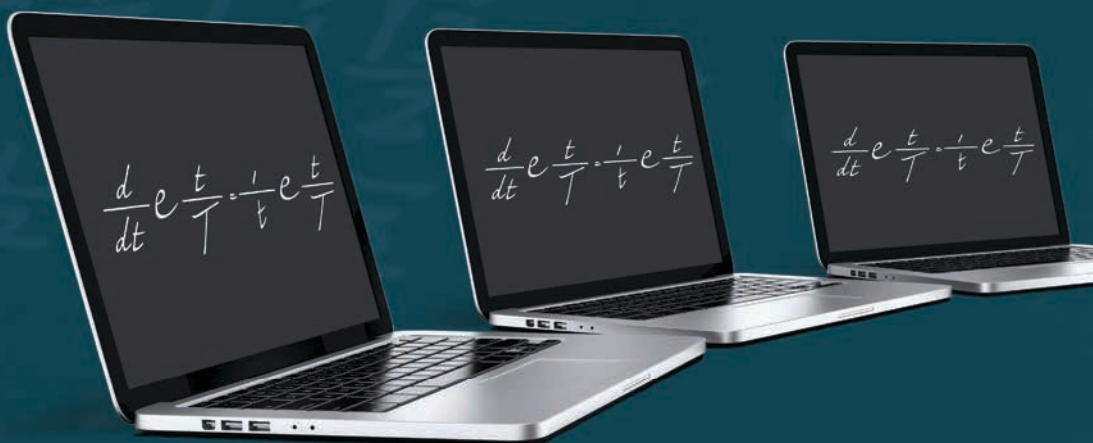




Ivana Kostić Kovačević

Matematika

sa zbirkom zadataka



Beograd, 2025.

UNIVERZITET SINGIDUNUM

Ivana Kostić Kovačević

MATEMATIKA

SA ZBIRKOM ZADATAKA

Osmo izdanje

Beograd, 2025.

MATEMATIKA SA ZBIRKOM ZADATAKA

Autor:

dr Ivana Kostić Kovačević

Recenzent:

dr Nenad Cakić

Izdavač:

UNIVERZITET SINGIDUNUM

Beograd, Danijelova 32

www.singidunum.ac.rs

Za izdavača:

dr Milovan Stanišić

Priprema za štampu:

Jelena Petrović

Dizajn korica:

Aleksandar Mihajlović, MA

Godina izdanja:

2025.

Tiraž:

400 primeraka

Štampa:

Birograf, Beograd

ISBN 978-86-7912-607-8

Copyright:

© 2025 Univerzitet Singidunum

Izdavač zadržava sva prava.

Reprodukcija pojedinih delova ili celine ove publikacije nije dozvoljena.

**“Lakše je matematiku naučiti
nego živeti bez nje”**

H. Baus

PEDGOVOR

Ovaj udžbenik napisan je za studente prve godine Univerziteta Singidunum, koji slušaju jednosemestralni kurs matematike, na Fakultetu za informatiku i računarstvo i Tehničkom fakultetu. Prilagođen je planu i programu predmeta ovog predmeta.

Podeljen je u 7 poglavlja.

Udžbenik objedinjuje teoriju i zadatke, što je standard u savremenoj literaturi. Ideja autora je bila da se izloži kratak pregled teorije, odnosno najvažnije definicije i teoreme koje su neophodne studentima. Dokazi su lišeni često opterećujućih detalja, sa željom da ovaj način izlaganja bude prihvatljiv za što širi krug čitalaca. Osim teorije udžbenik sadrži veliki broj zadataka koji pomažu da se izložena teorija lakše savlada.

Autor poziva sve studente, čitaoce i druge korisnike ovog udženika da daju svoje sugestije, da bi naredna izdanja izdanja bila bila kvalitetnija i sadržajnija.

U Beogradu

AUTOR

08.08.2015

SADRŽAJ

1. UVOD	1
1.1. TEORIJA BROJEVA	3
1.2. ELEMENTARNE FUNKCIJE	12
1.3. ARITMETIČKI I GEOMETRIJSKI NIZ	22
1.4. ANALITIČKA GEOMETRIJA	22
2. MATRICE	25
2.1. POJAM MATRICE I OPERACIJE	27
2.2. DETERMINANTE	30
2.3. RANG MATRICE	35
2.4. ELEMENTARNE TRANSFORMACIJE MATRICA	36
2.5. INVERZNA MATRICA	37
3. SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA	53
3.1. GAUSOVA METODA	55
3.2. KRAMEROVA METODA	58
3.3. KRONEKER KAPELIJEVA TEOREMA	60
3.4. HOMOGENI SISTEM LINEARNIH JEDNAČINA	61
3.5. MATRIČNA METODA	63
4. POJAM FUNKCIJE	75
4.1. FUNKCIJE JEDNE PROMENLJIVE	78
4.2. GRANIČNA VREDNOST NIZA	88
4.3. GRANIČNA VREDNOST FUNKCIJE	91
4.4. ASIMPTOTE FUNKCIJE	96

5. DIFERENCIJALNI RAČUN	121
5.1. DEFINICIJA IZVODA FUNKCIJE	124
5.2. DIFERENCIJAL FUNKCIJE	130
5.3. TEJLOROVA I MAKLORENOVA FORMULA	142
5.4. OSNOVNE TEOREME DIFERENCIJALNOG RAČUNA	149
5.5. ISPITIVANJE FUNKCIJA POMOĆU IZVODA	159
 6. INTEGRALNI RAČUN	 195
6.1. NEODREĐENI INTEGRALI	198
6.2. ODREĐENI INTEGRALI	233
6.3. NESVOJSTVENI INTEGRALI	239
6.4. PRIMENE INTEGRALNOG RAČUNA	248
 7. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE	 263
7.1. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE PRVOG REDA	266
7.2. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE DRUGOG REDA	271
 8. LITERATURA	 292

UVOD

- 1. TEORIJA BROJEVA**
- 2. ELEMENTARNE FUNKCIJE**
- 3. ARITMETIČKI I GEOMETRIJSKI NIZ**
- 4. ANALITIČKA GEOMETRIJA**

1.

UVOD

U uvodnom delu sakupljeni su osnovni pojmovi sa kojima se srećemo u srednjoj školi, a koji su neophodni u daljem radu.

1.1. TEORIJA BROJEVA

Broj je jedan od osnovnih pojmova matematike koji se intuitivno shvata.

1.1.1. PRIRODNI BROJEVI

- Prirodni brojevi su oblika $N = \{1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots\}$.
- Za svaki broj $n \in N$ postoji broj $n+1 \in N$. Brojevi n i $n+1$ su **uzastopni** ili **sukcesivni** brojevi.
- Prirodan broj čiji su jedini činioci on sam i broj 1, nazivamo **prostim brojem**, na primer 2, 3, 5, 7, 11, ... **Uzajamno prostim** brojevima nazivamo dva prirodna broja ako im je jedini zajednički činilac broj 1.
- Prirodni broj je **paran** ako mu je bar jedan prost činilac broj 2. Ako to nije slučaj broj je **neparan**. Parne brojeve obeležavamo sa $2k$, a neparne sa $2k+1$ ili $2k-1$, gde je $k \in N$.
- Skup prirodnih brojeva je **zatvoren** u odnosu na operacije **sabiranja** i **množenja**, tj. rezultat sabiranja i množenja dva prirodna broja uvek je prirodan broj.
- Za operacije sabiranja i množenja prirodnih brojeva važe zakoni:

$$a + b = b + a, ab = ba \quad \text{komutacije;}$$

$$(a + b) + c = a + (b + c), (ab)c = a(bc) \quad \text{asocijacije;}$$

$$(a + b)c = ac + bc, a(b + c) = ab + ac \quad \text{distribucije.}$$

- **Stepen** prirodnog broja definišemo kao $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ puta}}$.

- Na osnovu definicije stepena zaključujemo:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}.$$

1.1.2. CELI BROJEVI

- Skup **celih brojeva** sadrži sve prirodne brojeve, nulu i brojeve oblika $-n$, gde $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathbb{Z} = \{\dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, n+1, \dots\}.$$

- **Oduzimanje** u skupu celih brojeva je operacija koje se definiše kao:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, a - b = c \Leftrightarrow a = b + c.$$

- Skup $\mathbb{Z}$ je nadskup skupa $\mathbb{N}$ i zadržava sva pravila koja smo definisali u skupu $\mathbb{N}$, dodajući neka nova koja važe samo u njemu. Ovaj princip koristimo i u definisanju narednih proširenja skupova brojeva i zove se **princip permanencije**.

1.1.3. RACIONALNI BROJEVI

- Skup **racionalnih brojeva** je oblika:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N} \right\}.$$

- **Deljenje** celih brojeva definišemo na sledeći način:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0, \frac{a}{b} = c \Leftrightarrow a = b \cdot c.$$

- Skup racionalnih brojeva je **prebrojiv** skup tj. između tog skupa i skupa prirodnih brojeva može se uspostaviti obostrano jednoznačno preslikavanje.

1.1.4. IRACIONALNI BROJEVI

- Broj koji se ne može predstaviti u obliku razlomka nazivamo **iracionalnim brojem**, na primer $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \log 2, \pi, e, \dots$.
- Svaki iracionalan broj može se predstaviti u obliku **beskonačnog neperiodičnog razlomka**.
- Skup iracionalnih brojeva obeležavamo sa I .
- Skup iracionalnih brojeva, kao i skup racionalnih brojeva je neograničen.

1.1.5. REALNI BROJEVI

- Svi racionalni i iracionalni brojevi obrazuju skup **realnih brojeva**, tj.
 $R = Q \cup I$.
- Skup realnih brojeva je **neprebrojiv** skup.
- Skup realnih brojeva je **uređen skup**, tj. između svaka dva realna broja postoji samo jedan od sledećih odnosa $a > b, a = b, a < b$.
- Na skupu realnih brojeva za nejednakosti važe sledeće osobine:
 $(a > b) \Leftrightarrow (b < a);$
 $(a > b) \Leftrightarrow (a + c > b + c);$
 $(a > b, c > 0) \Rightarrow (ac > bc), (a > b, c < 0) \Rightarrow (ac < bc).$
- Realni brojevi se mogu predstaviti kao tačke na brojnoj pravoj.

APSOLUTNA VREDNOST BROJA

- Ako je a proizvoljan realan broj, tada je **apsolutna vrednost** broja a :

$$|a| = \begin{cases} a, & a > 0 \\ 0, & a = 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

Napomena: Apsolutna vrednost broja uvek je nenegativan broj, tj. $|a| \geq 0$.

- Za **apsolutnu vrednost** broja a važe sledeća pravila:

$$|a| = |-a|, \quad |a| < b \Leftrightarrow -b < a < b, \quad |a| > b \Leftrightarrow (a > b) \wedge (a < -b).$$

$$|a+b| \leq |a|+|b|, \quad |a-b| \leq |a|+|b|, \quad |a-b| \geq |a|-|b|.$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, \quad b \neq 0.$$

PROŠIRENJE SKUPA REALNIH BROJEVA

- Skup realnih brojeva proširuje se sa dva simbola $-\infty$ i $+\infty$, tako da za svaki $a \in R$ važi nejednakost: $-\infty < a < +\infty$.

Za operacije sa ovim simbolima važe pravila ($a \in R$):

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \quad a + (+\infty) = +\infty;$$

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty, \quad a + (-\infty) = -\infty.$$

Za $a > 0$ imamo:

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty, \quad a \cdot (+\infty) = +\infty;$$

$$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty, \quad (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty, \quad a \cdot (-\infty) = -\infty.$$

Izrazi $(+\infty) - (+\infty)$ i $\frac{\pm\infty}{\mp\infty}$ **nisu definisani**

INTERVAL

- Ako su $a, b \in R$ takvi da je $a < b$ sledeći podskupovi nazivaju se:

otvoren interval: $(a, b) = \{x \mid a < x < b\},$

zatvoren interval: $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\},$

polu-otvoren interval ili polu-zatvoren interval:

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\}, \quad (a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}.$$

1.1.6. KOMPLEKSNI BROJEVI

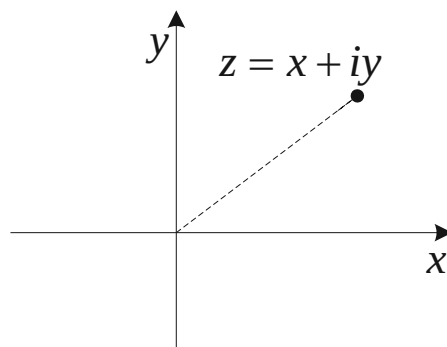
ALGEBARSKI OBLIK KOMPLEKSNOG BROJA

Poznato je da sve kvadratne jednačine nemaju rešenja u skupu realnih brojeva, na primer jednačina $x^2 + 1 = 0$. Da bismo rešili ovu veoma jednostavnu jednačinu moramo skup realnih brojeva proširiti. Tako dolazimo do skupa **kompleksnih** brojeva.

- **Imaginarna jedinica** je po definiciji $i = \sqrt{-1}$.

Rešenje pomenute jednačine postaje sada $x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$.

- Skup svih uređenih parova realnih brojeva (x, y) u kojem je $z = x + iy$, tj. $z = (x, y)$ naziva se skupom **kompleksnih brojeva** C , gde je $i = \sqrt{-1}$.
- **Realni deo** kompleksnog broja je $\operatorname{Re}(z) = x$, **imaginarni deo** $\operatorname{Im}(z) = y$.
- Dva kompleksna broja $z_1 = x_1 + iy_1$ i $z_2 = x_2 + iy_2$ su **jednaka** ako su im jednaki realni delovi za sebe, a imaginarni za sebe; $x_1 = x_2$ i $y_1 = y_2$.
- Kompleksni brojevi mogu se predstaviti kao tačke u kompleksnoj ili Gausovoj ravni.



- Svakom kompleksnom broju $z = x + iy$ odgovara **konjugovano kompleksni broj** u oznaci $\bar{z} = x - iy$.
- **Modulo** kompleksnog broja z definiše se kao $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

OPERACIJE SA KOMPLEKSNIM BROJEVIMA U ALGEBARSKOM OBLIKU

Neka su data dva kompleksna broja $z_1 = x_1 + iy_1$ i $z_2 = x_2 + iy_2$.

- **Sabiranje:** $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.
- **Oduzimanje:** $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$.
- **Množenje:** $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2)$.
- **Deljenje:** $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}$.
- **Stepenovanje** kompleksnog broja prirodnim brojem se definiše kao skraćeno množenje $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ puta}}, n \in \mathbb{N}$.

Napomena: Kako je $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$, možemo uopštiti da je:

$$i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i.$$

Primer:

$$i^{2015} = i^{2012+3} = i^{2012} i^3 = i^{4 \cdot 503} i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$$

EKSPONENCIJALNI OBLIK KOMPLEKSNOG BROJA

- **Eksponencijalni oblik** kompleksnog broja je $z = \rho \cdot e^{i\varphi}$.
- **Ojlerova formula:** $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$.
- $\rho = |z|$ je **moduo**, a φ je **argument** kompleksnog broja gde je $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$ i obeležava se $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

Argument kompleksnog broja nije jednoznačno određen. Imajući u vidu periodičnost trigonometrijskih funkcija, argument je svaki realni broj oblika $\varphi + 2k\pi$, gde je $k \in \mathbb{Z}$.

Specijalno, broj φ koji zadovoljava uslov $-\pi < \varphi \leq \pi$ naziva se **glavni argument**.

OPERACIJE SA KOMPLEKSNIM BROJEVIMA U EKSPONENCIJALNOM OBLIKU

Neka su dati kompleksni brojevi $z_1 = \rho_1 \cdot e^{i\varphi_1}$ i $z_2 = \rho_2 \cdot e^{i\varphi_2}$.

- **Množenje:** $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$.
- **Deljenje:** $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$.
- **Logaritam:** $\ln z = \ln \rho + i\varphi$.

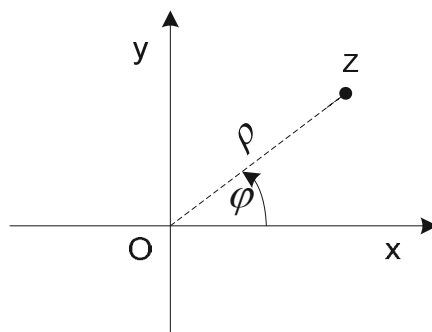
Napomena: Korišćenjem poslednje formule u mogućnosti smo da definišemo logaritam negativnog realnog broja.

Primer: $\ln(-2) = \ln 2 + i\pi$.

TRIGONOMETRIJSKI OBLIK KOMPLEKSNOG BROJA

- **Trigonometrijski oblik** kompleksnog broja je oblika $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$,
gde je $x = \rho \cos \varphi$ i $y = \rho \sin \varphi$.

$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ je **moduo**, a, φ je **argument** kompleksnog broja gde je $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$, i obeležava se $\varphi = \operatorname{Arg} z$. (slika 2)



Argument kompleksnog broja nije jednoznačno određen. Imajući u vidu periodičnost trigonometrijskih funkcija, argument je svaki realni broj oblika $\varphi + 2k\pi$, gde je $k \in \mathbb{Z}$.

Specijalno, broj φ koji zadovoljava uslov $-\pi < \varphi \leq \pi$ naziva se **glavni argument**.

Primer:

Kompleksan broj $z = 1 + i$ napisati u trigonometrijskom obliku. Moduo datog

kompleksnog broja je $\rho = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, a argument je $\operatorname{tg} \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$,

pa je trigonometrijski oblik datog kompleksnog broja $z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

OPERACIJE SA KOMPLEKSNIM BROJEVIMA U TRIGONOMETRIJSKOM OBLIKU

Neka su data dva kompleksna broja

$$z_1 = \rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \text{ i } z_2 = \rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

▪ Množenje:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot \rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ \rho_1 \cdot \rho_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

▪ Deljenje:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{\rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

▪ Stepenovanje:

$$z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ova formula se zove **Moavrova formula**.

Moavrova formula se može dokazati primenom matematičke indukcije.

Primer: Koristeći Moavrovu formulu za stepenovanje kompleksnih brojeva odrediti z^4 , ako je $z = -1 - i$.

Moduo datog kompleksnog broja je $\rho = |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, a argument

je $\operatorname{tg} \varphi = \frac{-1}{-1} = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{4}$, zato što ugao pripada trećem kvadrantu, pa

trigonometrijski oblik broja $z = -1 - i$ je $z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$.

Sada imamo da je:

$$z^4 = \left(\sqrt{2} \right)^4 \left(\cos 4 \cdot \frac{3\pi}{4} + i \sin 4 \cdot \frac{3\pi}{4} \right) = 4 \left(\cos 3\pi + i \sin 3\pi \right) = -4$$

▪ **Koren kompleksnog broja**

Svako rešenje jednačine $z = \omega^n$, gde je $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, a

$\omega = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$, definiše se kao koren kompleksnog broja

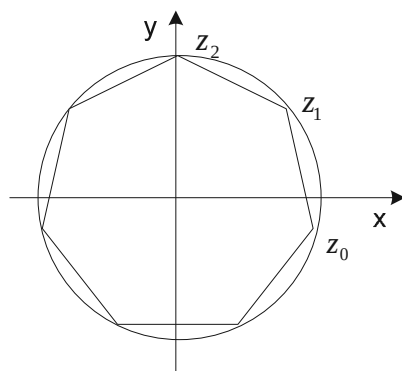
$$\omega_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

Iz jednakosti

$r(\cos(\varphi + 2k\pi) + i \sin(\varphi + 2k\pi)) = \rho^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$ dobija se

$$r = \rho^n \Rightarrow \rho = \sqrt[n]{r}, \quad n\theta = \varphi + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$$

Geometrijski ova rešenja su temena pravilnog mnogougla upisanog u krug poluprečnika $\sqrt[n]{r}$.



Primer: Izračunati $\sqrt[3]{-1}$

Ako je $-1 = \cos \pi + i \sin \pi$, imamo da je $\rho = 1$ i $\theta = \pi$, pa koristeći formulu za koren kompleksnog broja dobijamo: $\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3} \right)$

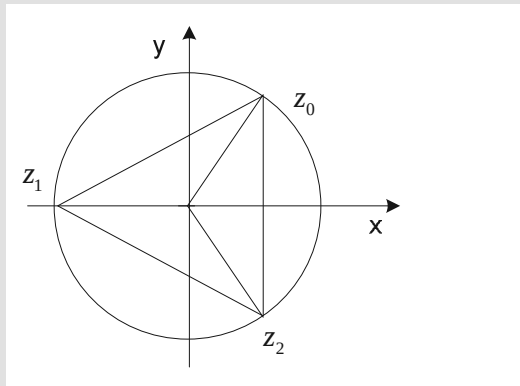
Za $k = 0, 1, 2$ dobijamo tri različite vrednosti:

$$z_0 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_1 = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$z_2 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Geometrijski rešenja trećeg korena su temena jednakostraničnog trougla.



1.2.ELEMENTARNE FUNKCIJE

- **Stepena funkcija** $y = x^n$, $n \in R$, $x \in (0, +\infty)$.
- **Eksponencijalna funkcija** $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in R$.
- **Logaritamska funkcija** $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x \in (0, +\infty)$.
- **Trigonometrijske funkcije:** $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.
- **Inverzne trigonometrijske funkcije:**
 $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

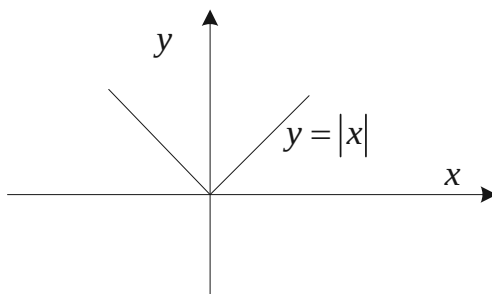
- **Elementarnim funkcijama** nazivaju se funkcije koje se mogu zadati pomoću osnovnih elementarnih funkcija i konstanti, pomoću konačno mnogo operacija sabiranja, oduzimanja, množenja, deljenja i kompozicije funkcija.

Neke od najvažnijih osnovnih funkcija sa kojima ćemo se sretati u radu:

- **Apsolutna vrednost:**

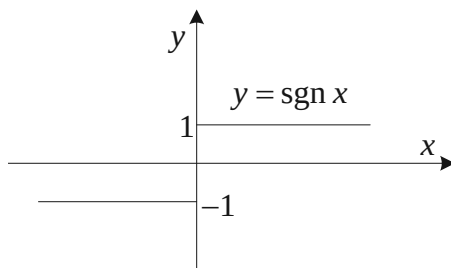
$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Funkcija je definisana za $x \in \mathbb{R}$ i $f(x) \geq 0$.



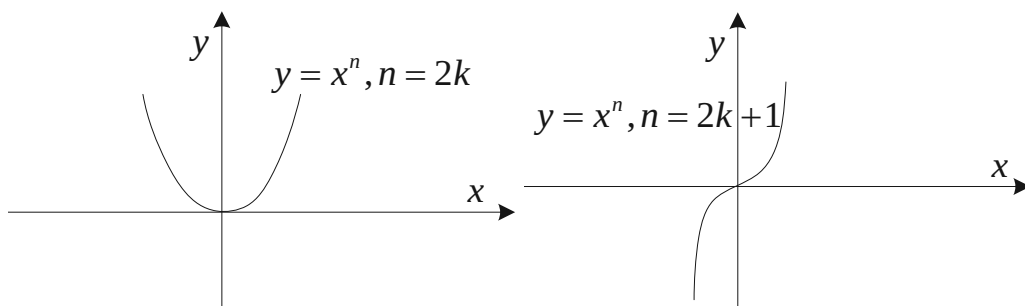
- **Funkcija znaka:**

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$



- **Stepena funkcija:** $y = x^n$, $n \in \mathbb{R}$.

Ako je $n \in \mathbb{N}$ funkcija predstavlja stepene realnog broja $y = x^n$ i ta funkcija će za $n = 2k$ paran broj biti parna i ograničena, a za $n = 2k + 1$ neparan broj biti neparna i neograničena.



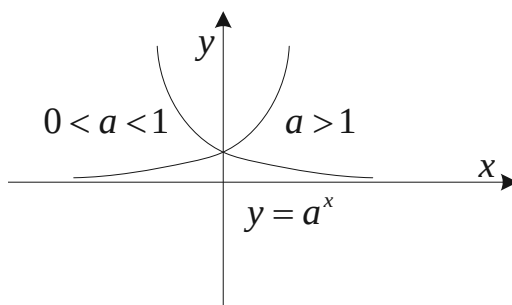
Ako je stepen oblika $n = \frac{1}{k}$, funkcija predstavlja korenu funkciju.

▪ **Eksponencijalna funkcija:** $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Domen funkcije je skup svih realnih brojeva R , a kodomen $(0, \infty)$.

Funkcija nema nula jer je $a^x \neq 0$ i na celom domenu je pozitivna, tj. $y > 0$.

Ukoliko je $0 < a < 1$ funkcija stalno opada, a kada je $a > 1$ funkcija stalno raste i samim tim nema ekstrema.



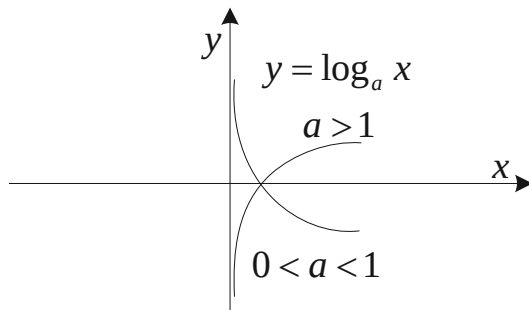
1.2.1. POJAM I OSOBINE LOGORITAMA

- Definicija logaritma $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ ako je $a, b, x \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.
- $a^{\log_a b} = b$ za $x, y \in R$, $x > 0$, $y > 0$.
- $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$, $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

- $\log_a x^s = s \log_a x$; $s \in R$.
- $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$.
- $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$, $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.
- $\log_{a^s} x = \frac{1}{s} \log_a x$, $\log_a x = \log_{a^s} x^s$.
- $\log_{10} x = \log x$ (**dekadni logaritam**).
- $\log_e x = \ln x$, $e \approx 2,718$ (**prirodni logaritam**).
- **Logaritamska funkcija**: $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

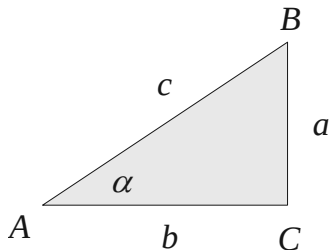
Domen funkcije je $(0, \infty)$, a kodomen je R .

Funkcija ima nulu za $x=1$ jer je $\log_a 1=0$. Ukoliko je $0 < a < 1$ funkcija stalno opada, a kada je $a > 1$ funkcija stalno oraste i samim tim nema ekstrema.



1.2.2. TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE

- Osnovne trigonometrijske funkcije oštrog ugla u pravouglom trouglu su **sinus**, **kosinus**, **tangens** i **kotangens**, koje se definišu:



$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \cos \alpha = \frac{b}{c}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$$

MERENJE UGLOVA

- **Radijan** je centralni ugao čiji je kružni luk jednak poluprečniku kruga
- Pun ugao iznosi 2π radijana

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0,017$$

$$1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45''$$

OSNOVNI TRIGONOMETRIJSKI IDENTITETI

- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$
- $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1.$

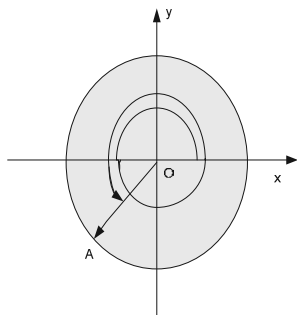
VREDNOSTI TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA ZA NEKE UGLOVE

α	$0^\circ = 0$	$90^\circ = \frac{\pi}{2}$	$180^\circ = \pi$	$270^\circ = \frac{3\pi}{2}$	$360^\circ = 2\pi$	$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$
$\sin \alpha$	0	1	0	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	1	0	-1	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\mp\infty$	0	$\mp\infty$		$\mp\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

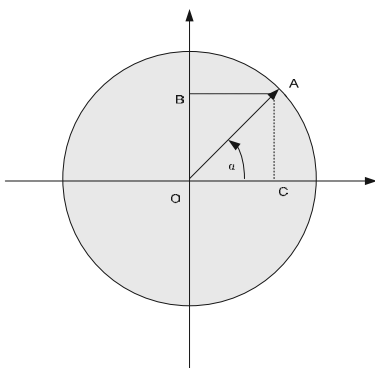
DEFINICIJA TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA MA KOG UGLA

- Jedinični krug sa centrom u koordinatnom početku naziva se **trigonometrijski krug**.

- **Uopšteni ugao** $\varphi = \alpha + 2k\pi$, $\alpha \in [0, 2\pi]$ je ugao čiji je početni krak pozitivni deo x – ose, a krajnji krak orijentisana duž OA .

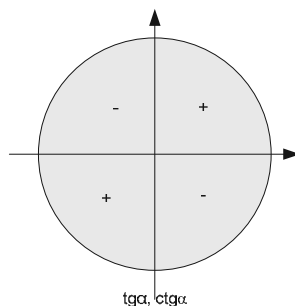
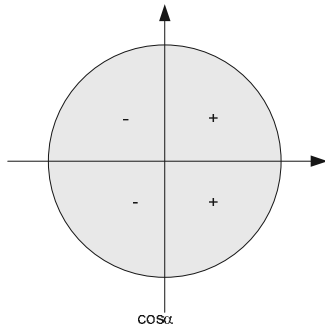
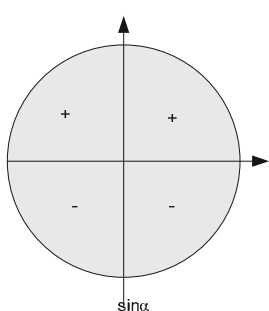


- Neka je α proizvoljan ugao. **Trigonometrijske funkcije ugla** α , tj. $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ i $\operatorname{ctg} \alpha$ definišu:



Ordinata tačke A , duž OB predstavlja **sinus** ugla α , a apscisa, duž OC predstavlja **kosinus** ugla α .

Znak trigonometrijskih funkcija po kvadrantima:



TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE NEGATIVNOG UGLA

- $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$,
- $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha$.
- $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ i $\operatorname{ctg} \alpha$ su **neparne** funkcije.
- $\cos \alpha$ je **parna** funkcija.

PERIODIČNOST TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA

- $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin \alpha$ $k \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in [0, 2\pi]$,
- $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha$,
- $\operatorname{tg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{tg} \alpha$,
- $\operatorname{ctg}(\alpha + k\pi) = \operatorname{ctg} \alpha$.
- Funkcije $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$ su **periodične** sa **osnovnom periodom** $T = 2\pi$, a $\operatorname{tg} \alpha$ i $\operatorname{ctg} \alpha$ sa osnovnom periodom $T = \pi$.

SVOĐENJE TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA MA KOG UGLA NA OŠTAR UGAO

- Ako je $\alpha = \pi \pm 2k\pi$, $\alpha = 2\pi \pm 2k\pi$ trigonometrijska funkcija **se ne menja**, a **znak** funkcije određuje se pomoću trigonometrijskog kruga.
- Ako je $\alpha = \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi$, $\alpha = \frac{3\pi}{2} \pm 2k\pi$ trigonometrijska funkcija **se menja** u svoju kofunkciju, a **znak** funkcije određuje se pomoću trigonometrijskog kruga.

ADICIONE TEOREME

- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$,
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$,
- $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$, $\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta}$.

TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE DVOSTRUKOG I POLOVINSKOG UGLA

- $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$,
- $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$, $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$.
- $2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha$, $2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha$.

OSNOVNE TRANSFORMACIJE TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA

- $\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$,
- $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$,
- $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$,
- $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$,
- $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$,
- $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$.

Trigonometrijske funkcije: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

Domen funkcija $y = \sin x$ i $y = \cos x$ je skup svih realnih brojeva R , a kodomen $[-1, 1]$.

Domen funkcija $y = \operatorname{tg} x$ i $y = \operatorname{ctg} x$ je $x \in R$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in R$ odnosno,

$x \in R$, $x \neq k\pi$, a kodomen je skup svih realnih brojeva R .

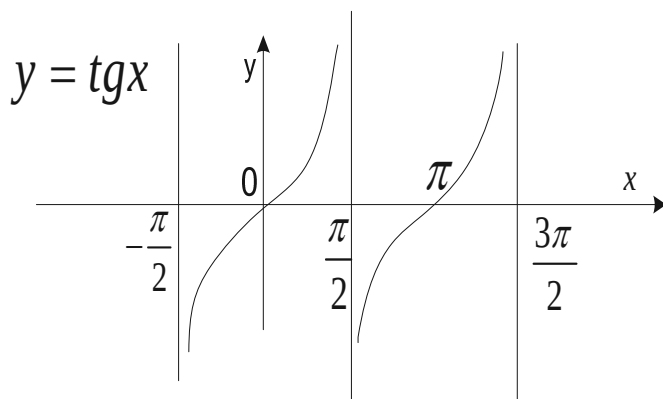
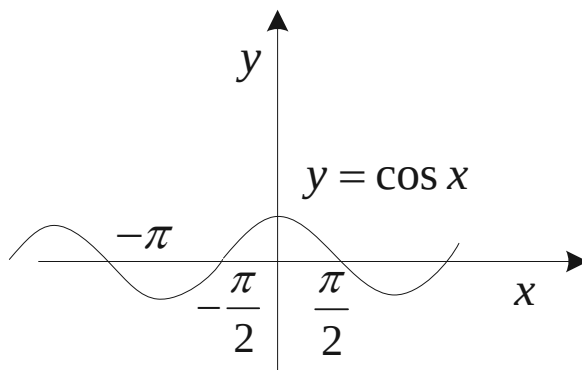
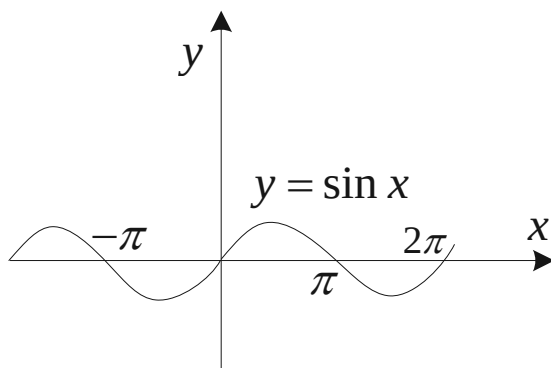
Funkcije $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ su neparne, a $y = \cos x$ parna.

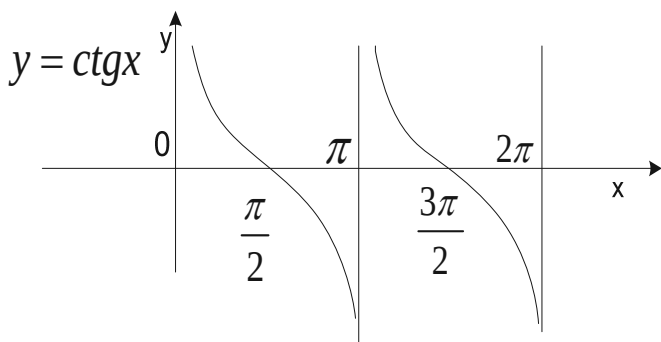
Funkcije $y = \sin x$, $y = \cos x$ su periodične sa periodom $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a

$y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ sa periodom $k\pi$.

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x, \cos(x + 2k\pi) = \cos x;$$

$$\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg}(x + k\pi) = \operatorname{ctg} x.$$





▪ **Inverzne trigonometrijske funkcije:**

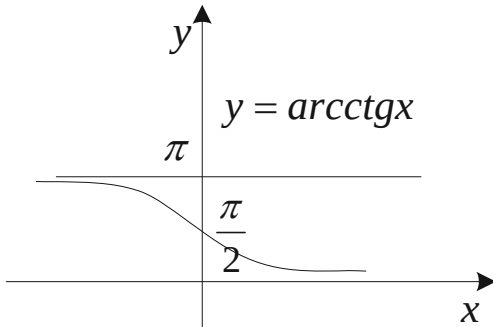
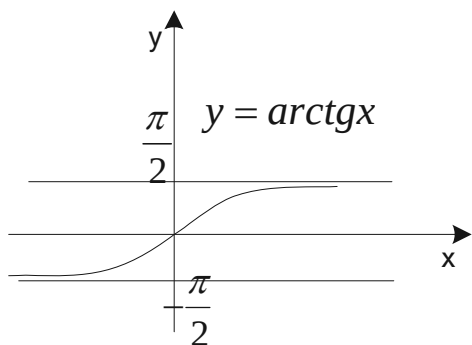
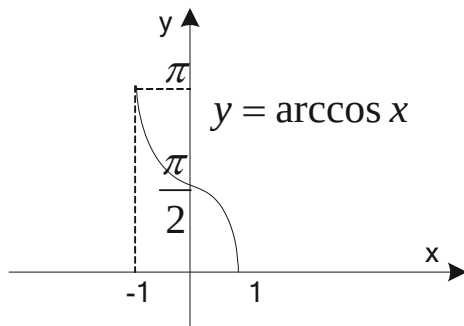
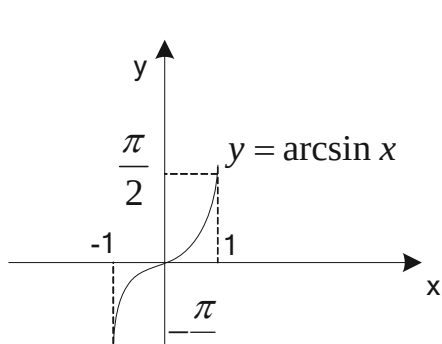
$$y = \arcsin x, \quad y = \arccos x, \quad y = \arctgx, \quad y = \operatorname{arcctgx}.$$

Za funkciju $y = \arcsin x$ domen je $x \in [-1, 1]$, a kodomen je $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

za $y = \arccos x$ domen je $x \in [-1, 1]$, a kodomen je $y \in [0, \pi]$;

za $y = \arctgx$ domen je $x \in (-\infty, \infty)$, a kodomen je $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

za $y = \operatorname{arcctgx}$ domen je $x \in (-\infty, \infty)$, a kodomen je $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.



