoj nedelji je 1 kg,

b) 3 dana u nedelji je porodica pojela hleba više od proseka koji iznosi 1 kg,

c) Podatke prvo treba rasporediti u rastući niz podataka. Dakle,

$$0,85, 0,87, 0,94, 0,96, 1,05, 1,12, 1,21.$$

Pošto je broj podataka  $n=7$  tj. broj podataka je neparan medijana se nalazi na  $\frac{n+1}{2}=4$ -toj poziciji i koristi se sledeća formula:

$$Me = x_{\frac{n+1}{2}} = x_{\frac{7+1}{2}} = x_4 = 0,96. \blacklozenge$$

**Primer 4.** Analizirana je prosečna dnevna potrošnja hleba tokom jednog meseca (30 dana) u jednoj četvoročlanoj porodici i dobijeni su sledeći podaci:

0,96 kg; 1,21 kg; 0,85 kg; 1,12 kg; 0,87 kg; 0,94 kg;  
 1,05 kg; 0,98 kg; 1,22 kg; 0,85 kg; 1,05 kg; 0,85 kg;  
 0,96 kg; 0,85 kg; 0,96 kg; 1,12 kg; 1,05 kg; 1,21 kg;

0,87 kg; 0,94 kg; 1,05 kg; 0,94 kg; 1,21 kg; 0,87 kg;  
1,12 kg; 0,87 kg; 0,98 kg; 1,21 kg; 0,98 kg; 1,05 kg.

Odrediti:

a) prosečnu potrošnju hleba za datu četvoročlanu porodicu u analiziranom mesecu,

b) medijanu.

*Rešenje.*

a) Prosečnu potrošnju hleba je moguće dobiti na dva načina:

I način: kao u *Primeru 3* ili

II način: negrupisane podatke predstaviti tabelom koristeći prostu distribuciju frekvencija:

|                |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|----------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Količina hleba | 0,85 | 0,87 | 0,94 | 0,96 | 0,98 | 1,05 | 1,12 | 1,21 | 1,22 |
| Broj dana      | 4    | 4    | 3    | 3    | 3    | 5    | 3    | 4    | 1    |

$$\bar{x} = \frac{0,85 \cdot 4 + 0,87 \cdot 4 + 0,94 \cdot 3 + 0,96 \cdot 3 + 0,98 \cdot 3 + 1,05 \cdot 5 + 1,12 \cdot 3 + 1,21 \cdot 4 + 1,22 \cdot 1}{30} = 1,006 \text{ kg};$$

Dakle, prosečna dnevna potrošnja hleba za datu četvoročlanu porodicu u analiziranom mesecu je 1,006 kg,

b) Medijanu je moguće takođe odrediti na dva načina:

I način: kao u *Primeru 3* ili

II način: koristeći kumulativnu frekvenciju

|                   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Količina hleba    | 0,85 | 0,87 | 0,94 | 0,96 | 0,98 | 1,05 | 1,12 | 1,21 | 1,22 |
| Broj dana         | 4    | 4    | 3    | 3    | 3    | 5    | 3    | 4    | 1    |
| Kumulativ "ispod" | 4    | 8    | 11   | 14   | 17   | 22   | 25   | 29   | 30   |

Pošto je broj podataka  $n=30$  tj. broj podataka je paran medijana se nalazi između  $\frac{n}{2}=15$ -tog i  $\frac{n}{2} + 1=16$ -tog podatka i koristi se sledeća formula:

$$M_e = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2} = \frac{x_{\frac{30}{2}} + x_{\frac{30}{2}+1}}{2} = \frac{x_{15} + x_{16}}{2} = \frac{0,98 + 0,98}{2} = 0,98. \blacklozenge$$

**Primer 5.** U jednoj fabrici satova analizirana je proizvodnja satova na 42 njena pogona tokom jednog radnog sata i dobijeni podaci su predstavljeni sledećom tabelom:

|             |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|-------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Broj satova | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 |
| Broj pogona | 4  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 5  | 4  | 4  |

Odrediti:

- prosečnu proizvodnju satova tokom jednog radnog sata,
- medijanu.

*Rešenje.*

a)  $\bar{x} = \frac{30 \cdot 4 + 31 \cdot 3 + 32 \cdot 4 + 33 \cdot 5 + 34 \cdot 6 + 35 \cdot 7 + 36 \cdot 5 + 37 \cdot 4 + 38 \cdot 4}{42} = \frac{1435}{42} = 34,17,$

- b) Koristi se kumulativna frekvencija.

|                   |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|-------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Broj satova       | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 |
| Broj pogona       | 4  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 5  | 4  | 4  |
| Kumulativ "ispod" | 4  | 7  | 11 | 16 | 22 | 29 | 34 | 38 | 42 |

Pošto je broj podataka  $n=42$  tj. broj podataka je paran medijana se nalazi između  $\frac{n}{2}=21$ -vog i  $\frac{n}{2} + 1=22$ -gog podatka i koristi se sledeća formula:

$$M_e = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2} = \frac{x_{\frac{42}{2}} + x_{\frac{42}{2}+1}}{2} = \frac{x_{21} + x_{22}}{2} = \frac{34 + 34}{2} = 34. \blacklozenge$$

**Primer 6.** Merena je visina 1 000 stanovnika jednog grada. Dobijeni podaci su predstavljeni sledećom tabelom:

| Visina stanovnika | Broj stanovnika | Visina stanovnika | Broj stanovnika |
|-------------------|-----------------|-------------------|-----------------|
| [160–166)         | 96              | [178–184)         | 215             |
| [166–172)         | 187             | [184–190)         | 150             |
| [172–178)         | 285             | [190–196)         | 67              |

Odrediti:

- prosečnu visinu stanovnika toga grada,
- medijalni interval i približnu vrednost medijane.

*Rešenje.*

a)  $\bar{x} = \frac{163 \cdot 96 + 169 \cdot 187 + 175 \cdot 285 + 181 \cdot 215 + 187 \cdot 150 + 193 \cdot 67}{1000} = 177,02;$

Dakle, prosečna visina stanovnika toga grada je 177,02 cm,

- Koristi se kumulativ „ispod”.

| Visina stanovnika | Broj stanovnika | Kumulativ „ispod” |
|-------------------|-----------------|-------------------|
| [160–166)         | 96              | 96                |
| [166–172)         | 187             | $96 + 187 = 283$  |
| [172–178)         | 285             | $283 + 285 = 568$ |
| [178–184)         | 215             | $568 + 215 = 783$ |
| [184–190)         | 150             | $783 + 150 = 933$ |
| [190–196)         | 67              | $933 + 67 = 1000$ |

Pošto je broj podataka  $n = 1\,000$  tj. broj podataka je paran medijana se nalazi između  $\frac{n}{2} = 500$ -tog i  $\frac{n}{2} + 1 = 501$ -vog podatka. Iz prethodne tabele se može videti da je  $[172, 178)$  *medijalni interval* jer tom intervalu pripada medijana (*od 284-tog do 568-mog podatka* pripadaju tom intervalu).

Pošto je donja granica medijalnog intervala  $x = 172$ , suma svih frekvencija (tj. broj podataka)  $n = 1\,000$ , suma frekvencija do frekvencije medijalnog intervala  $m = 283$ , frekvencija medijalnog intervala  $f_{M_e} = 285$  i širina medijalnog intervala  $i = 6$  dobijamo da je

$$M_e = x + i \cdot \frac{\frac{n}{2} - m}{f_{M_e}} = 172 + 6 \cdot \frac{500 - 283}{285} = 176,57. \blacklozenge$$

**Primer 7.** Analizirana je tokom 15 dana prodaja knjiga u jednoj knjižari i dobijeni su sledeći podaci: 17, 13, 18, 15, 14, 16, 15, 19, 16, 13, 18, 16, 14, 17, 16.

Odrediti:

- a) modus,
- b) varijansu.

*Rešenje.*

a) Najčešći broj prodatih knjiga je 16. Dakle,  $Mo = 16$ ,

b) Varijansa se može odrediti na 2 načina:

**I način:** Sastoji se iz sledećih koraka:

**I.** *Odrediti aritmetičku sredinu datih podataka.*

$$\bar{x} = \frac{17+13+18+15+14+16+15+19+16+13+18+16+14+17+16}{15} = \frac{237}{15} = 15,8;$$

**II.** *Odrediti razliku između vrednosti svakog podatka i aritmetičke sredine.*

$$\begin{aligned} 17 - 15,8 &= 1,2; & 13 - 15,8 &= -2,8; & 18 - 15,8 &= 2,2; & 15 - 15,8 &= -0,8; \\ 14 - 15,8 &= -1,8; & 16 - 15,8 &= 0,2; & 15 - 15,8 &= -0,8; & 19 - 15,8 &= 3,2; \\ 16 - 15,8 &= 0,2; & 13 - 15,8 &= -2,8; & 18 - 15,8 &= 2,2; & 16 - 15,8 &= 0,2; \\ 14 - 15,8 &= -1,8; & 17 - 15,8 &= 1,2; & 16 - 15,8 &= 0,2; \end{aligned}$$

**III.** *Odrediti sumu kvadrata prethodno dobijenih razlika.*

$$1,2^2 + (-2,8)^2 + 2,2^2 + (-0,8)^2 + (-1,8)^2 + 0,2^2 + (-0,8)^2 + 3,2^2 + 0,2^2 + (-2,8)^2 + 2,2^2 + 0,2^2 + (-1,8)^2 + 1,2^2 + 0,2^2 = 46,4;$$

**IV.** *Dobijenu sumu podeliti sa brojem podataka.*

$$\sigma^2 = \frac{46,4}{15} = 3,09.$$

**II način:** Sastoji se iz sledećih koraka:

**I.** *Odrediti aritmetičku sredinu datih podataka.* ( $\bar{x} = 15,8$ )

**II.** *Sumu kvadrata datih podataka podeliti sa brojem podataka.*

$$\frac{17^2 + 13^2 + 18^2 + 15^2 + 14^2 + 16^2 + 15^2 + 19^2 + 16^2 + 13^2 + 18^2 + 16^2 + 14^2 + 17^2 + 16^2}{15} = \frac{3791}{15} = 252,73;$$

**III.** *Od prethodno dobijenog rezultata oduzeti kvadrat aritmetičke sredine.*

$$\sigma^2 = 252,73 - 15,8^2 = 3,09. \blacklozenge$$

**Primer 8.** Anketirano je 65 studenata prve godine na pitanje: "Koliko ste ispita (od ukupno 10 ispita na prvoj godini) do sada položili?" i dobijeni podaci su predstavljeni sledećom tabelom:

|                |   |   |   |   |   |   |    |    |   |   |    |
|----------------|---|---|---|---|---|---|----|----|---|---|----|
| Broj ispita    | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6  | 7  | 8 | 9 | 10 |
| Broj studenata | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 10 | 7 | 4 | 1  |

Odrediti:

a) modus,

b) standardnu devijaciju.