1.3. ARITMETIČKI I GEOMETRIJSKI NIZ

- **Aritmetički niz** je niz brojeva takvih da je razlika svaka dva uzastopna člana konstanta d , koju nazivamo **diferencija** niza.
- **Opšti član niza:** $a_n = a_1 + (n-1)d$, $d \neq 0$.

- **Zbir prvih n članova niza:**

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(a_1 + (n-1)d).$$

- Svaki član niza je **aritmetička sredina** simetričnih članova.

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}.$$

- **Geometrijski niz** je niz brojeva takvih da je količnik svaka dva uzastopna člana konstanta q , koju nazivamo **količnik** niza.
- **Opšti član niza:** $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, $q \neq 1$.

- **Zbir prvih n članova niza:**

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}.$$

- Svaki član niza je **geometrijska sredina** simetričnih članova.

$$a_n^2 = a_{n-k} \cdot a_{n+k}.$$

1.4. ANALITIČKA GEOMETRIJA

- **Dužina duži AB** gde je $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$:

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

- Koordinate tačke $S(x_s, y_s)$, **središta duži AB** : $x_s = \frac{x_A + x_B}{2}$, $y_s = \frac{y_A + y_B}{2}$.
- **Opšti (implicitni) oblik** jednačine prave je: $ax + by + c = 0$.
- **EksPLICITNI oblik** jednačine prave je: $y = kx + n$; gde je $k = \operatorname{tg} \alpha$ **koeficijent pravca** prave, a n je odsečak na y osi.
- **Jednačina prave kroz jednu tačku $A(x_A, y_A)$** je: $y - y_A = k(x - x_A)$.

- **Jednačina prave kroz dve tačke** $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$ je:

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot (x - x_A); \text{ gde je } k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \text{ koeficijent pravca prave.}$$

- **Ugao između pravih** $y = k_1x + n_1$ i $y = k_2x + n_2$ je: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$.

- $k_1 = k_2$ je **uslov paralelnosti** pravih $y = k_1x + n_1$ i $y = k_2x + n_2$.

- $k_1 = -\frac{1}{k_2}$ je **uslov normalnosti** pravih $y = k_1x + n_1$ i $y = k_2x + n_2$.

- **Jednačina kruga** sa centrom u tački $C(p, q)$, poluprečnika r je:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2.$$

$$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0, \quad p = -\frac{d}{2}, \quad q = -\frac{e}{2}, \quad r = \sqrt{p^2 + q^2 - f}.$$

- **Jednačina elipse:** $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ili $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

- **Jednačina hiperbole:** $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ ili $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

- **Jednačina parabole:** $y^2 = 2px$.

MATRICE

1. POJAM MATRICE O OPERACIJE

2. DETERMINANTE

3. RANG MATRICE

4. INVERZNA MATRICA

2.

MATRICE

2.1. POJAM MATRICE I OPERACIJE

- **Matrica** je pravougaona šema sa $m \times n$ elemenata raspoređenih u m vrsta i n kolona:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matrice se označavaju velikim slovima latinice: $A, B, C, \dots$

Proizvoljni element matrice a_{ij} pripada i -toj vrsti i j -toj koloni, pa matricu možemo označiti kao $[a_{ij}]_{m \times n}$.

Za matricu sa m vrsta i n kolona kažemo da ima dimenziju $m \times n$.

- Dve matrice $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ i $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ su jednake, tj. $A = B$ ako i samo ako je: $a_{ij} = b_{ij}, \forall (i, j), i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$.

- **Matrica vrste** je matrica kod koje je $[a_{ij}]_{m \times n}$ $m = 1, n > 1$, tj.

$$[a_{ij}]_{1 \times n} = [a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}]$$

- **Matrica kolone** je matrica kod koje je $m > 1, n = 1$, tj.

$$[a_{ij}]_{m \times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

- **Nula matrica** je ona matrica čiji su svi elementi jednaki nula.
- **Kvadratna matrica** je matrica kod koje je broj vrsta jednak broju kolona.
Elementi $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ leže na **glavnoj dijagonali**, dok elementi $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ pripadaju **sporednoj dijagonali** kvadratne matrice.
- Kvadratna matrica u kojoj su svi elementi van glavne dijagonale nula, a elementi na glavnoj dijagonali nisu svi nula, naziva se **dijagonalna matrica**.
- **Jedinična matrica** je dijagonalna matrica kod koje je $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = 1$ i označava se slovom I .

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

- **Transponovana matrica** matrice $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ je matrica dobijena zamenom mesta svih vrsta odgovarajućim kolonama ili obrnuto.

Obeležava se sa A^T i iznosi $A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$.

Primer:

$$\text{Za matricu } X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ transponovana matrica je } X^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

2.1.1. OPERACIJE SA MATRICAMA

- **Zbir** matrica $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ i $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, je matrica $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ ako i samo ako je $a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$ ($i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$).
- Operacija sabiranja matrica ima sledeće osobine:
 $A + B = B + A$, **komutativnost**;
 $(A + B) + C = A + (B + C)$, **asocijativnost**.

Zbir matrica različitih dimenzija nije definisan.

Primer:

Sabrati matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Zbir je matrica $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 10 \\ 9 & 11 & 13 \end{bmatrix}$.

- **Proizvod broja** $\lambda \in R$ i matrice $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ je matrica istih dimenzija oblika:

$$\lambda A = \lambda [a_{ij}]_{m \times n} = [\lambda a_{ij}]_{m \times n}.$$

- Operacija množenja matrice brojem ima sledeće osobine:

$$\lambda A = A \lambda, \text{ komutativnost};$$

$$(\alpha \beta) A = \alpha (\beta A); \alpha, \beta \neq 0, \text{ asocijativnost};$$

$$(\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A, \text{ distributivnost s obzirom na zbir brojeva};$$

$$\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B, \text{ distributivnost s obzirom na zbir matrica}.$$

Primer:

Pomnožiti matricu $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ brojem $\lambda = 2$. $2 \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{bmatrix}$.

- **Proizvod** $A \cdot B$ matrica $A = [a_{ik}]_{m \times p}$ i $B = [b_{kj}]_{p \times n}$ je matrica C , čiji se elementi c_{ij} formiraju po zakonu:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \quad (i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n).$$

Napomena: Matrica C ima onoliko vrsta koliko ih ima matrica A i onoliko kolona koliko ih ima matrica B .

Napomena: Dakle element c_{ij} matrice C koji se nalazi u preseku i -te vrste i j -te kolone, obrazuje se tako što se elementi i -te vrste matrice A pomnože odgovarajućim elementima j -te kolone matrice B i dobijeni proizvodi saberu.

- Operacija množenja matrica ima sledeće osobine:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C), \text{ asocijativnost};$$

$$A \cdot B \neq B \cdot A, \text{ ne važi zakon komutacije};$$

$$A \cdot I = I \cdot A = A.$$

Primer:

$$\text{Pomnožiti matrice } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad A \cdot B = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 19 & -8 \\ 31 & -14 \end{bmatrix}.$$

Proizvod $B \cdot A$ nije definisan zato što dimenzije matrica nisu odgovarajuće.

2.2. DETERMINANTE

2.2.1. POJAM DETERMINANTE

- Svakoj kvadratnoj matrici pridružujemo realni broj koji zovemo **determinanta**.
- **Determinanta** je kvadratna šema brojeva od $n \times n$ elemenata raspoređenih u n vrsta i n kolona.

$$D = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Napomena: Determinanta je **broj**, za razliku od matrice koja je samo šema proizvoljnih elemenata.

- Broj $|a_{11}| = a_{11}$ naziva se **determinanta prvog reda**.

▪ Broj $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ naziva se **determinanta drugog reda**.

▪ Broj $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ naziva se **determinanta trećeg reda**.

2.2.2. IZRAČUNAVANJE DETERMINANTI

SARUSOVO PRAVILO (SARRUS, 1798-1861)

Pravilo se odnosi samo na determinante trećeg reda i glasi:

$$\begin{vmatrix} + & + & \pm \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} - & - \\ a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Dopišu se prve dve kolone i determinanta je jednaka zbiru proizvoda elemenata na glavnoj dijagonali i dvema paralelnim dijagonalama i razlici proizvoda elemenata na sporednoj dijagonali i dvema paralelnim dijagonalama.

Primer:

Izračunati vrednost determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 2 \cdot 4 \cdot 9 - 1 \cdot 6 \cdot 8 - 3 \cdot 5 \cdot 7 = 0.$$

MINOR I KOFAKTOR

Neka je D determinanta n -tog reda

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- Determinanta koja se dobija iz determinante D odbacivanjem i -te vrste i j -te kolone naziva se **minor** elementa a_{ij} i obeležava se sa M_{ij} .
- **Kofaktor** elementa a_{ij} je broj $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Primer:

Determinanta trećeg reda ima onoliko minora koliko i elemenata, tj. 9. Na primer, elementima a_{11} , a_{12} i a_{13} odgovaraju minori

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

a kofaktori su

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{12} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{13} = + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

LAPLASOVO PRAVILO



P. LAPLACE (1749-1827)

Francuski matematičar Laplas dao je značajan doprinos u teoriji diferencijalnih jednačina, verovatnoći, analizi, astronomiji i nebeskoj mehanici. Mada skromnog porekla Napoleon ga je proizveo u grofa zbog njegovih zasluga u konstruisanju oružja, a nakon njegovog pada kralj Luj 18. u markiza.

Engleski prevodilac njegovih dela napisao je "Uvek kada sam kod Laplasa nalazio izjavu, lako je videti; znao sam da mi treba nekoliko sati napornog rada dok se ne dosetim i ne dokažem kako je to lako videti".

Za razliku od Sarusovog pravila koje se koristi za izračunavanje samo determinanti trećeg reda, Laplasovo pravilo važi za determinante bilo kog reda.

- Osnovna ideja ovog pravila je da se izračunavanje determinante n -tog reda svodi na izračunavanje determinante $n-1$ reda, determinanta $n-1$ reda svodi se na izračunavanje determinante $n-2$ reda i taj postupak se ponavlja sve dok se ne dođe do determinante prvog reda.
- Vrednost determinante je jednaka zbiru proizvoda elemenata ma koje vrste (odnosno kolone) i odgovarajućih kofaktora tj.

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{ik}, i = 1, 2, \dots, n$$

(razvoj po elementima i -te vrste).

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{kj}A_{kj}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

(razvoj po elementima j -te kolone).

Primer:

Izračunati vrednost determinante
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

Determinanta se može izračunati razvojem po bilo kojoj vrsti ili koloni.

Razvojem po prvoj vrsti dobiće se:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2 \cdot (4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3 \cdot (4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) = 0$$

2.2.2. OSOBINE DETERMINANTI

- Ako dve susedne vrste (kolone) uzajamno promene mesta vrednost determinanta je suprotnog znaka.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = -D.$$

- Determinanta se množi brojem $k \neq 0$, ako se svi elementi prpizvoljne vrste (kolone) pomnože tim brojem.

$$k \cdot D = \begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & kb_2 \\ a_1 & kb_1 \end{vmatrix}.$$

- Ako su svi elementi bilo koje vrste (kolone) jednaki nula, vrednost determinanta je jednaka nula.
- Ako su dve vrste (kolone) jednake ili proporcionalne, tada je vrednost determinante jednaka nula.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ ka_1 & kb_1 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = k(a_1 b_1 - a_1 b_1) = k \cdot 0 = 0.$$

- Vrednost determinante se ne menja ako se svakom elementu jedne vrste (kolone) dodaju odgovarajući elementi druge vrste (kolone) pomnoženi jednim istim brojem.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 + ma_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 + ma_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 + ma_3 \end{vmatrix}.$$

- Ako su elementi jedne vrste (kolone) date determinante zbrovi od dva ili više sabiraka, tada se determinanta može razložiti na zbir od dve ili više determinanata.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 + c_1 \\ a_2 & b_2 + c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Napomena: Determinante su istorijski nastale u vezi proučavanja sistema jednačina i predstavljaju značajno sredstvo za njihovo računanje.

2.3. RANG MATRICE

- Matrica A ima **rang** $\text{rang}(A) = r$, ako ima bar jedan minor reda r različit od nule, a svi minori reda $r + 1$, i višeg, su jednaki nuli.

Primer:

$$\text{Odrediti rang matrice } A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 16 & 1 \\ 1 & 6 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Kako su svi minori trećeg reda su jednaki nuli:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 16 \\ 1 & 6 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 2 & 16 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} -3 & 16 & 1 \\ 6 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

a postoji minor drugog reda koji je različit od nule $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \neq 0,$

zaključujemo da je rang matrice A jednak 2.

2.4. ELEMENTARNE TRANSFORMACIJE MATRICA

- Množenje svih elemenata bilo koje vrste (kolone) matrice jednim istim realnim brojem $\lambda \neq 0$.
- Uzajamna promena mesta dve vrste (kolone).
- Transponovanje matrice.
- Dodavanje elementima jedne vrste (kolone) odgovarajućih elemenata neke druge vrste (kolone) pomnoženih proizvoljnim brojem.
- Elementarne transformacije konačno mnogo puta primenjene na matricu ne menjaju rang matrice.
- Matrice A i B , su **ekvivalentne**, (pišemo $A \sim B$), ako i samo ako se mogu transformisati jedna u drugu pomoću konačno mnogo uzastopnih elementarnih transformacija, tj. ako je $\text{rang}(A) = \text{rang}(B)$.

Primer:

Odrediti rang matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Primenom elementarnih transformacija prevešćemo matricu A u ekvivalentnu matricu:

- (1) Prva kolona pomnožena je sa -1 i redom dodata drugoj, trećoj i četvrtoj koloni.
- (2) Prva vrsta pomnožena je sa -2 , odnosno -3 i dodata drugoj odnosno trećoj vrsti.
- (3) Druga vrsta je pomnožena sa -1 i dodata trećoj vrsti.
- (4) Druga kolona pomnožena je sa 3 i dodata trećoj koloni, odnosno druga kolona je dodata četvrtoj koloni.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(4)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rang matrice jednak je broju ne nultih članova na glavnoj dijagonali, tj $\text{rang}(A) = 2$.

2.5. INVERZNA MATRICA

Da bi se mogla definisati inverzna matrica potrebno je uvesti sledeće pojmove:

- Za kvadratnu matricu A kažemo da je je **regularna** ako je $\det A \neq 0$, a **singularna** ako je $\det A = 0$.
- **Adjungovana matrica** matrice A u oznaci $\text{adj}A$ je transponovana matrica, matrice kofaktora, matrice A , tj

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

- **Inverzna matrica** date kvadratne matrice A je matrica A^{-1} , koja ima osobinu da je $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$, gde je I jedinična matrica.

- **Inverzna matrica** kvadratne regularne matrice A je matrica koje je

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}A}{\det A}.$$

- Za regularne matrice A i B istog reda važe pravila:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}, \quad (A^{-1})^{-1} = A, \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

Primer:

Naći inverznu matricu date matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

$$\text{Kako je } A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix},$$

$$\text{a } \det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 7 \neq 0, \text{ onda postoji matrica } A^{-1}.$$

Kofaktori matrice A su $A_{11} = 5, A_{12} = -3, A_{21} = -1, A_{22} = 2$.

$$\text{Nalazimo da je: } A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Primer:

Naći inverznu matricu date matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -17 \neq 0.$$

Kofaktori matrice A su:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -11, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2.$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{17} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 3 & -7 & 1 \\ -11 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Primer:

Naći inverznu matricu date matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Kako je $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, onda ne postoji matrica A^{-1} .

ZADACI

1. Naći zbir i razliku matrica $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Rešenje:

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 1+(-2) \\ 3+1 & 2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1 & 1-(-2) \\ 3-1 & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Naći matricu $C = 2A - B$, ako su date matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Rešenje:

$$C = 2 \cdot A - B = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Izračunati $(2A - 3B)C$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Rešenje:

$$\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & -2 \\ 2 & 6 & 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 6 & 6 \\ 6 & 9 & 3 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 & -3 \\ 4 & 7 & -6 & -8 \\ -4 & -3 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -16 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$$

4. Naći proizvode $A \cdot B$ i $B \cdot A$ matrica, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Rešenje:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$$
$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 & 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 8 \\ 5 & -4 & 13 \end{bmatrix}.$$

Proizvod $B \cdot A$ ne postoji jer dimenzije matrica A i B nisu odgovarajuće.

5. Dokazati da za matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ važi

$$(A+B)^2 = A^2 + B^2.$$

Rešenje:

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}; (A+B)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = A^2 + B^2.$$

6. Ako je $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, izračunati $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I$.

Rešenje:

$$\begin{aligned} A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - (a+d) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + (ad-bc) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a^2-ad & -ab-bd \\ -ac-cd & -ad-d^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Rezultat je nula matrica.

7. Ako je $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 5 & 6 & -5 \end{bmatrix}$, naći njenu transponovanu matricu A^T .

Rešenje:

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}.$$

8. Ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, naći sve matrice koje su komutativne sa matricom A .

Rešenje:

Mada množenje matrica nije komutativna operacija, postoje neke matrice koje u specijalnom slučaju ispunjavaju taj uslov.

Neka je X tražena matrica, takva da je $AX = XA$.

Uzmimo da je matrica $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, i dobijamo

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{bmatrix}, \quad XA = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{bmatrix}.$$

Iz uslova da je $AX = XA$, dobijamo sistem jednačina:

$$a = a+b, b = b, a+c = c+d, a+d = d, \text{ odnosno } b = 0, a = d \text{ odakle}$$

$$\text{nalazimo rešenje } X = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & a \end{bmatrix}.$$

9. Proveriti sledeće rezultate:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = [13],$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 6 & 9 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & -39 & 29 \\ 24 & -48 & 32 \\ 58 & 24 & 56 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

10. Dat je polinom $P(x) = 3x^2 - 2x + 5$ i matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}$, naći $P(A)$.

Rešenje:

$$P(A) = 3A^2 - 2A + 5I.$$

$$\begin{aligned} P(A) &= 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 3 \cdot \begin{bmatrix} 6 & -9 & 7 \\ -3 & 7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 2 \\ 6 & -10 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 18 & -27 & 21 \\ -9 & 21 & 12 \\ -3 & 12 & 24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 4 & -6 \\ -4 & 8 & -2 \\ -6 & 10 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 34 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

11. Dat je polinom $P(x) = 2x^2 + 3x + 5$ i matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, naći $P(A)$.

Rešenje:

$$P(A) = \begin{bmatrix} 28 & 15 & 16 \\ 19 & 36 & 15 \\ 30 & 19 & 28 \end{bmatrix}.$$

12. Izračunati vrednosti determinante

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix};$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix};$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix};$ d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix};$

$$\text{e)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

Rešenje:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 3 \cdot 4 = 1 - 12 = -11.$$

b) Koristeći Sarusovo pravilo dobijamo:

$$\begin{array}{ccc|ccc} + & + & + & - & - & \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & \\ 5 & 3 & 2 & 5 & 3 & \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 4 & \end{array} = 2 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 \cdot 4 - 3 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 4 - 1 \cdot 5 \cdot 3 = 40.$$

c) Koristeći Laplasovo pravilo, razvijanjem po prvoj vrsti dobijamo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (9 - 8) - (15 - 2) + 3 \cdot (20 - 3) = 40$$

c) Koristeći Laplasovo pravilo, razvijanjem po drugoj vrsti dobijamo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -(-3) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-9) - 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = -34$$

d) Koristeći jednu od osobina determinanti, možemo prvu kolonu da pomnožimo sa -3 i dodamo trećoj koloni. Determinantu sada razvijamo po prvoj vrsti koja sadrži dve nule.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 10 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 10 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -34.$$

13. Izračunati determinantu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Rešenje:

Determinante viših redova se najjednostavnije rešavaju tako što se primenom osobina napravi što više nula, pa se onda primeni Laplasovo pravilo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} 0 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} 0 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -5$$

14. Izračunati determinante:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 7 & 6 & 9 \end{vmatrix}, \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{c) } \begin{vmatrix} a & b+c & 1 \\ b & c+a & 1 \\ c & a+b & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{d) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}.$$

Rešenje:

$$\text{a) } 27; \quad \text{b) } 20; \quad \text{c) } 0; \quad \text{d) } (a-1)^3.$$

RANG MATRICE

15. Odrediti rang datih matrica:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 16 & 1 \\ 1 & 6 & -2 & 3 \\ 4 & 9 & 12 & 7 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{c) } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rešenje:

a) Svi minori trećeg reda su jednaki nuli.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 16 \\ 1 & 6 & -2 \\ 4 & 9 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 4 & 9 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 16 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 12 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 16 & 1 \\ 6 & -2 & 3 \\ 9 & 12 & 7 \end{vmatrix} = 0.$$

Kako postoji bar jedan minor drugog reda koji je različit od nule: $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$,

zaključujemo da je rang ove matrice $\text{rang}(A) = 2$.

b) Izračunajmo determinantu date matrice A .

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -3 + 2 + 6 = 5 \neq 0.$$

Zaključujemo da je rang ove matrice $\text{rang}(A) = 3$.

c) Primenom elementarnih transformacija prevešćemo matricu A u ekvivalentnu matricu. Jedan od načina je:

(1) Prva vrsta se množi sa -1 i -2 i redom dodaje drugoj i trećoj vrsti.

(2) Druga vrsta se množi sa -1 i dodaje trećoj vrsti.

(3) Druga vrsta je pomnožena sa -1 i dodata trećoj vrsti.

(4) Prva vrsta se množi sa -1 i dodaje drugoj vrsti.

(5) Prva kolona se množi sa -1 i redom dodaje drugoj, trećoj i četvrtoj koloni.

(6) Druga kolona je pomnožena sa 3 i dodata trećoj koloni, odnosno sabrana sa četvrtom kolonom.

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \stackrel{(1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{(2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{(3)}{\sim} \\
 &\stackrel{(4)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{(5)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{(6)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 &\Rightarrow \text{rang}(A) = 2.
 \end{aligned}$$

Rang matrice je jednak broju nenulih članova na glavnoj dijagonali matrice.

16. Proveriti rezultate:

$$\text{a) } \text{rang} \left(\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = 3;$$

$$\text{b) } \text{rang} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \right) = 3.$$

INVERZNA MATRICA

17. Naći inverznu matricu matrica:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rešenje:

a) Kako je $\det A = -1 \neq 0$, postoji matrica A^{-1} .

Kofaktori matrice A su: $A_{11} = 1$, $A_{12} = 3$, $A_{21} = 1$, $A_{22} = 2$.

Nalazimo da je: $A^{-1} = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$.

$$\text{b) } \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Kofaktori matrice A su:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 8 & -6 & 5 \\ -4 & 4 & -2 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

18. Proveriti rešenje:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \text{ ne postoji.}$$

$$\text{c) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

19. Rešiti matrične jednačine :

$$XA = B, \text{ gde je } A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Rešenje:

Rešenje date matrične jednačine je

$$XA = B \Leftrightarrow XAA^{-1} = BA^{-1} \Leftrightarrow XI = BA^{-1} \Leftrightarrow X = BA^{-1}.$$

$$\text{Kako je } \det A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \text{ postoji } A^{-1} \text{ i iznosi}$$

$$A^{-1} = (-1) \cdot \begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Znači,

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 16 & 11 \\ 4 & -23 & -15 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{20.} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešenje:

$$\text{Matrična jednačina glasi } AX = B, \text{ gde je } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešenje date matricne jednačine je $X = A^{-1}B$.

Kako je $A^{-1} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -6 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, dobijamo

$$X = \left(-\frac{1}{4}\right) \begin{bmatrix} 2 & -6 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \left(-\frac{1}{4}\right) \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

21. $A \cdot X + X - B = 0$, ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Rešenje:

$$AX + X - B = 0 \Leftrightarrow (A + I)X = B \Leftrightarrow X = (A + I)^{-1} \cdot B$$

$$\det(A + I) = 4 \neq 0$$

$$(A + I)^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -6 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \\ -9 & 10 & 6 \end{bmatrix}; X = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -7 & -12 & -7 \\ -1 & -8 & -1 \\ 11 & 28 & 11 \end{bmatrix}.$$

22. $XA + X = A^T$ ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Rešenje:

$$XA + X = A^T \Leftrightarrow X(A + I) = A^T \Leftrightarrow X = A^T (A + I)^{-1}$$

$$A + I = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det(A + I) = -3$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & -6 \end{bmatrix}.$$

23. $(A + I)X = A - I$, ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Rešenje:

Neka je $B = A + I = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $C = A - I = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Tada jednačina postaje $BX = C$.

Kako je $B^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -6 & -3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, rešenje date matrične jednačine je

$$X = B^{-1}C$$

$$X = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -6 & -3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

24.

a) $X(A - 3I) = A + I$, ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

b) $AX = B$, ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 7 & 12 & 16 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$;

c) $AX - 2X - A = I$ gde je $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Rešenje:

a) $X = \begin{bmatrix} 5 & 12 & 10 \\ 4 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; b) $X = \begin{bmatrix} -7 & -16 \\ 7 & 15 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$; c) $X = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 18 & 6 & 36 \\ -3 & 3 & -6 \end{bmatrix}$.

SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

- 1. GAUSOVA METODA**
- 2. KRAMEROVA METODA**
- 3. KRONEKER KAPELIJEVA TEOREMA**
- 4. HOMOGENI SISTEM LINEARNIH JEDNAČINA**
- 5. MATRIČNA METODA**

3.

SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

Dat je sistem od m linearnih jednačina sa n nepoznatih.

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m\end{aligned}$$

gde je $m > n$, $m = n$ ili $m < n$.

Rešiti sistem jednačina znači odrediti n-torku brojeva koji zadovoljavaju sistem.

Postoji više različitih metoda za rešavanje sistema linearnih jednačina.

3.1. GAUSOVA METODA ILI ALGORITAM

- Gausova metoda se sastoji u sukcesivnom eliminisanju nepoznatih iz sistema i transformacijom u trougaoni ili trapezni ekvivalentni sistem iz koga se dobija rešenje ili se ustanovi da sistem nema rešenja.

Pretpostavimo da je u sistemu jednačina koeficijent $a_{11} \neq 0$. Isključimo nepoznatu x_1 iz svih jednačina sistema osim prve.

Da bismo to realizovali potrebno je prvu jednačinu pomnožiti sa $-a_{21}/a_{11}$ i dodati je drugoj jednačini, zatim prvu jednačinu pomnožiti sa $-a_{31}/a_{11}$ i dodati je trećoj jednačini, itd. Na taj način se umesto polaznog sistema dobija ekvivalentan sistem:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\&\vdots \\a_{m2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{mn}^{(1)}x_n &= b_m^{(1)}\end{aligned}$$

Ako sada pretpostavimo da je $a_{22}^{(1)} \neq 0$, primenićemo isti postupak za isključivanje promenljive x_2 iz poslednjih $m - 2$ jednačina sistema i dobićemo ekvivalentan sistem jednačina:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\ a_{33}^{(2)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n &= b_3^{(2)} \\ &\vdots \\ a_{m3}^{(2)}x_3 + \dots + a_{mn}^{(2)}x_n &= b_m^{(2)} \end{aligned}$$

Ako bi produžili isti postupak $k - 1$ puta dobili bi sistem:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\ &\vdots \\ a_{kk}^{(k-1)}x_k + \dots + a_{kn}^{(k-1)}x_n &= b_k^{(k-1)} \end{aligned}$$

Ako su svi koeficijenti dobijenog sistema jednaki nuli, a slobodni član nije nula, sistem je nesaglasan i nema rešenja.

Ako je $k = n$, sistem ima jedinstveno rešenje.

Ako je $k < n$ sistem ima beskonačno rešenja. Tada su $x_{k+1}, \dots, x_n$ slobodne promenljive koje prenosimo na desnu stranu, a zatim se određuju vezane promenljive $x_1, \dots, x_{k-1}, x_k$.

Primer:

Gausovom metodom rešiti sistem jednačina:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= -4 \\ 2x - y + z &= 3 \\ -2x + y + 2z &= 6 \end{aligned}$$

Nakon množenja prve jednačine redom sa -2 i 2 i dodavanjem redom drugoj i trećoj jednačini dobijamo sistem:

$$x + 2y - 3z = -4$$

$$-5y + 7z = 11$$

$$5y - 4z = -2$$

Dodavanjem druge jednačine trećoj dobijamo sistem:

$$x + 2y - 3z = -4$$

$$-5y + 7z = 11$$

$$3z = 9$$

Ovo je sistem trougaonog oblika iz kojeg se neposredno dobija jedinstveno rešenje

$$(x, y, z) = (1, 2, 3).$$

Primer: Gausovom metodom rešiti sistem jednačina:

$$x + 2y + z = 10$$

$$2x + y + z = 6$$

$$10x - y + 3z = 2$$

Nakon množenja prve jednačine redom sa -2 i -10 i dodavanjem redom drugoj i trećoj jednačini dobijamo sistem:

$$x + 2y + z = 10$$

$$-3y - z = -14$$

$$-21y - 7z = -98$$

Množenjem druge jednačine sa -7 i dodavanjem trećoj dobijamo sistem:

$$x + 2y + z = 10$$

$$-3y - z = -14$$

$$0 \cdot z = 0$$

Ovo je neodređen sistem. Stavljajući $z = t \in R$ neposredno se dobija rešenje

$$(x, y, z) = \left(\frac{2-t}{3}, \frac{14-t}{3}, t \right)$$

Sistem može, a ne mora, da ima jednoznačno rešenje samo u slučaju da je isti broj jednačina kao i nepoznatih.

3.2. KRAMEROVA METODA (Kramer, 1704-1752)

Dat je sistem od n jednačina sa n promenljivih:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n\end{aligned}$$

Uočimo sledeće determinante:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ & & & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{determinanta sistema.}$$

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ & & & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{determinanta koja odgovara nepoznatoj } x_k; \quad k = \overline{1, n}.$$

- Ako je determinanta sistema $D \neq 0$, tada sistem ima **jedinstveno rešenje**.

$$x_k = \frac{D_k}{D}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

- Ako je determinanta sistema $D = 0$, a bar jedna od determinanti $D_k \neq 0$, $k = 1, 2, \dots, n$, sistem **nema rešenja**.
- Ako je determinanta sistema $D = 0$, i sve determinante $D_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$, sistem je **neodređen** i ako ima rešenja može ih imati samo beskonačno mnogo.

Primer:

Rešiti sistem jednačina:

$$x + 3y - 2z = 1$$

$$2x - y + z = 3$$

$$x + 2z = 7$$

Determinanta sistema je: $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -13 \neq 0.$

Determinante D_x , D_y , D_z dobijamo kada u determinanti D zamenimo redom prvu, drugu i treću kolonu, kolonom slobodnih članova.

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 7 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -13, \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -26, \quad D_z = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -39.$$

Rešenje sistema je:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-13}{-13} = 1, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-26}{-13} = 2, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-39}{-13} = 3.$$

Napomena: Kramerovo pravilo skoro i da nema praktični značaj. Algoritamska složenost tog pravila je velika, a zato se za rešavanje sistema reda $n > 3$ uvek koristi Gausov metod. Danas u okviru savremenih numeričkih metoda rešavanja sistema linearnih jednačina razvijene su mnoge praktične računarski algoritmi, prikladni za rešavanje sistema jednačina primenom računara.

3.3. KRONEKER-KAPELIJEVA TEOREMA – (Kronecker 1823-1891, Capelli 1855-1910)

Neka je dat sistem

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, A_p = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

gde je A je **matrica sistema**, a A_p je **proširena matrica sistema**.

KRONEKER-KAPELIJEVA TEOREMA:

Ako je n je broj nepoznatih, tada:

- Dati sistem je saglasan i ima **jednoznačno rešenje** ako je $\text{rang}(A) = \text{rang}(A_p) = n$.
- Sistem je saglasan i ima **beskonačno mnogo rešenja** ako je $\text{rang}(A) = \text{rang}(A_p) < n$.
- Sistem je **protivrečan i nema rešenja** ako je $\text{rang}(A) < \text{rang}(A_p)$.

Primer:

Rešiti sistem jednačina:

$$3x - 2y - z = 2$$

$$2x + y + z = 3$$

$$-5x + 8y + 5z = 1$$

$$\text{rang}(A) = \text{rang} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -5 & 8 & 5 \end{bmatrix} = 2, \text{ a } \text{rang}(A_p) = \text{rang} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -5 & 8 & 5 & 1 \end{bmatrix} = 3,$$

zaključujemo da je sistem protivrečan i nema rešenja.

Primer: Rešiti sistem jednačina:

$$x - y + z = 6$$

$$2x + y + z = 3$$

$$x + y + 2z = 5$$

$$\text{Kako je } \text{rang}(A) = \text{rang} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 3, \text{ a } \text{rang}(A_p) = \text{rang} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} = 3,$$

zaključujemo da je sistem saglasan i ima jedinstveno rešenje koje možemo dobiti nekom od već izloženih metoda.

3.4. HOMOGENI SISTEM LINEARNIH JEDNAČINA

Dat je sistem od m jednačina sa n promenljivih:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0$$

- U homogenom sistemu je slobodni član $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$.
- Homogeni sistem je **uvek saglasan**, jer je $\text{rang}(A) = \text{rang}(A_p)$.
- Homogeni sistem ima samo **trivijalno** rešenje $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ ako i samo ako je $\text{rang}(A)$ jednak broju nepozantih n .

- Homogeni sistem ima i **netrivijalno** rešenje ako i samo ako je $\text{rang}(A)$ manji od broja nepozantih n .

Napomena: Prethodni stav o saglasnosti i broju rešenja homogenog sistema, je posledica Kroneker-Kapelijeve teoreme.

Primer:

Homogeni sistem jednačina

$$2x - 3y + z = 0$$

$$x - y = 0$$

$$x + y + 4z = 0$$

ima samo trivijalno rešenje $(0, 0, 0)$, jer je, $\text{rang}(A) = 3$.

Primer:

$$x + y - 4z = 0$$

$$x - y + 3z = 0$$

$$5x - y + z = 0$$

Kako je $\text{rang}(A) = 2$, a $n = 3$ sistem jednačina ima i netrivialnih rešenja i svodi se na sistem od dve jednačine sa dve nepoznate:

$$x + y - 4z = 0$$

$$x - y + 3z = 0$$

čije je rešenje $(x, y, z) = (t, 7t, 2t)$; $t \in R$.

3.5. MATRIČNI METOD ZA REŠAVANJE SISTEMA LINEARNIH JEDNAČINA

Dat je sistem od n jednačina sa n promenljivih:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n\end{aligned}$$

Sistem se može napisati u matričnom obliku kao:

$$AX = B$$

gde je $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$.

Pod pretpostavkom da je matrica A regularna, tj. da joj je determinanta različita od nule, sistem ima ekvivalentan oblik $X = A^{-1}B$, odakle dobijamo rešenje sistema

Primer:

Matričnom metodom rešiti sistem jednačina:

$$2x - 3y + z = 7$$

$$3x - 2y - z = 3$$

$$x - y + 2z = 6$$

Ako uzmemo da je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

dati sistem se može napisati u matričnom obliku kao $AX = B$.

Kako je

$$AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow IX = A^{-1}B \Leftrightarrow$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

$$\det A = 10 \neq 0, A^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 5 & 5 \\ -7 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 5 & 5 \\ -7 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ -10 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$(x, y, z) = (1, -1, 2).$$

ZADACI

1. Gausovom metodom rešiti sisteme jednačina:

$$\begin{array}{lll} x + y + z = 6 & 2x - y + z = 8 & x + 2y + 2z = 1 \\ \text{a) } 2x + y + 3z = 13 & \text{b) } x + 3y - 2z = -7 & \text{c) } 2x + 3y + z = 0 \\ -x + 5y - 2z = 3 & 3x + 2y - z = 1 & ax + y - z = 1 \\ & x - 4y + 3z = 15 & \end{array}$$

Rešenje:

$$\begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ \text{a) } 2x + y + 3z = 13 \\ -x + 5y - 2z = 3 \end{array}$$

Ako se prva jednačina pomnoži sa -2 i doda drugoj jednačini i prva jednačina doda trećoj dobićemo sistem:

$$\begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ -y + z = 1 \\ 6y - z = 9 \end{array}$$

Množenjem druge jednačine sa 6 i dodavanjem trećoj dobijamo sistem:

$$\begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ -y + z = 1 \\ 5y = 10 \end{array}$$

Ovo je sistem trougaonog oblika iz kojeg se neposredno dobijamo jedinstveno rešenje $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

b) Ako u polaznom sistemu prvu jednačinu pomnoženu redom sa 2 , 1 i -3 dodamo drugoj, trećoj, u četvrtoj jednačini, dobijamo ekvivalentan sistem:

$$2x - y + z = 8$$

$$5x + y = 9 \quad 2x - y + z = 8$$

$$5x + y = 9 \Leftrightarrow 5x + y = 9$$

$$-5x - y = -9$$

Ovo je sistem od dve jednačine sa tri nepoznate koji ne može da ima jedinstveno rešenje. Neka je $x = t \in \mathbb{R}$ proizvoljno. Tada iz druge jednačine sistema dobijamo $y = 9 - 5t$ i zamenom obe vrednosti u prvu jednačinu dobijamo $z = 17 - 7t$.

Dakle skup rešenja je $(x, y, z) = (t, 9 - 5t, 17 - 7t)$.

c)

$$2x + 3y + z = 0 \quad 2x + 3y + z = 0$$

$$-3x - 4y = 1 \Leftrightarrow -3x - 4y = 1$$

$$(a + 2)x + 4y = 1 \quad (a - 1)x = 2$$

Skup rešenja zadatog sistema jednačina glasi:

Za $a \neq 1$ imamo

$$(x, y, z) = \left(\frac{2}{a-1}, \frac{-a-5}{4(a-1)}, \frac{3a-1}{4(a-1)} \right); (x, y, z) = (1, 2, 3);$$

$$(x, y, z) = (1, 2, 3);$$

Za $a = 1$ sistem nema rešenja.

2. Matričnom metodom rešiti sisteme jednačina:

$$x + 2y - 6z = -13 \quad x + 2y - 3z = 5$$

$$\text{a) } 2x + 5y + 4z = 24 \quad \text{b) } 2x + 3y - 5z = 8$$

$$3x + 10y + z = 26 \quad 5x + y - 8z = 7$$

Rešenje:

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 10 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -13 \\ 24 \\ 26 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, AX = B,$$

$$(x, y, z) = (1, 2, 3);$$

b)

$$(x, y, z) = (1, 2, 0);$$

3. Kramerovom metodom rešiti sisteme jednačina:

$$3x + 2y + z = 5$$

$$x + 2y + z = 10$$

a) $2x + 3y + z = 1$

b) $2x + y + z = 6$

$$2x + y + 3z = 11$$

$$10x - y + 3z = 2$$

$$x + y + z = 3$$

$$2x + y + z = -1$$

c) $x - 2y + 2z = 1$

d) $-x + y + 2z = 3$

$$-2x + y - 3z = 4$$

$$3x + 2y + 4z = 1$$

Rešenje:

$$\text{a) } D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12, D_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 11 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 24, D_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 11 & 3 \end{vmatrix} = -24,$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 11 \end{vmatrix} = 36.$$

Kako je $D \neq 0$ sistem ima jedinstveno rešenje:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{24}{12} = 2, y = \frac{D_y}{D} = \frac{-24}{12} = -2, z = \frac{D_z}{D} = \frac{36}{12} = 3,$$

$$(x, y, z) = (2, -2, 3).$$

b) $D = 0$, $D_x = D_y = D_z = 0$. Zaključujemo da je sistem neodređen.

Sistem se transformiše u ekvivalentni sistem:

$$x + 2y + z = 10$$

$$-3y - z = -14$$

čije je rešenje $(x, y, z) = \left(\frac{2+t}{3}, \frac{14-t}{3}, t\right)$, gde je $t \in \mathbb{R}$.

c) $D = 0$, $D_x = 32$, pa prema Kramerovoj teoremi sistem nema rešenja.

d) $(x, y, z) = (-1, 0, 1)$.

4. Diskutovati i rešiti sisteme jednačina u zavisnosti od realnog parametra a :

$$ax + y + z = 1$$

$$3x - 2y + z = 0$$

$$x + y + az = 1$$

a) $x + ay + 2z = 2$

b) $-x + y - 2z = 2$

c) $x + ay + z = 1$

$$2x + y + z = 0$$

$$ax - y - z = 0$$

$$ax + y + z = 1$$

$$ax + y + 2z = 1$$

d) $x + ay + z = a$

$$x + y + 2z = a^2$$

Rešenje:

a)

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$D = a(a-2) + 3 + 1 = a^2 - 4a + 4 = (a-2)^2;$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} = a - 2;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2a - 1;$$

$$D_z = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 - 4a.$$

Za $D \neq 0 \Leftrightarrow (a-2)^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 2$ sistem ima jedinstveno rešenje:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{1}{a-2}, y = \frac{D_y}{D} = \frac{2a-1}{(a-2)^2}, z = \frac{D_z}{D} = \frac{5-4a}{(a-2)^2}.$$

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{a-2}, \frac{2a-1}{(a-2)^2}, \frac{5-4a}{(a-2)^2} \right).$$

Za $D = 0$, odnosno za $a = 2$ dobijamo $D_y = 3 \neq 0$, pa je sistem nemoguć.

b)

$$D = 3(a-2), D_x = -6, D_y = -2(a+3), D_z = -2(2a-3).$$

Za $D = 3(a-2)$, tj. za $a \neq 2$ imamo jedinstveno rešenje:

$$(x, y, z) = \left(\frac{-2}{a-2}, -\frac{2(a+3)}{3(a-2)}, \frac{-2(2a-3)}{3(a-2)} \right).$$

Za $D = 0$, tj. za $a = 2$, $D_x \neq 0$, $D_y \neq 0$, $D_z \neq 0$ sistem je nemoguć i nema rešenja.

c)

$$D = -(a-1)^2(a+2), D_x = -(a-1)^2, D_y = -(a-1)^2, D_z = -(a-1)^2.$$

Za $D \neq 0$, odnosno za $a \neq 1 \wedge a \neq -2$ sistem ima jedinstveno rešenje:

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2} \right).$$

$$D = 0 \text{ za } a = 1 \vee a = -2.$$

Za $a = -2$ je $D_x \neq 0, D_y \neq 0, D_z \neq 0$ sistem je nemoguć i nema rešenja.

Za $a = 1$ je $D_x = 0, D_y = 0, D_z = 0$ sistem je neodređen i svodi se na tri iste jednačine:

$$x + y + z = 1, x + y + z = 1, x + y + z = 1.$$

Ako uvedemo smenu da je $x = t \in R$ i $y = r \in R$, dobijamo $z = 1 - t - r$, pa je rešenje oblika $(x, y, z) = (t, r, 1 - t - r)$.

d)

$$D = 2a^2 - 3a + 1 = (a - 1)(2a - 1),$$

$$D_x = -2a^3 + a^2 + 2a - 1 = -(a - 1)(a + 1)(2a - 1),$$

$$D_y = -a^3 + 4a^2 - 2a - 1 = -(a - 1)(a^2 - 3a - 1), D_z = (a^2 - 1)^2.$$

Za $D \neq 0$, odnosno za $a \neq 1 \wedge a \neq \frac{1}{2}$ sistem ima jedinstveno rešenje:

$$(x, y, z) = \left(-(a + 1), \frac{-(a^2 - 3a - 1)}{(2a - 1)}, \frac{(a + 1)^2 (a - 1)}{(2a - 1)} \right).$$

$$D = 0 \text{ za } a = 1 \vee a = \frac{1}{2}.$$

Za $a = 1$ sistem se svodi na:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + 2z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow z = 0, y = 1 - x, \text{ pa je } (x, y, z) = (t, 1 - t, 0), t \in R.$$

Za $a = \frac{1}{2}, D_z \neq 0$ sistem nema rešenja.

5. Rešiti sisteme jednačina:

$$\begin{aligned} x + y + az &= 2 \\ \text{a) } x + ay + z &= -1 \\ ax + y + z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y + z &= a \\ \text{b) } x + (1+a)y + z &= 2a \\ x + y - (1+a)z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y + az &= 3 \\ \text{c) } x + ay + z &= 0 \\ ax + y + z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y + az &= 1 \\ \text{d) } x + ay + az &= 1 \\ ax + ay + az &= 1 \end{aligned}$$

Rešenje:

a)

$$\begin{aligned} D &= -(a-1)^2(a+2), D_x = (a-1)(a+2), D_y = (a-1)(a+2), \\ D_z &= -2(a-1)(a+2). \end{aligned}$$

Za $D \neq 0$, tj. za $a \neq 1 \wedge a \neq -2$ sistem ima jedinstveno rešenje

$$(x, y, z) = \left(-\frac{1}{a-1}, -\frac{1}{a-1}, \frac{2}{a-1} \right).$$

$$D = 0 \text{ za } a = -2 \vee a = 1.$$

Za $a = -2$ je $D_x = 0, D_y = 0, D_z = 0$ i sistem se svodi na:

$$\begin{aligned} x + y - 2z &= 2 \\ x - 2y + z &= -1 \\ -2x + y + z &= -1 \end{aligned}$$

Rešavanjem bilo kojom od poznatih metoda dobijamo rešenje:

$$(x, y, z) = (t+1, t+1, t).$$

Za $a = 1, D_x = 0, D_y = 0, D_z = 0$, sistem je kontradikcija.

$x + y + z = 2, x + y + z = -1, x + y + z = -1$ i nema rešenja.

b)

$$D = -a(a+2), D_x = a(-a^2+2), D_y = -a(a+2), D_z = -a^2.$$

Za $D \neq 0$, tj. za $a \neq 0 \wedge a \neq -2$ sistem ima jedinstveno rešenje:

$$(x, y, z) = \left(\frac{a^2-2}{a+2}, 1, -\frac{a}{a+2} \right).$$

$$D = 0 \text{ za } a = -2 \vee a = 0.$$

Za $a = -2$ sistem je nemoguć.

Za $a = 0$ sistem je neodređen i rešenje je $(x, y, z) = (t, -t, 0) \quad t \in \mathbb{R}$.

c)

Za $D \neq 0$, odnosno za $a \neq 1 \wedge a \neq -2$, sistem ima jedinstveno rešenje

$$(x, y, z) = \left(-\frac{3}{(a-1)(a+2)}, -\frac{3}{(a-1)(a+2)}, \frac{3(a+1)}{(a-1)(a+2)} \right).$$

Za $D = 0$, odnosno za $a = -2$ sistem nije moguć i nema rešenja.

Za $D = 0$, odnosno za $a = 1$ sistem nije moguć i nema rešenja.

d)

$$D = a(a-1)^2, D_x = 0, D_y = 0, D_z = (a-1)^2.$$

Za $D \neq 0$, odnosno za $a \neq 0 \wedge a \neq 1$ je $(x, y, z) = \left(0, 0, \frac{1}{a} \right)$.

Za $D = 0$, odnosno za $a = 1$ je $(x, y, z) = (1-t-r, t, r), \quad t, r \in \mathbb{R}$.

Za $D = 0$, odnosno za $a = 0$ sistem nije moguć i nema rešenja.

6. U zavisnosti od vrednosti realnog parametra a diskutovati i rešiti sistem linearnih jednačina:

$$\begin{array}{lll} x - 2y + z = 1 & x + y + z = 3 & x + y + 2z + u = 0 \\ \text{a) } 3x + 2y + z = 0 & \text{b) } x - ay + 2z = 1 & \text{c) } 2x - y + z - 2u = 0 \\ 5x - 2y + az = 1 & 2x + 2y - az = 6 & x - 2y - z - 3u = 0 \end{array}$$

Rešenje:

- a) Korišćenjem Kroneker -Kapelijsve teoreme imamo da je A matrica sistema, a A_p proširena matrica sistema.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & a & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & -2 & -3 \\ 0 & 8 & a-5 & -4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & a-3 & -1 \end{array} \right]$$

Ako je $a \neq 3$, onda $\text{rang} A_p = \text{rang} A = 3$. Kako je broj nepoznatih u sistemu $n = 3$, sistem ima jedinstveno rešenje,

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 1 \\ 8y - 2z &= -3, \\ (a-3)z &= -1 \end{aligned}$$

$$(x, y, z) = \left(\frac{a-1}{4(a-3)}, \frac{7-3a}{8(a-3)}, \frac{1}{3-a} \right).$$

Ako je $a = 3$, onda je $\text{rang} A_p = 3$, a $\text{rang} A = 2$, pa sistem nema rešenja.

b)

Ako je $a \neq -1 \wedge a \neq -2$, onda je $\text{rang}A_p = \text{rang}A = 3$ i tada sistem ima jedinstveno rešenje $(x, y, z) = \left(3 - \frac{2}{a+1}, \frac{2}{a+1}, 0\right)$.

Ako je $a = -2$, onda je $\text{rang}A_p = \text{rang}A = 2 < 3$ i tada sistem ima beskonačno mnogo rešenja oblika $(x, y, z) = (5, -2 - t, t), t \in R$.

Ako je $a = -1$ onda je $\text{rang}A = 2 \neq \text{rang}A_p = 3$ i tada sistem nema rešenja.

c)

Kako je $\text{rang}(A) = 2$, a $n = 3$ sistem jednačina ima i netrivialnih rešenja i svodi se na sistem od dve jednačine sa dve nepoznate:

$$x + y = -2z - u$$

$$2x - y = -z + 2u$$

čije je rešenje $(x, y, z, u) = \left(-t + \frac{r}{3}, -t - \frac{4r}{3}, t, r\right); t, r \in R$.

POJAM FUNKCIJE

1. FUNKCIJE JEDNE PROMENLJIVE

2. GRANIČNA VREDNOST NIZA

3. GRANIČNA VREDNOST FUNKCIJE

4. ASIMPTOTE FUNKCIJE

4.

FUNKCIJE JEDNE PROMENLJIVE

Prelazak od fiksnih ka promenljivim veličinama, kao apstrakciji višeg stepena, vezan je za period od 13. do 16. veka. Prekretnica u razvoju bila je Dekartova metoda koordinata, koja je omogućila definisanje funkcionalne zavisnosti i dalji razvoj matematike. Tek u 19. veku nemački matematičar L. Dirichlet (1805-1859) napravio je odlučujući korak u uopštavanju pojma funkcije, prekinuvši tradicionalna shvatanja kojim se pojam funkcije izjednačavao sa pojmom analitičkog izraza i daje definiciju koju mi danas modifikovano koristimo. Moderna teorija skupova otišla je još dalje i oslobodila pojam funkcije ograničenja vezanih za domen i kodomen.



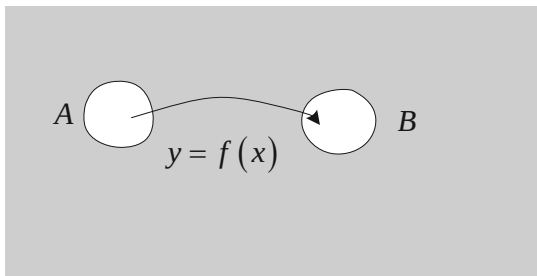
R Descartes (1596-1650)

Dekart je bio veliki francuski matematičar i filozof, ali se danas u matematici, njegovo ime prvenstveno pamti po vezi koju je uspostavio između algebre i geometrije. Na taj način stvorio je novu naučnu disciplinu, analitičku geometriju, koja je omogućila dalji napredak matematike.

U filozofiji zastupao je metodu kritičke sumnje i poznata je njegova misao "cogito ergo sum" (mislim dakle postojim).

4.1. POJAM FUNKCIJE

- Neka su A i B proizvoljni skupovi. **Preslikavanje** ili **funkcija** $f : A \rightarrow B$ predstavlja zakon pridruživanja pomoću koga se proizvoljnom elementu $x \in A$ dodeljuje element $y \in B$ takav da je $y = f(x)$.



- Skup A naziva se **oblast definisanosti** ili **domen** funkcije i obeležava sa D_x .
- Skup B naziva se **oblast vrednosti** ili **kodomen** obeležava sa D_y .
- Element $x \in A$ naziva se **original**, a $y \in B$ njegova **slika**.
- Za funkciju $f : A \rightarrow B$ kažemo da je **jednoznačna** ako bilo kojem elementu $x \in A$ odgovara najviše jedan element $y \in B$.
- Funkcija $f : A \rightarrow B$ se naziva preslikavanje “1–1” ili **injektivnom** ako
$$(\forall x_1, x_2 \in A) x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$
- Funkcija $f : A \rightarrow B$ se naziva preslikavanje “na” ili **surjektivnim** ako
$$(\forall y \in B, \exists x \in A) y = f(x).$$
- Ako je preslikavanje $f : A \rightarrow B$ “1–1” i “na” zovemo ga **bijektivnim** ili obostrano jednoznačnim preslikavanjem.

Primer:

$f(x) = 3x + 2$, $A = B = \mathbb{R}$, jeste bijekcija.

$f(x) = 3x^2 + 2$, $A = \mathbb{R}$, $B = [2, +\infty)$, nije “1-1”, a jeste “na”, nije bijekcija.

4.1.1. NAČINI ZADAVANJA FUNKCIJA

Funkcije mogu biti zadate na različite načine u zavisnosti od primena. Najčešći načini su:

- Analitičkim izrazom, koji može biti eksplicitnog oblika $y = f(x)$, ili implicitnog oblika $F(x, y) = 0$,
- tablicom,
- grafikom,
- parametarski.

Primer:

Funkcija u eksplicitnom obliku je $y = 2x + \sin x$.

Funkcija u implicitnom obliku je $y^2 = 2x$.

Funkcija u parametarskom obliku je $x = t^3, y = t^2$, gde eliminacijom parametra t dobijamo funkciju $y^3 = x^2$

4.1.2. REALNE FUNKCIJE JEDNE PROMENLJIVE

- Pod **realnom funkcijom** podrazumeva se svako preslikavanje kod koga su original i slika realni brojevi.

Primer:

Odrediti domen funkcija:

a) $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$,

Iz uslova da je $x-3 \neq 0$, dobijamo $x \neq 3$. Prema tome domen funkcije je skup $D_x = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ ili uobičajen je i zapis $x \in (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$.

b) $y = \sqrt{4-x^2}$, $4-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-2, 2]$.

$$\text{c) } y = \ln \frac{x}{3-x}, \frac{x}{3-x} > 0 \wedge x \neq 3 \Leftrightarrow x \in (0, 3).$$

$$\text{d) } y = e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \mathbb{R}.$$

Primer: Odrediti kodomen funkcija:

$$\text{a) } y = \sin x, \quad D_y : y \in [-1, 1];$$

$$\text{b) } y = x - 2, \quad D_y = \mathbb{R};$$

$$\text{c) } y = x^2 + 1, \quad D_y : y \in [1, +\infty)$$

Napomena: Za svaku funkciju neophodno je odrediti domen. Kodomen je poželjno odrediti, ali to nije uvek moguće bez poznavanja ostalih osobina funkcija.

4.1.3. INVERZNA FUNKCIJA

- Neka je $f : A \rightarrow B$ bijektivno preslikavanje ("1-1" i "na"). Tada postoji jedinstvena funkcija $f^{-1} : B \rightarrow A$ koja se naziva **inverzna preslikavanje** ili **inverzna funkcija** takva da je

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

- Za datu funkciju $f : A \rightarrow B$ može da postoji samo jedna inverzna funkcija $f^{-1} : B \rightarrow A$.

Primer:

Odrediti inverznu funkciju funkcije $f(x) = 2x - 1$.

Prvo treba dokazati da je preslikavanje bijekcija.

Ako je ispunjeno $(\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R})(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$ preslikavanje je "1-1". Izrazi koji u sebi sadrže nejednakosti se teško dokazuju i jednostavnije je koristiti kontrapoziciju predhodnog izraza koja glasi $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, dakle $2x_1 - 1 = 2x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$, čime smo dokazali da je preslikavanje "1-1".

Da bismo dokazali da je preslikavanje “na” rešimo polaznu jednačinu po y .

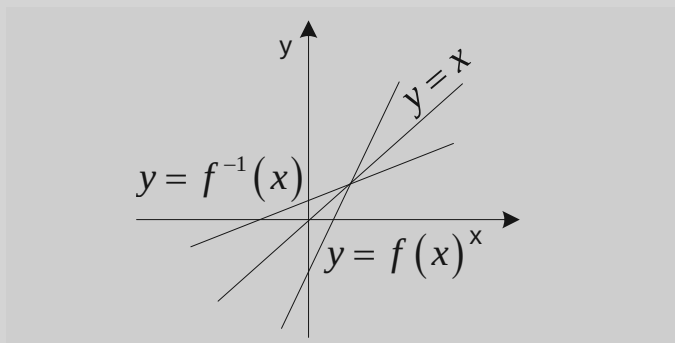
Dobićemo izraz $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$. Onda $(\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}) x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$ i zaključujemo

da je preslikavanje “na”.

Pošto je preslikavanje “1-1” i “na”, odnosno bijekcija, postoji inverzno preslikavanje f^{-1} .

Zamenom vrednosti x i y u izrazu $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$ dobijamo $f^{-1}(x) = y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Grafici funkcija f i f^{-1} su simetrični u odnosu na pravu $y = x$.



Primer:

Odrediti inverznu funkciju funkcije $f(x) = x^2$.

Pošto je preslikavanje $f(x) = x^2$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ nije “1-1”, odnosno bijekcija, ne postoji inverzno preslikavanje f^{-1} .

4.1.4. SLAGANJE-PROIZVOD FUNKCIJA

- **Proizvodom** dve funkcije $f: A \rightarrow B$ i $g: B \rightarrow C$ naziva se funkcija $g \circ f: A \rightarrow C$, za koju važi:

$$(\forall x \in A)(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Primer:

Date su funkcije $f(x) = x + 3$ i $g(x) = 2x - \sqrt{x}$. Odrediti $f \circ g$, $g \circ f$ i $f \circ f$.

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = 2x + 3 - \sqrt{x},$$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = 2x + 6 - \sqrt{x + 3}.$$

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = x + 6.$$

4.1.5. OSOBINE FUNKCIJA

- Funkcija $f(x)$ je **ograničena** na skupu A ako važi:

$$(\exists m, M \in \mathbb{R})(\forall x \in A) m < f(x) < M.$$

Grafik funkcije se nalazi između dve prave $y = m$ i $y = M$.

Ako brojevi m i M ne postoje, za funkciju $f(x)$ kažemo da je neograničena.

Primer:

Ispitati ograničenost funkcije $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Kako je za $(\forall x \in \mathbb{R}) 0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1$, funkcija je ograničena.

- **Nula** funkcije je onaj broj $\alpha \in D_x$ za koji je $f(\alpha) = 0$.

Nule funkcije su tačke preseka grafika funkcije sa Ox osom.

Primer:

Odrediti nule funkcija:

$$\text{a) } y = \frac{x^2 - 4}{x^3 + 8}; \quad y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2. \text{ Kako funkcija nije}$$

definisana za $x = -2$, nula funkcije je samo $x = 2$.

$$\text{b) } y = \frac{1 + \ln x}{x}; \quad y = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1}.$$

$$\text{c) } y = \frac{e^x}{x+1}; \quad y \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ i funkcija nema nula.}$$

- Funkcija $f(x)$ je **pozitivna** na domenu A ako $(\forall x \in A) f(x) > 0$, a **negativna** ako $(\forall x \in A) f(x) < 0$.
- Pojmovi pozitivan i negativan predstavljaju **znak** funkcije.
- Funkcija $f(x)$ je **parna** ako je $(\forall x \in D_x), f(-x) = f(x)$.

Grafik parne funkcije je simetričan u odnosu na osu Oy .

- Funkcija $f(x)$ je **neparna** ako je $(\forall x \in D_x), f(-x) = -f(x)$.

Grafik neparne funkcije je simetričan u odnosu na koordinatni početak O .

Primer:

Ispitati parnost i neparnost funkcija:

$$\text{a) } f(x) = x^2 - 2; \quad f(-x) = (-x)^2 - 2 = x^2 - 2 = f(x), \text{ funkcija je parna.}$$

$$\text{b) } f(x) = x^3 - 2x + \sin x;$$

$$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x) + \sin(-x) = -x^3 + 2x - \sin x = -(x^3 - 2x + \sin x) = -f(x),$$

funkcija je neparna.

$$\text{c) } f(x) = x^2 - 2x^3 + 1;$$

$$f(-x) = (-x)^2 - 2(-x)^3 + 1 = x^2 + 2x^3 + 1, \text{ funkcija nije ni parna ni neparna.}$$

- Funkcija $f(x)$ je **periodična** ako postoji broj $T \neq 0$ za koji je ispunjena jednakost $(\forall x \in A) f(x+T) = f(x)$. Broj T nazivamo periodom funkcije. Najmanji pozitivni period zovemo **osnovnim periodom funkcije**.

Primer:

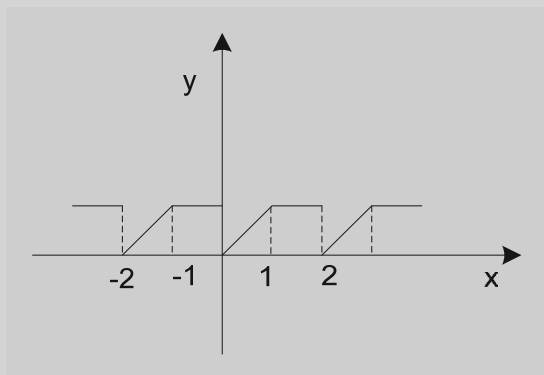
Trigonometrijske funkcije su periodične.

Funkcije $f(x) = \sin x$ i $f(x) = \cos x$ imaju osnovni period $T = 2\pi$, a funkcije $f(x) = \operatorname{tg} x$ i $f(x) = \operatorname{ctg} x$ imaju osnovni period $T = \pi$.

Primer:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \text{ i } f(x+2) = f(x).$$

Funkcija je periodična sa periodom $T = 2$.

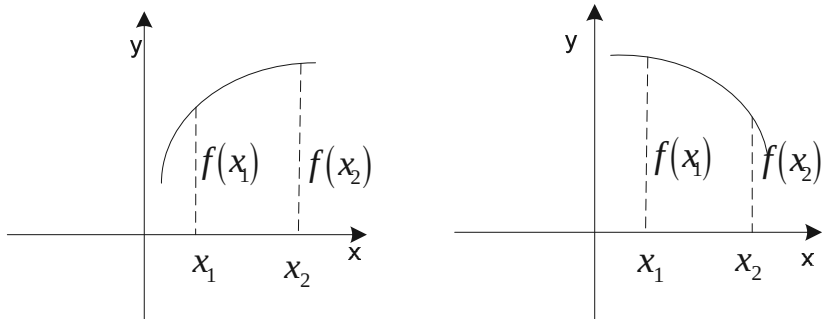


- Funkcija $f(x)$ je **rastuća** (označava se $f(x) \nearrow$) na domenu A ako $(\forall x_1, x_2 \in A) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, a **strogo rastuća** ($f(x) \uparrow$) ako $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

- Funkcija $f(x)$ je **opadajuća** (označavamo $f(x) \searrow$) na domenu A ako

$$(\forall x_1, x_2 \in A) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2), \text{ a } \textbf{strogo opadajuća} (f(x) \downarrow) \text{ ako } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

- Rastuće i opadajuće funkcije jednim imenom zovemo **monotone funkcije**.



Primer:

Ispitati monotonost sledećih funkcija:

a) $y = e^x$; Funkcija je strogo rastuća jer $x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$, $x \in \mathbb{R}$

b) $y = \ln x$; Funkcija je strogo rastuća za $x \in (0, \infty)$.

c) $y = -x^3$; Funkcija je strogo opadajuća za $x \in \mathbb{R}$.

d) $y = 2x^2 - 8x + 5$;

Ako $x_1 < x_2$, onda je

$$\begin{aligned}
 & 2x_1^2 - 8x_1 + 5 - 2x_2^2 - 8x_2 + 5 = 2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - 8(x_1 - x_2) = \\
 & = 2 \underbrace{(x_1 - x_2)}_{<0} \underbrace{(x_1 + x_2 - 4)}_{\substack{>0, x>2 \\ <0, x<2}} < 0, \text{ raste;} \\
 & > 0, \text{ opada.}
 \end{aligned}$$

- Funkcija $f(x)$ ima **maksimum** u tački $x = a$ ako postoji broj $\varepsilon > 0$, takav da je $f(a) \geq f(x)$ za $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.
- Funkcija $f(x)$ ima **minimum** u tački $x = a$ ako postoji broj $\varepsilon > 0$, takav da je $f(a) \leq f(x)$ za $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$.
- Minimum i maksimum funkcije nazivamo **ekstremnim vrednostima** funkcije.

Primer:

Odrediti ekstreme funkcija:

a) $y = x^2 - 1$; Tačka $(0, -1)$ predstavlja minimum funkcije.

b) $y = 2^x$; Funkcija nema ekstrema, jer je strogo rastuća.

▪ Funkcija $f(x)$ na domenu A , za $x_1, x_2 \in A$ i $x_1 \neq x_2$ je

konveksna ako $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ i

konkavna ako $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$.

Primer:

Funkcija $y = x^2$ je konveksna, što zaključujemo iz

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} < \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 > 0, \text{ za } x_1 \neq x_2.$$

4.1.6. NIZOVI

- Uređeni skup $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ obrazuje **niz** ako se svakom prirodnom broju $n \in \mathbb{N}$ po nekom zakonu pridruži jedan i samo jedan element $a_n \in \mathbb{R}$.
- Niz je preslikavanje $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.
- Niz je određen svojim **opštim članom** a_n .

Primer:

1, 2, 3, ... predstavlja niz prirodnih brojeva.

Primer:

Ako je opšti član niza $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, onda su članovi niza

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, \dots$$

- Niz $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ je:
 - rastući* ako je $a_{n+1} > a_n$,
 - opadajući* ako je $a_{n+1} < a_n$,
 - neopadajući* ako je $a_{n+1} \geq a_n$,
 - nerastući* ako je $a_{n+1} \leq a_n$, za $n \in \mathbb{N}$.

Ovakvi nizovi zovu se **monotoni** nizovi.

- Za niz se kaže da je **ograničen** ako postoje realni brojevi m i M takvi da je $m < a_n < M$, $n \in \mathbb{N}$.
- Broj m je **donja granica**, dok je M **gornja granica** niza.

Najveća donja granica naziva se **infimum** niza, a najmanja gornja granica naziva se **supremum** niza.

Primer:

Niz sa opštim članom $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ je ograničen. Donja granica je $m = -1$, a gornja granica je $M = \frac{1}{2}$, tj. svi članovi niza zadovoljavaju relaciju $-1 \leq a_n \leq \frac{1}{2}$.

Napomena: Treba naglasiti da m i M nisu jedinstveni, naime ima neprebrojivo mnogo drugih granica.

Tačne su i sledeće nejednakosti $-1 \leq a_n < 1$ ili $-2 < a_n < 2$ itd.

U ovom primeru su navedeni upravo infimum i supremum skupa vrednosti niza.

4.2. GRANIČNA VREDNOST NIZA

Ideja granične vrednosti bila je poznata još u antičkom dobu. Starogrčki matematičari Eudoks (408-355), Arhimed (287-212) i mnogi drugi, bavili su se problemom kvadrature ravnih figura i kubature geometrijskih tela i te probleme uspešno rešavali metodom iscrpljivanja ali preciznu definiciju granične vrednosti funkcije dao je Koši 1821. god.

- Broj a se naziva **granična vrednost** niza, ako za svaki proizvoljno mali pozitivni broj ε , postoji prirodni broj n_0 , takav da je

$$(\forall n > n_0) \quad |a_n - a| < \varepsilon,$$

što se označava sa

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \text{ ili } a_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty.$$

- Niz koji ima graničnu vrednost naziva se **konvergentnim nizom**, a koji je nema naziva se **divergentnim nizom**.
- Granična vrednost konvergentnog niza je **jedinstvena**.
- Svaki konvergentan niz je **ograničen**.

Primer:

Dat je niz $a_n = \frac{n}{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Pokazati da je njegova granična vrednost $\frac{1}{2}$.

Odrediti n_0 za $\varepsilon = 0,01$.

Kako je $|a_n - a| = \left| \frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{4n+2} < \varepsilon$ za $\forall \varepsilon > 0$, pa zaključujemo da je $\frac{1}{2}$

granična vrednost niza.

Za $\varepsilon = 0,01$ imamo $\frac{1}{4n+2} < 0,01$, odakle je $n > \frac{98}{4} = 24,5$ tj. $n_0 \geq 25$.

Dakle, van ε okoline broja $\frac{1}{2}$ nalazi se 24 člana niza, a u ε okolini počev od člana a_{25} , svi ostali članovi niza, njih beskonačno mnogo.

4.2.1. OSOBINE KONVERGENTNIH NIZOVA

- Svaki konvergentan niz je **ograničen**.
- Monoton i ograničen niz je **konvergentan**.

Primer:

Niz $a_n = \frac{n+1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, odnosno $\left(2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots\right)$ je monotonno opadajući,

$a_n > a_{n+1}$, a ograničen je $1 < \frac{n+1}{n} < 2$, što znači da postoji granična vrednost

ovog niza, tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

4.2.2. OPERACIJE SA GRANIČNIM VREDNOSTIMA NIZOVA

Neka je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Tada važi:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot a_n = c \cdot a$, $c \in \mathbb{R}$;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \pm b$;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \cdot b$;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}$, ($b \neq 0$).

Primer:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2}.$$

4.2.3.TAČKA NAGOMILAVANJA NIZA

- Tačka a na brojnoj pravoj u čijoj se svakoj proizvoljno maloj okolini nalazi beskonačno mnogo članova niza naziva se **tačka nagomilavanja** niza.
- Broj a je **tačka nagomilavanja** niza ako je za $\forall \varepsilon > 0$ i $\forall n \in I$ $|a_n - a| < \varepsilon$,
gde je I jedan beskonačni podskup skupa prirodnih brojeva
- Niz može imati jednu, dve, uopšte konačno ili beskonačno mnogo tačaka nagomilavanja.
- Ograničen niz koji ima samo jednu tačku nagomilavanja je **konvergentan**.

Primer:

- Niz sa opštim članom $a_n = n$ nema tačku nagomilavanja.
- Niz sa opštim članom $a_n = \frac{1}{n}$ ima jednu tačku nagomilavanja $a = 0$ koja ne pripada nizu i on je konvergentan.
- Niz sa opštim članom $a_n = \frac{(-1)^n n + 1}{n + 1}$ ima dve tačke nagomilavanja $a_1 = 1$, koja pripada nizu i $a_2 = -1$, koja ne pripada nizu. Niz je divergentan.

4.2.4. BROJ e

- Granična vrednost niza sa opštim članom $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ je broj $e = 2,718281\dots$ odnosno:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Napomena: Može se dokazati da je niz sa opštim članom $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

monoton i ograničen, pa samim tim i konvergentan.

Primer:

Naći graničnu vrednost niza: $a_n = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$.

Ako uvedemo smenu $\frac{3}{n} = \frac{1}{t} \Leftrightarrow n = 3t$ i za $n \rightarrow \infty$ dobijamo $t \rightarrow \infty$, onda je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{3t} = \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \right)^3 = e^3.$$

4.3. GRANIČNA VREDNOST FUNKCIJE

Ako posmatramo funkciju $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, uočavamo da je funkcija nije definisana za

$x = 1$. Dakle ponašanje funkcije u toj vrednosti, kao i u beskonačnosti ne možemo ispitati koristeći dosadašnje znanje o osobinama funkcija. Tim vrednostima, jedino, se možemo u beskonačno približavati i tako posmatrati promene funkcije. Do granične vrednosti funkcije dolazimo uopštavajući pojam granične vrednosti niza.

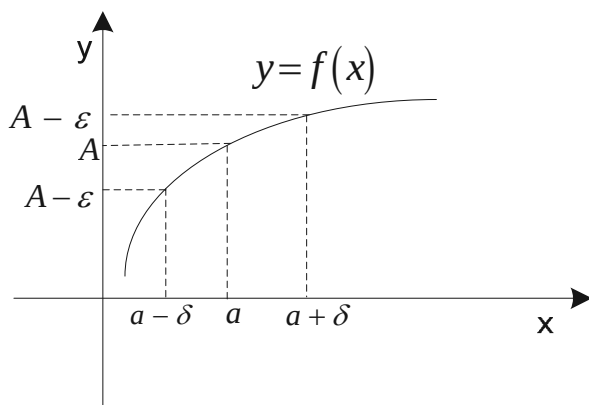
4.3.1. Definicija granične vrednosti funkcije

- Broj D je **granična vrednost** funkcije $f(x)$ kada $x \rightarrow a$, ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji broj $\delta > 0$, takav da je za $\forall x \in D_x$ za koje važi uslov $|x - a| < \delta$, ispunjena nejednakost $|f(x) - A| < \varepsilon$ i pišemo

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

- Navedenu definiciju možemo zapisati i na sledeći način:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(x \in (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon))$$



Napomena: Prethodna definicija znači da ako se na y osi zada ε okolina tačke A , tada postoji δ okolina tačke a na x osi, tako da kada $x \in (a - \delta, a + \delta)$, onda $f(x) \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$, tj. ako nezavisno promenljiva x teži a , vrednosti funkcije $f(x)$ teže A .

Napomena: Funkcija u tački a može, a ne mora biti definisana, ali tačka a mora biti tačka nagomilavanja funkcije.

Primer:

Dokazati da je $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1) = 7$.

Polazeći od definicije granične vrednosti, ako je $|3x+1-7| < \varepsilon$, dobijamo

$$3|x-2| < \varepsilon, \text{ tj. } |x-2| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dovoljno je uzeti da je $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, pa da gornja formula bude tačna.

LEVA I DESNA GRANIČNA VREDNOST FUNKCIJE

- Broj A je **desna granična vrednost** funkcije $f(x)$ u tački a , tj. $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A$, ako i samo ako je (akko)

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x) (a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$

- Broj A je **leva granična vrednost** funkcije $f(x)$ u tački a tj. $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A$, akko

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x) (a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$

- Funkcija $f(x)$ **ima graničnu vrednost** A kada $x \rightarrow a$ ako leva i desna granična vrednost postoje i jednake su A .

Primer:

Odrediti graničnu vrednost funkcije $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ u tački $x = 1$.

$$\text{Imamo da je } \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x + 1) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} (x + 1) = 2.$$

Pošto leva i desna granična vrednost funkcije u tački $x = 1$ postoje i imaju istu vrednost, funkcija ima graničnu vrednost koja iznosi 2.

Primer:

Odrediti graničnu vrednost funkcije $f(x) = x \frac{|x-2|}{x-2}$ u tački $x = 2$.

Kako je $|x-2| = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ -(x-2), & x < 2 \end{cases}$, dobijamo:

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} x \cdot \frac{x-2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2+0} x = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 2-0} x \cdot \frac{-(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2-0} (-x) = -2.$$

Levai desna granična vrednost funkcije u tački $x = 2$ postoje, ali nisu jednake, funkcija pa nema graničnu vrednost u toj tački.

▪ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ ako:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists M > 0) (\forall x) \quad x > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

▪ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ ako:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists M < 0) (\forall x) \quad x < M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Ako je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, kažemo da je $f(x)$ **beskonačno mala** kad $x \rightarrow a$.

▪ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ako:

$$(\forall M > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x) \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M.$$

▪ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ako:

$$(\forall M < 0) (\exists \delta > 0) (\forall x) \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| < M.$$

Ako je $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = +\infty$, kažemo da je $f(x)$ **beskonačno velika** kad $x \rightarrow a$.

Ako je funkcija $f(x)$ beskonačno mala kad $x \rightarrow a$, tada je $\frac{1}{f(x)}$ beskonačno velika $x \rightarrow a$.

4.3.2.OSOBINE GRANIČNIH VREDNOSTI FUNKCIJA

Ako funkcije $f(x)$ i $g(x)$ imaju granične vrednosti kad $x \rightarrow a$, tj.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ i $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, tada je:

- $\lim_{x \rightarrow a} c f(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c A$;
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \pm B$;
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \cdot B$,
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{A}{B}$ za $(g(x) \neq 0, B \neq 0)$.