*Rešenje.*

a) Pošto je najveći broj studenata (10) položilo 6 (odnosno 7) ispita, u pitanju je serija podataka sa dva modusa:  $Mo = 6$ ,  $Mo = 7$ ,

b) Prvo treba odrediti varijansu kao što je pokazano u primeru 7.

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 10 + 7 \cdot 10 + 8 \cdot 7 + 9 \cdot 4 + 10 \cdot 1}{65} = 5,23;$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{0^2 \cdot 2 + 1^2 \cdot 3 + 2^2 \cdot 5 + 3^2 \cdot 6 + 4^2 \cdot 8 + 5^2 \cdot 9 + 6^2 \cdot 10 + 7^2 \cdot 10 + 8^2 \cdot 7 + 9^2 \cdot 4 + 10^2 \cdot 1}{65} - 5,23^2 \\ &= 33,11 - 5,23^2 = 5,77;\end{aligned}$$

Dakle, standardna devijacija iznosi  $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{5,77} = 2,40$ . ♦

**Primer 9.** Anketirano je 45 studenata na pitanje: "Koliko vremena dnevno provodite za pripremu ispita?" i dobijeni podaci su predstavljeni sledećom tabelom:

| Vreme za učenje (u satima) | [0, 1) | [1, 2) | [2, 3) | [3, 4) | [4, 5) | [5, 6) |
|----------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Broj studenata             | 4      | 7      | 9      | 12     | 8      | 5      |

Odrediti:

- približnu vrednost modusa (računski i grafički),
- koeficijent varijacije.

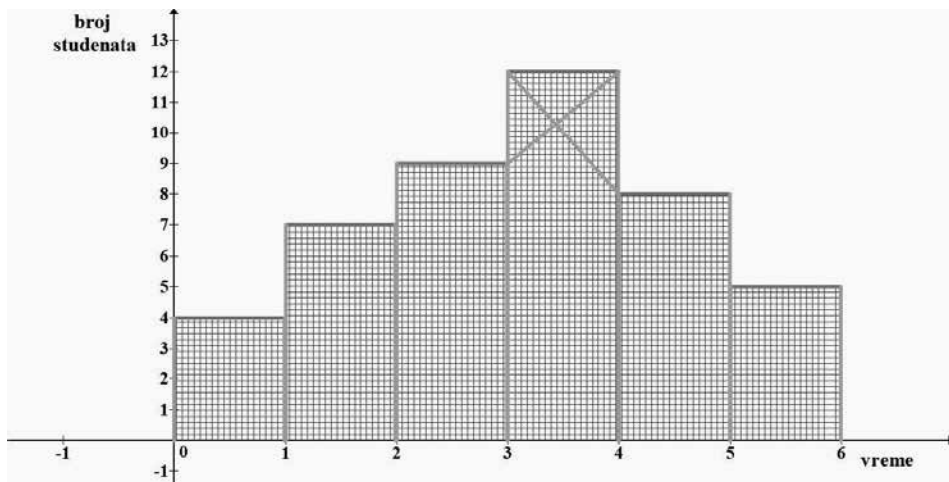
*Rešenje.*

a) Odredimo prvo modus računski:

Pošto je modalni interval tj. interval koji ima najveću frekvenciju [3, 4), donja granica modalnog intervala  $x = 3$ , širina modalnog intervala  $i = 1$ , frekvencija modalnog intervala  $f_2 = 12$ , frekvencija pre-modalnog intervala  $f_1 = 9$  i frekvencija postmodalnog intervala  $f_3 = 8$  dobijamo da je

$$Mo = x + i \cdot \frac{f_2 - f_1}{(f_2 - f_1) + (f_2 - f_3)} = 3 + 1 \cdot \frac{12 - 9}{(12 - 9) + (12 - 8)} = 3,43;$$

Odredimo potom modus i grafički:



*Grafički određen modus*

b) Prvo treba odrediti aritmetičku sredinu.

$$\bar{x} = \frac{0,5 \cdot 4 + 1,5 \cdot 7 + 2,5 \cdot 9 + 3,5 \cdot 12 + 4,5 \cdot 8 + 5,5 \cdot 5}{45} = 3,12;$$

Potom je potrebno odrediti standardnu devijaciju. Da bi odredili standardnu devijaciju prvo treba odrediti varijansu.

Na osnovu prethodnog primera (Primer 8) sledi:

$$\sigma^2 = \frac{0,5^2 \cdot 4 + 1,5^2 \cdot 7 + 2,5^2 \cdot 9 + 3,5^2 \cdot 12 + 4,5^2 \cdot 8 + 5,5^2 \cdot 5}{45} - 3,12^2 = 11,85 - 9,73 = 2,12;$$

Dakle, standardna devijacija iznosi  $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{2,12} = 1,46$ ;

Na osnovu prethodnih rezultata, dobija se da koeficijent varijacije iznosi  $V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1,46}{3,12} = 0,47$ . ♦

### **Zadaci za vežbu:**

1. Dva košarkaška kluba A i B objavila su podatke o broju postignutih koševa njihovih najboljih igrača, redom, X i Y, na utakmicama odigranim u prethodnoj sezoni (sezona 2021/2022).

Košarkaški klub A je objavio sledeće rezultate (*broj postignutih koševa*) njihovog najboljeg igrača X:

18, 21, 23, 16, 25, 24, 17, 19, 20, 19, 18, 22,

17, 21, 22, 24, 23, 19, 20, 24, 25, 22, 19, 20.

Košarkaški klub B je objavio sledeće rezultate (*broj postignutih koševa*) njihovog najboljeg igrača Y:

20, 17, 22, 18, 21, 25, 23, 18, 24, 20, 22, 20,

21, 23, 24, 23, 21, 20, 24, 21, 23, 25, 20, 18.

- a) Izračunati prosečan broj postignutih koševa po utakmici igrača X,
- b) Izračunati prosečan broj postignutih koševa po utakmici igrača Y,
- c) Uporediti prosečan broj postignutih koševa igrača X sa prosečnim brojem postignutih koševa igrača Y.

2. U jednom gradu evidentirana je prodaja knjiga jednog poznatog pisca iz tog grada i dobijeni podaci su predstavljeni sledećom tabelom:

|                      |    |    |    |    |    |    |
|----------------------|----|----|----|----|----|----|
| Broj prodatih knjiga | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| Broj knjižara        | 17 | 14 | 16 | 11 | 15 | 12 |

- a) Izračunati ukupan broj knjižara u tom gradu,
- b) Izračunati ukupan broj prodatih knjiga tog pisca u tom gradu,
- c) Izračunati prosečan broj prodatih knjiga tog pisca po knjižari u tom gradu.

3. Praćeno je prisustvo jedne grupe studenata predavanjima iz Statistike prošle akademske godine (2021/2022) i dobijeni rezultati su predstavljeni sledećom tabelom:

|                 |       |       |         |         |         |
|-----------------|-------|-------|---------|---------|---------|
| Broj izostanaka | 0 – 4 | 5 – 9 | 10 – 14 | 15 – 19 | 20 – 24 |
| Broj studenata  | 82    | 51    | 30      | 22      | 15      |

a) Izračunati koliko studenata nije prisustvovalo najmanje jednom predavanju iz Statistike, ako je poznato da 24 studenta nije propustilo ni jedno predavanje iz Statistike,

b) Izračunati prosečan broj izostanaka po studentu u toj grupi.

4. U jednoj firmi radi 30 radnika i imaju sledeće zarade (u evrima):

544, 532, 560, 575, 555, 585, 594, 600, 660, 460, 630, 675, 760, 715, 870, 452, 682, 740, 900, 535, 625, 570, 625, 690, 480, 645, 735, 840, 705, 790.

a) Izračunati prosečnu zaradu po radniku u toj firmi,

b) Izračunati koliko radnika ima zaradu manju od prosečne,

c) Formirati distribuciju frekvencija na osnovu podataka o zaradama radnika u toj firmi - neka je donja granica prvog grupnog intervala 400 evra, a širina svakog grupnog intervala 100 evra,

d) Izračunati prosečnu zaradu grupisanih podataka.

5. Na ispitu iz Statistika postignuti su sledeći rezultati (*ocene*).

| Ocena          | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
|----------------|----|----|----|----|----|----|
| Broj studenata | 32 | 17 | 22 | 29 | 20 | 15 |

a) Izračunati koliko je studenata bilo na ispitu iz Statistike,

b) Izračunati koliko je studenata položilo ispit iz Statistike,

c) Izračunati prosečnu ocenu studenata na ispitu iz Statistike,

d) Izračunati koliko je studenata položilo ispit iz Statistike sa ocenom koja je veća od prosečne ocene postignute na ispitu iz Statistike.

6. Merena je težina 150 studenata i dobijeni su sledeći podaci:

| Težina studenta | [50, 56) | [56, 62) | [62, 68) | [68, 74) | [74, 80) |
|-----------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Broj studenata  | 22       | 37       | 41       | 33       | 17       |

Izračunati prosečnu težinu studenata u toj grupi.

7. Za sledeći niz podataka koji predstavlja *broj prodatih karata za jednu pozorišnu predstavu na 7 različitih prodajnih mesta* odrediti modus.

41, 37, 45, 40, 44, 46, 47.

8. Za sledeći niz podataka koji predstavlja *broj golova jednog fudbalskog tima na 12 odigranih utakmica* odrediti modus.

2, 1, 0, 2, 1, 1, 3, 2, 2, 0, 1, 2.

9. Za sledeći niz podataka koji predstavlja *boju cveća u buketu od 20 cvetova* odrediti modus.

crvena, plava, zelena, žuta, plava, bela, zelena, crvena, bela, plava,  
plava, žuta, crvena, zelena, bela, crvena, zelena, plava, crvena, žuta.

10. Sledećom tabelom predstavljeni su podaci o *broju mobilnih telefona u domaćinstvima u našoj zemlji*. Odrediti modus.

| Broj mobilnih telefona          | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6  |
|---------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|----|
| Broj domaćinstava (u hiljadama) | 284 | 325 | 463 | 442 | 108 | 21 |

11. Na kolokvijumu iz Statistika postignuti su sledeći rezultati (*ocene*). Odrediti modus.

| Ocena          | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
|----------------|----|----|----|----|----|----|
| Broj studenata | 23 | 12 | 16 | 23 | 15 | 11 |

12. Sledećom tabelom predstavljeni su podaci o *starosnoj strukturi zaposlenih u jednoj firmi*.

| Godine zaposlenih | [15, 25) | [25, 35) | [35, 45) | [45, 55) | [55, 65) |
|-------------------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Broj zaposlenih   | 93       | 414      | 452      | 368      | 173      |

a) Odrediti modalni interval,

b) Odrediti približnu vrednost modusa (računski i grafički).