4.3.3.NEPREKIDNOST FUNKCIJE

- Funkcija $f(x)$ je **neprekidna** u tački $a \in D_x$, ako

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x) |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

- Funkcija $f(x)$ je **neprekidna** u tački $a \in D_x$, ako je

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

- Funkcija je **neprekidna na intervalu** ako je neprekidna u svakoj tački tog intervala.
- Ako funkcija nije neprekidna u tački a , onda je a to **tačka prekida funkcije**.

Napomena: Definicija neprekidnosti ima sličnosti sa definicijom granične vrednosti u tački. Razlika je u tome što definicija granične vrednosti ne zahteva definisanost funkcije u tački a , a neprekidnosti zahteva.

- Ako su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ neprekidne u tački $a \in D_x$, onda su u toj tački funkcije: $c \cdot f(x)$, $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$.

Primer:

a) Ispitati neprekidnost funkcije $f(x) = \begin{cases} 3x & , -\infty < x \leq 1 \\ 3-x & , 1 < x < +\infty \end{cases}$.

Funkcija je neprekidna u svakoj tački osim za $x=1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} 3x = 3, \text{ a } \lim_{x \rightarrow 1+0} (3-x) = 2, \text{ znači da ne postoji } \lim_{x \rightarrow 1} f(x), \text{ pa u toj tački}$$

funkcija ima prekid. Ovaj prekid se zove **prekid prve vrste**.

b) Ispitati neprekidnost funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$

funkcija nije definisana u tački $x=0$, odnosno u njoj ima **prekid druge vrste**

4.4. ASIMPTOTE FUNKCIJE

Asimptota funkcije je prava ili kriva kojoj se funkcija u beskonačno približava, ali je nikada ne dodiruje.

Proučavaćemo samo asimptote koje su vertikalna, horizontalna ili kosa prava.

- Prava $x = a$ je **vertikalna asimptota** funkcije $f(x)$ ako je

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty.$$

- Prava $y = b$ je **horizontalna asimptota** funkcije $f(x)$ ako je

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = b.$$

▪ Prava $y = kx + n$ je **kosa asimptota** funkcije $f(x)$ ako je:

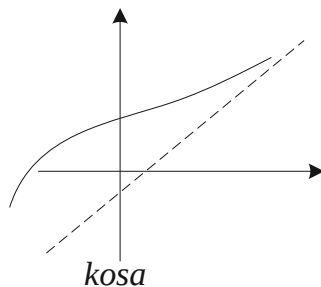
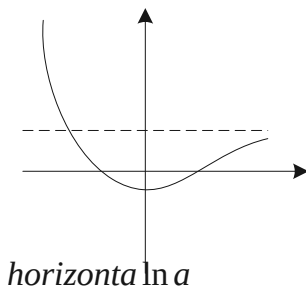
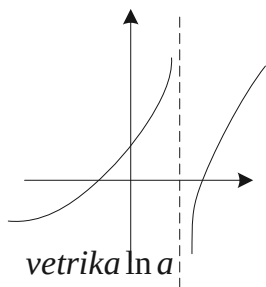
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx - n) = 0.$$

Odavde je $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = n$.

Ako podelimo poslednju vezu sa x dobićemo:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{f(x) - kx}{x} \right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - k \right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = k, \text{ pa je}$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx).$$



Primer: Odrediti asimptote funkcija:

a) $f(x) = \frac{3}{x^2 - 1}.$

Funkcija ima prekide za $x = \pm 1$ i te prave mogu da budu njene vertikalne asimptote.

Kako je $\lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} \frac{3}{x^2 - 1} = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1 \pm 0} \frac{3}{x^2 - 1} = \mp\infty$, funkcija ima dve vertikalne asimptote $x = \pm 1$.

Pošto je $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x^2 - 1} = 0$, postoji i horizontalna asimptota, x - osa, tj. prava $y = 0$.

Funkcija koja ima horizontalnu nema kosu asimptotu.

b) $f(x) = \frac{3x^2}{x-1}$.

Funkcija ima prekid za $x = 1$, a $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = -\infty$, i prava $x = 1$ je vertikalna asimptota.

Pošto je $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, funkcija nema horizontalnu asimptotu i može da ima kosu.

Kako je $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2}{x^2 - x} = 3$, $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x}{x-1} = 3$,

kosa asimptota je prava $y = 3x + 3$.

c) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

Funkcija ima prekid za $x = 0$, a $\lim_{x \rightarrow +0} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -0} e^{\frac{1}{x}} = 0$, i prava $x = 0$ je vertikalna asimptota s desna.

Pošto je $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$, funkcija ima horizontalnu asimptotu pravu $y = 1$.

ZADACI

Odrediti oblast definisanosti sledećih funkcija:

1. a) $y = \frac{2x}{x^2 - 1}$; b) $y = \frac{1-2x}{(x-1)^2}$; c) $y = \sqrt{9-x^2}$;

d) $y = \sqrt{4x-x^2}$; e) $y = \frac{8x-16-x^2}{\sqrt{2-x}}$

f) $f(x) = \sqrt{x^2-x-2} + \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$.

Rešenje:

a) $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1, x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$;

b) $D_x = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

c) $9 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (3-x)(3+x) \geq 0, x \in [-3, 3]$;

d) $4x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x(4-x) \geq 0, x \in [0, 4]$;

e) $2 - x > 0 \Leftrightarrow x < 2, x \in (-\infty, 2)$;

f) 1° $x^2 - x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$;

2° $3 + 2x - x^2 > 0 \Leftrightarrow -(x+1)(x-3) > 0 \Leftrightarrow (x+1)(3-x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 3)$

Rešenje je presek dobijenih rešenja $x \in [2, 3)$.

2. a) $y = \ln \frac{x}{3-x}$; b) $y = \ln(x^2 - 6x)$; c) $f(x) = \sqrt{\ln \frac{5x-x^2}{4}}$.

Rešenje:

a) $\frac{x}{3-x} > 0, x \in (0, 3)$;

b) $x^2 - 6x > 0, x \in (-\infty, 0) \cup (6, +\infty)$;

$$\text{c) } 1^\circ \ln \frac{5x - x^2}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{5x - x^2}{4} \geq 1 \Leftrightarrow x \in [1, 4]$$

$$2^\circ \frac{5x - x^2}{4} > 0 \Leftrightarrow x \in (0, 5).$$

Rešenje je presek dobijenih rešenja $x \in [1, 4]$.

3. Odrediti kodomen funkcija:

$$\text{a) } y = -\frac{1}{2}x^2 - 1; \quad \text{b) } y = x^2 - 9; \quad \text{c) } y = 2^x + 1.$$

Rešenje:

$$\text{a) } y \in (-\infty, -1];$$

$$\text{b) } y \in [-9, +\infty);$$

$$\text{c) } y \in (1, +\infty).$$

4. Date su funkcije.

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \frac{x^2}{x}, \quad f_3(x) = \sqrt{x^2}, \quad f_4(x) = (\sqrt{x})^2.$$

Da li među njima ima istih?

Rešenje:

$$f_1(x) = x, \quad D_x = R, \quad D_y = R$$

$$f_2(x) = \frac{x^2}{x} = x, \quad D_x = R \setminus \{0\}, \quad D_y = R$$

$$f_3(x) = \sqrt{x^2} = |x|, \quad D_x = R, \quad D_y = R_+$$

$$f_4(x) = (\sqrt{x})^2 = x, \quad D_x = R_+, \quad D_y = R_+$$

Sve funkcije su različite.

5. Date su funkcije

$$f_1(x) = \sin^2 x + \cos^2 x, \quad f_2(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}}, \quad f_3(x) = \frac{\ln e^x}{x}, \quad f_4(x) = \frac{\sqrt[3]{x^3}}{x}.$$

Da li među njima ima istih?

Rešenje:

$$f_1(x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1, D_x = R$$

$$f_2(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \pm 1, D_x = R \setminus \{0\}$$

$$f_3(x) = \frac{\ln e^x}{x} = 1, D_x = R \setminus \{0\}$$

$$f_4(x) = \frac{\sqrt[3]{x^3}}{x} = 1, D_x = R \setminus \{0\}$$

Iste su funkcije f_3 i f_4 .

6. Odrediti domen i nule datih funkcija:

$$\text{a) } y = \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + 1}; \quad \text{b) } y = x\sqrt{x^2 - 1};$$

$$\text{c) } y = (x^2 - 4)e^x; \quad \text{d) } y = \frac{1 + \ln x}{x^2}.$$

Rešenje:

a) Domen: $D_x = R$.

$$\text{Nule funkcije: } \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2 \vee x_2 = -5.$$

b) Domen: $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Nule funkcije: $y = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 1$.

c) Domen je skup R . Nule funkcije: $(x^2 - 4)e^x = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 2, e^x \neq 0$.

d) Domen: $x \in (0, +\infty)$. Nule funkcije: $1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}$.

7. Odrediti domen, nule i znak funkcija:

$$\text{a) } y = \ln(1 - x); \quad \text{b) } y = \ln \frac{x - 4}{1 - x}.$$

Rešenje:

a) Domen: $1 - x > 0, x \in (-\infty, 1)$.

Nula funkcije: $1 - x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Znak funkcije:

$$y < 0 \Leftrightarrow 0 < 1 - x < 1 \Leftrightarrow x \in (0, 1),$$

$$y > 0 \Leftrightarrow 1 - x > 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0).$$

b) Domen: $\frac{x-4}{1-x} > 0, x \in (1, 4).$

Nula funkcije: $x = \frac{5}{2}.$

Znak funkcije:

$$y < 0 \text{ za } 0 < \frac{x-4}{1-x} < 1, x \in \left(\frac{5}{2}, 4\right) \text{ i } y > 0 \text{ za } \frac{x-4}{1-x} > 1 \text{ za } x \in \left(1, \frac{5}{2}\right).$$

8. Dokazati da funkcije nisu ni parne ni neparne:

a) $y = \frac{2x-2}{x^2};$

b) $y = \frac{e^x}{x-1}.$

Rešenje:

a) $y(-x) = \frac{2(-x)-2}{(-x)^2} = \frac{-2(x+1)}{x^2}; y(-x) \neq y(x) \text{ i } y(-x) \neq -y(x);$

b) $y(-x) = \frac{e^{-x}}{-x-1} = -\frac{1}{e^x(x+1)}, y(-x) \neq y(x) \text{ i } y(-x) \neq -y(x).$

9. Dokazati da su funkcije parne:

a) $y = \sqrt{4-x^2};$

b) $y = e^{-\frac{x^2}{2}};$

c) $y = (x^2 - 1)e^{-x^2};$ **d)** $y = x^2 - 1 - 3\cos x.$

Rešenje:

a) $y(-x) = \sqrt{4-(-x)^2} = \sqrt{4-x^2} = y(x);$

b) $y(-x) = e^{-\frac{(-x)^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}} = y(x);$

c) $y(-x) = ((-x)^2 - 1)e^{-(-x)^2} = (x^2 - 1)e^{-x^2} = y(x);$

d) $y(-x) = (-x)^2 - 1 - 3\cos(-x) = x^2 - 1 - 3\cos x = y(x).$

10. Dokazati da su funkcije neparne:

a) $y = x^3 - 2x$; **b)** $y = \frac{x}{2} - \frac{2}{x}$;

c) $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$; **d)** $y = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$.

Rešenje:

a) $y(-x) = (-x)^3 - 2(-x) = -(x^3 - 2x) = -y(x)$;

b) $y(-x) = \frac{-x}{2} - \frac{2}{(-x)} = -\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right) = -y(x)$;

c) $y(-x) = \frac{1 + e^{-x}}{e^{-x} - 1} = \frac{1 + \frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x} - 1} = -\frac{e^x + 1}{e^x - 1} = -y(x)$;

d) $y(-x) = \frac{2^{-x} - 1}{2^{-x} + 1} = \frac{\frac{1}{2^x} - 1}{\frac{1}{2^x} + 1} = -\frac{2^x - 1}{2^x + 1} = -y(x)$.

11. Ispitati sve poznate osobine funkcija:

a) $y = \ln(x^2 - 1)$; **b)** $y = \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x}$.

Rešenje:

a) Domen: $(x-1)(x+1) > 0$, $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Nule: $x^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow x_1 = \pm\sqrt{2}$.

Znak funkcije:

$$y(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x^2 - 2 < 0 \Leftrightarrow x \in (-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$$

$$y(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty).$$

$$y(-x) = \ln((-x)^2 - 1) = \ln(x^2 - 1) = y(x), \text{ funkcija je parna.}$$

b) Domen: $1 - \ln x \neq 0 \wedge x > 0 \Leftrightarrow x \neq e \wedge x > 0, x \in (0, e) \cup (e, +\infty).$

Nule: $1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}.$

$y(x) < 0, x \in (0, e^{-1}) \cup (e, +\infty), y(x) > 0, x \in (e^{-1}, e).$

Funkcija nije ni parna ni neparna, jer $\ln(-x) \notin \mathbb{R}$

12. Odredi osnovni period sledećih funkcija:

a) $y = 2 \sin 2x;$ **b)** $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2};$

c) $y = \sin^2 x;$ **d)** $y = \cos x + 3 \cos 2x - \frac{1}{3} \cos 3x.$

Rešenje:

a) $2 \sin 2x = 2 \sin 2(x+T) \Leftrightarrow \sin 2x - \sin 2(x+T) = 0$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \frac{2x - 2x + 2T}{2} \cdot \cos \frac{2x + 2x - 2T}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin T \cdot \cos(2x - T) = 0 \Leftrightarrow \sin T = 0, \cos(2x - T) \neq 0 \Leftrightarrow T = \pi;$$

Napomena:

Osnovni period funkcija $y = \sin bx$ i $y = \cos bx$ je $T = \frac{2\pi}{b}$, a za

funkcije $y = \operatorname{tg} bx$ i $y = \operatorname{ctg} bx$ je $T = \frac{\pi}{b}.$

b) $T = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi;$

c) $y = \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), T = \pi;$

d) $T_1 = 2\pi, T_2 = \pi, T_3 = \frac{2\pi}{3},$ pa je $T = \operatorname{NZS}(T_1, T_2, T_3) = 2\pi.$

13. Ispitati ograničenost sledećih funkcija:

a) $y = \sqrt{4 - x^2};$

b) $y = x - 4;$

c) $y = 2 \sin 2x.$

Rešenje:

a) Funkcija je neograničena $y \in [0, \infty)$;

b) Funkcija je neograničena;

c) Funkcija je ograničena $y \in [-2, 2]$.

14. Ispitati monotonost sledećih funkcija:

a) $y = 2x + 3$;

b) $y = 2^x$.

Rešenje

a) $x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 + 3 < 2x_2 + 3$, što znači da funkcija strogo raste.

b) $x_1 < x_2 \Rightarrow 2^{x_1} < 2^{x_2}$, što znači da funkcija raste.

15. Ispitati konveksnost, konkavnost funkcije $f(x) = \log_2 x$.

Rešenje

$$\log_2 \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) \geq \frac{\log_2(x_1) + \log_2(x_2)}{2} \Leftrightarrow$$

$$\log_2 \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) \geq \log_2 (x_1 x_2)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} \geq (x_1 x_2)^{\frac{1}{2}}, \text{ pa je funkcija}$$

konveksna.

16. Ako je $f(x) = x^2 + x + 2$ naći $f(1)$, $f(a)$, $f(f(x))$.

Rešenje

$$f(1) = 1^2 + 1 + 2 = 4$$

$$f(a) = a^2 + a + 2$$

$$f(f(x)) = (x^2 + x + 2)^2 + (x^2 + x + 2) + 2$$

17. Ako je $f(x+1) = x^2 + x + 2$ naći $f(1)$, $f(a)$, $f(f(x))$.

Rešenje

Ako stavimo da je $x+1 = t$, dobijamo da je $x = t-1$

$$f(t) = (t-1)^2 + (t-1) + 2 = t^2 - t + 2, \text{ odnosno } f(x) = x^2 - x + 2.$$

$$f(1) = 1^2 - 1 + 2 = 2$$

$$f(a) = a^2 - a + 2$$

$$f(f(x)) = (x^2 - x + 2)^2 + (x^2 - x + 2) + 2$$

18. Napisati nekoliko članova niza čiji je opšti član:

$$\text{a) } a_n = \frac{1}{n+1}; \quad \text{b) } a_n = (-1)^n \frac{1}{n}.$$

Rešenje:

$$\text{a) } \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots; \quad \text{b) } -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots$$

19. Naći opšti član niza, zadatog sa nekoliko prvih članova:

$$\text{a) } \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots; \quad \text{b) } \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \dots$$

Rešenje:

$$\text{a) } a_n = \frac{1}{2^n}; \quad \text{b) } a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}.$$

20. Naći tačke nagomilavanja i ispitati konvergenciju sledećih nizova:

$$\begin{aligned} \text{a) } a_n &= \frac{1}{n+1}; & \text{b) } a_n &= (-1)^n \frac{1}{n}; \\ \text{c) } a_n &= \frac{n+1}{n}; & \text{d) } a_n &= (-1)^n \frac{n+2}{n}. \end{aligned}$$

Rešenje:

a) tačka nagomilavanja je 0 , $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ i niz je konvergentan,

b) tačka nagomilavanja je 0 , $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ i niz je konvergentan,

c) tačka nagomilavanja je 1 , $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ i niz je konvergentan,

d) niz ima dve tačke nagomilavanja, -1 i 1 , i niz ne konvergira.

21. Dat je niz $a_n = \frac{n}{n+1}$. Izračunati njegovu graničnu vrednost. Odrediti n_0 za $\varepsilon = 0,01$.

Rešenje:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1.$$

Kako je vrednost 1 granična vrednost niza, onda je

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{-1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < 0,01 \text{ odakle je } n > 99 \text{ tj. } n_0 = 99.$$

Prema tome 99 članova niza je van ε okoline tačke 1 širine 0,01, a počev od a_{100} svi ostali, tj. njih beskonačno mnogo nalaze u ε okolini tačke 1.

22. Odrediti granične vrednosti nizova:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 2n + 3}{3n^2 + 1}; \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3n^2 + 1}; \quad \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{3n + 1},$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)}{(n+1)^2}; \quad \text{e) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \right).$$

Rešenje:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 2n + 3}{3n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}{3 + \frac{1}{n^2}} = \frac{2}{3};$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n}}{3 + \frac{1}{n^2}} = 0;$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{3n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} = \infty;$$

d) Po formuli za zbir prvih n članova aritmetičkog niza

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d), \text{ gde je } a_1 = 1, d = 2, \text{ dobijamo}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 = 1.$$

e) Po formuli za zbir prvih n članova geometrijskog niza $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$,

gde je $a_1 = 1, q = \frac{1}{2}$ dobijamo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

23. Odrediti granične vrednosti nizova:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+1} - n);$ **b)** $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2+1} - n);$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n}};$ **d)** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}.$

Rešenje:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2+1} - n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{n^2+1} - n)(\sqrt{n^2+1} + n)}{\sqrt{n^2+1} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n^2+1-n^2)}{\sqrt{n^2+1} + n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} = 0. \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2+1} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\sqrt{n^2+1} - n)(\sqrt{n^2+1} + n)}{\sqrt{n^2+1} + n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n^2 + 1 - n^2)}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n})(\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{1}{n}} \right) = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{n+1-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = \infty. \end{aligned}$$

24. Odrediti granične vrednosti nizova:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+1)!}{n! - (n+1)!}; \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 5^n}{3^n - 5^n};$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right).$$

Rešenje:

a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+1)!}{n! - (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + n!(n+1)}{n! - n!(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(1 + n+1)}{n!(1 - (n+1))} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+n}{-n} = -2.$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 5^n}{3^n - 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n + 1}{\left(\frac{3}{5}\right)^n - 1} = -1.$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

25. Odrediti granične vrednosti nizova:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^{\frac{n}{3}}; \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{2n}; \quad \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-3}{n} \right)^{\frac{n}{2}}.$$

Rešenje:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^{\frac{n}{3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{2}{n} \right)^{\frac{n}{2}} \right)^{\frac{2}{n} \cdot \frac{n}{3}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3n}} = e^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{e^2};$$

b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1-1}{n+1} \right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{-(n+1)} \right)^{-\frac{2n}{n+1}}$$

$$= e^{-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}.$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-3}{n} \right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{3}{n} \right)^{-\frac{n}{3}} \right)^{-\frac{3}{2}} = e^{-\frac{3}{2}}.$$

26. Odrediti graničnu vrednost niza $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\ln(n+2) - \ln n).$

Rešenje:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \frac{n+2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n = \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{2}{n} \right)^{\frac{n}{2}} \right)^2 = \ln e^2 = 2.$$

Dokazati sledeće rezultate:

$$\text{a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}} = 1;$$

$$\text{b)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^3 + (n-1)^3} = 0;$$

$$\text{c)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+4+7+\dots+(3n-2)}{3n+1} - \frac{n}{2} \right) = -\frac{1}{3};$$

$$\text{d)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{1+2+3+\dots+(n-1)} = 2;$$

$$\text{e)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \dots \cdot \sqrt[2^n]{2} = 2;$$

$$\text{i)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{2^{\frac{1}{n}} + 1} = 0;$$

$$\text{j)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n} = 3;$$

$$\text{k)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n-n}}{n} = 0;$$

$$\text{l)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{1}{2};$$

$$\text{m)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n} \right)^{3n} = e^{-6};$$

$$\text{n)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{2n+1} = e^{-2}.$$

27. Na osnovu definicije granične vrednosri pokazati da je:

$$\text{a)} \lim_{x \rightarrow 1} (2x-1) = 1; \quad \text{b)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4.$$

Rešenje:

a)

Po definiciji vrednost 1 će biti granična vrednost funkcije ako $\forall \varepsilon > 0$,

$\exists \delta > 0$, tako da ako je $|x-1| < \delta$, onda je $|(2x-1)-1| < \varepsilon$.

Kako je $|(2x-1)-1| = 2|x-1| < \varepsilon \Rightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{2}$, i ako uzmemo da je

$\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, biće $|(2x-1)-1| < \varepsilon$, za $|x-1| < \delta$. Zanači, 1 je granična vrednost funkcije.

$$\text{b)} \left| \frac{x^2-4}{x-2} - 4 \right| = |x+2-4| = |x-2| < \varepsilon, \text{ za svaki } |x-2| < \delta = \varepsilon.$$

28. Odrediti granične vrednosti funkcija:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^2;$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{2x + 1};$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{x^2 - 2x + 1};$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + 1)^2}{2x^2 - 2x + 1}.$

Rešenje:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x^2}} \right)^2 = 1;$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \infty;$

c) 0; d) $\frac{1}{2}.$

29. Izračunati:

a) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 7x + 12};$

b) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^4 - 6x^2 - 27}{x^3 + 3x^2 + x + 3};$

c) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 - 4x + 3};$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 16x}{2x^2 + 4x - 16}.$

Rešenje:

a) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 7x + 12} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x + 3)(x + 2)}{(x + 3)(x + 4)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 2}{x + 4} = -1;$

b) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^4 - 6x^2 - 27}{x^3 + 3x^2 + x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2 - 9)(x^2 + 3)}{(x + 3)(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x - 3)(x^2 + 3)}{x^2 + 1} = -\frac{36}{5};$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 2)(x - 1)}{x^3 - x - 3x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 2)(x - 1)}{x(x^2 - 1) - 3(x - 1)}$

$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2}{x^2 + x - 3} = -3;$

d) $\frac{16}{3}.$

30. Izračunati:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x);$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - 1};$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{4x};$

d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1} - 2}.$

Rešenje:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x^2 - 1} \cdot \frac{\sqrt{x+3} + 2}{\sqrt{x+3} + 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+3})^2 - 4}{(x^2 - 1)(\sqrt{x+3} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x^2 - 1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

c) $\frac{1}{4};$

d) 4

31. Izračunati granične vrednosti :

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4};$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1} - 1}{x^2};$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{x - 1};$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$

e) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{a}}$

Rešenje:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+16}+4}{\sqrt{x^2+16}+4}$$

a)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+16}+4}{\sqrt{x^2+1}+1} = 4;$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x^2} \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2 + \sqrt[3]{x^2+1} + 1}{\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2 + \sqrt[3]{x^2+1} + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^3 - 1}{x^2 \left(\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2 + \sqrt[3]{x^2+1} + 1\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 \left(\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2 + \sqrt[3]{x^2+1} + 1\right)} = \frac{1}{3};$$

c) $-\frac{1}{3};$

d) $\frac{2}{3};$

e) $2\sqrt[4]{a}.$

32. Dokazati $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Rešenje:

Za $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, dobijamo $\sin x < x < \operatorname{tg} x.$

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Leftrightarrow \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1.$$

kako je funkcija $y = \sin x$, neparna. Znajući da je $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$,

zaključujemo da je $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

33. Izračunati:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x};$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x};$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x};$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \sin x}{2x + \sin x}.$

Rešenje:

$$\text{a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} = 4 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} = 4;$$

$$\text{b)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \sin 2x}{2x}}{\frac{3 \sin 3x}{3x}} = \frac{2}{3};$$

$$\text{c)} 1; \quad \text{d)} \frac{1}{3}.$$

34. Izračunati:

$$\text{a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}; \quad \text{b)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2};$$

Rešenje:

$$\text{a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{x} = 2.$$

$$\text{b)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

35. Izračunati:

$$\text{a)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+4}-2};$$

$$\text{b)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sin 3x};$$

$$\text{c)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{\sin(x+1)}.$$

$$\text{Rezultat: a)} 16; \quad \text{b)} \frac{1}{18}; \quad \text{c)} 3.$$

Odrediti granične vrednosti funkcija ako je:

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad \text{odnosno} \quad e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

36. Izračunati:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^x;$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{3}{x}};$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x;$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}.$

Rešenje:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{\frac{2x}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}};$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{6}{2x}} = e^6;$

c)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x+1}{x-1} - 1\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x-1}\right)^{x \cdot \frac{x-1}{2} \cdot \frac{2}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x-1}} = e^2;$$

d) $e^3.$

37. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^x;$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x;$ c) $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2+3x+3)^{\frac{1}{x+1}}.$

Rezultat: a) $e^4;$

b) $e^8;$

c) $e.$

38. a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(4-x)}{x-3};$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+6) - \ln 6}{x}.$

Rešenje:

a)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\ln(4-x)}{x-3}\right) = \lim_{x \rightarrow 3} \ln(4-x)^{\frac{1}{x-3}} = \ln \lim_{x \rightarrow 3} (1 - (x-3))^{\frac{1}{x-3}} = \ln e^{-1} = -1;$$

b) $\frac{1}{6}.$

39. a) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{\sin x}}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$;
 c) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$; d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x}$.

Rešenje:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{\sin x}} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$;

b) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+2\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{2}{2\operatorname{tg}^2 x}} = e^2$;

c)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x - 1)^{\frac{1}{1 - \cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - (1 - \cos x))^{\frac{1}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}} \\ &= e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}; \end{aligned}$$

d)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (1 + \sin 2x - 1)^{\frac{\sin^2 2x}{(1 - \sin 2x)(1 + \sin 2x)}} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 2x}{(1 + \sin 2x)}} = e^{\frac{1}{2}}.$$

40. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$;

Rešenje:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$;

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \left\{ \begin{array}{l} t = e^x - 1 \\ x = \ln(1+t) \end{array} \right\} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = 1$;

c) $\ln a$.

41. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-3x} - 1}{x}$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$.

Rešenje:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} + \frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} + \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \frac{x^2}{4}} \right) = \frac{3}{2};$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} - 1}{x} = -2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} - 1}{-2x} = -2; \quad \text{c) } 1.$$

42. Odrediti asimptote funkcija:

a) $y = \frac{1}{x-1}$; b) $y = \frac{x+3}{x+1}$;

c) $y = \frac{x^2 - 6x + 4}{x-1}$; d) $y = \frac{2x^3 - 1}{x^2 - 4}$.

Rešenje:

a)

Funkcija ima prekid za $x = 1$. Kako je $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x-1} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{x-1} = -\infty$,

funkcija ima vertikalnu asimptotu $x = 1$.

Kako je $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x-1} = 0$, funkcija ima i horizontalnu asimptotu, pravu $y = 0$, tj. x .

Funkcija koja ima horizontalnu asimptotu nema kosu.

b)

Prava $x = -1$ je vertikalna asimptota.

Prava $y = 1$ je horizontalna asimptota.

Funkcija nema kosu asimptotu.

c)

Prava je $x = 1$ je vertikalna asimptota.

Kako je $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x + 4}{x - 1} = \infty$, funkcija nema horizontalnu asimptotu.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 6x + 4}{x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x + 4}{x^2 - x} = 1;$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 6x + 4}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x + 4}{x - 1} = -5, \text{ pa je } y = x - 5 \text{ kosa}$$

asimptota.

d)

$x = \pm 2$. Prave $x = \pm 2$ su vertikalne asimptote.

Horizontalnih asimptota nema.

Kosa asimptota je prava $y = 2x$.

43. **a)** $y = \frac{e^x}{x}$; **b)** $y = xe^{\frac{1}{x}}$;
 c) $y = \frac{\ln x}{x^2}$; **d)** $y = \ln \frac{x-2}{x+1}$.

Rešenje:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty$, vertikalna asimptota je prava $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0, \text{ funkcija ima horizontalnu asimptotu pravu } y = 0$$

kada $x \rightarrow -\infty$.

Nema kosih asimptota.

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{\frac{1}{x}} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} xe^{\frac{1}{x}} = 0$, funkcija ima vertikalna asimptotu $x = 0$

kada $x \rightarrow 0_+$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} xe^{\frac{1}{x}} = \pm\infty \text{ pa funkcija nema horizontalnu asimptotu.}$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1, \quad n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(xe^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = 1, \text{ pa je}$$

kosa asimptota je prava $y = x + 1$.

c) Kako je $x \in (0, +\infty)$, imamo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^2} = -\infty, \text{ funkcija ima vertikalnu asimptotu } x = 0 \text{ kada } x \rightarrow 0_+.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0, \text{ horizontalna asimptota je prava } y = 0.$$

Nema kosih asimptota.

d) Kako je $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$, imamo:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \ln \frac{x-2}{x+1} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln \frac{x-2}{x+1} = -\infty, \text{ funkcija ima vertikalne asimptote}$$

$$x = -1 \text{ i } x = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln \frac{x-2}{x+1} = 0, \text{ horizontalna asimptota je prava } y = 0.$$

Nema kosih asimptota.

44. Ispitati neprekidnost sledećih funkcija:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}; \text{ b) } f(x) = \begin{cases} 3x + 4, & x \leq 1 \\ x^2 + 6, & x > 1 \end{cases};$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} \frac{|x-1|}{x-1}x + 1, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

Rešenje:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, f(0) = 0 \neq 1, \text{ zaključujemo da funkcija ima prekid za } x = 0.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x + 4) = 7, \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 6) = 7, \text{ funkcija ne je prekidana za } x = 1.$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} \frac{|x-1|}{x-1}x + 1, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases} = \begin{cases} x + 1, & x > 1 \\ 1 - x, & x < 1, \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0, \text{ funkcija u tački } x = 1 \text{ je prekidna.}$$

DIFERENCIJALNI RAČUN

- 1. IZVOD FUNKCIJE**
- 2. DIFERENCIJAL FUNKCIJE**
- 3. TEJLOROVA I MAKLORENOVA FORMULA**
- 4. TEOREME SREDNJE VREDNOSTI**
- 5. ISPITIVANJE FUNKCIJA PRIMENOM IZVODA**

5. IZVOD FUNKCIJE

Problemi tangente i brzine, kao i problemi ekstrema, tj. minimuma i maksimuma postepeno su podsticali nastajanje pojma izvoda. Mnogi matematičari još od antičke Grčke uspevali su da reše neke od ovih problema u pojedinačnim slučajevima.

Tek sa pojavom Dekartove metode koordinata omogućeno je da se krive predstavljaju jednačinama i tako je stvoren osnovni preduslov za pojavu opšte metode za analitičko rešavanje problema tangente, odnosno za definisanje pojma izvoda.

Problem tangente prvi je rešio nemački matematičar i filozof Lajbnic definišući novu oblast matematike pod nazivom diferencijalni račun. U isto vreme Njutn je definisao izvod kao posledicu istrživanja fenomena kretanja.

To su bile dve idejno i metodolški različite koncepcije koje su dovele do istog rezultata.

Danas, diferencijalni račun, predstavlja nezaobilazno sredstvo u rešavanju mnogih problema savremene nauke i tehnike.



G. Leibniz (1646-1716)



I. Newton (1642-1727)

Najpoznatiji spor u istoriji matematike vođen je između Njutna i Lajbnica oko otkrića diferencijalnog računa. Njutn je imao samo 23 godine kada je 1666. otkrio metod, koji je nazvao metod flukcije. On je prvi shvatio da su integracija i diferenciranje dve inverzne operacije. Međutim oklevao je sa objavljivanjem svojih rezultata. U međuvremenu 1675. Lajbnic je samostalno došao do istog metoda koji je nazvao diferencijalni račun. On je svoje rezultate odmah publikovao i zadobio sva priznanja. Sukob ovih matematičara se nastavljao tako da je Londonsko kraljevsko društvo formiralo komitet koji je 1713. dalo prioritet Njutnu. Međutim simbolika koju je uveo Lajbnic bila je mnogo jednostavnija i opšte je prihvaćena.

5.1. DEFINICIJA IZVODA FUNKCIJE

- Neka je funkcija $f(x)$ definisana u okolini tačke x .

Proizvoljnu malu veličinu Δx nazivamo **priraštaj argumenta** x . Kada se nezavisna promenljiva, argument, promeni od x do $x + \Delta x$, tada se vrednost funkcije promeni od $f(x)$ do $f(x + \Delta x)$, tj. za veličinu

$\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$, koja se naziva **priraštaj funkcije**.

- Ako postoji granična vrednost

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = y' = f'(x)$$

tada kažemo da je $f'(x)$ **prvi izvod funkcije** ili **izvod funkcije** $f(x)$ u datoj tački x .

- Postupak nalaženja izvoda naziva se **diferenciranje**.
- Ako je $f'(x)$ konačna vrednost, tada kažemo da je funkcija **diferencijabilna** u datoj tački x .

Primer:

Odrediti izvod funkcije $f(x) = x^2$ po definiciji.

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

- Ako postoji granična vrednost $f'_-(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ona se naziva **levi izvod funkcije**, a granična vrednost

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \text{ naziva se } \textbf{desni izvod funkcije} \text{ u tački } x.$$

- Funkcija $f(x)$ je **diferencijabilna** u tački x ako i samo ako **postoji levi i desni izvod funkcije** i **jednaki** su:

$$f'_+(x) = f'_-(x).$$

- Funkcija $f(x)$ je **diferencijabilna na intervalu** ako i samo ako je diferencijabilna u svakoj tački tog intervala.
- Ako je funkcija $f(x)$ **diferencijabilna** u nekoj tački, onda je ona i **neprekidna** u toj tački. Obrnuto tvrđenje nije tačno.

Primer:

Ispitati diferencijabilnost funkcije $f(x) = |x|$ u tački $x = 0$.

Funkcija je neprekidna u tački $x = 0$, ali nije diferencijabilna jer je

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{(0 + \Delta x) - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-(0 + \Delta x) - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1,$$

tj. $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ pa zaključujemo da $f'(0)$ ne postoji.

5.1.1. OSNOVNA PRAVILA DIFERENCIRANJA

Ako su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ diferencijabilne u tački x , tada je:

- $(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x), (C = \text{const.});$
- $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x);$
- $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}, (g(x) \neq 0).$

5.1.2. TABLICA OSNOVNIH IZVODA

$f(x)$	$f'(x)$
C	0
$x^\alpha, \alpha \in R$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$a^x, a \in R, 0 < a \neq 1$	$a^x \ln a$
e^x	e^x
$\log_a x, a \in R, 0 < a \neq 1$	$\frac{1}{x} \log_a e$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Primer:

Naći izvod sledećih funkcija po definiciji:

a) $f(x) = C, C = \text{const},$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C - C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0, .$$

b) $f(x) = \sin x,$

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x. \end{aligned}$$

c) $f(x) = a^x.$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a.$$

Primer:

Naći prvi izvod sledećih funkcija:

a) $y = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}, \quad y' = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}};$

b) $y = 3x^3 + 2x - 3, \quad y' = 3(x^3)' + 2(x)' - (3)' = 9x^2 + 2;$

c) $y = e^x \ln x, \quad y' = (e^x)' \ln x + e^x (\ln x)' = e^x \ln x + \frac{e^x}{x};$

d)

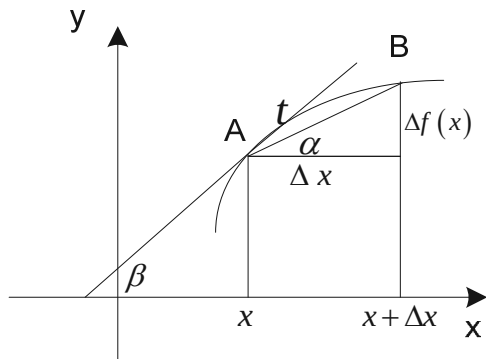
$$y = \frac{x^2}{x^2 - 1},$$

$$y' = \frac{(x^2)'(x^2 - 1) - x^2(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x \cdot (x^2 - 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2};$$

e) $y = \frac{\ln x}{\ln x - 1}; \quad y' = \frac{\frac{1}{x}(\ln x - 1) - \frac{1}{x} \ln x}{(\ln x - 1)^2} = -\frac{1}{x(\ln x - 1)^2}$

5.1.3. GEOMETRIJSKO TUMAČENJE IZVODA

Neka je funkcija $f(x)$ neprekidna u tački x i definisana u nekoj njenoj okolini.



Koeficijent pravca sečice koja je povučena kroz tačke A i B je $k_s = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$,

gde je α ugao koji sečica zaklapa sa x -osom.

Sa druge strane kada pustimo da $\Delta x \rightarrow 0$, odnosno kada se tačka B po krivoj približava tački A , sečica AB postepeno postaje tangenta krive u tački A .

Koeficijent pravca tangente koja je povučena kroz tačku A iznosi $k_t = \operatorname{tg} \beta$.

Kako $\operatorname{tg} \alpha \rightarrow \operatorname{tg} \beta$, kada $\Delta x \rightarrow 0$ dobijamo $k_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x)$, a to je izvod

funkcije $f(x)$ u tački x .

- **Koeficijent pravca tangente** grafika funkcije u tački A , jednak je vrednosti prvog izvoda u toj tački.
- **Jednačina tangente** grafika funkcije u tački A glasi

$$y - y_A = f'(x_A)(x - x_A).$$

- **Jednačina normale** grafika funkcije u tački A glasi

$$y - y_A = -\frac{1}{f'(x_A)}(x - x_A).$$

Primer:

Naći jednačinu tangente grafika funkcije $y = x^2 + 1$ u njenoj tački $A(1, 2)$.

Kako je $y' = 2x$ dobijamo $k_t = y'(A) = 2 \cdot 1 = 2$.

Tangenta je prava koja prolazi kroz tačku A , a koeficijent pravca je $k_t = 2$. Njena jednačina je $y - 2 = 2(x - 1)$, odnosno $y = 2x$.

5.1.4. IZVOD INVERZNE FUNKCIJE

Neka je funkcija $f(x)$ monotona i neprekidna u okolini tačke x , a diferencijabilna u tački x , tj. postoji $f'(x) \neq 0$.

Neka je $x = f^{-1}(y)$ njena inverzna funkcija.

▪ **Izvod inverzne funkcije** je:

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}.$$

Primer:

$$y = e^x$$

Kako je $x = \ln y$ inverzna funkcija funkcije $y = e^x$ dobijamo:

$$(e^x)' = \frac{1}{(\ln y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x.$$

5.1.5. IZVOD SLOŽENE FUNKCIJE

▪ Ako je data složena funkcija $F(x) = f(g(x))$ gde je funkcija $g(x)$ diferencijabilna u tački x , a funkcija $f(u)$ diferencijabilna u tački $u = g(x)$, onda je:

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Primer:

Naći izvod sledećih složenih funkcija:

a) $y = (3 + 2x^2)^{33}$,

$$y' = 33(3 + 2x^2)^{32} (3 + 2x^2)' = 33(3 + 2x^2)^{32} \cdot 4x = 132x(3 + 2x^2)^{32}$$

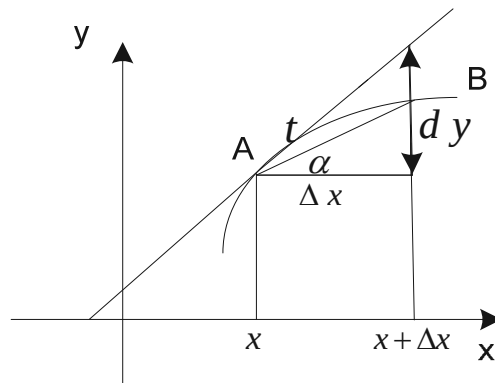
b) $y = e^{x^2}$, $y' = e^{x^2} (x^2)' = 2xe^{x^2}$;

c) $y = \ln(\operatorname{tg} x)$, $y' = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}$.

5.2. DIFERENCIJAL FUNKCIJE

- Ako je funkcija $f(x)$ diferencijabilna u tački x , onda se izraz $f'(x)\Delta x$ naziva **diferencijalom funkcije** u tački x i obeležava dy :

$$dy = f'(x)\Delta x.$$



- Diferencijal funkcije $y = x$ je $dy = 1 \cdot \Delta x$, tj. $dx = \Delta x$.
- Izvod funkcije se može izraziti preko diferencijala kao $f'(x) = \frac{dy}{dx}$.
- Diferencijal funkcije proporcionalan je priraštaju funkcije:

$$\Delta y \approx dy \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$$

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Kako je diferencijal funkcije linearna funkcija priraštaja Δx , mnogo je jednostavnije odrediti diferencijal date funkcije nego njen priraštaj Δy . Ta činjenica se koristi u približnom računanju.

- Za diferencijal funkcije važe slična pravila kao za izvode funkcija:

$$d(Cf) = Cd(f), C = \text{const.};$$

$$d(f \pm g) = d(f) \pm d(g);$$

$$d(f \cdot g) = d(f) \cdot g + f \cdot d(g);$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{d(f) \cdot g - f \cdot d(g)}{g^2}.$$

Primer:

Naći diferencijal funkcije $y = 2x^3 + 3x$.

$$dy = y'dx = (6x^2 + 3)dx.$$

5.2.1. IZVODI I DIFERENCIJALI VIŠEG REDA

- Neka je $f(x)$ diferencijabilna funkcija, tj. postoji njen izvod $f'(x)$. Ako postoji izvod funkcije $f'(x)$, on se definiše kao **drugi izvod** funkcije $f(x)$ i obeležava se sa $f''(x)$. Na sličan način se definišu $f'''(x)$, $f^{(4)}(x)$,... izvod.
- Diferencijal od diferencijala dy , zove se **diferencijal drugog reda** i označava se sa d^2y . Dakle, $d^2y = d(d(y)) = y''dx^2$.

- **Izvodi višeg reda** funkcije definišu se kao:

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(n+1)} = (f^{(n)})', \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- **Diferencijali višeg reda** funkcije $f(x)$ definišu se kao:

$$d^0y = y, \quad d^{n+1}y = d(d^n y), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- Za funkciju kažemo da je n **puta diferencijabilna** u tački x , ako postoji konačan k -ti izvod $f^{(k)}(x)$, za svako $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Primer:

Odrediti drugi izvod funkcija:

a) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$;

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad f''(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)} = \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

b) $f(x) = e^{-x^2}$;

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}, \quad f''(x) = -2e^{-x^2} + (-2x)^2 e^{-x^2} = e^{-x^2}(4x^2 - 2).$$

Primer:

Odrediti treći izvod funkcija:

a) $f(x) = \cos^2 x$;

$$f'(x) = 2 \cos x (-\sin x) = -\sin 2x, \quad f''(x) = -2 \cos 2x, \quad f'''(x) = 4 \sin 2x;$$

b) $f(x) = x^2 \ln x$;

$$f'(x) = 2x \ln x + x, \quad f''(x) = 2 \ln x + 3, \quad f'''(x) = \frac{2}{x}.$$

ZADACI

Koristeći tablicu izvoda naći prvi izvod sledećih funkcija:

1. a) $y = \sqrt[3]{x^2}$;

b) $y = 4x^3 + 2x^2 - 3 + \sqrt{x}$;

c) $y = \sqrt[3]{x} + \frac{3}{x^3} - \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{\sqrt{x}} - 4$;

d) $y = 6x^{\frac{2}{3}}\sqrt{x} + 5x^2\sqrt[5]{x}$.

Rešenje:

a) $y' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$;

b)

$$y' = (4x^3)' + (2x^2)' - (3)' + (\sqrt{x})' = 4 \cdot 3x^{3-1} + 2 \cdot 2x^{2-1} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = 12x^2 + 4x + \frac{1}{2\sqrt{x}} ;$$

c) $y = \sqrt[3]{x} + \frac{3}{x^3} - \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{\sqrt{x}} - 4 = x^{\frac{1}{3}} + 3x^{-\frac{1}{3}} - \frac{x^{-5}}{5} - x^{-\frac{1}{2}} - 4$,

$$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - x^{-\frac{4}{3}} + x^{-6} + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} + \frac{1}{x^6} + \frac{1}{2\sqrt{x^3}} ;$$

d) $y = 6x^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{x} + 5x^2 \cdot \sqrt[5]{x} = 6x^{\frac{7}{6}} + 5x^{\frac{11}{5}}$,

$$y' = 6 \cdot \frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}-1} + 5 \cdot \frac{11}{5}x^{\frac{11}{5}-1} = 7\sqrt[6]{x} + 11x \cdot \sqrt[5]{x} .$$

2. a) $y = (x^2 - 2x) \cdot (x^4 + 7)$;

b) $y = (x + 2)(\sqrt{x} + 2)$;

c) $y = x^2 \cos x$;

d) $y = x - \sin x \cos x$.

Rešenje:

$$\text{a) } y' = (2x - 2) \cdot (x^4 + 7) + (x^2 - 2x) \cdot 4x^3 = 6x^5 - 10x^4 + 14x - 14$$

$$\text{b) } y' = \sqrt{x} + 2 + (x + 2) \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + 2 + \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{\sqrt{x}};$$

$$\text{c) } y' = 2x \cos x - x^2 \sin x;$$

$$\text{d) } y' = 1 - (\cos^2 x - \sin^2 x) = 2 \sin^2 x.$$

$$3. \quad \text{a) } y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}; \quad \text{b) } y = \frac{x^3}{x - 1}; \quad \text{c) } y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}; \quad \text{d) } y = \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}.$$

Rešenje:

$$\text{a) } y' = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2};$$

$$\text{b) } y' = \frac{3x^2(x - 1) - x^3}{(x - 1)^2} = \frac{2x^3 - 3x^2}{(x - 1)^2};$$

$$\text{c) } y' = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x(e^x - 1)}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2};$$

$$\text{d) } y' = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} \cdot (1 - \operatorname{tg} x) - \operatorname{tg} x \cdot \left(-\frac{1}{\cos^2 x}\right)}{(1 - \operatorname{tg} x)^2} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x}\right)^2} = \frac{1}{(\cos x - \sin x)^2}.$$

$$4. \quad \text{a) } y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$$

$$\text{b) } y = \frac{1 + \ln x}{x};$$

$$\text{c) } y = \frac{\sin x}{1 - \cos x};$$

$$\text{d) } y = \frac{x}{1 + x^2} - \arctg x.$$

Rezultat:

$$\text{a) } y' = \frac{2x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2}; \quad \text{b) } y' = -\frac{\ln x}{x^2}; \quad \text{c) } y' = \frac{1}{\cos x - 1}; \quad \text{d) } y' = -\frac{2x^2}{(1 + x^2)^2}.$$

Naći izvod složenih funkcija:

$$5. \quad \text{a) } y = (1 - 2x)^{13}; \quad \text{b) } y = 3\sin 4x; \quad \text{c) } y = \sin^4 x.$$

Rešenje:

$$\text{a) } y' = 13(1 - 2x)^{12} \cdot (1 - 2x)' = -26(1 - 2x)^{12};$$

$$\text{b) } y' = 3\cos 4x \cdot (4x)' = 12\cos 4x;$$

$$\text{c) } y' = 4\sin^3 x \cdot (\sin x)' = 4\sin^3 x \cos x.$$

$$6. \quad \text{a) } y = e^{x^2 - 2x + 2}; \quad \text{b) } y = xe^{x^2 - 2x}.$$

Rešenje:

$$\text{a) } y' = e^{x^2 - 2x + 2} \cdot (x^2 - 2x + 2)' = (2x - 2)e^{x^2 - 2x + 2}.$$

$$\text{b) } y' = e^{x^2 - 2x} + xe^{x^2 - 2x} (2x - 2) = e^{x^2 - 2x} (1 + 2x^2 - 2x).$$

$$7. \quad \text{a) } y = \ln \frac{1+x}{1-x}; \quad \text{b) } y = \ln(\sqrt{x} - \sqrt{x-1}); \quad \text{c) } y = \ln \frac{x}{1-x^2}.$$

Rešenje:

$$\text{a) } y' = \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \left(\frac{1+x}{1-x} \right)' = \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{2}{1-x^2};$$

$$\text{b) } y' = \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \right) = -\frac{1}{2\sqrt{x(x-1)}};$$

$$\text{c) } y' = \frac{1-x^2}{x} \cdot \frac{(1-x^2)+2x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{x(1-x^2)}.$$

$$8. \quad \text{a) } y = \ln \frac{\sin x}{1-\cos x}; \quad \text{b) } y = \ln \frac{1+\sin x}{1-\sin x}; \quad \text{c) } y = \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}.$$

Rešenje:

$$\text{a) } y' = \frac{1}{\frac{\sin x}{1-\cos x}} \cdot \frac{(-1)}{1-\cos x} = -\frac{1}{\sin x};$$

$$\text{b) } y' = \frac{1-\sin x}{1+\sin x} \cdot \frac{\cos x(1-\sin x) + (1+\sin x)\cos x}{(1-\sin x)^2} = \frac{2\cos x}{(1-\sin x)^2} = \frac{2}{\cos x};$$

$$\begin{aligned} \text{c) } y' &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} \cdot \frac{-\cos x \cdot (1+\sin x) - \cos x \cdot (1-\sin x)}{(1+\sin x)^2} \\ &= -\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} \cdot \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2} = -\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} \cdot \frac{\cos x^2}{(1+\sin x)^4} = -\frac{1}{1+\sin x}. \end{aligned}$$

$$9. \quad \text{a) } y = \arcsin \frac{x}{a}; \quad \text{b) } y = \arcsin \frac{1}{x}.$$

Rešenje:

$$\text{a) } y' = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}};$$

$$\text{b) } y' = \arcsin \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

$$10. \quad \text{a) } y = \ln(e^{2x} + \sqrt{e^{4x} + 1}); \quad \text{b) } y = \ln(x + a + \sqrt{x^2 + 2ax}).$$

Rešenje:

$$\begin{aligned} \text{a) } y' &= \frac{1}{e^{2x} + \sqrt{e^{4x} + 1}} \left(2e^{2x} + \frac{4e^{2x}}{2\sqrt{e^{4x} + 1}} \right) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + \sqrt{e^{4x} + 1}} \left(1 + \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{4x} + 1}} \right) \\ &= \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + \sqrt{e^{4x} + 1}} \left(\frac{\sqrt{e^{4x} + 1} + e^{2x}}{\sqrt{e^{4x} + 1}} \right) = \frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x} + 1}}; \end{aligned}$$

$$\text{b) } y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2ax}}$$

$$11. \quad y = \ln \sqrt{\frac{\sin 2x}{1 - \sin 2x}};$$

$$\text{Rešenje: } y' = \frac{\operatorname{ctg} 2x}{1 - \sin 2x}.$$

$$12. \quad y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{x}{2};$$

$$\text{Rešenje: } y' = \frac{1}{2 \cos^4 \frac{x}{2}}.$$

$$13. \quad y = e^{-x} (\sin x + \cos x);$$

$$\text{Rešenje: } y' = -2e^{-x} \sin x.$$

$$14. \quad y = \arcsin \frac{x^2}{a};$$

$$\text{Rešenje: } y' = \frac{2x}{\sqrt{a^2 - x^4}}.$$

$$15. \quad y = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x;$$

$$\text{Rešenje: } y' = \cos^3 x$$

$$16. \quad y = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}};$$

$$\text{Rešenje: } y' = \frac{1}{1-x^2}.$$

$$17. \quad y = x \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \ln(x^2 + 4);$$

$$\text{Rešenje: } y' = \operatorname{arctg} \frac{x}{2}.$$

18. Data je parabola $y = \frac{1}{4}x^2$ i tačka $A(4, y)$ na njoj. Napisati jednačinu tangente i normale parabole u datoj tački.

Rešenje:

Kako tačka $A(4, y)$ pripada paraboli, zamenom koordinate $x = 4$ jednačinu parabole dobijamo koordinatu $y = 4$.

Izvod date funkcije je $y' = \frac{1}{2}x$. Znajući da je koeficijent pravca tangente jednak vrednosti prvog izvoda funkcije u datoj tački dobijamo $k_t = y'(4) = 2$, a

$$k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{2}.$$

Jednačine tangente i normale su:

$$t: y - 4 = 2(x - 4) \Leftrightarrow y = 2x - 4, \quad n: y - 4 = -\frac{1}{2}(x - 4) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 6.$$

19. U tački $M(1, y)$ krive $y = x^3 + x + x^{-1}$ napisati jednačinu njene tangente i normale.

Rešenje:

Za $x = 1$ je $y = 3$, pa su koordinate tačke $M(1, 3)$.

Izvod date funkcije je $y' = 3x^2 + 1 - \frac{1}{x^2}$, pa dobijamo $k_t = y'(1) = 3$, a

$$k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{3}.$$

Jednačine tangente i normale su:

$$t: y - 3 = 3(x - 1) \Leftrightarrow y = 3x, \quad n: y - 3 = -\frac{1}{3}(x - 1) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}.$$

20. Odrediti parametre a i b tako da parabola $y = x^2 + ax + b$ dodiruje pravu $y = x$ u tački $A(1, 1)$.

Rešenje:

Kako tačka $A(1,1)$ pripada grafiku parabole zamenom koordinata tačke u njenu jednačinu dobijamo jednakost $a + b = 0$.

Data prava $y = x$ je tangenta parabole sa koeficijentom pravca $k = 1$.

Kako je $y' = 2x + a$, dobijamo $k = y'(1) = 1$, tj. $1 = 2 + a \Leftrightarrow a = -1$ i $b = 1$.

Jednačina parabole glasi $y = x^2 - x + 1$.

21. U kojoj tački parabole $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$ njena tangenta ima koeficijent pravca 1?

Rešenje:

Kako je $y' = x - 3$, a koeficijent pravca tangente je 1, dobijamo $1 = x - 3$, tj. $x = 4$.

Kako je tačka sa apscisom 4, dodirna tačka parabole i tangente, zamenom ove vrednosti u jednačinu parabolu dobijamo ordinatu dodirne tačke $y = 0$. Dakle, tražena tačka ima koordinate $(4, 0)$.

22. U kojoj tački parabole $y = -x^2 + x + 2$ je njena tangenta paralelna x osi?

Rešenje:

Prvi izvod date funkcije je $y' = -2x + 1$. Kako je tangenta paralelna x osi njen

koeficijent pravca je 0. Iz uslova da je $-2x + 1 = 0$, dobijamo $x = \frac{1}{2}$, odnosno tačka

ima koordinate $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$.

23. Odrediti tačke u kojima su tangente krivih $y = x^3 - x - 1$ i $y = 3x^2 - 4x + 1$ paralelne.

Rešenje:

$(1, -1)$ i $(1, 0)$.

24. Pod kojim uglom parabola $y = x^2 - x$ seče x -osu?

Rešenje: $\frac{\pi}{4}$ i $\frac{3\pi}{4}$.

25. U kojoj tački je tangenta krive $y = x^2 - 7x + 3$ paralelna pravoj $y = -5x + 3$?

Rešenje: $(1, -3)$

26. Primenom diferencijala izračunati približnu vrednost izraza $\sqrt[3]{26,19}$.

Rešenje:

Za diferencijabilnu funkciju $f(x)$ važi formula

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Ako uzmemo da je $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x = 27$, $\Delta x = -0,81$, i kako je $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$,

dobijamo

$$\sqrt[3]{x + \Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} \cdot (\Delta x),$$

$$\sqrt[3]{26,19} = \sqrt[3]{27 + (-0,81)} \approx \sqrt[3]{27} + \frac{1}{3} \cdot 27^{-\frac{2}{3}} \cdot (-0,81) \approx 3 - \frac{1}{27} \cdot 0,81 \approx 2,97.$$

27. Primenom diferencijala izračunati približnu vrednost funkcije $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 7x}$ u tački $x = 1,02$.

Rešenje:

Izvod date funkcije je $f'(x) = \frac{1}{3}(x^3 + 7x)^{-\frac{2}{3}}(3x^2 + 7)$. Za $x = 1$ i $\Delta x = 0,02$

dobijamo

$$f(1,02) = f(1+0,02) \approx \sqrt[3]{1^3 + 7 \cdot 1} + \frac{1}{3}(1^3 + 7 \cdot 1)^{-\frac{2}{3}} \cdot (3 \cdot 1^2 + 7) \cdot 0,02$$

$$= \sqrt[3]{8} + \frac{1}{3}(8)^{-\frac{2}{3}} \cdot (10) \cdot 0,02 \approx 2,0167$$

28. Primenom diferencijala izračunati približnu vrednost izraza $\cos 59^\circ$.

Rešenje:

Ako uzmemo da je $f(x) = \cos x$, $x = 59^\circ$, $\Delta x = -1^\circ$ i $f'(x) = -\sin x$, dobijamo

$$\cos 59^\circ \approx \cos 60^\circ - \frac{\pi}{180} \cdot (-\sin 60^\circ) \approx \frac{1}{2} + \frac{\pi}{180} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,515.$$

29. Naći približnu vrednost:

a) $\sqrt[4]{17}$; b) $\sqrt[3]{1,02}$; c) $\sin 29^\circ$; d) $\operatorname{arctg} 1,05$.

Rešenje:

a) Ako je $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $x = 16$, $\Delta x = 1$, i $f'(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$, dobijamo

$$\sqrt[4]{17} = \sqrt[4]{16+1} \approx 2 + \frac{1}{32} \cdot 1 \approx 2,031.$$

b) Ako je $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x = 1$, $\Delta x = 0,02$ i $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, dobijamo

$$\sqrt[3]{1,02} = \sqrt[3]{1+0,02} \approx 1 + \frac{1}{3} \cdot 0,02 \approx 1,0066.$$

c) $\sin 29^\circ = \sin(30^\circ - 1^\circ) \approx \sin 30^\circ - \cos 30^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0,484.$

d) $\operatorname{arctg} 1,05 = \operatorname{arctg}(1+0,05) \approx \operatorname{arctg} 1 + \frac{0,05}{1+1^2} = \frac{\pi}{4} + 0,025 \approx 0,81.$

5.3. TEJLOROVA I MAKLORENOVA FORMULA

Kod trigonometrijskih, eksponencijalnih ili logaritamskih funkcija, kada je potrebno izračunati vrednost funkcije za neku konkretnu vrednost nezavisno promenljive, npr. $x = a$, srećemo se često sa složenim računima.

Kako su polinomi funkcije koje se najjednostavnije izračunavaju, vrednost funkcije u tački može se približno izračunati aproksimacijom date funkcije polinomom.

Ako funkciju $f(x)$ aproksimiramo polinomom $P(x)$ činimo neku grešku $R(x)$, koja iznosi $R(x) = f(x) - P(x)$. Cilj aproksimacije je da greška bude minimalna.

Aproksimacija je bolja ukoliko je tačka x bliža tački a .

Postoje različiti postupci aproksimacije funkcije polinomom, a jedan od njih je Teljorov polinom.

- Ako je funkcija $f(x)$ u nekoj okolini tačke a , $(n+1)$ -puta diferencijabilna tada je **Tejlorova formula**:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

gde je polinom

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n,$$

a greška ili ostatak je:

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c), \quad c \in (x, a) \text{ ili } c \in (a, x).$$

Ako se uzme da je $c = a + \theta(x-a)$, gde je $0 < \theta < 1$, greška ima oblik

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)).$$

Ovo je **Lagranžov oblik greške**.

Polinom $P_n(x)$ se naziva **Tejlorov polinom** u tački a .

- Za slučaj kada je tačka $a = 0$ dobija se **Maklorenova formula**:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}.$$

Primer:

Razviti u Tejlorovu formulu funkciju $f(x) = \frac{1}{x+1}$ po stepenima $x+2$, odnosno u

okolini tačke $a = -2$, polinomom drugog stepena.

$$f(-2) = -1,$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(-2) = -1,$$

$$f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \Rightarrow f''(-2) = -2,$$

$$f'''(x) = \frac{-6}{(x+1)^4} \Rightarrow f'''(\theta x) = \frac{-6}{(\theta x+1)^4}, 0 < \theta < 1.$$

Tejlorova formula date funkcije glasi:

$$\frac{1}{x+1} = -1 - (x+2) - (x+2)^2 - \frac{(x+2)^3}{(\theta(x+2)-2)^4}, 0 < \theta < 1.$$

Primer:

Razviti funkciju $f(x) = \sqrt{1+x}$ u Maklorenovu formulu za $n = 2$, tj. zaključno sa kvadratnim članom.

$$f(0) = 1,$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2},$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f''(0) = -\frac{1}{4},$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow f'''(\theta x) = \frac{3}{8}(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}, 0 < \theta < 1,$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}.$$

5.3.1. MAKLORENOVI RAZVOJI NEKIH VAŽNIJIH FUNKCIJA:

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1};$$

$$\sin x = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \frac{(-1)^n \cos \theta x}{(2n+1)!} x^{2n+1};$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{(-1)^{n+1} \cos \theta x}{(2n+2)!} x^{2n+2};$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k + \binom{\alpha}{n+1} (1+\theta x)^{\alpha-n-1} x^{n+1};$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + (-1)^{k+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}};$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}.$$

Primer:

Dokazati Maklorenovu formulu za funkcije

a) $f(x) = e^x$; b) $f(x) = \sin x$;

a)

$$f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x,$$

$$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 1,$$

$$f^{(n+1)}(x) = e^x, R_{n+1}(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

b)

$$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = -\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Rightarrow f''(0) = 0,$$

$$f'''(x) = -\cos x = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2} + x\right) \Rightarrow f'''(0) = -1,$$

⋮

$$f^{(n)}(x) = \cos\left((n-1) \cdot \frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2} + x\right),$$

$$f^{(n+1)}(x) = \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{2} + x\right).$$

Korisno je uočiti da je $f^{(2n)}(0) = 0$, $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$.

$$R_{2n+1}(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos(\theta x).$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} + \frac{(-1)^n \cos \theta x}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

ZADACI

1. Napisati Tejlorov polinom trećeg stepena funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ u tački $a = 1$.

Rešenje:

$$f(1) = 1, \quad f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2},$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2^2} x^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f''(1) = -\frac{1}{4}, \quad f'''(x) = \frac{1 \cdot 3}{2^3} x^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow f'''(1) = \frac{3}{8},$$

pa je: $P_3(x) = f(1) + (x-1)f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2!}f''(1) + \frac{(x-1)^3}{3!}f'''(1)$

$$\sqrt{x} \approx 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3.$$

2. Napisati Maklorenov polinom trećeg stepena za funkciju $f(x) = \frac{1}{\cos x}$.

Rešenje:

$$f(x) = \frac{1}{\cos x} = \cos^{-1} x, \quad f(0) = 1;$$

$$f'(x) = \cos^{-2} x \sin x, \quad f'(0) = 0;$$

$$f''(x) = 2 \cos^{-3} x \sin^2 x + \cos^{-1} x, \quad f''(0) = 1;$$

$$f'''(x) = 6 \cos^{-4} x \sin^3 x + 5 \cos^{-2} x \sin x, \quad f'''(0) = 0.$$

$$P_3(x) = 1 + \frac{x^2}{2}.$$

3. Dokazati formulu $e^{\sin x} \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4$.

Rešenje:

Kako je $f(x) = e^{\sin x}$, tada je:

$$f(0) = 1,$$

$$f'(x) = e^{\sin x} \cos x \Rightarrow f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = e^{\sin x} (\cos^2 x - \sin x) \Rightarrow f''(0) = 1,$$

$$f'''(x) = e^{\sin x} (\cos^3 x - 3 \sin x \cos x - \cos x) \Rightarrow f'''(0) = 0,$$

$$f^{IV}(x) = e^{\sin x} (\cos^4 x - 4 \cos^2 x + 3 \sin^2 x + \sin x - 6 \sin x \cos^2 x) \Rightarrow f^{IV}(0) = -3,$$

pa je $f(x) \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4$.

4. Date funkcije razviti u Maklorenov polinom četvrtog stepena:

a) $f(x) = \ln(1 + \sin x)$; b) $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$.

Rezultat:

a) $P_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12}$; b) $P_4(x) = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4$.

5. Koristeći Maklorenov polinom odgovarajućeg stepena funkcije $\sin x$ izračunati

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}.$$

Rešenje:

Kako je $\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ dobijamo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \right)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120}}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

6. Koristeći Maklorenov polinom odgovarajućeg stepena funkcije e^{x^2} izračunati

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x^4}.$$

Rešenje:

Kako je $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$ dobijamo da je $e^{x^2} \approx 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!}$, pa je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - 1 - x^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24}}{x^4} = \frac{1}{2}.$$

7. Primenom Maklorenovog razvoja datih funkcija izračunati granične vrednosti

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x + e^{2x} - 1 - 2x - 2x^2}{x^3}, \text{ b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x + \cos x - 2}{x^3}.$$

Rezultat: a) $\frac{3}{2}$; b) $\frac{1}{3}$.

Cilj procene greške je da se nađe gornja granica greške gde x ima datu vrednost, a $\theta \in (0,1)$. Kod procene greške obično se koriste jednostavne nejednakosti, traženjem "najgoreg slučaja" u kome oba faktora dostižu maksimalnu apsolutnu vrednost. Zbog toga, stvarna greška je znatno manja od procenjene.

8. Kolika je greška aproksimacije $\sin x \approx x$, na intervalu $\left[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right]$?

Rešenje:

$$\sin x = x + R_2, \text{ gde je } R_2 = \frac{x^3}{3!} \cos \theta x.$$

$$|R_2| = \left| \frac{x^3}{3!} \cos \theta x \right| < \frac{|x|^3}{6} |\cos \theta x| < \frac{1}{10^3 \cdot 6} < \frac{1}{10^3 \cdot 2}, \text{ greška je na trećoj decimali.}$$

9. Funkciju $f(x) = \ln(x+1)$ razviti u Maklorenov polinom trećeg stepena, uz procenu greške za računanje vrednosti ove funkcije na intervalu $[0,1]$.

Rešenje:

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3}, \quad f^{IV}(x) = -\frac{6}{(x+1)^4},$$

$$f(0) = \ln 1 = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = -1, \quad f'''(0) = 2.$$

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + R_3.$$

$$R_3(x) = \frac{x^4}{4!} \frac{-6}{(\theta x + 1)^4} = -\frac{x^4}{4(\theta x + 1)^4}.$$

Za $\theta \in (0,1)$ i $x \in [0,1]$ imamo procenu greške

$$|R_3(x)| = \left| -\frac{x^4}{4(\theta x + 1)^4} \right| = \frac{x^4}{4(\theta x + 1)^4} \leq \frac{1}{4(0 \cdot 1 + 1)^4} = 0,25.$$

10. Funkciju $f(x) = \ln(x+1)$ razviti u Maklorenov polinom četvrtog stepena, približno izračunati $\ln 1,5$

Rešenje:

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \cdot \frac{1}{(1+\theta x)^5}.$$

$$\ln 1,5 = \ln(1+0,5) \approx \frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4} \approx 0,4010.$$

11. Aproximirati funkciju $f(x) = e^x$ Maklorenovim polinomom i izračunati približnu vrednost broja e za $n=10$.

Rešenje:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Iz ove formule za $x=1$, dobijamo $e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{10!} = 2,71828176$,

a apsolutna vrednost greške je $|R_n| = \left| \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{3}{11!} < \frac{3}{3 \cdot 10^7} = 10^{-7}$.

5.4. OSNOVNE TEOREME DIFERENCIJALNOG RAČUNA

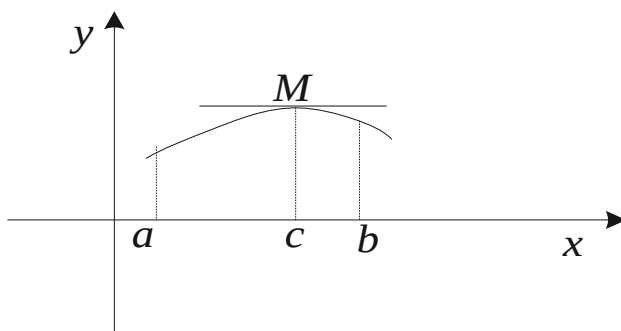
Među najvažnije teoreme diferencijalnog računa spadaju teoreme **srednje vrednosti**. One pokazuju da se iz same egzistencije izvoda funkcije može mnogo zaključiti o osobinama funkcije.

5.4.1. FERMAOVA TEOREMA

Fermaova teorema: Neka funkcija $f(x)$ dostiže svoju ekstremnu vrednost u nekoj tački $c \in (a, b)$ i neka je diferencijabilna u tački c . Tada je $f'(c) = 0$.

- **Geometrijsko tumačenje Fermaove teoreme:** Kako je $f'(c) = 0$, to znači da je $\operatorname{tg} \alpha = 0$, tj $\alpha = 0$, gde je α ugao koji tangenta u tački $M(c, f(c))$ grafika funkcije zaklapa sa x osom.

Znači da ako diferencijabilna funkcija u tački $c \in (a, b)$ dostiže svoju najveću ili najmanju vrednost, onda je tangenta na njen grafik u tački $M(c, f(c))$ paralelna sa x osom.

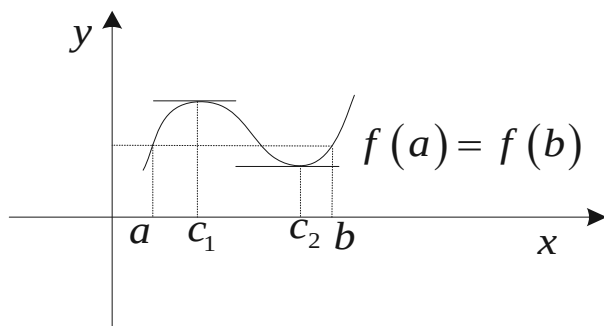


5.4.2. ROLOVA TEOREMA

Neka je funkcija $f(x)$

1. definisana i neprekidna na $[a, b]$,
2. diferencijabilna na (a, b) ,
3. $f(a) = f(b)$.

Tada postoji bar jedna tačka $c \in (a, b)$, takva da je $f'(c) = 0$.



- **Geometrijsko tumačenje Rolove teoreme:** Postoji bar jedna tačka $M(c, f(c))$, $c \in (a, b)$ u kojoj je tangenta grafika funkcije paralelna sa x osom.

Primer:

Dokazati da funkcija $f(x) = x^3 - 4x + 1$ na intervalu $[-2, 2]$ ispunjava uslove Rolove teoreme i odrediti odgovarajuću vrednost nezavisno promenljive c .

1. Data funkcija je definisana za $x \in \mathbb{R}$, pa je definisana i neprekidna i na intervalu $[-2, 2]$.
2. Kako je $f'(x) = 3x^2 - 4$, zaključujemo da je funkcija diferencijabilna na intervalu $(-2, 2)$.
3. Kako je $f(-2) = f(2) = 1$,

Znači, funkcija ispunjava uslove Rolove teoreme na $[-2, 2]$.

Dakle, postoji bar jedana tačka $c \in (-2, 2)$ takva da je $f'(c) = 0$.

Rešavanjem jednačine $f'(c) = 3c^2 - 4 = 0$ dobijamo $c_{1,2} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$. Kako obe

vrednosti pripadaju intervalu $(-2, 2)$, zaključujemo da postoje dve tačke koje pripadaju datom intervalu za koje je $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$.

5.4.3. KOŠIJEVA TEOREMA

- Neka su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ definisane i neprekidne na $[a, b]$, a diferencijabilne na (a, b) , i neka je $g'(x) \neq 0, x \in (a, b)$.

Tada postoji bar jedna tačka $c \in (a, b)$ takva da je $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

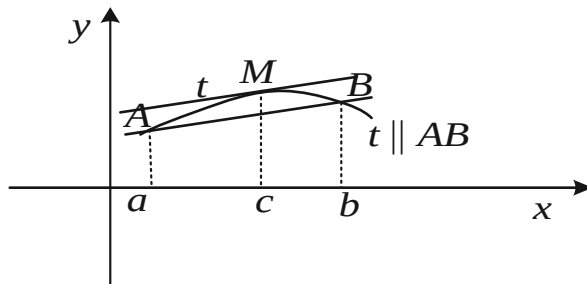
5.4.4. LAGRANŽOVA TEOREMA

- Neka je funkcija $f(x)$:
 1. definisana i neprekidna na $[a, b]$,
 2. diferencijabilna na (a, b) .

Tada postoji bar jedna tačka $c \in (a, b)$ takva da je

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a).$$

Lagranžova teorema je specijalan slučaj Košijeve teoreme za $g(x) = x$.



- **Geometrijsko tumačenje Lagranžove teoreme:** Postoji bar jedna tačka $M(c, f(c))$, $c \in (a, b)$ u kojoj je tangenta grafika funkcije paralelna sa sečicom AB , čiji je koeficijent pravca $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Primer:

Odrediti tačku $(c, f(c))$ grafika funkcije $f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 9x$ takvu da $c \in (0, 1)$, u kojoj je tangenta paralelna sa sečicom koja prolazi kroz tačke $(0, f(0))$ i $(1, f(1))$.

Funkcija $f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 9x$ je definisana i neprekidna za $x \in \mathbb{R}$ pa i na intervalu $[0, 1]$.

Kako je $f'(x) = 12x^2 - 24x + 9$, funkcija je diferencijabilna za svako $x \in \mathbb{R}$ pa i za $x \in (0, 1)$.

Na osnovu Lagranžove teoreme imamo:

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f'(c), c \in (0, 1), \text{ odnosno } 1 = 12c^2 - 24c + 9 \text{ ili } 3c^2 - 6c + 2 = 0.$$

Odavde je $c_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$. Kako $\frac{3 - \sqrt{3}}{3} \in (0, 1)$, a $\frac{3 + \sqrt{3}}{3} \notin (0, 1)$, tražena

vrednost je $c = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$. Tražena tačka je $\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{3}, f\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{3}\right) \right)$.

5.4.5. LOPITALOVA TEOREMA

- **Lopitalova teorema:** Ako su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ diferencijabilne u nekoj okolini tačke a , pri čemu je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ili $(\pm\infty)$ i $g'(a) \neq 0$, tada je:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

- Ako funkcije $f(x)$ i $g(x)$ imaju n - te izvode koji su neprekidni u tački $x = a$ i ako je $f(a) = g(a) = f'(a) = g'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = g^{(n-1)}(a) = 0$ i

$$g^{(n)}(a) \neq 0, \text{ onda je } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \dots = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}.$$

Napomena:

Lopitalova teorema se koristi za određivanje graničnih vrednosti neodređenih izraza

$\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$. U slučaju neodređenosti tipa " $0 \cdot \infty$ " i " $\infty - \infty$ ", one se moraju

transformisati oblik $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$. U slučaju neodređenosti tipa " 0^0 ", " 1^∞ " ili " ∞^0 ", izraz se prvo logaritmuje čime se svodi na jedan od pomenutih slučajeva.

Primer:

Primenom Lopitalove teoreme odrediti granične vrednosti:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1;$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 - 2 \ln x}{x^2} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-2}{x}}{2x} \stackrel{L}{=} -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0;$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{\sin x + x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{\sin x + x \cos x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - x \cos x}{2 \cos x - x \sin x} = 0. \end{aligned}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow +0} x = 0.$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 0_+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0_+} e^{\ln x^x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0_+} x \ln x} = e^0 = 1.$$

ZADACI

1. Ispitati da li funkcija $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ na intervalu $[-1, 1]$ ispunjava uslove Rolove teoreme.