13. Sledećom tabelom predstavljeni su podaci o *prodaji knjiga 7 autora tokom jedne nedelje*. Autori su: Avramović (A), Bojanić (B), Cvijanović (C), Dragutinović (D), Miladinović (M), Nikolić (N) i Petrović (P). Odrediti modus.

| Autori               | A  | B  | C  | D  | M  | N  | P  |
|----------------------|----|----|----|----|----|----|----|
| Broj prodatih knjiga | 16 | 24 | 19 | 22 | 26 | 31 | 20 |

14. Za sledeći niz podataka koji predstavlja *broj postignutih koševa jednog košarkaškog tima na poslednjih 12 utakmica* odrediti medijanu.

79, 68, 95, 71, 83, 80, 88, 91, 75, 86, 93, 74.

15. Za sledeći niz podataka koji predstavlja *cenu 5 različitih marki laptopova* odrediti medijanu.

54 500, 48 300, 63 400, 58 800, 74 200.

16. Za sledeći niz podataka koji predstavlja *broj postignutih golova jednog vaterpolo tima na poslednjih 10 utakmica* odrediti medijanu.

11, 10, 12, 9, 13, 8, 12, 9, 11, 9.

17. Za sledeći niz podataka koji predstavlja *broj postignutih golova jednog fudbalskog tima na poslednjih 11 utakmica* odrediti medijanu.

1, 2, 0, 2, 1, 3, 1, 2, 0, 2, 3.

18. Za podatke predstavljene sledećom tabelom odrediti medijanu.

| Ocena          | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
|----------------|----|----|----|----|----|----|
| Broj studenata | 42 | 28 | 34 | 41 | 33 | 22 |

19. Za podatke predstavljene sledećom tabelom odrediti medijanu.

| Ocena        | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|--------------|---|---|---|---|---|
| Broj učenika | 3 | 6 | 9 | 7 | 4 |

20. Sledećom tabelom predstavljeni su podaci o *zaradama zaposlenih u jednoj firmi*.

| Zarada<br>(u hiljadama dinara) | [45, 60) | [60, 75) | [75, 90) | [90, 115) | [115, 130) |
|--------------------------------|----------|----------|----------|-----------|------------|
| Broj zaposlenih                | 65       | 124      | 158      | 111       | 42         |

- a) Odrediti medijalni interval,
- b) Odrediti približnu vrednost medijane.

21. Sledećom tabelom predstavljeni su podaci o *broju postignutih koševa (po utakmici) jednog košarkaškog kluba tokom prethodne sezone (sezona 2021/2022)*.

| Broj koševa   | 55–64 | 65–74 | 75–84 | 85–94 | 95–104 | 105–115 |
|---------------|-------|-------|-------|-------|--------|---------|
| Broj utakmica | 5     | 9     | 11    | 8     | 7      | 3       |

- a) Odrediti medijalni interval,
- b) Odrediti približnu vrednost medijane.

22. Za sledeći niz podataka koji predstavlja podatke o *broju prodatih mobilnih telefona marke Nokia na 7 prodajnih mesta u toku jedne radne nedelje* odrediti medijanu.

11, 15, 13, 8, 19, 17, 15.

Nešto kasnije je stigla informacija i o broju prodatih mobilnih telefona marke Nokia na još jednom, osmom, prodajnom mestu. Odrediti koliko najmanje iznosi broj prodatih mobilnih telefona marke Nokia na tom prodajnom mestu, ako je poznato da medijana ostaje nepromenjena.

23. Evidentirana je količini (u kilogramima) prodatog voća, po danu, na jednog pijaci tokom 15 dana i dobijeni su sledeći podaci:

27, 30, 24, 29, 26, 31, 33, 28, 31, 32, 28, 26, 30, 33, 31.

- a) Odrediti varijansu i standardnu devijaciju,  
 b) Odrediti interval varijacije i koeficijent varijacije.

24. Anketirano je 100 studenata na sledeće pitanje: "Koliko puta su izašli na ispit iz Statistike pre nego što su ispit položili?". Na osnovu njihovih odgovora formirana je sledeće tabela:

|                        |    |    |    |    |   |
|------------------------|----|----|----|----|---|
| Broj izlazaka na ispit | 1  | 2  | 3  | 4  | 5 |
| Broj studenata         | 42 | 26 | 18 | 11 | 3 |

- a) Odrediti varijansu i standardnu devijaciju,  
 b) Odrediti interval varijacije i koeficijent varijacije.

25. Anketirano je 50 studenata na sledeće pitanje: "Koliko vremena dnevno provode na internetu?". Na osnovu njihovih odgovora formirana je sledeće tabela:

|                               |        |        |        |        |        |
|-------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Vreme na internetu (u satima) | [1, 2) | [2, 3) | [3, 4) | [4, 5) | [5, 6) |
| Broj studenata                | 3      | 6      | 16     | 15     | 10     |

- a) Odrediti varijansu i standardnu devijaciju,  
 b) Odrediti koeficijent varijacije.

## ***7.2. Verovatnoća***

**Primer 1.** Ispit iz Kvantitativnih metoda polažu 3 studenta. Evidentiramo da li su položili (sa 1) ili ne (sa 0). Odrediti

- a) skup svih mogućih ishoda,  
 b) skup svih ishoda događaja "SVI STUDENTI IMAJU ISTI ISHOD POLAGANJA ISPITA",  
 c) skup svih ishoda događaja "BAR 2 STUDENTA SU POLOŽILA ISPIT",

d) skup svih ishoda događaja "BAR 1 STUDENT JE POLOŽIO ISPIT".

*Rešenje.* Ako student nije položio ispit evidentiramo sa 0, a ako je student položio ispit evidentiramo sa 1.

a) Neka je  $\Omega$  skup svih mogućih ishoda. Tada je

$$\Omega = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (0,0,0)\},$$

b) Neka je  $\Psi$  skup svih ishoda navedenog događaja. Tada je

$$\Psi = \{(1,1,1), (0,0,0)\},$$

c) Neka je  $\Phi$  skup svih ishoda navedenog događaja. Tada je

$$\Phi = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\},$$

d) Neka je  $\Upsilon$  skup svih ishoda navedenog događaja. Tada je

$$\Upsilon = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}. \blacklozenge$$

**Primer 2.** Bacaju se 2 kocke istovremeno. Kolika je verovatnoća da zbir brojeva na gornjoj strani kocki bude veći ili jednak od 11?

*Rešenje.* Neka je  $\Delta$  skup svih ishoda događaja  $A =$  "Prilikom istovremenog bacanja 2 kocke zbir brojeva na gornjoj strani kocki je veći ili jednak od 11". Tada je

$$\Delta = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}.$$

Pošto se istovremeno bacaju 2 kocke, a broj mogućih ishoda za svaku kocku je 6, skup svih mogućih ishoda pri istovremenom bacanju 2 kocke ima  $n = 6^2 = 36$  elemenata. Dakle,

$$P(A) = \frac{\text{broj povoljnih ishoda}}{\text{broj ukupnih ishoda}} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}. \blacklozenge$$

**Primer 3.** U vazi se nalazi 7 cvetova: 4 žuta i 3 crvena. Izvlače se 3 cveta, jedan za drugim, bez vraćanja. Kolika je verovatnoća da je među izvučenim cvetovima bar jedan cvet crvene boje?

*Rešenje.* Događaj "Među izvučenim cvetovima bar jedan cvet je crvene boje" je događaj koji je *suprotan* događaju  $A =$  "Sva tri izvučena cveta su žute boje". Neka je događaj  $A_i =$  "i-ti izvučeni cvet je žute boje",  $i = 1, 2, 3$ . Tada je

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | (A_1 \cap A_2)) \\ &= \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{35} = 0,11. \end{aligned}$$

Dakle,  $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{4}{35} = \frac{31}{35} = 0,89$ . ♦

**Primer 4.** Dve fabrike proizvode TV uređaje. Verovatnoća da je televizor proizveden u prvoj fabrici ispravan iznosi 0,87, dok verovatnoća da je televizor proizveden u drugoj fabrici ispravan iznosi 0,76. Biraju se dva televizora, po jedan proizveden u svakoj fabrici. Kolika je verovatnoća

a) da je televizor proizveden u prvoj fabrici ispravan, a televizor proizveden u drugoj fabrici neispravan?

b) da su oba izabrana televizora neispravna?

c) da je bar jedan izabrani televizor neispravan?

*Rešenje.* Neka je događaj  $A_i =$  "Televizor proizveden u i-toj fabrici je ispravan",  $i = 1, 2$ . Tada je, na osnovu teksta zadatka,  $P(A_1) = 0,87$  i  $P(A_2) = 0,76$  odakle sledi da je  $P(\bar{A}_1) = 0,13 = (1 - P(A_1))$  i  $P(\bar{A}_2) = 0,24 = (1 - P(A_2))$ , gde je sa  $\bar{A}_i$  obeležen događaj koji je suprotan događaju  $A_i$ .

a) Neka je događaj  $A =$  "Televizor proizveden u prvoj fabrici je ispravan, a televizor proizveden u drugoj fabrici je neispravan". Tada je

$$P(A) = P(A_1 \cap \bar{A}_2) = P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) = 0,87 \cdot 0,24 = 0,21.$$

b) Neka je događaj  $B =$  "Oba izabrana televizora su neispravna". Tada je

$$P(B) = P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) = 0,13 \cdot 0,24 = 0,03.$$

c) Neka je događaj  $C = \text{"Bar jedan izabrani televizor je neispravan"}$ . Ovaj deo zadatka može biti rešen na 2 načina.

I način. Tada je

$$\begin{aligned} P(C) &= P(\overline{A_1} \cup \overline{A_2}) = P(\overline{A_1}) + P(\overline{A_2}) - P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) \\ &= 0,13 + 0,24 - 0,03 = 0,34. \end{aligned}$$

II način. Neka je događaj  $D = \text{"Oba izabrana televizora su ispravna"}$ . Tada je

$$P(D) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0,87 \cdot 0,76 = 0,66.$$

Pošto su događaji  $C$  i  $D$  međusobno suprotni dobijamo da je  $P(C) = 0,34 = (1 - P(D))$ . ♦

**Zadaci za vežbu:**

1. Bacaju se 2 kocke. Odrediti

- skup svih mogućih ishoda navedenog eksperimenta,
- skup svih ishoda događaja "NA GORNJOJ STRANI OBE KOCKE SE NALAZE ISTI BROJEVI",
- skup svih ishoda događaja "NA GORNJOJ STRANI OBE KOCKE SE NALAZE BROJEVI ČIJI ZBIR IZNOSI 9",
- skup svih ishoda događaja "NA GORNJOJ STRANI OBE KOCKE SE NALAZE BROJEVI ČIJI JE ZBIR VEĆI OD 10",
- skup svih ishoda događaja "NA GORNJOJ STRANI OBE KOCKE SE NALAZE BROJEVI ČIJI ZBIR NIJE MANJI OD 10".

2. Bacaju se 3 novčića. Odrediti

- skup svih mogućih ishoda navedenog eksperimenta,
- skup svih ishoda događaja "NA GORNJOJ STRANI SVA TRI NOVČIĆA SE NALAZI ISTA OZNAKA",
- skup svih ishoda događaja "NA GORNJOJ STRANI BAR DVA NOVČIĆA SE NALAZI PISMO",
- skup svih ishoda događaja "NA GORNJOJ STRANI BAR DVA NOVČIĆA SE NALAZI GLAVA",

e) skup svih ishoda događaja "NA GORNJOJ STRANI BAR JEDNOG NOVČIĆA SE NALAZI PISMO",

f) skup svih ishoda događaja "NA GORNJOJ STRANI BAR JEDNOG NOVČIĆA SE NALAZI GLAVA".

3. Vozački ispit polažu 4 kandidata. Evidentiramo da li su položili (sa 1) ili ne (sa 0). Odrediti

a) skup svih mogućih ishoda,

b) skup svih ishoda događaja "SVA ČETIRI KANDIDATA IMAJU ISTI ISHOD POLAGANJA VOZAČKOG ISPITA",

c) skup svih ishoda događaja "BAR TRI KANDIDATA SU POLOŽILA VOZAČKI ISPIT",

d) skup svih ishoda događaja "BAR DVA KANDIDATA SU POLOŽILA VOZAČKI ISPIT",

e) skup svih ishoda događaja "BAR JEDAN KANDIDAT JE POLOŽIO VOZAČKI ISPIT",

f) skup svih ishoda događaja "PRVI KANDIDAT NIJE POLOŽIO VOZAČKI ISPIT",

g) skup svih ishoda događaja "DRUGI KANDIDAT NIJE POLOŽIO VOZAČKI ISPIT",

h) skup svih ishoda događaja "TREĆI KANDIDAT NIJE POLOŽIO VOZAČKI ISPIT",

i) skup svih ishoda događaja "ČETVRTI KANDIDAT NIJE POLOŽIO VOZAČKI ISPIT",

j) skup svih ishoda događaja "PRVI I TREĆI KANDIDAT NISU POLOŽILI VOZAČKI ISPIT",

k) skup svih ishoda događaja "DRUGI I ČETVRTI KANDIDAT SU POLOŽILI VOZAČKI ISPIT".

4. U vazi se nalazi 5 cvetova i to: 2 cveta crvene boje (označeni sa  $C_1$  i  $C_2$ ), 2 cveta zelene boje (označeni sa  $Z_1$  i  $Z_2$ ) i 1 cvet plave boje (označen sa  $P_1$ ). Izvlače se odjednom 3 cveta. Odrediti

- a) skup svih mogućih ishoda navedenog eksperimenta,
  - b) skup svih ishoda događaja "SVA TRI IZVUČENA CVETA SU RAZLIČITE BOJE",
  - c) skup svih ishoda događaja "IZVUČENA SU DVA CVETA CR-  
VENE BOJE",
  - d) skup svih ishoda događaja "IZVUČEN JE JEDAN CVET ZELENE  
BOJE",
  - e) skup svih ishoda događaja "IZVUČEN JE JEDAN CVET PLAVE  
BOJE".
5. Baca se 1 kocka. Kolika je verovatnoća da pri bacanju kocke na gornjoj strani kocke budu neparan broj?
6. Baca se 1 kocka. Kolika je verovatnoća da pri bacanju kocke na gornjoj strani kocke bude broj veći od 4?
7. Bacaju se 2 kocke istovremeno. Kolika je verovatnoća da zbir brojeva na gornjoj strani kocki bude 12?
8. Bacaju se 2 kocke istovremeno. Kolika je verovatnoća da zbir brojeva na gornjoj strani kocki bude 10?
9. Bacaju se 2 kocke istovremeno. Kolika je verovatnoća da zbir brojeva na gornjoj strani kocki bude veći od 9?
10. Bacaju se 2 kocke istovremeno. Kolika je verovatnoća da zbir brojeva na gornjoj strani kocki nije veći od 5?
11. Bacaju se 2 novčića istovremeno. Kolika je verovatnoća da na gornjoj strani novčića bude bar jedno pismo?
12. Bacaju se 3 novčića istovremeno. Kolika je verovatnoća da na gornjoj strani novčića bude tačno jedno pismo?
13. Bacaju se 3 novčića istovremeno. Kolika je verovatnoća da na gornjoj strani sva tri novčića bude pismo?
14. U kutiji se nalazi 5 belih i 3 crne kuglice. Dva puta se iz kutije vrši izvlačenje bez vraćanja. Ako je u prvom izvlačenju izvučena bela

kuglica, kolika je verovatnoća da će u drugom izvlačenju biti izvučena

a) bela kuglica?

b) crna kuglica?

15. U kutiji se nalazi 7 belih i 6 crnih kuglica. Dva puta se iz kutije vrši izvlačenje bez vraćanja. Ako je u prvom izvlačenju izvučena crna kuglica, kolika je verovatnoća da će u drugom izvlačenju biti izvučena

a) bela kuglica?

b) crna kuglica?

16. U zgradi živi 50 punoletnih ljudi pri čemu je 27 punoletnih žena i 23 punoletna muškarca. Na sastanka stanara biraju se 3 predstavnika zgrade: predsednik skupštine stanara, zamenik predsednika skupštine stanara i blagajnik. Jedan čovek ne može da bude izabran na dve funkcije. Ako su za predsednika skupštine stanara i njegovog zamenika izabrani muškarci, kolika je verovatnoća

a) da će za blagajnika takođe biti izabran muškarac?

b) da će za blagajnika biti izabrana žena?

17. Kolika je verovatnoća da će se pri istovremenom bacanju dve kocke na gornjoj strani kocki pojaviti zbir deljiv sa 2 i sa 3?

18. Kolika je verovatnoća da će se pri istovremenom bacanju dve kocke na gornjoj strani kocki pojaviti zbir deljiv sa 2 i sa 5?

19. Kolika je verovatnoća da će se pri istovremenom bacanju dve kocke na gornjoj strani kocki pojaviti zbir deljiv sa 3 ili sa 4?

20. Kolika je verovatnoća da će se pri istovremenom bacanju dve kocke na gornjoj strani kocki pojaviti zbir deljiv sa 3 ili sa 5?

21. Kolika je verovatnoća da se iz špila od 54 karte izvuče dama ili kralj?

22. Kolika je verovatnoća da se iz špila od 54 karte izvuče kralj ili karta srce?

23. U kutiji ima 10 crvenih i 8 plavih kuglica. Dva puta se iz kutije

vrši izvlačenje kuglica bez vraćanja. Koliko iznosi verovatnoća

- a) da prva izabrana kuglica bude crvena, a druga plava?
- b) da obe izabrane kuglice budu crvene?
- c) da obe izabrane kuglice budu plave?

24. U kutiji ima 15 žutih, 12 zelenih i 10 plavih kuglica. Tri puta se iz kutije vrši izvlačenje kuglica bez vraćanja. Koliko iznosi verovatnoća

- a) da sve tri izabrane kuglice budu različitih boja?
- b) da sve tri izabrane kuglice budu žute?
- c) da sve tri izabrane kuglice budu zelene?
- d) da sve tri izabrane kuglice budu plave?
- e) da prva izabrana kuglica bude žuta, druga zelena, a treća plava?
- f) da prva i druga izabrana kuglica budu žute, a treća zelena?
- g) da prva i druga izabrana kuglica budu žute, a treća plava?
- h) da prva i druga izabrana kuglica budu zelene, a treća žuta?
- i) da prva i druga izabrana kuglica budu zelene, a treća plava?
- j) da prva i druga izabrana kuglica budu plave, a treća žuta?
- k) da prva i druga izabrana kuglica budu plave, a treća zelena?

25. Ispit iz Kvantitativnih metoda polaže 5 studenata. Evidentiramo da li su položili (sa 1) ili ne (sa 0). Koliko iznosi verovatnoća

- a) da svih 5 studenata položi ispit?
- b) da svih 5 studenata ima isti ishod polaganja ispita?
- c) da bar 4 studenta položi ispit?
- d) da 4 studenta položi ispit?
- e) da bar 1 student položi ispit?
- f) da 1 student položi ispit?

26. Šest strelaca gađa, jedan za drugim, u istu metu. Evidentiramo da li su pogodili metu (sa 1) ili ne (sa 0). Koliko iznosi verovatnoća

- a) da svih 6 strelaca pogodi metu?
- b) da svih 6 strelaca ima isti ishod gađanja?

- c) da bar 5 strelaca pogodi metu?
  - d) da 5 strelaca pogodi metu?
  - e) da bar 1 strelac pogodi metu?
  - f) da 1 strelac pogodi metu?
27. U kutiji se nalazi 10 ceduljica na kojima su ispisani brojevi od 1 do 10. Izvlače se na slučajan način tri ceduljice, jedna za drugom, bez vraćanja. Kolika je verovatnoća da na sve tri izvučene ceduljice budu parni brojevi?
28. U kutiji se nalazi 15 ceduljica na kojima su ispisani brojevi od 1 do 15. Izvlače se na slučajan način tri ceduljice, jedna za drugom, bez vraćanja. Kolika je verovatnoća da na sve tri izvučene ceduljice budu neparni brojevi?
29. Kolika je verovatnoća da se od slova A,A,A,E,I,K,M,M,T,T sastavi reč MATEMATIKA?
30. Kolika je verovatnoća da se od slova A,A,I,I,K,S,S,T,T,T sastavi reč STATISTIKA?
31. Kolika je verovatnoća da se od slova A,A,E,O,O,Ć,N,R,T,V,V sastavi reč VEROVATNOĆA?
32. Dva strelca gađaju, jedan za drugim, u istu metu. Verovatnoća da prvi strelac pogodi metu je 0,7, dok je verovatnoća da drugi strelac pogodi metu 0,9. Kolika je verovatnoća
- a) da oba strelca pogode metu?
  - b) da oba strelca promaše metu?
  - c) da prvi strelac pogodi metu, a drugi strelac promaši metu?
  - d) da prvi strelac promaši metu, a drugi strelac pogodi metu?
  - e) da bar jedan strelac pogodi metu?
  - f) da bar jedan strelac promaši metu?
33. Dve fabrike proizvode sijalice. Verovatnoća da je sijalica proizvedena u prvoj fabrici ispravna je 0,85, dok je verovatnoća da je sijalica

proizvedena u drugoj fabrici ispravna 0,93. Biraju se dve sijalice, po jedna proizvedena u svakoj fabrici. Kolika je verovatnoća

- a) da su obe izabrane sijalice ispravne?
- b) da su obe izabrane sijalice neispravne?
- c) da je sijalica proizvedena u prvoj fabrici ispravna, a sijalica proizvedena u drugoj fabrici neispravna?
- d) da je sijalica proizvedena u prvoj fabrici neispravna, a sijalica proizvedena u drugoj fabrici ispravna?
- e) da je bar jedna izabrana sijalica ispravna?
- f) da je bar jedna izabrana sijalica neispravna?