Rešenje:

Data funkcija je definisana i neprekidna za $x \in \mathbb{R}$, pa prema tome i na intervalu $[-1, 1]$.

Osim je $f(-1) = f(1) = 1$.

Kako je $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, funkcija nije diferencijabilna u tački $0 \in (-1, 1)$, pa

funkcija ne ispunjava uslove Rolove teoreme na $[-1, 1]$.

2. Dokazati da jednačina $4x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0$ ima bar jedno rešenje na intervalu $[0, 1]$.

Rešenje:

Uočimo funkciju $y = 4x^3 - 3x^2 - 2x + 1$. Ona je definisana i neprekidna na $[0, 1]$.

Pored toga $f(0) = f(1) = 0$. Prema tome, na osnovu Rolove teoreme postoji tačka $c \in (0, 1)$ takva da je $f'(c) = 0$.

Kako je $y' = 12x^2 - 6x - 2$, $6c^2 - 3c - 1 = 0 \Leftrightarrow c_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{35}}{12}$.

Tačka $c_1 = \frac{3 + \sqrt{35}}{12} \in (0, 1)$ i ta vrednost je rešenje jednačine.

3. Dokazati da važi Langranžova teorema za funkciju $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, $x \in [0, 3]$ i odrediti odgovarajuće c .

Rešenje:

Data funkcija je definisana i neprekidna za $x \neq -1$, a to znači i za $x \in [0, 3]$. Kako je

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}, \text{ biće } f(x) \text{ diferencijabilna za sve } x \neq -1 \text{ pa dakle i za}$$

$$x \in (0, 3).$$

Na osnovu Langranžove teoreme postoji $c \in (0, 3)$, tako da je

$$\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = f'(c), \text{ odnosno } \frac{\frac{1}{2} - (-1)}{3} = \frac{2}{(c+1)^2}. \text{ Rešenja ove jednačine su}$$

$$c_1 = -3, c_2 = 1 \text{ pa kako } -3 \notin (0, 3), \text{ biće } c_2 = 1 \text{ tražena vrednost.}$$

4. Napisati Langranžovu formulu za funkciju $f(x) = \sqrt{x}$ na odsečku $[1, 4]$ i odrediti c . Objasniti i geometrijski.

Rešenje:

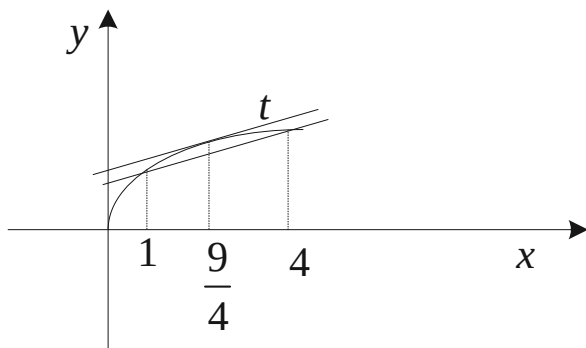
Data funkcija je definisana i neprekidna $x \in [1, 4]$. Izvod $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ je takođe definisan za $x \in (1, 4)$.

Znači $f(x)$ je diferencijabilna na $(1, 4)$, pa prema Langranžovoj teoremi važi

$$\text{jednakost } \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = f'(c), c \in (1, 4).$$

$$f(4) = 2, f(1) = 1, \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ pa je } \frac{1}{3} = \frac{1}{2\sqrt{c}} \Leftrightarrow 2\sqrt{c} = 3 \Leftrightarrow c = \frac{9}{4}.$$

S obzirom da $\frac{9}{4} \in (1, 4)$, to je tražena vrednost c .



Geometrijski gledano, postoji tangenta grafika funkcije koja je paralelna sa sečicom koja prolazi kroz tačke $(1, 1), (4, 2)$ i njena dodirna tačka ima apscisu $\frac{9}{4}$.

Primenom Lopitalove teoreme odrediti granične vrednosti:

Neodređenost tipa " $\frac{0}{0}$ " ili " $\frac{\infty}{\infty}$ ".

5. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 8x + 5}{2x^2 + 6x}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$; c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}}{x^3}$; d) $\lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2}$.

Rešenje:

$$\text{a). } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 8x + 5}{2x^2 + 6x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 8}{4x + 6} = \frac{1}{2};$$

$$\text{b). } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6};$$

$$\text{c). } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}}{x^3} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot e^{2x}}{3x^2} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot e^{2x}}{6x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8 \cdot e^{2x}}{6} = \infty;$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{-\frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}}{2x} = -\frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos x}} = -\frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned} 6. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin x}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x + e^{2x} - 1 - 2x - 2x^2}{x^3}; \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x}; \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}. \end{aligned}$$

Rešenje:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ae^{ax} - be^{bx}}{\cos x} = a - b;$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x + e^{2x} - 1 - 2x - 2x^2}{x^3} &\stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + 2e^{2x} - 2 - 4x}{3x^2} \\ &\stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 4e^{2x} - 4}{6x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + 8e^{2x}}{6} = \frac{3}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x} &\stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3\sin^2 x \cdot \cos x} = \\ &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3\sin^2 x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}}{6\sin x \cdot \cos x} = \frac{1}{6}; \end{aligned}$$

$$\text{d) } 2;$$

Neodređenost tipa “ $\infty - \infty$ ”.

$$\begin{aligned} 7. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right); \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x^2} \right); \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right); \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\operatorname{ctgx}} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right). \end{aligned}$$

Rešenje:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 + x} = \frac{1}{2};$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin x}{x^2 \cdot \sin x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \cos x}{2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x} = \infty;$$

$$\text{c) } \infty; \quad \text{d) } -1.$$

Neodređenost tipa “ $0 \cdot \infty$ ”.

$$8. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 2x; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{2x}) \operatorname{ctg} x.$$

Rešenje:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x^{-2}} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2} = 0;$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 2x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} 2x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{2}{\cos^2 2x}} = \frac{1}{2};$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{2x}) \operatorname{ctg} x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{2x}}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos x \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2e^{2x}}{\cos x} = -2.$$

Neodređenost tipa “ 0^0 ”, “ 1^∞ ” ili “ ∞^0 ”.

$$9. \quad \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0_+} x^{\sin x}.$$

Rešenje:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}} \stackrel{L}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x)}{2x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x \cos x}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}};$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln(\ln x)^{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x} \cdot L} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}}{1}} = e^0 = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} e^{\ln x^{\sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0_+} \sin x \cdot \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\ln x}{\sin^{-1} x} \cdot L} =$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{\sin^2 x}{x} \cdot L} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0_+} 2 \sin x \cos x} = e^0 = 1$$

5.5. ISPITIVANJE FUNKCIJA POMOĆU IZVODA

U predhodnom poglavlju upoznali smo se sa nekim osobinama funkcija. Takođe date su osnovne definicije monotonosti, konveksnosti i konkavnosti funkcije. Međutim, te pojmove mnogo bolje je definisati korišćenjem izvoda funkcije.

5.5.1. MONOTONOST FUNKCIJE

- Neka je funkcija $f(x)$ neprekidna na $[a, b]$, a diferencijabilna na (a, b) .

Tada, ako je za $x \in (a, b)$:

$f'(x) \geq 0$, funkcija je **rastuća**,

$f'(x) \leq 0$, funkcija je **opadajuća**,

$f'(x) > 0$, funkcija je **strogo rastuća**,

$f'(x) < 0$, funkcija je **strogo opadajuća**.

Dokaz:

Neka je za $\forall x \in (a, b)$ ispunjeno $f'(x) \geq 0$. Uzmimo proizvoljne vrednosti x_1, x_2 takve da je $a \leq x_1 < x_2 \leq b$. Na osnovu Lagranžove teoreme imamo da je

$$f(x_1) - f(x_2) = f'(x_0)(x_1 - x_2), \text{ za neko } x_1 < x_0 < x_2.$$

Znajući da je $x_1 - x_2 < 0$ i $f'(x) \geq 0$, dobijamo da je $f(x_1) - f(x_2) < 0$, tj. funkcija $f(x)$ je rastuća.

Dokaz u preostalim slučajevima je identičan.

Primer:

Ispitati monotonost sledećih funkcija:

a) $f(x) = x^3$; b) $f(x) = \frac{1}{x}$; c) $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

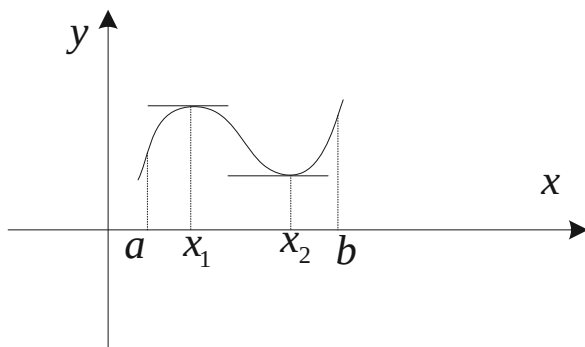
a) Izvod funkcije $f(x) = x^3$ je $f'(x) = 3x^2$. Kako je $f'(x) \geq 0$ za $x \in \mathbb{R}$, funkcija je rastuća.

b) Izvod funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ je $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Kako je $f'(x) < 0$ za $x \neq 0$, funkcija je opadajuća.

c) Izvod funkcije $f(x) = x^2 - 2x + 3$ je $f'(x) = 2x - 2$. Kako je za $x > 1$

$f'(x) \geq 0$, a za $f'(x) < 0$, zaključujemo da je funkcija je rastuća. za $x > 1$, a opadajuća za $x < 1$.

5.5.2. EKSTREMNE VREDNOSTI FUNKCIJE



- Funkcija $f(x)$ definisana na (a, b) ima **maksimum** u tački $x_1 \in (a, b)$ ako i samo ako je $f(x) < f(x_1)$ za svako x koje pripada nekoj okolini tačke x_1 , a

minimum u tački $x_2 \in (a, b)$ ako i samo ako je $f(x) > f(x_2)$ za svako x koje pripada nekoj okolini tačke x_2 .

- Maksimum i minimum funkcije $f(x)$ nazivaju se **ekstremnim vrednostima** date funkcije.

Napomena: Prethodne dve definicije odnose se na **lokalni maksimum** i **minimum**, koji su vezani za neku dovoljno malu okolinu datih tačaka. Ovako definisani maksimum i minimum ne moraju istovremeno predstavljati najveću ili najmanju vrednost date funkcije na celom intervalu $[a, b]$.

- **Potreban uslov za ekstrem:** Ako diferencijabilna funkcija $f(x)$ ima u tački $x = x_1$ ekstrem (maksimum ili minimum), tada je u toj tački $f'(x_1) = 0$.

Iz navedenog uslova sledi da, ako je funkcija $f(x)$ diferencijabilna, tada ona može imati ekstrem samo u tačkama u kojima je njen izvod jednak nuli, obratan zaključak ne važi. Naime, ako je $f'(x_1) = 0$, ne mora značiti da u toj tački funkcija ima ekstrem.

- Tačke u kojima funkcija $f(x)$ nema izvod, kao i tačke u kojima je $f'(x) = 0$, nazivaju se **kritične tačke** funkcije $f(x)$.
- **Funkcija može imati ekstrem samo u svojim kritičnim tačkama**, dok svaka kritična tačka ne mora biti tačka ekstrema funkcije.

Primer:

Odrediti ekstreme funkcije $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

Izvod funkcije je $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. Mada je $f'(x) \neq 0$, a $f'(x) > 0$ za $x > 0$ i

$f'(x) < 0$ za $x < 0$, zaključujemo da funkcija ima minimum u tački $x = 0$.

Primer:

Odrediti ekstreme funkcije $f(x) = x^3$.

Izvod funkcije je $f'(x) = 3x^2$. $f'(x) = 0$ za $x = 0$. Kako je $f'(x) \geq 0$, znači da funkcija uvek raste i ona nema ekstrem u tački $x = 0$.

- Tačke u kojima je $f'(x) = 0$ nazivaju se **stacionarnim tačkama**.
- **Dovoljan uslov za ekstrem:** Neka je funkcija $f(x)$ neprekidna u nekom intervalu koji sadrži stacionarnu tačku x_1 tog intervala i diferencijabilna u tom intervalu. Ako je:

$f'(x) > 0$ za $x < x_1$ i $f'(x) < 0$ za $x > x_1$, tada je $f(x_1) = \max f(x)$;

$f'(x) < 0$ za $x < x_1$ i $f'(x) > 0$ za $x > x_1$, tada je $f(x_1) = \min f(x)$.

Napomena:

Predhodna teorema kaže da ako izvodna funkcija $f'(x)$ menja

znak pri prolasku kroz tačku x_1 tada funkcija $f(x)$ ima ekstrem u tački x_1 .

Pri ispitivanju ekstrema funkcije pomoću prvog izvoda određujemo:

1. $f'(x)$,
2. stacionarne tačke, tj. rešavamo jednačinu $f'(x) = 0$,
3. određujemo znak izvoda, $f'(x)$, sa obe strane stacionarnih tačaka,
4. vrednost funkcije $f(x)$ za svaku od stacionarnih tačaka.

ODREĐIVANJE EKSTREMA FUNKCIJE POMOĆU DRUGOG IZVODA

- Pretpostavimo da je $f'(x_1) = 0$ i da je $f''(x)$ neprekidna funkcija u nekoj okolini tačke x_1 . Ako je:

$f''(x_1) < 0$ tada funkcija $f(x)$ ima **maksimum** u tački x_1 , $f(x_1) = \max f(x)$;

$f''(x_1) > 0$, tada funkcija $f(x)$ ima **minimum** u tački x_1 , $f(x_1) = \min f(x)$.

Primer:

Odrediti ekstreme funkcije $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.

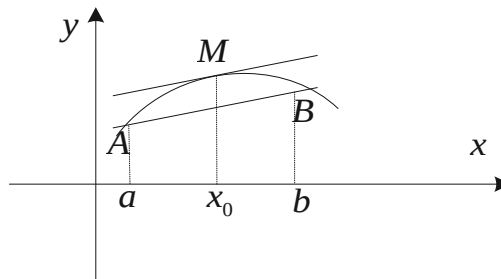
Prvi izvod funkcije je $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$. Nule izvoda su $x = 3$, $x = -1$.

Drugi izvod funkcije je $f''(x) = 6x - 6$.

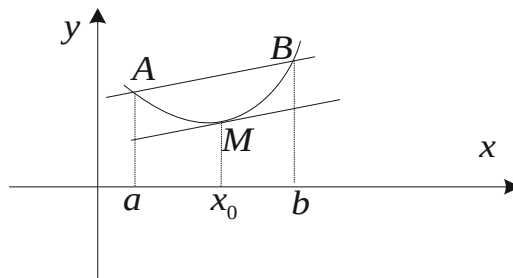
Kako je $f''(3) = 12 > 0$, a $f''(-1) = -12 < 0$, funkcija za $x = 3$ ima minimum $f_{\min} = f(3) = -22$, a za $x = -1$ ima maksimum $f_{\max} = f(-1) = 10$.

5.5.3. KONVEKSNOST I KONKAVNOST FUNKCIJE

- Funkciju $f(x)$ je **konkavna** na (a, b) ako sve tačke grafika funkcije leže ispod bilo koje njene tangente na tom intervalu.



- Funkcija $f(x)$ je **konveksna** na (a, b) ako sve tačke grafika funkcije leže iznad proizvoljne tangente na intervalu.



- Neka je funkcija $f(x)$ dva puta diferencijabilna na (a, b) .

Ako je za $x \in (a, b)$, $f''(x) \geq 0$, tada je funkcija **konveksna** na (a, b) .

Ako je $x \in (a, b)$, $f''(x) \leq 0$, tada je funkcija **konkavna** na (a, b) .

PREVOJNE TAČKE FUNKCIJE

- **Prevojna tačka** grafika funkcije $f(x)$ je tačka koja razdvaja konveksni i konkavni deo (tangenta u toj tački postoji i preseca grafik, jer je sa jedne strane prevojne tačke iznad, a sa druge strane ispod grafika).
- **Potreban uslov za postojanje prevojne tačke:** Ako je $x = x_0$ prevojna tačka funkcije $f(x)$, onda ili $f''(x_0)$ ne postoji ili je $f''(x_0) = 0$.
- **Dovoljan uslov za postojanje prevojne tačke:** Ako je funkcija $f(x)$ dva puta diferencijabilna na (a, b) , a pri prolasku kroz tačku $x_0 \in (a, b)$ drugi izvod $f''(x)$ menja znak, tada je tačka $(x_0, f(x_0))$ **prevojna tačka**.

Primer:

Odrediti prevojne tačke funkcije $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.

Prvi izvod funkcije je $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$. Drugi izvod funkcije je $f''(x) = 6x - 6$.

$f''(x) = 0$ za $x = 1$. Za $x > 1$, $f''(x) > 0$ i u toj oblasti funkcija je konveksna, a za $x < 1$, $f''(x) < 0$ i u toj oblasti funkcija je konkavna. Prevojna tačka je $(1, -6)$.

5.5.5. ISPITIVANJE TOKA FUNKCIJE

Ispitivanje toka funkcija vršiće se ispitivanjem osobina funkcije i na osnovu dobijenih rezultata se crta grafik funkcije.

Postupak rada odvija se kroz sledeće korake:

1. Određivanje domena funkcije;
2. Određivanje nula i ispitivanje znaka funkcije;
3. Ispitivanje parnosti odnosno neparnosti i periodičnosti funkcije;
4. Ispitivanje ponašanja funkcije na krajevima oblasti definisanosti i određivanje asimptota funkcije;
5. Ispitivanje monotonosti i određivanje ekstrema funkcije primenom prvog izvoda funkcije;

6. Ispitivanje konveksnosti i određivanje prevojnih tačaka funkcije primenom drugog izvoda funkcije;
7. Skiciranje grafika funkcije.

ZADACI

Ispitati i grafički prikazati sledeće funkcije:

1. **a)** $y = x^3 + 6x^2 + 9x$; **b)** $y = x^4 - 2x^2 + 3$;
 c) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$; **d)** $y = x^2(3 - x)$.

Rešenje:

a) $y = x^3 + 6x^2 + 9x$

Domen: $x \in \mathbb{R}$.

Nule funkcije: $y = 0 \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 9x = 0 \Leftrightarrow x(x+3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3$.

Presek sa y osom: Funkcija seče y - osu u koordinatnom početku.

Znak funkcije: Za $x \in (-\infty, 0)$, $y < 0$, za $x \in (0, \infty)$, $y > 0$.

Asimptote: Funkcija nema asimptota.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti: $y' = 3x^2 + 12x + 9$ za
 $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -3$.

	$(-\infty, -3)$	$(-3, -1)$	$(-1, \infty)$
$3x^2 + 12x + 9$	-	+	-
y'	-	+	-
y	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

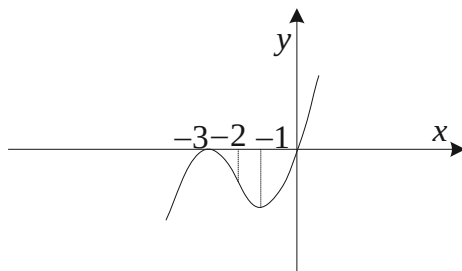
Za $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$ $y' < 0$ i $y \searrow$, a za $x \in (-3, -1)$ $y' > 0$ i $y \nearrow$.

$y_{\min}(-3) = 0$, $y_{\max}(-1) = -4$.

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke: $y'' = 6x + 12$. $y'' = 0$ za $x = -2$.

Za $x \in (-\infty, -2)$, $y'' < 0$ i $y \cap$, a za $x \in (-2, \infty)$, $y'' > 0$ i $y \cup$.

Funkcija ima prevojnu tačku $P(-2, -2)$.



b) $y = x^4 - 2x^2 + 3$

Domen: $x \in \mathbb{R}$. **Nule funkcije:** Funkcija nema realnih nula.

Presek sa y osom: Funkcija seče y - osu u tački $(0, 3)$.

Znak funkcije: $y > 0$ za $\forall x \in D_x$.

Parnost, neparnost: $y(x) = y(-x)$ funkcija je parna.

Asimptote: Funkcija nema asimptota.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti: $y' = 4x^3 - 4x$,

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm 1.$$

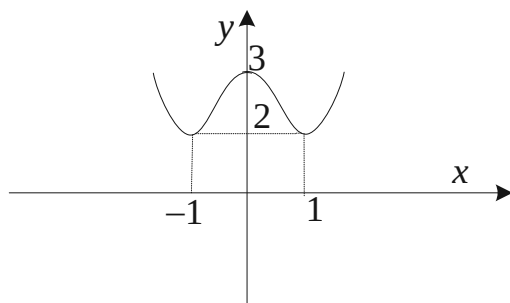
	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$x^2 - 1$	+	-	-	+
x	-	-	+	+
y'	-	+	-	+
y	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

$$y_{\max}(0) = 3, y_{\min}(\pm 1) = 2.$$

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke: $y'' = 12x^2 - 4$. $y'' = 0$ za $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.

x	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$
$12x^2 - 4$	+	-	+
y''	+	-	+
y	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Funkcija ima dve prevojne tačke $P_{1/2}\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{22}{9}\right)$.



c) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

Domen: $x \in \mathbb{R}$.

Nule funkcije: $y = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = (x-1)^2(x-4) \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 4$.

Presek sa y osom: Funkcija seče y - osu u tački $(0, -4)$.

Znak funkcije: Za $x \in (-\infty, 4)$, $y < 0$, a za $x \in (4, \infty)$, $y > 0$.

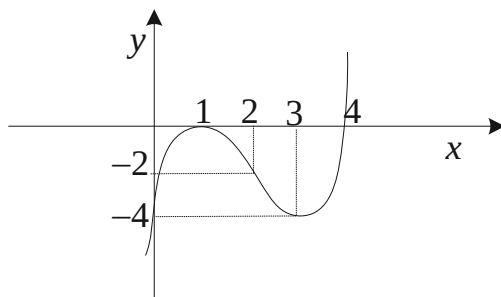
Asimptote: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$ funkcija nema asimptota.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti: $y' = 3x^2 - 12x + 9 = 0$ za $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$. Za $x \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$, $y' > 0$ i $y \nearrow$, a za $x \in (1, 3)$, $y' < 0$ i $y \searrow$. $y_{\max}(1) = 0$, $y_{\min}(3) = -4$.

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke: $y'' = 6x - 12$. $y'' = 0$ za $x = 2$.

Za $x \in (-\infty, 2)$, $y'' < 0$ i $y \cap$, a za $x \in (2, \infty)$, $y'' > 0$ i $y \cup$.

Funkcija ima prevojnu tačku $P(2, -2)$.



d) $y = x^2(3 - x)$

Domen: $x \in \mathbb{R}$.

Nule funkcije: $y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$.

Presek sa y osom: Funkcija seče y - osu u tački $(0, 0)$.

Znak funkcije: Za $x \in (-\infty, 3)$ $y > 0$, a za $x \in (3, \infty)$ $y < 0$.

Asimptote: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \mp\infty$ funkcija nema asimptota.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti: $y' = 6x - 3x^2$ za

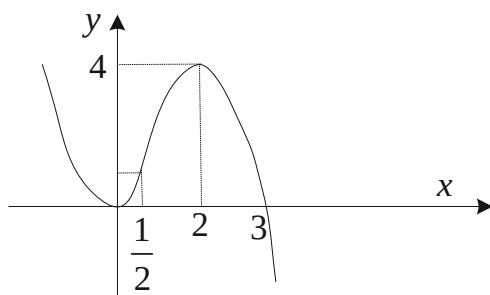
$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$. Za $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, $y' < 0$ i $y \searrow$, a za

$x \in (0, 2)$, $y' > 0$ i $y \nearrow$. $y_{\max}(2) = 4$, $y_{\min}(0) = 0$.

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke: $y'' = 6 - 12x$. $y'' = 0$ za $x = \frac{1}{2}$.

Za $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, $y'' > 0$ i $y \cup$, a za $x \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$, $y'' < 0$ i $y \cap$.

Funkcija ima prevojnu tačku $P\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right)$.



2. a) $y = \frac{2x}{1+x^2}$; b) $y = \frac{3}{x^2-1}$; c) $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$;
 d) $y = \frac{x^2-4}{x^2-1}$; e) $y = \frac{x^2-2x-3}{2x-x^2}$; f) $y = \frac{4x}{4-x^2}$.

Rešenje:

a) $y = \frac{2x}{1+x^2}$

Domen: $1+x^2 > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Parnost, neparnost: $y(x) = -y(-x)$ funkcija je neparna.

Nule funkcije: $y = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Presek sa y osom: Funkcija seče y - osu u koordinatnom početku.

Znak funkcije: Za $x \in (-\infty, 0)$, $y < 0$, a za $x \in (0, \infty)$, $y > 0$.

Asimptote: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$ pa je $y = 0$ (x -osa) horizontalna asimptota funkcije.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti: $y' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.

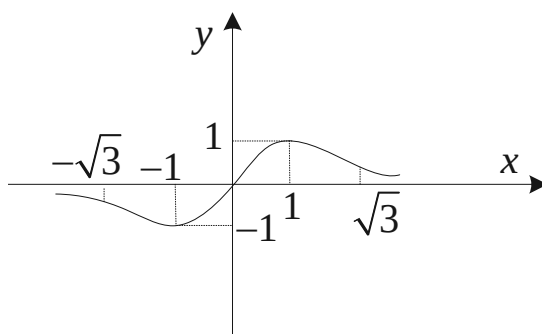
$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$. Za $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $y' < 0$ i $y \searrow$, a za

$x \in (-1, 1)$, $y' > 0$ i $y \nearrow$. $y_{\min}(-1) = -1$, $y_{\max}(1) = 1$.

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke: $y'' = \frac{4x(x^2 - 3)}{(1 + x^2)^3},$

$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{3}$. Za $x \in (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$, $y'' > 0$ i $y \cup$, a za $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$, $y'' < 0$ i $y \cap$.

Funkcija ima tri prevojne tačke $P_1\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), P_2(0, 0), P_3\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.



b) $y = \frac{3}{x^2 - 1}$

Domen: $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

Parnost, neparnost: Funkcija je parna.

Nule funkcije: Funkcija nema nule.

Znak funkcije: Za $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $y > 0$, a za $x \in (-1, 1)$ $y < 0$.

Asimptote funkcije: Kako je, $\lim_{x \rightarrow -1\pm} y = \mp\infty$, Prave $x = \pm 1$ su vertikalne

asimptote. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$, pa je prava $y = 0$, tj. x - osa horizontalna asimptota.

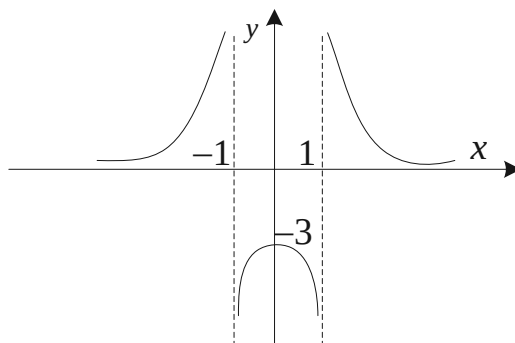
Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti: $y' = \frac{-6x}{(x^2 - 1)^2}$. $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Za

$x \in (-\infty, 0)$, $y' > 0$ i $y \nearrow$, a za $x \in (0, +\infty)$, $y' < 0$ i $y \searrow$. $y_{\max}(0) = -3$.

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke: $y'' = \frac{6(3x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3}$.

Za $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, $y'' > 0$ i $y \cup$, a za $x \in (-1, 1)$, $y'' < 0$ i $y \cap$.

Funkcija nema prevojne tačke.



c) $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$

Domen: $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

Nule funkcije: $y = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. **Presek sa y osom:** $y(0) = -1$.

Znak funkcije: Za $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$, $y > 0$, a za $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, $y < 0$.

Asimptote: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$ pa je prava $y = 0$ horizontalna asimptota.

$\lim_{x \rightarrow 1\pm} y = +\infty$, pa je prava $x = 1$ vertikalna asimptota.

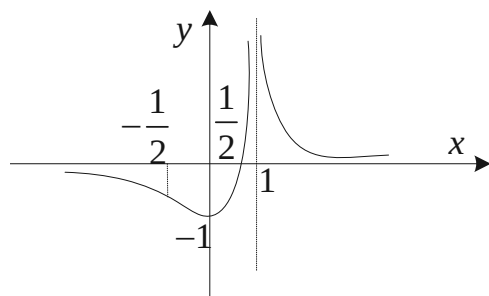
Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti: $y' = \frac{-2x}{(x-1)^3}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Za $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, $y' < 0$ i $y \searrow$, a za $x \in (0, 1)$, $y' > 0$ i $y \nearrow$.

$y_{\min}(0) = -1$.

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke: $y'' = \frac{2(2x+1)}{(x-1)^4}$. $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Za $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, $y'' < 0$ i $y \cap$, a za $x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$, $y'' > 0$ i $y \cup$. Prevojna tačka je tačka $P\left(-\frac{1}{2}, -\frac{8}{9}\right)$.



d) $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$

Domen: $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

Parnost, neparnost: $y(x) = y(-x)$ funkcija je parna.

Nule funkcije: $y = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Presek sa y osom: $y(0) = 4$.

Znak funkcije: Za $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty)$, $y > 0$, a za $x \in (-2, -1) \cup (1, 2)$, $y < 0$.

Asimptote: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1$ pa je prava $y = 1$ horizontalna asimptota.

$\lim_{x \rightarrow -1\pm} y = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1\mp} y = \pm\infty$, pa su prave $x = \pm 1$ vertikalne asimptote.

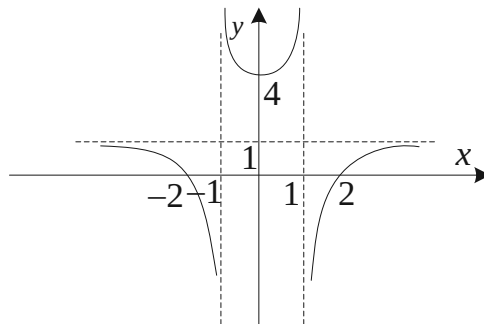
Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti: $y' = \frac{6x}{(x^2 - 1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Za $x \in (-\infty, 0)$, $y' < 0$ i $y \searrow$, a za $x \in (0, +\infty)$, $y' > 0$ i $y \nearrow$. $y_{\min}(0) = 4$.

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke: $y'' = \frac{-6(3x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3}$.

Za $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $y'' < 0$ i $y \cap$, a za $x \in (-1, 1)$, $y'' > 0$ i $y \cup$.

Funkcija nema prevojne tačke.



e) $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{2x - x^2}$

Domen: $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$.

Nule funkcije: $y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$.

Presek sa y osom: Funkcija ne seče y - osu.

Znak funkcije:

Za $x \in (-1, 0) \cup (2, 3)$, $y > 0$, za $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 2) \cup (3, \infty)$, $y < 0$.

Parnost neparnost: Funkcija nije ni parna ni neparna.

Asimptote: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = -1$ pa je $y = -1$ horizontalna asimptota.

$\lim_{x \rightarrow 0^\mp} y = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^\pm} y = \pm\infty$, pa su $x = 0$ i $x = 2$ vertikalne asimptote.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti: $y' = \frac{6(1-x)}{(2x-x^2)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

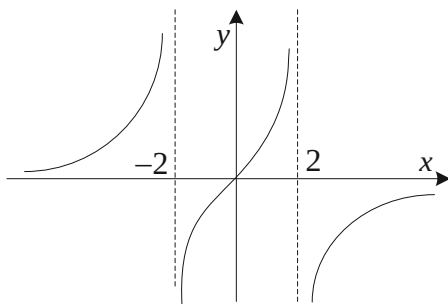
Za $x \in (-\infty, 1)$, $y' > 0$ i $y \nearrow$, a za $x \in (1, +\infty)$, $y' < 0$ i $y \searrow$. $y_{\max}(1) = -4$.

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke: $y'' = \frac{-6(3x^2 - 6x + 4)}{(2x - x^2)^3}$

Za $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, $y'' > 0$ i $y \cup$, a za $x \in (0, 2)$, $y'' < 0$ i $y \cap$.

Funkcija nema prevojne tačke.

f) $y = \frac{4x}{4-x^2}$



3. a) $y = \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3};$

b) $y = \frac{(x-1)^3}{2(x+1)^2};$

c) $y = \frac{4x - x^2 - 4}{x - 1};$

d) $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$

e) $y = \frac{3x - x^2}{x - 4}$

f) $y = \frac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}.$

Rešenje:

a) $y = \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3}$

Domen: $x \in (-\infty, 3) \cup (3, +\infty).$

Nule funkcije: $y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 3 - \sqrt{6} \vee x_2 = 3 + \sqrt{6}.$

Znak funkcije:

Za $x \in (3 - \sqrt{6}, 3) \cup (3 + \sqrt{6}, +\infty), y > 0$, za

$x \in (-\infty, 3 - \sqrt{6}) \cup (3, 3 + \sqrt{6}), y < 0.$

Asimptote: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$, funkcija nema horizontalnu asimptotu.

$\lim_{x \rightarrow 3\pm} y = \mp\infty$, prava $x = 3$ je vertikalna asimptota funkcije.

Kosa asimptota funkcije je prava $y = kx + n$:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x + 3}{x^2 - 3x} = 1, n = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3} - x \right) =$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x + 3}{x - 3} = -3$$

pa je prava $y = x - 3$ kosa asimptota funkcije.

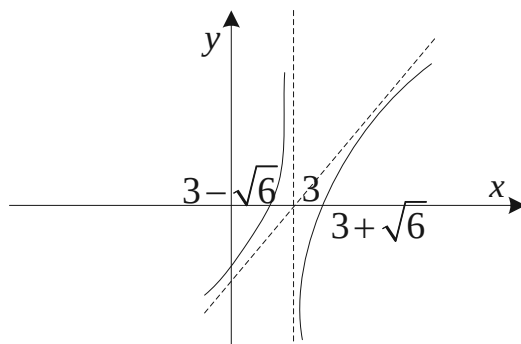
Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti: $y' = \frac{x^2 - 6x + 15}{(x-3)^2} > 0$ pa je funkcija

je stalno rastuća. Funkcija nema ekstremnih vrednosti.

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke: $y'' = \frac{-12}{(x-3)^3}$.

Za $x \in (-\infty, 3)$, $y'' > 0$ i $y \cup$, a za $x \in (3, \infty)$, $y'' < 0$ i $y \cap$.

Funkcija nema prevojnih tačaka.



b) $y = \frac{(x-1)^3}{2(x+1)^2}$

Domen: $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

Nule funkcije: $y = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Presek sa y osom: $y(0) = -\frac{1}{2}$.

Znak funkcije: Za $x \in (-\infty, 1)$, $y < 0$, a za $x \in (1, \infty)$, $y > 0$.

Asimptote: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$ pa funkcija nema horizontalnu asimptotu.

$\lim_{x \rightarrow -1\pm} y = -\infty$, pa je prava $x = -1$ je vertikalna asimptota funkcije.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^3}{2x(x+1)^2} = \frac{1}{2}, n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x-1)^3}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 4x + 2} = -\frac{5}{2},$$

prava $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ je kosa asimptota funkcije.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti: $y' = \frac{(x-1)^2(x+5)}{2(x+1)^3}$.

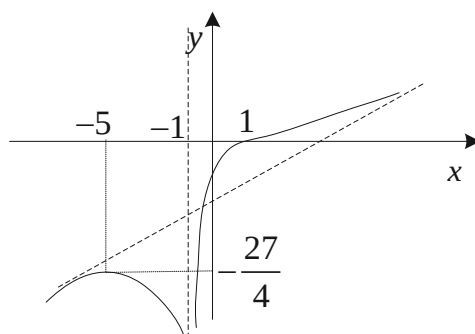
$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -5$. $x \in (-\infty, -5) \cup (-1, 1)$, $y' > 0$ i $y \nearrow$, a za

$x \in (-5, -1) \cup (1, +\infty)$, $y' < 0$ i $y \searrow$. $y_{\max}(-5) = -\frac{27}{4}$.

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke: $y'' = \frac{12(x-1)}{(x+1)^4}$. $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Za $x \in (-\infty, 1)$, $y'' < 0$ i $y \cap$, a za $x \in (1, \infty)$, $y'' > 0$ i $y \cup$.

Prevojna tačka funkcije je $P(1, 0)$.



c) $y = \frac{4x - x^2 - 4}{x - 1}$

Domen: $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

Nule funkcije: $y = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Znak funkcije: Za $x \in (-\infty, 1)$, $y > 0$, a za $x \in (1, +\infty)$, $y < 0$.

Asimptote: Funkcija nema horizontalne asimptote.

Prava $x = 1$ vertikalna asimptota, a prava $y = -x + 3$ je kosa asimptota.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti: $y' = \frac{-x^2 + 2x}{(x-1)^2}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$. Za $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, $y' < 0$ i $y \searrow$, a za

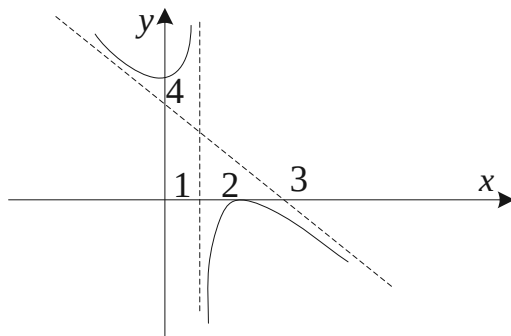
$x \in (0, 2)$, $y' > 0$ i $y \nearrow$.

$y_{\max}(2) = 0$ i $y_{\min}(0) = 4$.

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke: $y'' = \frac{-2}{(x-1)^3}$.

Za $x \in (-\infty, 1)$, $y'' > 0$ i $y \cup$, a za $x \in (1, +\infty)$, $y'' < 0$ i $y \cap$.

Nema prevojnih tačka.



d) $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$

Domen: $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

Nule funkcije: $y = 0$ za $x = 0$.

Znak funkcije: $y < 0$ za $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0)$, $y > 0$ za $x \in (0, +\infty)$.

Asimptote: Funkcija nema horizontalnu asimptotu, prava $x = -1$ je vertikalna asimptota, a prava $y = \frac{1}{2}x - 1$ je kosa asimptota funkcije.