34. Za upis na fakultet učenik polaže testove iz sledećih predmeta: Matematika, Informatika i Opšta kultura. Verovatnoća da položi test iz Matematike je 0,55, verovatnoća da položi test iz Informatike je 0,74, dok je verovatnoća da položi test iz Opšte kulture je 0,81. Kolika je verovatnoća

- a) da je položio samo test iz Matematike?
- b) da nije položio samo test iz Matematike?
- c) da je položio test iz dva predmeta?
- d) da je položio test iz bar dva predmeta?
- e) da je položio test iz jednog predmeta?
- f) da je položio test iz bar jednog predmeta?

35. U kutiji se nalazi 28 igračaka i to: 13 loptica i 15 kockica različite boje (plave, crvene i zelene) koje se raspoređene *po boji* sledećom tabelom.

| Igračka | loptica | loptica | loptica | kockica | kockica | kockica |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Boja    | plava   | crvena  | zelena  | plava   | crvena  | zelena  |
| Broj    | 3       | 4       | 6       | 5       | 6       | 4       |

Iz kutije se izvlači jedna igračka. Kolika je verovatnoća da je izvučena igračka:

- a) crvene boje?
- b) plave ili zelene boje?
- c) loptica?
- d) kockica?
- e) loptica crvene boje?
- f) kockica zelene boje?
- g) loptica plave ili zelene boje?
- h) kockica crvene ili plave boje?

36. 150 stanovnika jedne zgrade je raspoređeno sledećom tabelom prema polu i starosti.

| Godine   | Muški pol | Ženski pol | Broj stanovnika |
|----------|-----------|------------|-----------------|
| < 18     | 16        | 21         | 37              |
| [18, 29) | 10        | 12         | 22              |
| [29, 50) | 17        | 19         | 36              |
| [50, 65] | 11        | 12         | 23              |
| > 65     | 15        | 17         | 32              |

Bira se jedan stanovnik. Kolika je verovatnoća da izabrani stanovnik zgrade:

- a) ima manje od 50 godina?
- b) je muškog pola?
- c) je muškog pola, ako se zna da ima manje od 50 godina?

37. 320 porodica je raspoređeno u 4 grupe prema njihovom godišnjem

prihodu i podaci su dati sledećom tabelom.

| Grupe | Prihodi                      | Broj porodica |
|-------|------------------------------|---------------|
| I     | manje od 700 000 dinara      | 71            |
| II    | 700 000 – 1 499 999 dinara   | 88            |
| III   | 1 500 000 – 2 500 000 dinara | 93            |
| IV    | više od 2 500 000 dinara     | 68            |

Bira se jedna porodica. Kolika je verovatnoća da izabrana porodica ima godišnji prihod:

- a) manji od 1 500 000 dinara?
- b) od 1 500 000 dinara do 2 500 000 dinara?
- c) veći od 2 500 000 dinara?

## 8. Modeli zadataka za proveru znanja

### 8.1. Modeli zadataka za proveru znanja – I deo

#### Model 1.

1. Odrediti nepoznatu  $x$  tako da važi sledeće:  $\left| \begin{array}{cc} x + \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ x & x - 2 \end{array} \right| > -2$ .
2. Date su matrice  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ . Rešiti matričnu jednačinu  $XA = B^T + 2X$ .
3. Rešiti matričnom metodom sledeći sistem linearnih jednačina:
 
$$\begin{aligned} 3x - 3y + 2z &= 3 \\ 4x - 2y - 3z &= -2 \\ 5x - 4y - 4z &= 2 \end{aligned}$$
4. a) Cena robe je iznosila 5484 dinara i povećana je za 25%. Za koliko procenata treba sniziti novu cenu da bi se roba opet prodavala po početnoj ceni?  
 b) Koliko dinara je iznosio pozajmljeni kapital koji je dužnik primio uz 5% kamatne (interesne) stope, ako je za 2 godine i 3 meseca platio 1974 dinara kamate (interesa)?
5. Izračunati sledeće granične vrednosti:
 
$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + 3}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x^2 - x + 2}{3x^2 + 4x - 1}.$$
6. a) Odrediti prvi izvod funkcije:  $y = \frac{1-x}{e^x}$ ,  
 b) Odrediti drugi izvod funkcije  $y = \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$ .

**Model 2.**

1. Sarusovim pravilom izračunati vrednost determinante  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$  i proveriti rezultat Laplasovim razvojem (po III-ćoj koloni).

2. Date su matrice  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Rešiti matričnu jednačinu  $A^T X = B - 3X$ .

3. Odrediti, u zavisnosti od realnog parametra  $a$ , kada homogeni sistem

$$ax + y + z = 0$$

- linearnih jednačina  $x + ay + z = 0$  ima i netrivialnih rešenja i,

$$x + y + az = 0$$

u tom slučaju, odrediti ih.

4. a) Knjiga ima 420 strana. Ako je student proćitao 75% knjige, koliko je još strana ostalo studentu da bi proćitao knjigu do kraja?

b) Dužnik je poveriocu vratio dug, zajedno sa kamatom, od 40 500 dinara uz kamatnu (interesnu) stopu od 7,5%, za period od 10. jula 2021. do 21. septembra 2021. (k,365). Koliki je bio dug, a kolika kamata?

5. Izračunati sledeće granićne vrednosti:

$$a) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{25 - x^2}{\sqrt{5x} - 5}, \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x - 1}{2x^3 - x^2 + 3x + 4}.$$

6. a) Odrediti prvi izvod funkcije  $y = (1 - 2x + 3x^2)e^x$ ,

- b) Odrediti drugi izvod funkcije  $y = \ln\left(\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}\right)$ .

**Model 3.**

1. Odrediti nepoznatu  $x$  tako da važi sledeće:  $\begin{vmatrix} -2 & 1 & x-1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$ .
2. Data je matrica  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ . Rešiti matricnu jednačinu  $XA^T = A^2 + X$ .
3. Rešiti Gausovom metodom sledeći sistem linearnih jednačina:
- $$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ x + 3y + 2z &= 0 \\ x - y + z &= -1 \end{aligned}$$
4. a) Cena robe je prvo snižena za 12%, a zatim je snižena za još 13%. Nakon toga je cena robe povećana za 25%. Koliko je iznosila početna cena robe, ako se roba nakon navedenih sniženja i povećanja prodaje po ceni od 4 562 dinara?
- b) Po kojoj je kamatnoj (interesnoj) stopi uložen kapital od 46 750 dinara ako je za period od 17. maja 2021. do 18. oktobra 2021. (30,360) doneo 820 dinara kamate (interesa)?
5. Izračunati graničnu vrednost

a)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{3x^2 + 4x - 4}$ ,

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x - 1}{2x^2 - 3x + 5}$ .

6. a) Odrediti prvi izvod funkcije  $y = \frac{1+\cos x}{\sin x}$ ,
- b) Odrediti drugi izvod funkcije  $y = e^{x^2+x+1}$ .

## 8.2. Modeli zadataka za proveru znanja – II deo

### Model 1.

1. Ispitati funkciju  $y = \frac{x^2-4}{x^2-1}$  i nacrtati njen grafik.
2. Odrediti (grafički i računski) cenu za koju se postiže ravnoteža tražnje i ponude, ako je funkcija tražnje data sa  $x = -2p + 5$  i funkcija ponude data sa  $y = p^2 + 2$ .
3. Izračunati: a)  $\int \frac{(x+2)(x^2+1)}{2x^2} dx$ , b)  $\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$ .
4. Analizirana je tokom 20 dana prodaja knjiga u jednoj knjižari i dobijeni su sledeći podaci:  
14, 17, 13, 18, 15, 14, 16, 15, 19, 18, 16, 13, 15, 16, 18, 16, 14, 17, 16, 17.
  - a) Odrediti modus,
  - b) Odrediti varijansu i standardnu devijaciju,
  - c) Odrediti interval varijacije i koeficijent varijacije.
5. Pet strelaca gađa, jedan za drugim, u istu metu.
  - a) Koliko iznosi verovatnoća da svih pet strelaca ima isti ishod gađanja?
  - b) Koliko iznosi verovatnoća da bar četiri strelca pogodi metu?
  - c) Koliko iznosi verovatnoća da jedan strelac pogodi metu?

### Model 2.

1. Ispitati funkciju  $y = \frac{x+1}{e^x}$  i nacrtati njen grafik.
2. Date su funkcija tražnje  $x = -2p + 200$  i funkcija prosečnih troškova proizvodnje  $\overline{C} = \frac{3}{2}x + 20 + \frac{512}{x}$ .
  - a) Odrediti proizvodnju pri kojoj se postiže maksimalna dobit i koliko iznosi maksimalna dobit,

b) Odrediti interval rentabilnosti.

3. Izračunati: a)  $\int \frac{x-4}{\sqrt{x+2}} dx$ , b)  $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$ .

4. Analizirana je prosečna dnevna potrošnja hleba tokom jednog meseca (30 dana) u jednoj četvoročlanoj porodici i dobijeni su sledeći podaci:

|                   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Kol. hleba (u kg) | 0,85 | 0,87 | 0,94 | 0,96 | 0,98 | 1,05 | 1,12 | 1,21 | 1,22 |
| Broj dana         | 4    | 4    | 3    | 3    | 3    | 5    | 3    | 4    | 1    |

a) Odrediti prosečnu potrošnju hleba za datu četvoročlanu porodicu u analiziranom mesecu,

b) Odrediti koliko dana u analiziranom mesecu je data četvoročlana porodicu pojela hleba više od njihove prosečne potrošnje hleba,

c) Odrediti medijanu,

d) Odrediti modus.

5. U kutiji se nalazi 25 ceduljica na kojima su ispisani brojevi od 1 do 25. Izvlače se na slučajan način tri ceduljice, jedna za drugom, bez vraćanja. Kolika je verovatnoća da na sve tri izvučene ceduljice budu neparni brojevi?

### **Model 3.**

1. Ispitati funkciju  $y = \frac{\ln x - 1}{x}$  i nacrtati njen grafik.

2. Data je funkcija ukupnih troškova proizvodnje  $C = x^2 - 15x + 36$ .

a) Odrediti koeficijent elastičnosti date funkcije ukupnih troškova proizvodnje,

b) Odrediti elastičnost date funkcije ukupnih troškova proizvodnje za  $x = 15$ ,

c) Odrediti obim proizvodnje za koji je koeficijent elastičnosti date funkcije ukupnih troškova proizvodnje veći od 1.

3. Izračunati: a)  $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ , b)  $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$ .

4. Sledećom tabelom predstavljeni su podaci o *broju laptopova u 50 analiziranih porodica*.

|                |   |   |    |    |   |
|----------------|---|---|----|----|---|
| Broj laptopova | 1 | 2 | 3  | 4  | 5 |
| Broj porodica  | 7 | 9 | 13 | 17 | 4 |

- a) Odrediti medijanu,
- b) Odrediti varijansu i standardnu devijaciju,
- c) Odrediti interval varijacije i koeficijent varijacije.

5. Dve fabrike proizvode fenove. Verovatnoća da je fen proizveden u prvoj fabrici ispravan iznosi 0,81, dok verovatnoća da fen proizveden u drugoj fabrici ispravan iznosi 0,88. Biraju se dva fena, po jedan proizveden u svakoj fabrici.

- a) Izračunati verovatnoću da su oba izabrana fena ispravna,
- b) Izračunati verovatnoću da je fen proizveden u prvoj fabrici neispravan i fen proizveden u drugoj fabrici ispravan,
- c) Izračunati verovatnoću da je bar jedan izabrani fen neispravan.

## 9. Primeri rešenih modela zadataka

### 9.1. Rešeni model zadataka – I deo

#### Zadaci:

1. Odrediti nepoznatu  $x$  tako da važi sledeće:  $\begin{vmatrix} -1 & 0 & x \\ 1 & x & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \leq 0$ .

2. Date su matrice  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ . Rešiti matricnu jednačinu  $AX = B^T - 2X$ .

3. Rešiti Kramerovom metodom sledeći sistem linearnih jednačina.

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= -3 \\ 2x + 3y - 5z &= -4 \\ 5x + y - 8z &= 3 \end{aligned}$$

4. a) Cena robe je povećana za 15% i prodaje se za 9660 dinara. Za koliko procenata tu cenu treba smanjiti da bi se roba prodavala po prvobitnoj ceni tj. ceni pre navedenog povećanja?

b) Koliko iznosi kamata (interes) na pozajmljenu sumu od 56 000 dinara za 2 godine, 2 meseca i 15 dana (30,360) uz kamatnu (interesnu) stopu od 5,45%?

5. Izračunati granične vrednosti:

a)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4 - x^2}{2x^2 + 3x - 2}$ ,      b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{x^2 - 3x + 2}$ .

6. a) Odrediti prvi izvod funkcije:  $y = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$ ,

b) Odrediti drugi izvod funkcije  $y = e^{3x^2 + 2x + 1}$ .

**Rešenja:**

1. Odrediti nepoznatu  $x$  tako da važi sledeće:  $\begin{vmatrix} -1 & 0 & x \\ 1 & x & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \leq 0$ .

*Rešenje:* Primenom Sarusovog pravila dobijamo da je:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & x \\ 1 & x & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot x \cdot 1 + x \cdot 1 \cdot (-2) - (-1) \cdot x \cdot x - (-2) \cdot (-1) \cdot (-1) \\ = -x - 2x + x^2 + 2 = x^2 - 3x + 2.$$

Dakle,

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & x \\ 1 & x & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \leq 0 \iff x^2 - 3x + 2 \leq 0.$$

Iz

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \iff x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \iff x=1 \vee x=2,$$

odnosno, imajući u vidu da je  $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ , iz

$$\begin{array}{c} -\infty \quad 1 \quad 2 \quad +\infty \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x-1 & - & + & + \\ \hline x-2 & - & - & + \\ \hline (x-1)(x-2) & + & - & + \\ \hline \end{array} \end{array},$$

zaključujemo da  $x \in [1, 2]$ .

2. Date su matrice  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$  i  $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ . Rešiti matričnu jednačinu  $AX = B^T - 2X$ .

*Rešenje:*

Iz  $AX = B^T - 2X$  sledi  $AX + 2X = B^T$  tj.  $(A + 2I)X = B^T$ .

Neka je  $C = A + 2I$  tj.  $CX = B^T$ , iz čega, pod uslovom da postoji inverz matrice  $C$ , dobijamo da je  $X = C^{-1}B^T$ .

Potrebno je naći  $C^{-1}$  tj.

$$\left( \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \quad \text{odnosno} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Kako je,

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

i

$$C_{1,1} = 2, \quad C_{1,2} = -3, \quad C_{2,1} = -1, \quad C_{2,2} = 1,$$

dobijamo da je

$$C^{-1} = - \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^T = - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Prema tome, rešenje date matrice jednačine je

$$X = C^{-1}B^T = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

3. Rešiti Kramerovom metodom sledeći sistem linearnih jednačina.

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= -3 \\ 2x + 3y - 5z &= -4 \\ 5x + y - 8z &= 3 \end{aligned} \tag{25}$$

*Rešenje:* Treba odrediti  $D$  determinantu sistema (25) i  $D_x$ ,  $D_y$  i  $D_z$  determinante koje odgovaraju, redom, nepoznatoj  $x$ ,  $y$  i  $z$ .

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -5 \\ 5 & 1 & -8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot (-8) + 2 \cdot (-5) \cdot 5 + (-3) \cdot 2 \cdot 1 - 5 \cdot 3 \cdot (-3) - 1 \cdot (-5) \cdot 1 - (-8) \cdot 2 \cdot 2 = 2,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -3 \\ -4 & 3 & -5 \\ 3 & 1 & -8 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 3 \cdot (-8) + 2 \cdot (-5) \cdot 3 + (-3) \cdot (-4) \cdot 1 - 3 \cdot 3 \cdot (-3) - 1 \cdot (-5) \cdot (-3) - (-8) \cdot (-4) \cdot 2 = 2,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 2 & -4 & -5 \\ 5 & 3 & -8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) \cdot (-8) + (-3) \cdot (-5) \cdot 5 + (-3) \cdot 2 \cdot 3 - 5 \cdot (-4) \cdot (-3) - 3 \cdot (-5) \cdot 1 - (-8) \cdot 2 \cdot (-3) = -4,$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-4) \cdot 5 + (-3) \cdot 2 \cdot 1 - 5 \cdot 3 \cdot (-3) - 1 \cdot (-4) \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 2 = 0.$$

Dakle,

$$x = \frac{D_x}{D} = 1, \quad y = \frac{D_y}{D} = -2, \quad z = \frac{D_z}{D} = 0.$$

Prema tome, rešenje sistema (25) je uređena trojka  $(x, y, z) = (1, -2, 0)$  tj. sistem (25) ima jedinstveno rešenje.

4. a) Cena robe je povećana za 15% i prodaje se za 9660 dinara. Za koliko procenata tu cenu treba smanjiti da bi se roba prodavala po prvobitnoj ceni tj. ceni pre navedenog povećanja?

*Rešenje:* Prvo treba odrediti početnu cenu.

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & 9\,660 \text{ dinara} & 115 \% \\ & x \text{ dinara} & 100 \% \end{array} \uparrow$$

Prateći smer strelica dobijamo sledeću proporciju:

$$x : 9\,660 = 100 : 115,$$

odakle, imajući u vidu da je  $a : b = c : d \iff ad = bc$ , dobijamo:

$$x : 9\,660 = 100 : 115 \iff 115x = 9\,660 \cdot 100 \iff x = \frac{966\,000}{115} = 8\,400.$$

Početna cena robe tj. cena robe pre navedenog povećanja je iznosila 8 400 dinara.

Sada ćemo odrediti za koliko procenata treba sniziti cenu robe od 9 660 dinara da bi se roba prodavala po početnoj ceni od 8 400 dinara.

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & 9\,660 \text{ dinara} & 100 \% \\ & 8\,400 \text{ dinara} & x \% \end{array} \uparrow$$

Prateći smer strelica dobijamo sledeću proporciju:

$$8\,400 : 9\,660 = x : 100,$$

odakle, imajući u vidu da je  $a : b = c : d \iff ad = bc$ , dobijamo:

$$8\,400 : 9\,660 = x : 100 \iff 9\,660x = 8\,400 \cdot 100 \iff x = \frac{840\,000}{9\,660} = 87,5.$$

Dakle, cenu robe u iznosu od 9 660 dinara treba sniziti za 12,5% (=100% – 87,5%) da bi se roba prodavala po početnoj ceni koja je iznosila 8 400 dinara.

b) Koliko iznosi kamata (interes) na pozajmljenu sumu od 56 000 dinara za 2 godine, 2 meseca i 15 dana (30,360) uz kamatnu (interesnu) stopu od 5,45%?

*Rešenje:*  $K = 56\,000$  dinara,  $d = 2$  godine + 2 meseca + 15 dana =  $2 \cdot 360 + 2 \cdot 30 + 15 = 795$  dana i  $p = 5,45\%$ .

Iz  $K : i = 36\,000 : (d \cdot p)$  tj.

$$56\,000 : i = 36\,000 : (795 \cdot 5,45),$$

imajući u vidu da je  $a : b = c : d \iff ad = bc$ , dobijamo:

$$56\,000 : i = 36\,000 : (795 \cdot 5,45) \iff 36\,000 \cdot i = 56\,000 \cdot 795 \cdot 5,45$$

$$\iff i = \frac{242\,634\,000}{36\,000} = 6\,739,83 \text{ dinara.}$$

Kamata (interes) na sumu od 56 000 dinara za 2 godine, 2 meseca i 15 dana (30,360), uz kamatnu (interesnu) stopu od 5,45%, iznosi 6 739,83 dinara.

5. Izračunati granične vrednosti:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4 - x^2}{2x^2 + 3x - 2}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{x^2 - 3x + 2}.$$

*Rešenje:*

a) Rešenja kvadratne jednačine  $2x^2 + 3x - 2 = 0$  su:

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4} \quad \text{tj.} \quad x_1 = -2, \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

Dakle,

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4 - x^2}{2x^2 + 3x - 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(2-x)(2+x)}{2(x+2)(x-\frac{1}{2})} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2-x}{2(x-\frac{1}{2})} = -\frac{4}{5}.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

6. a) Odrediti prvi izvod funkcije  $y = \frac{1-\sin x}{\cos x}$ .