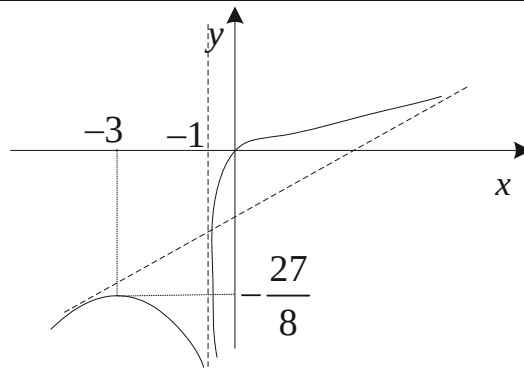
Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti: $y' = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3$. Za $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$, $y' > 0$ i $y \nearrow$, a za $x \in (-3, -1)$, $y' < 0$ i $y \searrow$. $y_{\max}(-3) = -\frac{27}{8}$.

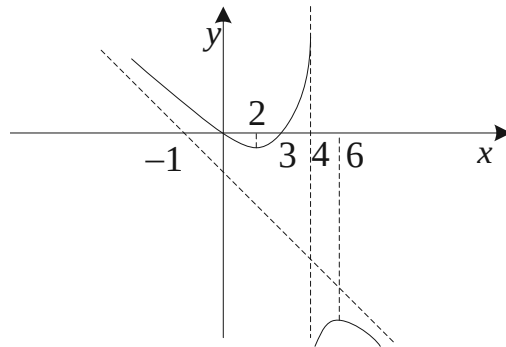
Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke: $y'' = \frac{3x}{(x+1)^4}$. $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Za $x \in (-\infty, 0)$, $y'' < 0$ i $y \cap$, a za $x \in (0, +\infty)$, $y'' > 0$ i $y \cup$.

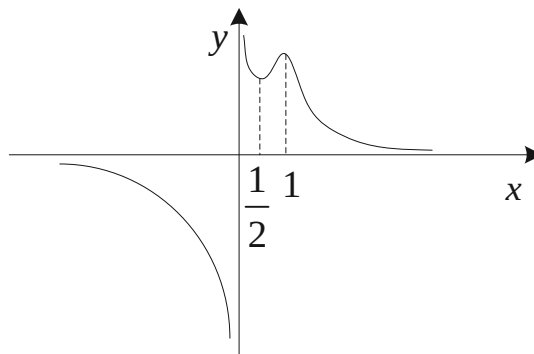
Prevojna tačka funkcije je $P(0, 0)$.



e) $y = \frac{3x - x^2}{x - 4}$



f) $y = \frac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}$



4. a) $y = x^2 e^{-x}$; b) $y = x^3 e^x$; c) $y = e^{-x} (2 - x^2)$; d) $y = x e^{-x^2}$.

Rešenje:

a) $y = x^2 e^{-x}$

Domen: $x \in (-\infty, +\infty)$.

Nule funkcije: $x = 0$.

Znak funkcije: $y \geq 0$ za $x \in \mathbb{R}$.

Asimptote: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = +0$,

pa je $y = 0$ (x -osa) horizontalna asimptota funkcije.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti:

$$y' = e^{-x} x(2 - x), y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2.$$

Za $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ $y' < 0$ i $y \searrow$, a za $x \in (0, 2)$ $y' > 0$ i $y \nearrow$.

$$y_{\min}(0) = 0, y_{\max}(2) = 4e^{-2} \approx 0,54.$$

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke:

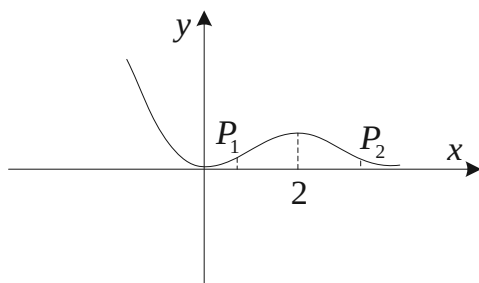
$$y'' = e^{-x} (x^2 - 4x + 2), y'' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{2}.$$

Za $x \in (2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$, $y'' < 0$ i $y \cap$, a za

$x \in (-\infty, 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}, +\infty)$, $y'' > 0$ i $y \cup$.

Prevojne tačke date funkcije, tj. njihove približne koordinate su $P_1(0,59; 0,19)$ i

$$P_2(2,41; 0,52)$$



b) $y = x^3 e^x$

Domen: $x \in (-\infty, +\infty)$.

Nule funkcije: $x = 0$.

Znak funkcije: $y < 0$ za $x < 0$, $y > 0$ za $x > 0$.

Asimptote:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6}{-e^{-x}} = -0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty,$$

pa je $y = 0$ (x -osa) horizontalna asimptota funkcije.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti:

$$y' = x^2(x+3)e^x, \quad y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3. \text{ Za } x \in (-\infty, -3), y' < 0 \text{ i } y \searrow, \text{ a za}$$

$$x \in (-3, +\infty), y' > 0 \text{ i } y \nearrow. \quad y_{\min}(-3) = (-3)^3 e^{-3} = -\frac{27}{e^3} \approx -1,34.$$

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke :

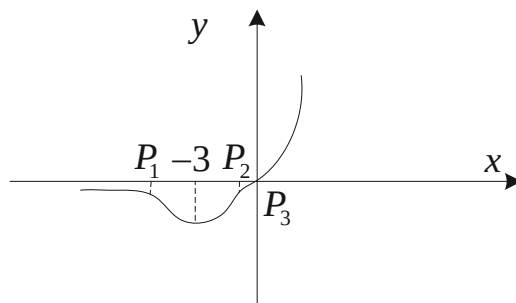
$$y'' = x(x^2 + 6x + 6)e^x.$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = -3 - \sqrt{3} \approx -4,73 \vee x_3 = -3 + \sqrt{3} \approx -1,27.$$

$$\text{Za } x \in (-\infty, -3 - \sqrt{3}) \cup (-3 + \sqrt{3}, 0), y'' < 0 \text{ i } y \cap, \text{ a za}$$

$$x \in (-3 - \sqrt{3}, -3 + \sqrt{3}) \cup (0, +\infty), y'' > 0 \text{ i } y \cup.$$

Prevojne tačke funkcije su $P_1(-3 - \sqrt{3}, -0,73)$, $P_2(-3 + \sqrt{3}, -0,8)$, $P_3(0, 0)$.



$$c) y = e^{-x} (2 - x^2)$$

Domen: $x \in (-\infty, +\infty)$.

Nule funkcije: $x = \pm\sqrt{2}$. **Presek sa y osom:** $y(0) = 2$,

Znak funkcije: Za $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$, $y < 0$, a za $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ $y > 0$.

Asimptote: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{e^x} = -0$,

pa je $y = 0$ horizontalna asimptota. Funkcija nema vertikalnu asimptotu.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti:

$$y' = e^{-x} (x^2 - 2x - 2), y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}.$$

$$y \nearrow \text{ za } x \in (-\infty, 1 - \sqrt{3}) \cup (1 + \sqrt{3}, \infty), y \searrow \text{ za } x \in (1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}).$$

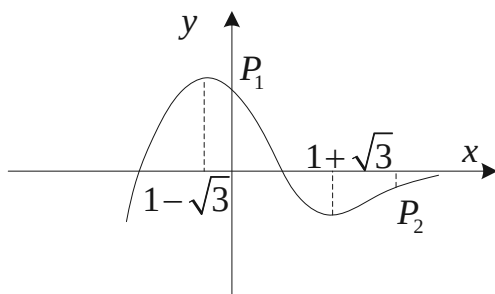
$$y_{\max} = y(x_1) = y_1 \approx 2,3; y_{\min} = y(x_2) = y_2 \approx 0,9.$$

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke:

$$y'' = e^{-x} (4x - x^2) \quad y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4.$$

Za $x \in (0, 4)$, $y'' > 0$ i $y \cup$, a za $x \in (-\infty, 0) \cup (4, \infty)$, $y'' < 0$ i $y \cap$.

$y(0) = 2$, $y(4) = e^{-4} \cdot (-14) = -14e^{-4} \approx 0,26$ su prevojne tačke funkcije.



d) $y = xe^{-x^2}$

Domen: $x \in (-\infty, +\infty)$.

Nule funkcije: $y = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Znak funkcije: Za $x \in (-\infty, 0)$ $y < 0$, a za $x \in (0, \infty)$ $y > 0$.

Parnost, neparnost: funkcija je neparna.

Asimptote: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$ pa je prava $y = 0$ horizontalna asimptota funkcije.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti:

$$y' = \frac{1-2x^2}{e^{x^2}}, y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Za $x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $y' > 0$ i $y \nearrow$, a za $x \in \left(-\infty - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$, $y' < 0$ i $y \searrow$.

$$y_{\max} = y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}e}; \quad y_{\min} = y\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}e}.$$

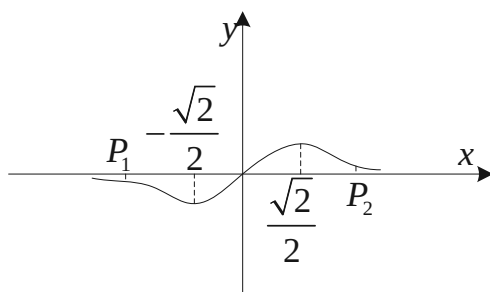
Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke:

$$y'' = \frac{2x(2x^2-3)}{e^{x^2}} \quad y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}. \text{ Za}$$

$$x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \cup \left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right), y'' > 0 \text{ i } y \cup, \text{ a za}$$

$$x \in \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right) \cup \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\right), y'' < 0 \text{ i } y \cap.$$

$$y(0) = 0, \quad y\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{3}{2}}, \quad y\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = -\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{3}{2}} \text{ su prevojne tačke funkcije.}$$



5. a) $y = e^{\frac{1}{x}}$; b) $y = xe^{-\frac{1}{x^2}}$; c) $y = e^{-\frac{1}{x+1}}$; d) $y = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$; e) $y = xe^{\frac{1}{x}}$.

Rešenje:

a) $y = e^{\frac{1}{x}}$

Domen: $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Nule funkcije: Funkcija nema nula.

Znak funkcije: $y > 0$ za $x \in D_x$.

Asimptote: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1$, funkcija ima horizontalnu asimptotu $y = 1$.

$\lim_{x \rightarrow 0-} y = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0+} y = +\infty$, funkcija ima vertikalnu asimptotu $x = 0$, kada $x \rightarrow 0_+$.

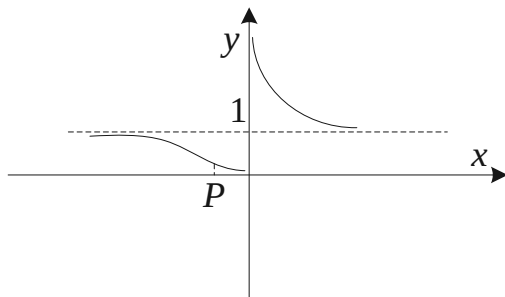
Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti:

$$y' = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}, \quad x \in D_x, y' < 0 \text{ i } y \searrow. \text{ Funkcija nema ekstremnih vrednosti.}$$

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke :

$$y'' = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1+2x}{x^4}, \quad y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}. \text{ Za } x \in \left(0, -\frac{1}{2}\right), y'' < 0 \text{ i } y \cap, \text{ a za}$$

$$x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right), y'' > 0 \text{ i } y \cup. \text{ Prevojna tačka je } P\left(-\frac{1}{2}, e^{-2}\right).$$



b) $y = xe^{-\frac{1}{x^2}}$

Domen: $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Nule funkcije: Funkcija nema nula.

Znak funkcije: Za $x \in (-\infty, 0)$, $y < 0$, a za $x \in (0, +\infty)$ $y > 0$.

Parnost, neparnost: funkcija je neparna.

Asimptote: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$, funkcija nema horizontalnu asimptotu.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{x^2}} = 1, n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(xe^{-\frac{1}{x^2}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 1}{\frac{1}{x}} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 1}{-\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x} \right) = 0$$

pa je $y = x$ kosa asimptota funkcije.

$\lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} y = \pm 0$, pa funkcija nema vertikalnih asimptota.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti:

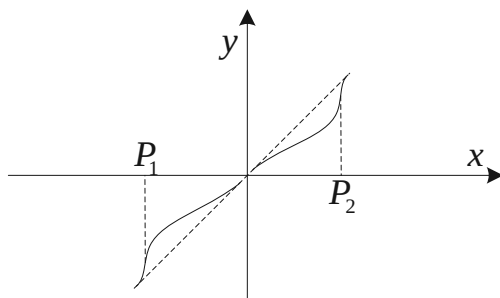
$$y' = e^{-\frac{1}{x^2}} \left(1 + \frac{2}{x^2} \right), x \in D_x, y' > 0 \text{ i } y \nearrow. \text{ Funkcija nema ekstremnih vrednosti.}$$

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke:

$$y'' = 2e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2 - x^2}{x^5}, y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}.$$

Za $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$, $y'' > 0$ i $y \cup$, za $x \in (-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$, $y'' < 0$

i $y \cap$. $y(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} \approx -0,86$; $y(\sqrt{2}) = \sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,86$ su prevojne tačke.



c) $y = e^{-\frac{1}{x+1}}$

Domen: $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

Nule funkcije: funkcije nema nula.

Znak funkcije: $y > 0$ za $x \in D_x$.

Presek sa y osom: $y(0) = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Asimptote: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-\frac{1}{x+1}} = e^{+0} = 1$, prava $y = 1$ je horizontalna asimptota.

$\lim_{x \rightarrow -1-} e^{-\frac{1}{x+1}} = e^{+\infty} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1+} e^{-\frac{1}{x+1}} = e^{-\infty} = +0$, prava $x = -1$ je vertikalna asimptota funkcije.

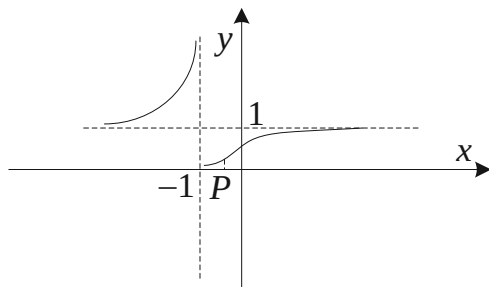
Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti:

$y' = (x+1)^{-2} e^{-\frac{1}{x+1}}$; $x \in D_x$ $y' > 0$ $y \nearrow$. Funkcija nema ekstremnih vrednosti.

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke:

$y'' = -\frac{2x+1}{(x+1)^4} e^{-\frac{1}{x+1}}$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$. Za $x \in \left(0, -\frac{1}{2}\right)$, $y'' > 0$ i $y \cup$, a za

$x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$, $y'' < 0$ i $y \cap$. Pevojna tačke funkcije je $P\left(-\frac{1}{2}, e^{-2}\right)$.



d) $y = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$

Domen: $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Nule funkcije: $x = -2$.

Znak funkcije: Za $x \in (-\infty, -2)$, $y < 0$, a za $x \in (-2, +\infty)$, $y > 0$.

Asimptote: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty$, funkcija nema horizontalnu asimptotu.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x} \cdot e^{\frac{1}{x}} = 1,$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left((x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) + 2e^{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} + 2 = 3,$$

pa je $y = x+3$ kosa asimptota funkcije. $\lim_{x \rightarrow -0} y = 0$, $\lim_{x \rightarrow +0} y = +\infty$.

Funkcija ima vertikalnu asimptotu kada $x \rightarrow 0_+$.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti:

$$y' = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x^2 - x - 2}{x^2}, \quad y' = 0 \text{ za } x = -1 \vee x = 2.$$

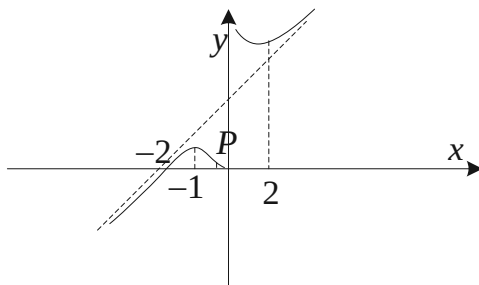
Za $x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$, $y' > 0$ i $y \nearrow$, a za $x \in (-1, 2)$, $y' < 0$ i $y \searrow$.

$$y_{\max} = y(-1) = \frac{1}{e}; \quad y_{\min} = y(2) = 3\sqrt[3]{e}$$

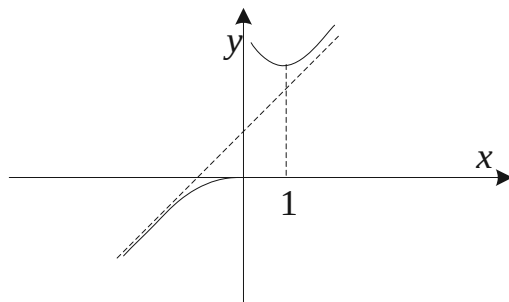
Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke: $y'' = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{3x+2}{x^4},$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}. \text{ Za } x \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right), y'' < 0 \text{ i } y \cap, \text{ a za } x \in \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right), y'' > 0$$

i) $y \cup y\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3} \cdot e^{\frac{3}{2}}$ je prevojna tačka funkcije.



e) $y = xe^{\frac{1}{x}}$



6. a) $y = \frac{\ln x}{x}$; b) $y = x^2 \ln^2 x$; c) $y = x^2 (1 - 2 \ln x)$;
d) $y = x^3 \ln x$.

Rešenje:

a) $y = \frac{\ln x}{x}$

Domen: $x \in (0, +\infty)$.

Nule funkcije: $x = 1$.

Znak funkcije: Za $x \in (0, 1)$ $y < 0$, a za $x \in (1, +\infty)$ $y > 0$.

Asimptote: $\lim_{x \rightarrow +0} y = -\infty$, pa je prava $x = 0$ vertikalna asimptota.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +0$, pa je prava $y = 0$ horizontalna asimptota funkcije.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti:

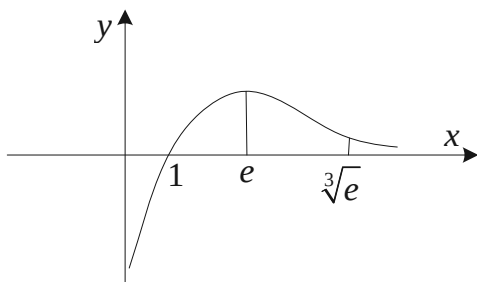
$$y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e.$$

Za $x \in (0, e)$, $y' > 0$ i $y \nearrow$, a za $x \in (e, +\infty)$, $y' < 0$ i $y \searrow$. $y_{\max}(e) = \frac{1}{e}$

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke: $y'' = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}}$.

Za $x \in \left(0, e^{\frac{3}{2}}\right)$, $y'' < 0$ i $y \cap$, a za $x \in \left(e^{\frac{3}{2}}, \infty\right)$, $y'' > 0$ i $y \cup$.

$y\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}$ je prevojna tačka.



b) $y = x^2 \ln^2 x$

Domen: $x \in (0, +\infty)$.

Nule funkcije: $y = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Znak funkcije: $y \geq 0, x \in D_x$.

Asimptote: $\lim_{x \rightarrow +0} y = +0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$, funkcija nema asimptota.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti: $y' = 2x(\ln x + 1) \ln x$,

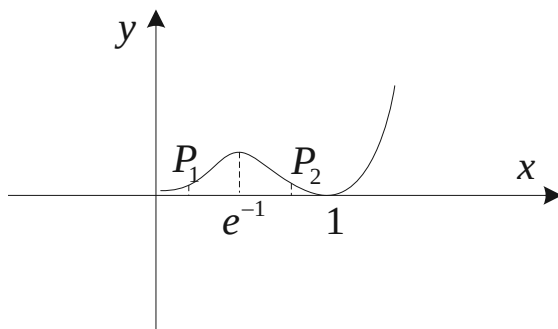
$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = e^{-1}$. Za $x \in (0, e^{-1}) \cup (1, +\infty)$, $y' > 0$ i $y \nearrow$, a za $x \in (e^{-1}, 1)$, $y' < 0$ i $y \searrow$. $y_{\max}(e^{-1}) = e^{-2} \approx 0,14$, $y_{\min}(1) = 0$.

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke: $y'' = 2(\ln^2 x + 3 \ln x + 1)$,

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x_1 = e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}} \approx 0,07 \vee x_2 = e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}} \approx 0,68.$$

Za $x \in (0,07, 0,68)$, $y'' < 0$ i $y \cap$, a za $x \in (0,07) \cup (0,68, +\infty)$, $y'' > 0$ i $y \cup$.

Funkcija ima dve prevojne tačke: $P_1(0,07, 0,03)$, $P_2(0,68, 0,07)$.



c) $y = x^2(1 - 2 \ln x)$

Domen : $x \in (0, +\infty)$.

Nule funkcije: $x = \sqrt{e}$.

Znak funkcije: Za $x \in (0, \sqrt{e})$, $y > 0$, a za $x \in (\sqrt{e}, +\infty)$, $y < 0$.

Asimptote: $\lim_{x \rightarrow +0} x^2(1 - 2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1 - 2 \ln x}{x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow +0} x^2 = +0,$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - 2 \ln x) = +\infty$. Funkcija nema asimptota.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti:

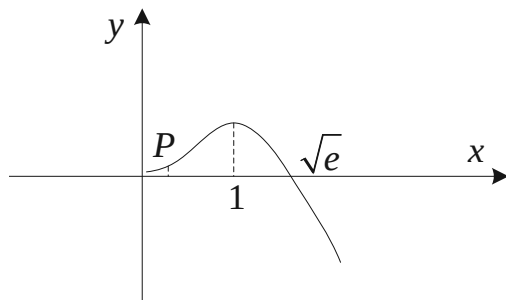
$y' = -4 \ln x$, pa je $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Za $x \in (0, 1)$, $y' > 0$ i $y \nearrow$, a za $x \in (1, +\infty)$, $y' < 0$ i $y \searrow$. $y_{\max} = y(1) = 1$.

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke

$y'' = -4(\ln x + 1)$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}$. Za $x \in (0, e^{-1})$, $y'' > 0$ i $y \cup$, a za

$x \in (e^{-1}, +\infty)$, $y'' < 0$ i $y \cap$. $y(e^{-1}) = 3e^{-2}$ je prevojna tačka.



d) $y = x^3 \ln x$

Domen $x \in (0, +\infty)$.

Nule funkcije: $x = 1$.

Znak funkcije: Za $x \in (0, 1)$, $y < 0$, a za $x \in (1, +\infty)$, $y > 0$.

Asimptote: $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{x^{-3}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-3x^{-4}} \stackrel{L}{=} \left(-\frac{1}{3}\right) \lim_{x \rightarrow +0} x^3 = -0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln x = +\infty$, pa funkcija nema asimptota.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti: $y' = x^2 (3 \ln x + 1)$,

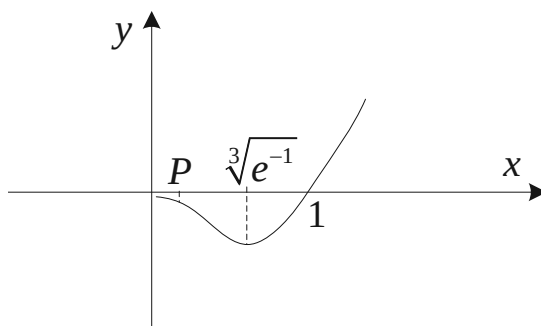
$y' = 0 \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{3}} \approx 0,7$. Za $x \in \left(0, e^{-\frac{1}{3}}\right)$, $y' < 0$ i $y \searrow$, a za

$x \in \left(e^{-\frac{1}{3}}, +\infty\right)$, $y' > 0$ i $y \nearrow$. $y_{\min} = \left(e^{-\frac{1}{3}}\right)^3 \ln e^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3e} \approx 0,1$.

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke: $y'' = x(6 \ln x + 5)$

$y'' = 0 \Leftrightarrow x = e^{-\frac{5}{6}} \approx 0,2$. Za $x \in \left(0, e^{-\frac{5}{6}}\right)$, $y'' < 0$ i $y \cap$ a za $x \in \left(e^{-\frac{5}{6}}, +\infty\right)$,

$y'' > 0$ i $y \cup$. Pevojna tačka funkcije $P\left(e^{-\frac{5}{6}}, -\frac{5}{6}e^{-\frac{5}{2}}\right)$.



7. a) $y = \frac{1}{\ln x - 1}$; b) $y = \frac{1 + \ln x}{x}$; c) $y = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$ d) $y = \ln^2 x - 4 \ln x + 3$.

Rešenje:

a) $y = \frac{1}{\ln x - 1}$

Domen: $x > 0 \wedge \ln x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x > 0 \wedge x \neq e \Leftrightarrow x \in (0, e) \cup (e, +\infty)$.

Nule funkcije: Funkcija nema nula.

Znak funkcije: Za $x \in (0, e)$ $y < 0$, a za $x \in (e, +\infty)$ $y > 0$.

Asimptote: $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = -0$, $\lim_{x \rightarrow e^\pm} y = \pm\infty$, pa je prava $x = e$ vertikalna asimptota.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +0$, pa je prava $y = 0$ horizontalna asimptota funkcije.

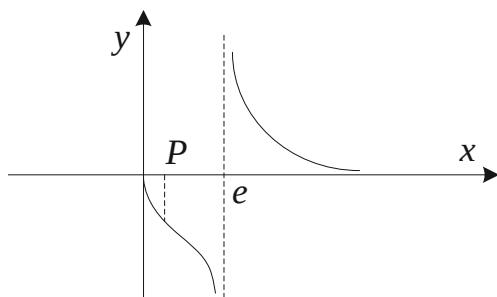
Intervali monotonosti: i ekstremne vrednosti: $y' = -\frac{1}{x(\ln x - 1)^2}$, $y' < 0$, $y \searrow$.

Funkcija nema ekstremnih vrednosti.

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke: $y'' = \frac{\ln x + 1}{x(\ln x - 1)^3}$,

$y'' = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}$. Za $x \in (e^{-1}, e)$, $y'' < 0$ i $y \cap$ a za $x \in (0, e^{-1}) \cup (e, +\infty)$,

$y'' > 0$ i $y \cup$, pa je $P\left(e^{-1}, -\frac{1}{2}\right)$ prevojna tačka funkcije.



b) $y = \frac{1 + \ln x}{x}$

Domen: $x \in (0, +\infty)$.

Nule funkcije: $x = e^{-1}$.

Znak funkcije: Za $x \in (0, e^{-1})$ $y < 0$, a za $x \in (e^{-1}, +\infty)$, $y > 0$.

Asimptote: $\lim_{x \rightarrow +0} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +0$, pa su prave $x = 0$, odnosno $y = 0$ vertikalna i horizontalna asimptota.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti:

$$y' = -\frac{\ln x}{x^2}, \quad y' = 0 \Leftrightarrow x = 1. \text{ Za } x \in (0, 1), y' < 0 \text{ i } y \searrow, \text{ a za } x \in (1, \infty),$$

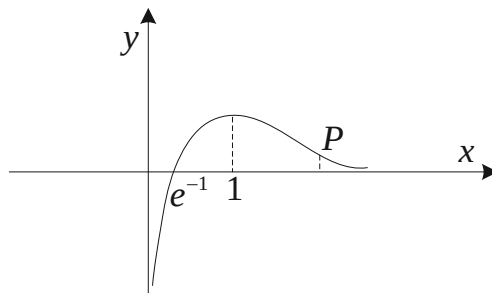
$$y' > 0 \text{ i } y \nearrow. y_{\max} = y(1) = 1.$$

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke $y'' = \frac{2 \ln x - 1}{x^3}$, pa je

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{e}. \text{ Za } x \in (0, \sqrt{e}), y'' < 0 \Leftrightarrow y \cap, \text{ a za } x \in (\sqrt{e}, \infty),$$

$$y'' > 0 \Leftrightarrow y \cup$$

$$y(\sqrt{e}) = \frac{3}{2\sqrt{e}}. \text{ Prevojna tačka je } y\left(\sqrt{e}, \frac{3}{2\sqrt{e}}\right).$$



c) $y = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$

Domen: $x \in (0, e^{-1}) \cup (e^{-1}, +\infty)$.

Nule funkcije: $x = e$.

Znak funkcije: Za $x \in (0, e^{-1}) \cup (e, +\infty)$, $y < 0$ a za $x \in (e^{-1}, e)$ $y > 0$.

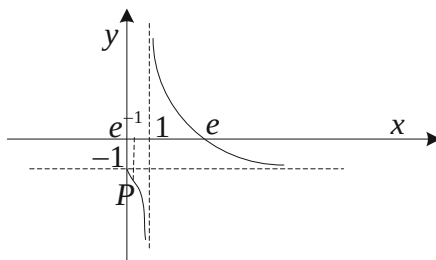
Asimptote: Prava $x = e^{-1}$ je vertikalna, a $y = -1$ horizontalna asimptota.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti:

$$y' = \frac{-2}{x(1 + \ln x)^2}, y' < 0 \text{ i } y \searrow. \text{ Nema ekstrema.}$$

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke: $y'' = \frac{2(3 + \ln x)}{x^2(1 + \ln x)^3}$,

$y'' = 0 \Leftrightarrow x = e^{-3}$. Za $x \in (0, e^{-3}) \cup (e^{-1}, +\infty)$, $y'' > 0$ i $y \cup$, a za $x \in (e^{-3}, e^{-1})$, $y'' < 0$ i $y \cap$. Prevojna tačka je $P(e^{-3}, -2)$.



INTEGRALNI RAČUN

- 1. NEODREĐENI INTEGRALI**
- 2. ODREĐENI INTEGRALI**
- 3. NESVOJSTVENI INTEGRALI**
- 4. PRIMENE INTEGRALNOG RAČUNA**

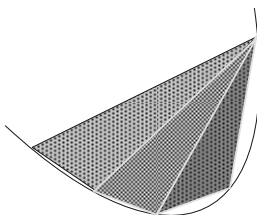
6.

INTEGRALI



Aristotel (287-212)

Problemi izračunavanja dužina lukova, površina, zapremina i slično, interesovali su naučnike od nastanka civilizacije. Mnogi od njih, od Aristotela do Lajbnica i Njutna rešavali su ove probleme uglavnom metodom ekshauštije (iscrpljivanja) i metodom nedeljivih delova (matematički atomizam).



Obe metode bazirale su se na beskonačnim sumama i kao takve predstavljale nadahnuće u postepenom i dugotrajnom nastajanju pojma integrala. Njtn i Lajbnic, uz pomoć Dekartovih koordinata, učinili su onaj kvalitativni skok koji se zove otkriće integralnog računa.

Tokom 18. i prve polovine 19. veka integralni račun se razvijao pod dominantnim uticajem primena u geometriji, mehanici i fizici.

6.1. NEODREĐENI INTEGRALI

Jedan od osnovnih zadataka diferencijalnog računa je određivanje izvoda ili diferencijala date funkcije. Ali, ako se postavi obrnuti problem, određivanje funkcije kojoj je poznat izvod ili diferencijal, dolazi se do integralnog računa.

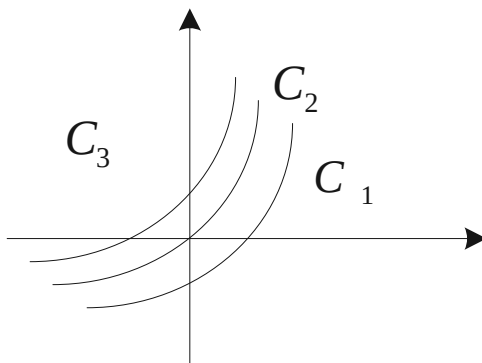
Pitanja koja se sada mogu postaviti i potražiti odgovor na njih su sledeća:

1. Da li svaka funkcija može biti izvod neke druge funkcije ?
 2. Ako ta funkcija postoji da li je jednoznačna ?
 3. Ako ta funkcija postoji, kako da je odredimo?
- Neka je neprekidna funkcija $f(x)$ definisana na intervalu (a, b) . Funkcija $F(x)$ zove se **primitivna** ili **prvobitna** funkcija funkcije $f(x)$ akko je

$$F'(x) = f(x) \text{ ili } dF(x) = f(x)dx.$$

- Ako je $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$ na intervalu (a, b) , tada je i bilo koja funkcija oblika $F(x) + C$ takođe primitivna funkcija funkcije $f(x)$, pri čemu je C proizvoljna konstanta.

$$(F(x) + C)' = f(x).$$



Napomena: Primitivna funkcija nije jednoznačno određena već je u pitanju familija krivih koje se međusobom razlikuju za konstantu C .

Primer:

Funkcija $F(x) = \sin x$ je primitivna funkcija funkcije $f(x) = \cos x$ jer je $(\sin x + C)' = \cos x$, tj. $d(\sin x + C) = \cos x \cdot dx$

- Skup svih primitivnih funkcija funkcije $f(x)$ na intervalu (a, b) zove se **neodređeni integral** i obeležava se:

$$\int f(x) dx \text{ odnosno } \int f(x) dx = F(x) + C.$$

Funkcija $f(x)$ zove se **podintegralana funkcija**, a sam postupak izračunavanja integrala zove se **integracija**.

Oznaku $\int$ za integral, kao skraćenicu od latinske reči *integralis*, koja znači potpun, uveo je Lajbnic. Oznaka predstavlja modifikovano slovo S koje predstavlja zbir i potiče iz definicije određenog integrala.

Primer:

$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

6.1.1. OSOBINE NEODREĐENOG INTEGRALA

- Svaka neprekidna funkcija $f(x)$ na intervalu (a, b) ima na tom intervalu **primitivnu funkciju** $F(x)$.
- Diferencijal neodređenog integrala** jednak je podintegralnom izrazu.

$$d \int f(x) dx = f(x) dx, \quad \left(\int f(x) dx \right)' = f(x).$$

- Neodređeni integral diferencijala** neke funkcije jednak je podintegralnoj funkciji:

$$\int d(f(x)) = f(x) + C \quad \int f'(x) dx = f(x) + C.$$

Nasuprot izračunavanju izvoda koje nije bilo problem ni kod veoma složenih funkcija, ne postoji opšti postupak za izračunavanje primitivne funkcije, odnosno izračunavanje neodređenog integrala.

Na osnovu uvedenih pravila, tablice integrala i definisanjem specifičnih metoda mogu se izračunati samo neki tipovi neodređenih integrala.

Međutim, postoje relativno jednostavne funkcije čiju je primitivnu funkciju nemoguće odrediti pomoću elementarnih funkcija, mada postoje, kao što su na primer:

$$y = e^{-x^2}, \quad y = \frac{\sin x}{x}, \quad y = \frac{1}{\ln x}$$

6.1.2. OSNOVNA PRAVILA INTEGRACIJE

Ako funkcije $f(x)$ i $g(x)$ imaju primitivne funkcije na nekom intervalu onda važi:

- $\int C \cdot f(x) dx = C \cdot \int f(x) dx, C \in R, C \neq 0$
- $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$

Osim ovih pravila potrebno je znati i tablicu osnovnih integrala.

Tablica osnovnih integrala dobija se kao inverzna tablica, tablice osnovnih izvoda.

Integrali obeleženi sa * su polutablični integrali. Oni se računaju pomoću osnovne tablice integrala, primenom neke od metoda integracije.

6.1.3. TABLICA OSNOVNIH INTEGRALA

$$1. \int dx = x + C$$

$$3. \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$5. \int e^x dx = e^x + C$$

$$7. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$9. \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$11^*. \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$13^*. \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$15^*. \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$2. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1)$$

$$4. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0)$$

$$6. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$8. \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$10. \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \operatorname{arctg} x + C$$

$$12. \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$14^*. \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

Primeri:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C, \text{ zato što je } \left(\frac{x^3}{3} + C \right)' = x^2,$$

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C,$$

$$\int 3 \sin x dx = 3 \int \sin x dx = -3 \cos x + C,$$

$$\int (e^x + 2x^2) dx = \int e^x dx + 2 \int x^2 dx = e^x + \frac{2}{3} x^3 + C,$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 4} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C$$

6.1.4. METODE INTEGRACIJE

METODA SMENE

U nekim slučajevima i pored toga što znamo da postoji primitivna funkcija funkcije $f(x)$ ne možemo metodom neposredne integracije izračunati njen neodređeni integral. U takvim slučajevima se često koristi metoda smene.

1. Neka je $f(x)$ složena funkcija promenljive t , tj. $f(x) = f(g(t))$. Smenom $x = g(t)$ gde je funkcija $g(t)$ neprekidna sa neprekidnim izvodom i inverznom funkcijom $t = g^{-1}(x)$, dobijamo

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt.$$

Primer:

Izračunati $I = \int \sqrt{2x+3} dx$.

Ako uvedemo smenu $2x+3=t$, diferencijal je $2dx = dt$, odnosno $dx = \frac{1}{2}dt$, pa zadati integral postaje tablični integral oblika

$$\frac{1}{2} \int \sqrt{t} dt = \frac{1}{2} \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} \sqrt{t^3} + C.$$

Ako se vratimo na promenljivu x , rešenje zadatog integrala je

$$I = \frac{1}{3} \sqrt{(2x+3)^3} + C.$$

Primer:

Izračunati $I = \int \frac{dx}{x+2}$.

$$I = \left\{ \begin{array}{l} x+2=t \\ dx=dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x+2| + C.$$

METODA PARCIJALNE INTEGRACIJE

- Neka su $u = u(x)$ i $v = v(x)$ diferencijabilne funkcije. Jednakost:

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

naziva se **formula parcijalne integracije**.

Dokaz: Na osnovu formule za diferencijal proizvoda funkcija dobijamo da je

$$d(u \cdot v) = (u \cdot v)' \, dx = (u \cdot v' + u' \cdot v) \, dx = u \cdot (v' \, dx) + v(u' \, dx) = u \, dv + v \, du.$$

Integracijom ove veze dobijamo $\int d(u \cdot v) = \int (u \, dv + v \, du)$ odakle je:

$$(u \cdot v) = \int (u \, dv + v \, du) \text{ ili } \int u \, dv = uv - \int v \, du, \text{ pod uslovom da postoji } \int v \, du.$$

Napomena: Kod parcijalne integracije najveći praktični problem je odrediti šta je funkcija u , a šta je diferencijal dv . U radu, korisno je držati se sledećih pravila:

- a) Kod proizvoda polinoma i eksponencijalne funkcije ili trigonometrijske funkcije, u je uvek polinom.
- b) Kod proizvoda polinoma i logaritamske funkcije ili inverzne trigonometrijske funkcije u je uvek logaritamska funkcija, odnosno inverzna trigonometrijska funkcija.
- c) Kod proizvoda inverzne trigonometrijske i eksponencijalne funkcije svejedno je šta je u .