*Rešenje:*

$$\begin{aligned} y' &= \left( \frac{1-\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(1-\sin x)' \cos x - (1-\sin x)(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{(-\cos x) \cos x - (1-\sin x)(-\sin x)}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{-\cos^2 x + \sin x - \sin^2 x}{(\cos x)^2} = \frac{\sin x - 1}{\cos^2 x} = -\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x} = -\frac{1-\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = -\frac{1}{1+\sin x}. \end{aligned}$$

6. b) Odrediti drugi izvod funkcije  $y = e^{3x^2+2x+1}$ .

*Rešenje:*

$$\begin{aligned} y' &= e^{3x^2+2x+1}(3x^2 + 2x + 1)' = (6x + 2)e^{3x^2+2x+1}, \\ y'' &= (6x+2)' e^{3x^2+2x+1} + (6x+2)(e^{3x^2+2x+1})' \\ &= 6e^{3x^2+2x+1} + (6x+2)((6x+2)e^{3x^2+2x+1}) \\ &= (6 + (6x+2)^2)e^{3x^2+2x+1} = (36x^2 + 24x + 10)e^{3x^2+2x+1}. \end{aligned}$$

## 9.2. Rešeni model zadataka – II deo

### Zadaci:

- Ispitati funkciju  $y = \frac{x^2-3x}{x+1}$  i nacrtati njen grafik.
- Data je funkcija prosečnih prihoda  $\bar{P} = -\frac{3}{2}x + 15$  i funkcija ukupnih troškova proizvodnje  $C = \frac{1}{2}x^2 - 17x + 120$ .
  - Odrediti količinu i cenu pri kojima se postiže maksimalna dobit,
  - Odrediti koliko iznosi maksimalna dobit,
  - Odrediti interval rentabilnosti.
- Izračunati: a)  $\int \frac{(1-x)(3+x^2)}{2x^2} dx$ , b)  $\int \frac{\sin x}{\cos^4 x} dx$ .
- Košarkaški klub A objavio je podatke o broju koševa koje su postigli na utakmicama odigranim u prethodnoj sezoni (sezona 2021/2022).

Podaci su sledeći:

71, 68, 83, 75, 72, 81, 78, 80, 83, 67,

77, 73, 70, 92, 86, 84, 79, 88, 68, 85.

a) Izračunati prosečan broj postignutih koševa po utakmici i na koliko utakmica su postigli više od prosečnog broja koševa,

b) Izračunati modus,

c) Izračunati interval varijacije i koeficijent varijacije.

5. Kolika je verovatnoća da se od slova A,A,A,C,K,K,S,V sastavi reč SKAKAVAC?

**Rešenja:**

1. Ispitati funkciju  $y = \frac{x^2-3x}{x+1}$  i nacrtati njen grafik.

*Rešenje:*

1. Domen funkcije

$$D_y = \{x \in R \mid x + 1 \neq 0\} = R \setminus \{-1\}$$

2. Nule funkcije i znak funkcije

✱ Nule funkcije

$$y = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-3x}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x^2-3x=0 \Leftrightarrow x(x-3)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=3$$

Iz činjenice da  $x=0 \in D_y$  i  $x=3 \in D_y$  zaključujemo da data funkcija ima nule za  $x=0$  i  $x=3$  tj. data funkcija seče  $x$ -osu u tačkama  $A(0,0)$  i  $B(3,0)$ .

✱ Znak funkcije

$-\infty \quad -1 \quad 0 \quad 3 \quad +\infty$

|       |   |   |   |   |
|-------|---|---|---|---|
| $x$   | - | - | + | + |
| $x-3$ | - | - | - | + |
| $x+1$ | - | + | + | + |
| $y$   | - | + | - | + |

### 3. Parnost i neparnost funkcije

Data funkcija nije ni parna ni neparna jer domen funkcije nije simetričan u odnosu na 0.

### 4. Asimptote funkcije

※ Vertikalne asimptote funkcije

$$\lim_{x \rightarrow -1^{\pm}} \frac{x^2 - 3x}{x + 1} = \frac{4}{0} = \pm\infty$$

Dakle, prava  $x = -1$  je vertikalna asimptota date funkcije (i sa leve i sa desne strane).

**Napomena.** U prvom slučaju tj. kada  $x \rightarrow -1^+$  rešenje je  $+\infty$  jer je funkcija  $y = \frac{x^2 - 3x}{x + 1} > 0$  za  $x > -1$ . Analogno, kada  $x \rightarrow -1^-$  rešenje je  $-\infty$  jer je funkcija  $y = \frac{x^2 - 3x}{x + 1} < 0$  za  $x < -1$ .

※ Horizontalne asimptote funkcije

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 3x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x - 3) \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \right) = (\pm\infty) \cdot 1 = \pm\infty$$

Dakle, data funkcija nema horizontalnu asimptotu ni kada  $x \rightarrow +\infty$  ni kada  $x \rightarrow -\infty$ .

※ Kose asimptote funkcije

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 3x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - \frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{x^2 - 3x}{x + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-4x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-4}{1 + \frac{1}{x}} = -4$$

Dakle, prava  $y = x - 4$  je kosa asimptota date funkcije kada  $x \rightarrow \pm\infty$ .

### 5. Monotonost funkcije

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{(x^2-3x)'(x+1)-(x^2-3x)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{(2x-3)(x+1)-(x^2-3x)}{(x+1)^2} \\
 &= \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}
 \end{aligned}$$

Iz

$$-\infty \quad -3 \quad -1 \quad 1 \quad +\infty$$

|           |            |            |            |            |
|-----------|------------|------------|------------|------------|
| $x+3$     | -          | +          | +          | +          |
| $x-1$     | -          | -          | -          | +          |
| $(x+1)^2$ | +          | +          | +          | +          |
| $y'$      | +          | -          | -          | +          |
| $y$       | $\nearrow$ | $\searrow$ | $\searrow$ | $\nearrow$ |

sledi da su ekstremne tačke date funkcije:  $M_{max}(-3, -9)$  i  $N_{min}(1, -1)$ .

### 6. Konveksnost i konkavnost funkcije

$$\begin{aligned}
 y'' &= \frac{(x^2+2x-3)'(x+1)^2-(x^2+2x-3)((x+1)^2)'}{(x+1)^4} \\
 &= \frac{(2x+2)(x+1)^2-2(x^2+2x-3)(x+1)}{(x+1)^4} \\
 &= \frac{2(x+1)((x+1)^2-(x^2+2x-3))}{(x+1)^4} = \frac{8}{(x+1)^3}
 \end{aligned}$$

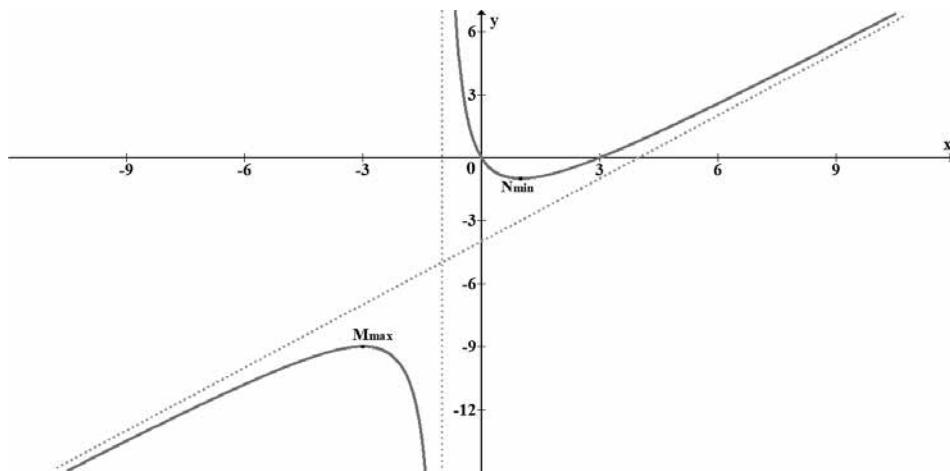
Iz

$$-\infty \quad -1 \quad +\infty$$

|           |        |        |
|-----------|--------|--------|
| 8         | +      | +      |
| $x+1$     | -      | +      |
| $(x+1)^2$ | +      | +      |
| $y''$     | -      | +      |
| $y$       | $\cap$ | $\cup$ |

sledi da data funkcija nema prevojnih tačaka ( $x = -1 \notin D_y$ ).

## 7. Grafik funkcije



2. Data je funkcija prosečnih prihoda  $\bar{P} = -\frac{3}{2}x + 27$  i funkcija ukupnih troškova proizvodnje  $C = \frac{1}{2}x^2 - 5x + 120$ .

- Odrediti količinu i cenu pri kojima se postiže maksimalna dobit,
- Odrediti koliko iznosi maksimalna dobit,
- Odrediti interval rentabilnosti.

*Rešenje:*

Iz  $\bar{P} = -\frac{3}{2}x + 27$ , imajući u vidu da je  $\bar{P} = \frac{P}{x}$ , dobijamo da je  $P = -\frac{3}{2}x^2 + 27x$  tj.  $P = x(-\frac{3}{2}x + 27)$  tj.  $p = -\frac{3}{2}x + 27$  tj.  $x = -\frac{2}{3}p + 18$ .

Iz potrebnih uslova postojanja funkcije  $x = f(p)$  kao funkcije tražnje a to su:

dobijamo:  $p > 0$ ,  $x > 0$  i  $x' < 0$ ,

$$\left. \begin{array}{l} p > 0 \\ x > 0 \\ x' < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} p > 0 \\ -\frac{2}{3}p + 18 > 0 \\ -\frac{2}{3} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} p > 0 \\ p < 27 \\ \text{za svako } p \end{array} \right\} \Rightarrow p \in (0, 27).$$

Dakle,  $p \in (0, 27)$  iz čega zaključujemo da  $x \in (0, 18)$ .

Iz uslova :

dobijamo:  $x > 0$ ,  $C > 0$  i  $C' > 0$ ,

$$\left. \begin{array}{l} x > 0 \\ C > 0 \\ C' > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x > 0 \\ \frac{1}{2}x^2 - 5x + 120 > 0 \\ x - 5 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{za svako } x \left. \begin{array}{l} x > 0 \\ x > 5 \end{array} \right\} \Rightarrow x \in (5, +\infty).$$

Imajući u vidu da  $x \in (0, 18)$  i  $x \in (5, +\infty)$  dobijamo da je  $x \in (5, 18)$  zajednički uslov.

Pošto je  $D = P - C$ , dobijamo da je  $D = -\frac{3}{2}x^2 + 27x - (\frac{1}{2}x^2 - 5x + 120) = -2x^2 + 32x - 120$ .

a) Prema tome  $D' = -4x + 32$  tj.  $D'' = -4$ . Imajući u vidu da je  $D' = 0 \iff -4x + 32 = 0 \iff x = 8$  i pri tome je  $D''(8) = -4 < 0$ , zaključujemo da je  $x = 8$  količina pri kojoj se postiže maksimalna dobit. Iz  $p = -\frac{3}{2}x + 27$  dobijamo da je  $p(8) = -\frac{3}{2} \cdot 8 + 27 = 15$  cena pri kojoj se postiže maksimalna dobit,

b)  $D_{max} = D(8) = -2 \cdot 8^2 + 32 \cdot 8 - 120 = 8$ ,

c) Interval rentabilnosti dobija se iz uslova  $P = C$  (ili  $D = 0$ ). Dakle, potrebno je rešiti jednačinu  $-2x^2 + 32x - 120 = 0$  tj.  $x^2 - 16x + 60 = 0$ .

$$x^2 - 16x + 60 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 240}}{2} = \frac{16 \pm 4}{2} \Leftrightarrow x = 6 \vee x = 10.$$

Dakle, interval rentabilnosti je  $(6, 10)$ .

3. Izračunati: a)  $\int \frac{(1-x)(3+x^2)}{2x^2} dx$ , b)  $\int \frac{\sin x}{\cos^4 x} dx$ .

Rešenje:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \int \frac{(1-x)(3+x^2)}{2x^2} dx &= \int \frac{3+x^2-3x-x^3}{2x^2} dx = \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{1}{x^2} dx + \frac{1}{2} \int dx - \frac{3}{2} \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \int x dx = \\ &= \frac{3}{2} \int x^{-2} dx + \frac{1}{2} \int dx - \frac{3}{2} \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \int x dx = \\ &= \frac{3}{2} \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{1}{2} x - \frac{3}{2} \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} = -\frac{3}{2x} + \frac{x}{2} - \frac{3 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} \end{aligned}$$

b) Primenimo *smenu*.

$$t = \cos x \quad \text{tj.} \quad dt = -\sin x \, dx \quad (26)$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^4 x} \, dx \stackrel{(26)}{=} -\int \frac{dt}{t^4} = -\int t^{-4} \, dt = -\frac{t^{-3}}{-3} + C = \frac{1}{3t^3} + C = \frac{1}{3\cos^3 x} + C,$$

4. Košarkaški klub A objavio je podatke o broju koševa koje su postigli na utakmicama odigranim u prethodnoj sezoni (sezona 2021/2022). Podaci su sledeći:

71, 68, 83, 75, 72, 81, 78, 80, 83, 67,

77, 73, 70, 92, 86, 84, 79, 88, 68, 85.

a) Izračunati prosečan broj postignutih koševa po utakmici i na koliko utakmica su postigli više od prosečnog broja koševa,

b) Izračunati modus,

c) Izračunati interval varijacije i varijansu.

*Rešenje:*

$$\text{a) } \bar{x} = \frac{71+68+83+75+72+81+78+80+83+67+77+73+70+92+86+84+79+88+68+85}{20} = 78.$$

Dakle, prosečan broj postignutih koševa po utakmici je 78. Na 10 utakmica su postigli više od prosečnog broja koševa (78).

b) Modus iznosi 83 jer su na dve utakmice postigli 83 koša, a na svim ostalim utakmicama je različit broj postignutih koševa,

c) Interval varijacije iznosi  $92 - 67 = 25$ .

Varijansa se određuje iz nekoliko sledećih koraka:

I. *Odrediti aritmetičku sredinu datih podataka.*

Aritmetička sredina datih podataka iznosi 78 (rezultat pod a)).

II. *Odrediti razliku između vrednosti svakog podatka i aritmetičke sredine.*

$$71 - 78 = -7; \quad 68 - 78 = -10; \quad 83 - 78 = 5; \quad 75 - 78 = -3; \quad 72 - 78 = -6;$$

$81 - 78 = 3$ ;  $78 - 78 = 0$ ;  $80 - 78 = 2$ ;  $83 - 78 = 5$ ;  $67 - 78 = -11$ ;  
 $77 - 78 = -1$ ;  $73 - 78 = -5$ ;  $70 - 78 = -8$ ;  $92 - 78 = 14$ ;  $86 - 78 = 8$ ;  
 $84 - 78 = 6$ ;  $79 - 78 = 1$ ;  $88 - 78 = 10$ ;  $68 - 78 = -10$ ;  $85 - 78 = 7$ .

III. *Odrediti sumu kvadrata prethodno dobijenih razlika.*

$$(-7)^2 + (-10)^2 + 5^2 + (-3)^2 + (-6)^2 + 3^2 + 0^2 + 2^2 + 5^2 + (-11)^2 + (-1)^2 + (-5)^2 + (-8)^2 + 14^2 + 8^2 + 6^2 + 1^2 + 10^2 + (-10)^2 + 7^2 = 1014.$$

IV. *Dobijenu sumu podeliti sa brojem podataka.*

$$\sigma^2 = \frac{1014}{20} = 50,7.$$

5. Kolika je verovatnoća da se od slova A,A,A,C,K,K,S,V sastavi reč SKAKAVAC?

*Rešenje:*

$P_1$ , verovatnoća da od datih slova prvo izabrano slovo bude slovo S, iznosi  $\frac{1}{8}$ .

$P_2$ , verovatnoća da od datih slova drugo izabrano slovo bude slovo K, iznosi  $\frac{2}{7}$ .

$P_3$ , verovatnoća da od datih slova treće izabrano slovo bude slovo A, iznosi  $\frac{3}{6}$ .

$P_4$ , verovatnoća da od datih slova četvrto izabrano slovo bude slovo K, iznosi  $\frac{1}{5}$ .

$P_5$ , verovatnoća da od datih slova peto izabrano slovo bude slovo A, iznosi  $\frac{2}{4}$ .

$P_6$ , verovatnoća da od datih slova šesto izabrano slovo bude slovo V, iznosi  $\frac{1}{3}$ .

$P_7$ , verovatnoća da od datih slova sedmo izabrano slovo bude slovo A, iznosi  $\frac{1}{2}$ .

$P_8$ , verovatnoća da od datih slova osmo izabrano slovo bude slovo C, iznosi 1.

Dakle, verovatnoća da se od datih slova sastavi reč SKAKAVAC tj. da prvo izabrano slovo bude S, drugo izabrano slovo bude K, treće izabrano slovo bude A, ... i osmo izabrano slovo bude C je jednaka:

$$P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot P_4 \cdot P_5 \cdot P_6 \cdot P_7 \cdot P_8 = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{3360}.$$

## Literatura

- [1] Zora Aleksić i Vule Aleksić, *Matematika 1*, VIII izdanje, Visoka Građevinsko-geodetska škola, Beograd 2016.
- [2] Luka Filipović, *Kvantitativne metode*, Fakultet za turistički i hotelijerski menadžment, Beograd 2005.
- [3] Ljiljana Gajić, *Predavanja iz Analize I*, Univerzitet u Novom Sadu, PMF, Novi Sad 2006.
- [4] Ljubiša Kočinac, *Linearna algebra i analitička geometrija*, II pre-rađeno i prošireno izdanje, Prosveta, Niš 1997.
- [5] Gradimir V. Milovanović i Radosav Ž. Đorđević, *Matematička analiza I*, Univerzitet u Nišu, Elektronski fakultet, Niš 2005.
- [6] Slobodanka Mitrović, *Matematika za studente biotehničkih fakulteta*, II ispravljeno izdanje, Mrlješ, Beograd 2004.
- [7] Radmila Dragutinović Mitrović, *Statistika - Udžbenik za 3. i 4. razred srednje stručne škole*, Data status, Beograd 2013.
- [8] Pavle Mladenović, *Verovatnoća i statistika*, IV izdanje, Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet, Zavod za udžbenike, Beograd, 2019.
- [9] Valentina Stanković, *Matematika za ekonomiste*, Visoka poslovna škola strukovnih studija Leskovac, Leskovac 2016.
- [10] Zoran Stojaković i Ivica Bošnjak, *Elementi linearne algebre*, PMF Novi Sad, Symbol, Novi Sad 2010.
- [11] Zoran Stojaković i Dragoslav Herceg, *Linearna algebra i analitička geometrija*, PMF Novi Sad, Symbol, Novi Sad 2004.

- [12] Dragan Vugdelija i dr., *Matematika za ekonomiste*, IX izdanje, Univerzitet u Novom Sadu, Ekonomski fakultet Subotica, Subotica 2012.
- [13] Nahod Vuković i Slađana Spasić, *Statistika sa praktikumom*, I izdanje, Univerzitet Singidunum, Beograd 2022.
- [14] Mališa Žižović, Olivera Nikolić i Ivana Kovačević, *Kvantitativne metode sa zbirkom zadataka*, VIII izdanje, Univerzitet Singidunum, Beograd 2020.







CIP - Каталогизација у публикацији  
Народна библиотека Србије, Београд

51(075.8)(076)  
51-77:33(075.8)(076)

РАДИЧИЋ, Биљана, 1979-

Praktikum iz kvantitativnih metoda / Radičić Biljana. - 2. izd. - Beograd :  
Univerzitet Singidunum, 2025 (Beograd : Birograf). - II, 213 str. : graf. prikazi ;  
24 cm

Tiraž 1.700. - Bibliografija: str. 212-213.

ISBN 978-86-7912-789-1

a) Математика -- Задаци b) Привредна математика -- Задаци

COBISS.SR-ID 173161481

© 2025.

Sva prava zadržana. Nijedan deo ove publikacije ne može biti reprodukovан u bilo kom vidu i putem  
bilo kog medija, u delovima ili celini bez prethodne pismene saglasnosti izdavača.



Biljana Radičić

# Kvantitativne metode

PRAKTIKUM

Praktikum je nastao kako bi se izašlo u susret potrebi i zahtevu studenata tokom dosadašnjeg rada sa njima za što većim brojem primera zadataka pri pripremi kolokvijuma i ispita što bi im omogućilo lakše i brže savladavanje gradiva.

Uz udžbenik, Praktikum će svakako, s obzirom na prirodu predmeta, dati veliki doprinos savladavanju predviđenog gradiva. Iako je Praktikum namenjen pre svega studentima, Praktikum može koristiti i drugim čitaocima čija se interesovanja poklapaju sa gradivom (ili delom gradiva) koje je u njemu obrađeno.

Zadaci za vežbanje sadrže više primera, od najjednostavnijih prema složenijim, što omogućava studentima da se što bolje pripreme za polaganje ispita.