Primer:

Izračunati $I = \int x \cos x \, dx$

$$I = \left\{ \begin{array}{l} u = x, \, du = dx \\ dv = \cos x \, dx, \, v = \sin x \end{array} \right\} = x \cdot \sin x - \int \sin x \, dx = x \cdot \sin x + \cos x + C.$$

Napomena: Konstanta integracije kod integrala za izračunavanje funkcije v može se izostaviti i proizvoljnu konstantu dodajemo na kraju postupka integracije kao zbirnu vrednost.

INTEGRACIJA RACIONALNIH FUNKCIJA

Neka je $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ racionalna funkcija, gde su n i m stepeni datih polinoma.

1. Ako je $n \geq m$, tj. funkcija $f(x)$ **neprava racionalna funkcija**, tada deljenjem polinoma $P_n(x)$ sa polinomom $Q_m(x)$, funkciju $f(x)$ možemo prikazati kao zbir polinoma i prave racionalne funkcije u obliku

$$f(x) = P(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)}.$$

Primer:

Izračunati $I = \int \frac{x^2}{x-1} dx$.

Podintegralnu funkciju možemo napisati u obliku $\frac{x^2}{x-1} = x+1 + \frac{1}{x-1}$,

pa je $I = \int \left(x+1 + \frac{1}{x-1} \right) dx = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| + C$.

2. Ako je $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ **prava racionalna funkcija** ($n < m$) tada se ona može rastaviti kao zbir parcijalnih razlomaka oblika

$$\frac{A}{(x-a)^k}, \quad \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^k}$$

pri čemu prvi tip razlomka potiče od realnih, a drugi tip od kompleksnih nula polinoma $Q_m(x)$ u imeniocu funkcije $f(x)$.

Prema tome, problem se svodi na rešavanje integrala oblika

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} dx \quad \text{ili} \quad \int \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^k} dx$$

gde su A i B realne konstante koje treba odrediti, $k \in \mathbb{N}$, a kvadratni trinom x^2+bx+c ima konjugovano kompleksno nule.

SLUČAJ KADA POLINOM U IMENIOCU IMA REALNE I JEDNOSTRUKÉ NULE

- Ako su kod funkcije $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ realni međusobno različiti brojevi

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ nule polinoma $Q_m(x)$, onda se funkcija $f(x)$ može napisati kao

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{a_m(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_m)}.$$

Ovaj izraz se može rastaviti kao

$$\frac{P_n(x)}{a_m(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_m)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \dots + \frac{A_m}{x-x_m},$$

gde se posle određivanja koeficijenata $A_1, A_2, \dots, A_m$, izračunavanje integrala svodi se

na zbroje integrala oblika $\int \frac{A_k}{x-x_k} dx, \quad 1 \leq k \leq m.$

Primer:

$$I = \int \frac{x+3}{x^2-x} dx$$

Rastavićemo podintegralnu funkciju na parcijalne razlomke

$$\frac{x+3}{x^2-x} = \frac{x+3}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}.$$

Metodom neodređenih koeficijenata odredićemo nepoznate koeficijente A i B .

Iz predhodne veze, uklanjanjem razlomaka dobijamo:

$$x+3 = A(x-1) + Bx \Leftrightarrow x+3 = Ax - A + Bx \Leftrightarrow x+3 = (A+B)x - A.$$

Upoređujući koeficijente uz promenljive sa leve i desne strane jednakosti, dobijamo sistem jednačina

$$A+B=1 \text{ i } -A=3.$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina dobijamo koeficijente, tj. $A=-3, B=2$.

Traženi integral je: $\int \left(-\frac{3}{x} + \frac{2}{x-1} \right) dx = -3 \ln|x| + 2 \ln|x-1| + C.$

Napomena: Koeficijente A i B mogli smo izračunati ako redom zamenimo vrednosti $x=0, x=1$ u jednakost $x+3 = A(x-1) + Bx$.

Za $x=0$, dobijamo $A=-3$,

za $x=1$, dobijamo $B=2$.

SLUČAJ KADA POLINOM U IMENIOCU IMA I VIŠESTRUKU NULE

- Ako su kod funkcije $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ nule polinoma $Q_m(x)$ višestruke, $x = x_1$ reda k_1 , $x = x_2$ reda k_2 ... $x = x_m$ reda k_m , onda se funkcija $f(x)$ može napisati u obliku:

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{A_1}{(x-x_1)^{k_1}} + \frac{B_1}{(x-x_1)^{k_1-1}} + \dots + \frac{C_1}{x-x_1} + \\ & + \frac{A_2}{(x-x_2)^{k_2}} + \frac{B_2}{(x-x_2)^{k_2-1}} + \dots + \frac{C_2}{x-x_2} + \dots \\ & + \frac{A_m}{(x-x_m)^{k_m}} + \frac{B_m}{(x-x_m)^{k_m-1}} + \dots + \frac{B_m}{x-x_m}. \end{aligned}$$

Integral se svodi na izračunavanje zbira integrala .

Primer:

$$I = \int \frac{dx}{x^2(x-1)}$$

Kako je $x = 0$ dvostruka nula imenioca, njoj odgovaraju dva parcijalna razlomka:

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1}, \quad 1 = Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2,$$

$$1 = (A+C)x^2 + (-A+B)x - B, \quad A = -1, B = -1, C = 1,$$

$$I = -\ln|x| + \frac{1}{x} + \ln|x-1| + C.$$

SLUČAJ KADA POLINOM U IMENIOCU IMA I KOMPLEKSNE NULE

- Ako su kod funkcije $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ nule polinoma $Q_m(x)$ **kompleksne bez**

višestrukosti, onda se funkcija $f(x)$ može napisati u obliku

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{(x^2 + a_1x + b_1)(x^2 + a_2x + b_2) \cdots (x^2 + a_mx + b_m)}.$$

Ovaj izraz se može rastaviti kao

$$f(x) = \frac{A_1x + B_1}{x^2 + a_1x + b_1} + \frac{A_2x + B_2}{x^2 + a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_mx + B_m}{x^2 + a_mx + b_m},$$

Integrali oblika $\int \frac{Ax + B}{x^2 + bx + c} dx$ se rešavaju metodom smene.

Primer:

$$I = \int \frac{x-1}{x(1+x^2)} dx$$

Rastavljamo podintegralnu funkciju i određujemo nepoznate koeficijente

$$\frac{x-1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}, \quad x-1 = A(1+x^2) + (Bx+C)x,$$

$$x-1 = x^2(A+B) + Cx + A, \quad A = -1, \quad C = 1, \quad B = 1.$$

$$\begin{aligned} I &= -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{x+1}{1+x^2} dx = -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{x}{1+x^2} dx + \int \frac{dx}{1+x^2} \\ &= -\ln|x| + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \arctg x + C. \end{aligned}$$

ZADACI

Izračunati sledeće integrale:

1. **a)** $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} ;$

b) $I = \int (4x^3 + 3x - 5\sqrt{x} + 8) dx;$

c) $I = \int \left(\frac{x\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x} \right) dx;$

d) $I = \int \frac{x^2}{1+x^2} dx.$

Rešenje:

$$\text{a) } I = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C ;$$

$$\begin{aligned} \text{b) } I &= \int 4x^3 dx + \int 3x dx - \int 5\sqrt{x} dx + \int 8 dx = 5 \int x^3 dx + 3 \int x dx - 5 \int x^{\frac{1}{2}} dx + 8 \int dx \\ &= 4 \cdot \frac{x^4}{4} + 3 \cdot \frac{x^2}{2} - 5 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 8x + C = x^4 + \frac{3x^3}{2} - \frac{10}{3} x^{\frac{3}{2}} + 8x + C; \end{aligned}$$

$$\text{c) } I = \int \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{2}{3}} \right) dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{3}} + C;$$

$$\text{d)} \quad I = \int \frac{x^2 + 1 - 1}{1 + x^2} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1 + x^2} \right) dx = x - \arctg x + C.$$

2. а) $I = \int \operatorname{tg}^2 x dx$;

$$\text{b) } I = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x};$$

c) $I = \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx;$

d) $\int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx.$

Rešenje:

$$\text{a) } I = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \operatorname{tg} x - x + C ;$$

$$\text{b) } I = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C ;$$

$$\text{c) } I = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = -\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C ;$$

$$\text{d) } I = \int \left(\sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right) dx = \int (1 + \sin x) dx = x - \cos x + C .$$

$$3. \quad \text{a) } I = \int \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \sin x - 3e^x - \frac{2}{1+x^2} \right) dx ;$$

$$\text{b) } I = \int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{4}{x} \right) dx ;$$

$$\text{c) } I = \int e^x \left(2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) dx ;$$

$$\text{d) } I = \int \left(4 \cos x - \frac{5}{\sqrt{9-9x^2}} \right) dx .$$

Rešenje:

$$\text{a) } I = \int \left(2x^{-\frac{1}{3}} + \sin x - 3e^x - \frac{2}{1+x^2} \right) dx = 3x^{\frac{2}{3}} - \cos x - 3e^x - 2 \operatorname{arctg} x + C ;$$

$$\text{b) } I = 2 \operatorname{arctg} x - 3 \arcsin x + 4 \ln |x| + C ;$$

$$\text{c) } I = \int \left(2e^x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = 2e^x + \operatorname{tg} x + C ;$$

$$\text{d) } I = \int \left(4 \cos x - \frac{5}{3\sqrt{1-x^2}} \right) dx = 4 \sin x - \frac{5}{3} \arcsin x + C .$$

$$4. \quad \text{a) } I = \int \frac{e^{2x} + e^x \sin x}{e^x} dx; \quad \text{b) } I = \int \frac{4-x}{2+\sqrt{x}} dx;$$

$$\text{c) } I = \int \frac{18x^2 - 2}{3x-1} dx; \quad \text{d) } I = \int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1) dx.$$

Rezultat:

$$\text{a) } I = e^x - \cos x + C; \quad \text{b) } I = 2x - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C;$$

$$\text{c) } I = 3x^2 + 2x + C; \quad \text{d) } I = \frac{2x^2\sqrt{x}}{5} + x + C.$$

Rešiti sledeće integrale metodom smene:

$$5. \quad \text{a) } I = \int (5-2x)^8 dx; \quad \text{b) } I = \int \frac{dx}{3x+1}; \quad \text{c) } I = \int x^2 (x^3+3)^2 dx;$$

Rešenje:

$$\text{a) } I = \left\{ \begin{array}{l} 5-2x=t \\ -2dx=dt \end{array} \right\} = -\frac{1}{2} \int t^8 dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^9}{9} + C = -\frac{1}{19} (4-2x)^9 + C;$$

$$\text{b) } I = \left\{ \begin{array}{l} 3x+1=t \\ 3dx=dt \end{array} \right\} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3} \ln|t| + C = \frac{1}{3} \ln|3x+1| + C$$

$$\text{c) } I = \left\{ \begin{array}{l} x^3+3=t \\ 3x^2dx=dt \end{array} \right\} = \frac{1}{3} \int t^2 dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{9} (x^3+3)^3 + C.$$

$$6. \quad \text{a) } I = \int \frac{x}{1+x^2} dx; \quad \text{b) } I = \int \frac{x}{(1+x^2)^2} dx; \quad \text{c) } I = \int \frac{2x+3}{x^2+3x-1} dx.$$

Rešenje:

$$\text{a) } I = \left\{ \begin{array}{l} 1+x^2=t \\ 2xdx=dt \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| + C = \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C;$$

$$\text{b) } I = \left\{ \begin{array}{l} 1+x^2=t \\ 2xdx=dt \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2} \int t^{-2} dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t} + C = -\frac{1}{2(1+x^2)} + C;$$

$$\text{c) } I = \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 3x - 1 = t \\ (2x + 3)dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x^2 + 3x - 1| + C.$$

$$7. \quad \text{a) } I = \int x^2 \sqrt{x^3 - 9} dx; \quad \text{b) } I = \int x \sqrt[3]{x-3} dx; \quad \text{c) } I = \int \frac{(2 + \sqrt{x})^3}{\sqrt{x}} dx.$$

Rešenje:

$$\text{a) } I = \left\{ \begin{array}{l} x^3 - 9 = t \\ 3x^2 dx = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{3} \int \sqrt{t} dt = \frac{1}{3} \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9} (\sqrt{x^3 - 9})^3 + C;$$

$$\text{b) } I = \left\{ \begin{array}{l} x - 3 = t^3, x = t^3 + 3 \\ dx = 3t^2 dt \end{array} \right\} = \int (t^3 + 3) \cdot 3t^2 dt = 3 \int (t^6 + 3t^3) dt =$$

$$= 3 \left(\frac{t^7}{7} + 3 \cdot \frac{t^4}{4} \right) + C = \frac{3}{7} (\sqrt[3]{x-2})^7 + \frac{9}{4} (\sqrt[3]{x-2})^4 + C;$$

$$\text{c) } I = \left\{ \begin{array}{l} 2 + \sqrt{x} = t \\ \frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt \end{array} \right\} = 2 \int t^3 dx = \frac{2}{4} t^4 + C = \frac{1}{2} (2 + \sqrt{x})^4 + C.$$

$$8. \quad \text{a) } I = \int e^{2x} dx; \quad \text{b) } I = \int e^{-x^3} x^2 dx; \quad \text{c) } I = \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx;$$

$$\text{d) } I = \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx.$$

Rešenje:

$$\text{a) } I = \left\{ \begin{array}{l} 2x = t \\ 2dx = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C = \frac{1}{2} e^{2x} + C;$$

$$\text{b) } I = \left\{ \begin{array}{l} -x^3 = t \\ -3x^2 dx = dt \end{array} \right\} = -\frac{1}{3} \int e^t dt = -\frac{1}{3} e^{-x^3} + C;$$

$$\text{c) } I = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ \frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt \end{array} \right\} = 2 \int e^t dt = 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} + C;$$

$$\text{d)} I = \left\{ \begin{array}{l} e^x + 1 = t \\ e^x dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|e^x + 1| + C.$$

$$9. \quad \text{a)} I = \int \frac{\ln^2 x}{x} dx; \quad \text{b)} I = \int \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} dx.$$

Rešenje:

$$\text{a)} I = \left\{ \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{array} \right\} = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\ln^3 x}{3} + C;$$

b)

$$I = \left\{ \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t \ln t} = \left\{ \begin{array}{l} \ln t = s \\ \frac{dt}{t} = ds \end{array} \right\} = \int \frac{ds}{s} = \ln|s| + C = \ln|\ln t| + C = \ln|\ln(\ln x)| + C$$

Rezultate ovih integrala korisno je znati i koristiti u rešavanju složenijih integrala. Često ih nazivamo **polutablični integrali**.

$$\text{a)} \int \frac{dx}{bx+a} = \frac{1}{b} \ln|bx+a| + C, b \neq 0; \quad \text{b)} \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C, a \neq 0;$$

$$\text{c)} \int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C, a \neq 0; \quad \text{d)} \int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + C, a \neq 0.$$

Rešenje

$$\text{a)} \int \frac{dx}{bx+a} = \left\{ \begin{array}{l} bx+a=t \\ dx = \frac{1}{b} dt \end{array} \right\} = \frac{1}{b} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{b} \ln|t| + C = \frac{1}{b} \ln|bx+a| + C, b \neq 0;$$

$$\text{b)} \int e^{ax} dx = \left\{ \begin{array}{l} ax=t \\ dx = \frac{1}{a} dt \end{array} \right\} = \frac{1}{a} \int e^t dt = \frac{1}{a} e^{ax} + C;$$

primeri pod **c)** i **d)** se dokazuju istom smenom kao u predhodnom slučaju.

10. a) $I = \int (e^{-x} + 1) dx$; b) $I = \int (e^{-x} + e^{-2x}) dx$;
 c) $I = \int (\sin 2x + \cos 3x) dx$.

Rešenje

a) $I = -e^{-x} + x + C$;

b) $I = -e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + C$;

c) $I = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + C$.

11. a) $I = \int \sin^3 x \cos x dx$; b) $I = \int \operatorname{tg} x dx$;

c) $I = \int \frac{x}{\sin^2 2x^2} dx$; d) $I = \int \frac{\sin x}{1 + 3\cos x} dx$.

Rešenje:

a) $I = \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right\} = \int t^3 dt = \frac{1}{4}t^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4 x + C$;

b) $I = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right\} = -\int \frac{dt}{t}$
 $= -\ln |t| + C = -\ln |\cos x| + C = \ln \frac{1}{|\cos x|} + C$;

c) $I = \left\{ \begin{array}{l} 2x^2 = t \\ 4x dx = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{4} \operatorname{ctgt} + C = -\frac{1}{4} \operatorname{ctg} 2x^2 + C$;

d) $I = \left\{ \begin{array}{l} 1 + 3\cos x = t \\ -3\sin x dx = dt \end{array} \right\} = -\frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{3} \ln |t| + C = -\frac{1}{3} \ln |1 + 3\cos x| + C$;

12. a) $I = \int \sin^2 x dx$; b) $I = \int \cos^4 x dx$;

Rešenje

a) $I = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C$;

$$\begin{aligned}
 \text{b) } I &= \int (\cos^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx \\
 &= \frac{1}{4} \int \left(1 + 2 \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx = \frac{1}{4} \left(x + \sin 2x + \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{4} \sin 4x \right) \right) + C \\
 &= \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C.
 \end{aligned}$$

$$13. \quad \text{a) } I = \int \sin^3 x dx; \quad \text{b) } I = \int \sin^3 x \cdot \cos^3 x dx.$$

Rešenje:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } I &= \int \sin^2 x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right\} \\
 &= -\int (1 - t^2) dt = -t + \frac{t^3}{3} + C = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C; \\
 \text{b) } I &= \int \sin^3 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right\} = \int t^3 (1 - t^2) dt \\
 &= \frac{t^4}{4} - \frac{t^6}{6} + C = \frac{\sin^4 x}{4} - \frac{\sin^6 x}{6} + C.
 \end{aligned}$$

$$14. \quad \text{a) } I = \int \frac{dx}{\sin x}; \quad \text{b) } I = \int \frac{dx}{\arcsin x \sqrt{1-x^2}}; \quad \text{c) } I = \int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx.$$

Rešenje:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } I &= \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{\cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \\ \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C;
 \end{aligned}$$

$$\text{b) } I = \left\{ \begin{array}{l} \arcsin x = t \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\arcsin x| + C;$$

$$\text{c) } I = \left\{ \begin{array}{l} t = \ln \frac{1+x}{1-x} \\ dt = \frac{2}{1-x^2} dx \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int t dt = \frac{1}{4} t^2 + C = \frac{1}{4} \ln^2 \frac{1+x}{1-x} + C.$$

$$15. \quad \text{a) } I = \int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}; \quad \text{b) } I = \int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx; \quad \text{c) } I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}, x > 1.$$

Rešenje:

$$\text{a) } I = \left\{ \begin{array}{l} e^x - 1 = t^2, e^x = t^2 + 1 \\ e^x dx = 2t dt, dx = \frac{2t dt}{1+t^2} \end{array} \right\} = 2 \int \frac{dt}{1+t^2} = 2 \operatorname{arctg} t + C = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{e^x - 1} + C;$$

$$\text{b) } I = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \\ \frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt, dx = 2t dt \end{array} \right\} = 2 \int \frac{\operatorname{arctg} t}{1+t^2} dt = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{arctg} t = s \\ \frac{dt}{1+t^2} = ds \end{array} \right\}$$

$$= 2 \int s ds = s^2 + C = \operatorname{arctg}^2 t + C = \operatorname{arctg}^2 \sqrt{x} + C;$$

$$\text{c) } I = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x} = t \\ -\frac{1}{x^2} dx = dt \end{array} \right\} = - \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin t + C = -\arcsin \frac{1}{x} + C$$

Dokazati

$$\text{a) } \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C; \quad a \neq 0.$$

$$\text{b) } \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C; \quad a > 0$$

Rešenje:**a)**

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{a} = t \\ dx = a dt \end{array} \right\} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

b)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{a} = t \\ dx = a dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$16. \quad \text{a)} I = \int \frac{dx}{7+5x^2}; \quad \text{b)} I = \int \frac{x}{x^4+2} dx; \quad \text{c)} I = \int \frac{\cos x dx}{4+\sin^2 x};$$

$$\text{d)} I = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}; \quad \text{e)} I = \int \frac{x}{x^4+2x^2+5} dx.$$

Rešenje:

$$\text{a)} I = \int \frac{dx}{7+2x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\frac{7}{2} + x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{7}{2}}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{\frac{7}{2}}} + C = \frac{1}{\sqrt{14}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2}{7}} \cdot x + C;$$

$$\text{b)} I = \left\{ \begin{array}{l} x^2 = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{2} \right)^2 + C;$$

$$\text{c)} I = \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sin x}{2} + C;$$

$$\text{d)} I = \left\{ \begin{array}{l} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg} e^x + C;$$

$$\text{e)} I = \int \frac{x}{x^4+2x^2+5} dx = \left\{ \begin{array}{l} x^2 = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+2t+5} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{(t+1)^2+4}$$

$$= \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{t+1}{2} + C = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x^2+1}{2} + C.$$

$$17. \quad \text{a) } I = \int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}; \quad \text{b) } I = \int \frac{\cos x}{\sqrt{2-\sin^2 x}} dx;$$

$$\text{c) } I = \int \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}} dx.$$

Rešenje:

$$\text{a) } I = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - x^2}} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x}{\sqrt{3}} + C;$$

$$\text{b) } I = \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{\sqrt{2-t^2}} = \arcsin \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \arcsin \frac{\sin x}{\sqrt{2}} + C;$$

$$\text{c) } I = \left\{ \begin{array}{l} x^3 = t \\ 3x^2 dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin x^3 + C.$$

Dokazati $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C.$

Rešenje:

Oba integrala rešavamo Ojlerovim smenama.

$$\sqrt{a^2 + x^2} = t - x \Leftrightarrow x = \frac{t^2 - a^2}{2t}, dx = \frac{t^2 + a^2}{2t^2} dt, \sqrt{a^2 + t^2} = \frac{t^2 + a^2}{2t}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \int \frac{1}{\frac{t^2 + a^2}{2t}} \cdot \frac{t^2 + a^2}{2t^2} dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x + \sqrt{a^2 + x^2}| + C.$$

$$18. \quad \text{a) } I = \int \frac{dx}{\sqrt{9+4x^2}}; \quad \text{b) } I = \int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}} dx; \quad \text{c) } I = \int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-1}}.$$

Rešenje:

$$\text{a) } I = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{4} + x^2}} = \frac{1}{2} \cdot \ln \left| x + \sqrt{\frac{9}{4} + x^2} \right| + C = \frac{1}{2} \cdot \ln \left| x + \frac{1}{2} \sqrt{9+4x^2} \right| + C;$$

b)

$$I = \int \left(\frac{x}{\sqrt{x^2-4}} + \frac{3}{\sqrt{x^2-4}} \right) dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} dx + 3 \ln |x + \sqrt{x^2-4}| = \left\{ \begin{array}{l} x^2-4=t^2 \\ x dx = t dt \end{array} \right\}$$

$$\int dt + 3 \ln |x + \sqrt{x^2-4}| = t + 3 \ln |x + \sqrt{x^2-4}| + C = \sqrt{x^2-4} + 3 \ln |x + \sqrt{x^2-4}| + C$$

$$\text{c) } I = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| x + \sqrt{x^2 - \frac{1}{5}} \right| + C.$$

Dokazati: $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$

Rešenje:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2-a^2} &= \int \frac{dx}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2a} (\ln |x-a| - \ln |x+a|) + C = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C. \end{aligned}$$

$$19. \quad \text{a) } I = \int \frac{dx}{5-4x^2}; \quad \text{b) } I = \int \frac{dx}{x^2-7}.$$

Rešenje:

$$\text{a) } I = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\frac{5}{4} - x^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}} \ln \left| \frac{x + \frac{\sqrt{5}}{2}}{x - \frac{\sqrt{5}}{2}} \right| + C = \frac{1}{4\sqrt{5}} \cdot \ln \left| \frac{2x + \sqrt{5}}{2x - \sqrt{5}} \right| + C;$$

$$\text{b) } I = \frac{1}{2\sqrt{7}} \ln \left| \frac{x - \sqrt{7}}{x + \sqrt{7}} \right| + C.$$

$$20. \quad \text{a) } I = \int \frac{dx}{17+2x+x^2}; \quad \text{b) } I = \int \frac{dx}{x^2+2x+3}; \quad \text{c) } I = \int \frac{dx}{x^2-5x+6}.$$

Rešenje:

$$\text{a) } I = \int \frac{dx}{x^2+2x+1+16} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4^2} = \left\{ \begin{array}{l} x+1=t \\ dx=dt \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 4^2} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{t}{4} + C = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{4} + C;$$

b)

$$I = \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 2} = \left\{ \begin{array}{l} x+1=t \\ dx=dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t^2 + 2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$$

$$\text{c) } I = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-5}{x-1} \right| + C.$$

$$21. \quad \text{a) } I = \int \frac{dx}{\sqrt{27-x^2+6x}};$$

$$\text{b) } I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-6x+5}};$$

$$\text{c) } I = \int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}} dx;$$

$$\text{d) } I = \int \frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}}.$$

Rešenje:

a)

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{36-(x-3)^2}} = \left\{ \begin{array}{l} x-3=t \\ dx=dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{\sqrt{36-t^2}} = \arcsin \frac{t}{6} + C = \arcsin \frac{x-3}{6} + C$$

b)

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+\frac{5}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| x - \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{2x^2-6x+5}{2}} \right| + C$$

c)

$$I = \left\{ \begin{array}{l} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{\sqrt{1+t+t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} = \left\{ \begin{array}{l} t+\frac{1}{2}=u \\ dt=du \end{array} \right\} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + \frac{3}{4}}} =$$

$$\ln \left| u + \sqrt{u^2 + \frac{3}{4}} \right| + C = \ln \left| t + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \right| + C = \ln \left| e^x + \frac{1}{2} + \sqrt{e^{2x} + e^x + 1} \right| + C$$

d)

$$I = \left\{ \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{dx}{x} = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-4t-t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{5-(t+2)^2}} = \arcsin \frac{t+2}{\sqrt{5}} + C = \arcsin \frac{\ln x + 2}{\sqrt{5}} + C$$

Integrali oblika $\int R(\sin x, \cos x) dx$, gde je R racionalna funkcija rešavaju se

smenom $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, gde je $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$.

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2},$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t, dx = 2 \frac{dt}{1+t^2}.$$

Izračunati integrale:

22. a) $I = \int \frac{dx}{\sin x};$

b) $I = \int \frac{dx}{\cos x};$

c) $I = \int \frac{dx}{1 - \sin x};$

d) $I = \int \frac{1}{5 + \sin x + 3 \cos x} dx.$

Rešenje:

a) $I = \int \frac{2dt}{\frac{1+t^2}{2t}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C;$

b) $I = \int \frac{dx}{\sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right)} = \left\{ \begin{array}{l} x + \frac{\pi}{2} = t \\ dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{\sin t} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C;$

c) $I = \int \frac{2}{1 - \frac{1+t^2}{2t}} dt = 2 \int \frac{dt}{t^2 - 2t + 1} = 2 \int \frac{dt}{(t-1)^2} = -\frac{2}{t-1} + C = \frac{2}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + C;$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad I &= \int \frac{1}{5 + \frac{2t}{1+t^2} + 3 \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t^2 + t + 4} = \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{t + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{2}} + C = \frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{15}} + C = \frac{2}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{15}} + C. \end{aligned}$$

$$23. \quad \text{a)} \quad I = \int \frac{dx}{3+5 \cos x}; \text{b)} \quad I = \int \frac{\sin x}{1-\sin x} dx; \text{c)} \quad I = \int \frac{1}{5-4 \sin x + 3 \cos x} dx.$$

Rešenje:

$$\text{a)} \quad I = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{3+5 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}} dt = \int \frac{dt}{4-t^2} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t+2}{t-2} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2} \right| + C$$

$$\text{b)} \quad I = -x + \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x} + C; \quad \text{c)} \quad I = \frac{1}{2 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + C.$$

Integrali oblika $\int R(\sin^{2n} x, \cos^{2m} x) dx$ rešavaju se smenom $\operatorname{tg} x = t$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\begin{aligned} 24. \quad \text{a)} \quad I &= \int \frac{dx}{1+3 \sin^2 x}; & \text{b)} \quad I &= \int \frac{dx}{4 \cos^2 x + 9 \sin^2 x}; \\ \text{c)} \quad I &= \int \frac{dx}{4-3 \cos^2 x + 5 \sin^2 x}; & \text{d)} \quad I &= \int \frac{dx}{\cos^4 x}. \end{aligned}$$

Rešenje:

$$\text{a)} \quad I = \int \frac{dt}{\left(1 + \frac{3t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)} = \int \frac{dt}{1+4t^2} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\frac{1}{4} + t^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2 \operatorname{tg} x) + C;$$

$$\text{b) } I = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{4 - \frac{1}{1+t^2} + 9 \frac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{4+9t^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{3t}{2} + C = \frac{1}{6} \cdot \operatorname{arctg} \frac{3 \operatorname{tg} x}{2} + C ;$$

$$\text{c) } I = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{4 - \frac{3}{1+t^2} + \frac{5t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{9t^2+1} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} 3t + C = \frac{1}{3} \cdot \operatorname{arctg} (3 \operatorname{tg} x) + C ;$$

$$\text{d) } I = \int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\left(\frac{1}{1+t^2}\right)^2} = \int (1+t^2) dt = t + \frac{1}{3} t^3 + C = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C .$$

Integrali oblika $\int R(\operatorname{tg} x) dx$ rešavaju se smenom $\operatorname{tg} x = t$, $x = \operatorname{arctg} t$ i

$$dx = \frac{dt}{1+t^2} .$$

$$25. \quad \text{a) } I = \int \frac{dx}{1+2 \operatorname{tg} x} ; \quad \text{b) } I = \int \operatorname{tg}^2 x dx ;$$

$$\text{c) } I = \int \operatorname{ctg}^3 x dx ; \text{d) } I = \int (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^3 dx .$$

Rešenje:

$$\text{a) } I = \int \frac{1}{1+2t} \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{(1+2t)(1+t^2)} = \frac{x}{5} + \frac{2}{5} \ln |2 \operatorname{tg} x + 1| + \frac{1}{5} \ln |\cos^2 x| + C ;$$

$$\text{b) } I = \int \frac{t^2}{1+t^2} dt = \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt = t - \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{tg} x - x + C ;$$

$$\text{c) } I = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x - \ln |\sin x| + C ;$$

$$\text{d) } I = \frac{1}{2} (\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{ctg}^2 x) + 2 \ln |\operatorname{tg} x| + C .$$

Rešiti integrale metodom parcijalne integracije:

27. a) $I = \int x e^x dx$; b) $I = \int x \sin x dx$;

c) $I = \int x \cdot 2^{-x} dx$; d) $I = \int \frac{x}{\sin^2 x} dx$.

Rešenje:

a) $I = \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = e^x dx, \quad v = e^x \end{array} \right\} = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C$;

b)

$$I = \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = \sin x dx, \quad v = -\cos x \end{array} \right\} = -x \cdot \cos x + \int \cos x dx = -x \cdot \cos x + \sin x + C$$

c)

$$I = \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = 2^{-x} dx, \quad v = -\frac{1}{\ln 2} 2^{-x} \end{array} \right\} = -\frac{x \cdot 2^{-x}}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 2} \int 2^{-x} dx = -\frac{x \cdot 2^{-x}}{\ln 2} - \frac{2^{-x}}{\ln^2 2} + C$$

d)

$$I = \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = \frac{1}{\sin^2 x} dx, \quad v = -\operatorname{ctgx} \end{array} \right\} = -x \cdot \operatorname{ctgx} + \int \operatorname{ctgx} dx = -x \cdot \operatorname{ctgx} + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx =$$

$$= -x \cdot \operatorname{ctgx} + \ln |\sin x| + C.$$

28. a) $I = \int x^2 \cos x dx$;

b) $I = \int x^2 e^x dx$;

c) $I = \int (x^2 + x + 2) e^{2x} dx$;

d) $I = \int (x^2 + 5x + 6) \cos 2x dx$.

Rešenje:

a) $I = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2, \quad du = 2x dx \\ dv = \cos x dx, \quad v = \sin x \end{array} \right\} = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx = x^2 \sin x - 2J$

$$J = \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = \sin x dx, \quad v = -\cos x \end{array} \right\} = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x$$

$$I = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C;$$

Napomena:

U ovakvim primerima parcijalna integracija se ponavlja onoliko puta koliki je stepen polinoma.

$$\text{b) } I = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2, du = 2x dx \\ dv = e^x dx, v = e^x \end{array} \right\} = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2J$$

$$J = x e^x - e^x, \quad I = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C;$$

c)

$$I = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 + x + 2, du = (2x+1) dx \\ dv = e^{2x} dx, v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} (x^2 + x + 2) e^{2x} - \frac{1}{2} \int (2x+1) e^{2x} dx$$

$$= \frac{1}{2} (x^2 + x + 2) e^{2x} - \frac{1}{2} J;$$

$$J = \left\{ \begin{array}{l} 2x+1 = u, du = 2 dx \\ dv = e^{2x} dx, v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} (2x+1) e^{2x} - \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} (2x+1) e^{2x} - \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$I = \frac{1}{2} (x^2 + x + 2) e^{2x} - \frac{1}{4} (2x+1) e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + C = \frac{1}{2} (x^2 + 2) e^{2x} + C;$$

$$\text{d) } I = \frac{1}{4} (2x^2 + 10x + 11) \sin 2x + \frac{1}{4} (2x+5) \cos 2x + C.$$

$$29. \quad \text{a) } I = \int \ln x dx; \quad \text{b) } I = \int \operatorname{arctg} x dx;$$

$$\text{c) } I = \int \arcsin x dx; \quad \text{d) } I = \int \ln(x^2 + 1) dx.$$

Rešenje:

$$\text{a) } I = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x, du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx, v = x \end{array} \right\} = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C;$$

b)

$$I = \left\{ \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x, du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx, v = x \end{array} \right\} = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C$$

$$\text{c) } I = \left\{ \begin{array}{l} u = \arcsin x, du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx, v = x \end{array} \right\} = x \cdot \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \cdot \arcsin x - J$$

$$J = \left\{ \begin{array}{l} 1 - x^2 = t \\ -2x dx = dt \end{array} \right\} = -\frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = -t^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{1-x^2} + C$$

$$I = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C;$$

$$\begin{aligned} \text{d) } I &= \left\{ \begin{array}{l} u = \ln(x^2 + 1), du = \frac{2x}{x^2 + 1} dx \\ dv = dx, v = x \end{array} \right\} = x \ln(x^2 + 1) - 2 \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx \\ &= x \ln(x^2 + 1) - 2 \int \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

$$30. \quad \text{a) } I = \int e^x \sin x dx; \quad \text{b) } I = \int e^x \cos x dx;$$

Rešenje:

$$\begin{aligned} \text{a) } I &= \int e^x \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = e^x, du = e^x dx \\ dv = \sin x dx, v = -\cos x \end{array} \right\} = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = \\ &\left\{ \begin{array}{l} u = e^x, du = e^x dx \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{array} \right\} = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = \\ &= -e^x \cos x + e^x \sin x - I \end{aligned}$$

$$2I = -e^x \cos x + e^x \sin x + C \Leftrightarrow I = \frac{1}{2} (e^x (\sin x - \cos x)) + C;$$

$$\text{b) } I = \frac{1}{2} (e^x (\sin x + \cos x)) + C;$$

$$31. \quad \text{a) } I = \int x \cdot \operatorname{arctg} x dx;$$

$$\text{b) } I = \int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx;$$

$$\text{c) } I = \int x \cdot \arcsin x dx;$$

$$\text{d) } I = \int x^3 e^{-x^2} dx.$$

Rešenje:

a)

$$I = \left\{ \begin{array}{l} u = \arctg x, \, du = \frac{1}{1+x^2} dx \\ dv = x dx, \, v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx$$
$$= \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctg x + C$$
$$= \frac{1}{2} \left((x^2 + 1) \arctg x - x \right) + C;$$

b)

$$I = \left\{ \begin{array}{l} u = \arctg x, \, du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = \frac{dx}{x^2}, \, v = -\frac{1}{x} \end{array} \right\} = -\frac{\arctg x}{x} + \int \frac{dx}{x(1+x^2)} = -\frac{\arctg x}{x} + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx$$
$$= -\frac{\arctg x}{x} + \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C = -\frac{\arctg x}{x} + \ln \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + C;$$

c) $\frac{1}{4} \left((2x^2 - 1) \arcsin x + x\sqrt{1-x^2} \right) + C;$

d) $-\frac{x^2+1}{2} e^{-x^2} + C.$

32. a) $I = \int \sqrt{1+x^2} dx;$

b) $I = \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx;$

c) $I = \int x \ln(x^2 - 1) dx;$

d) $I = \int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx.$

Rešenje:

a) $I = \left\{ \begin{array}{l} u = \sqrt{1+x^2}, \, du = \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} \\ dv = dx, \, v = x \end{array} \right\} = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}} =$

$$= x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{x^2+1-1}{\sqrt{1+x^2}} dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \left(\frac{x^2+1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx =$$

$$= x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2} dx + \ln|x+\sqrt{1+x^2}| = x\sqrt{1+x^2} - I + \ln|x+\sqrt{1+x^2}|$$

$$2I = x\sqrt{1+x^2} + \ln|x+\sqrt{1+x^2}| \Leftrightarrow I = \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{1+x^2}| + C;$$

$$\text{b)} \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} + \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}| + C;$$

$$\text{c)} I = \frac{1}{2}(x^2 - 1)\ln(x^2 - 1) - \frac{1}{2}x^2 + C;$$

$$\text{d)} I = -\frac{1}{x}(\ln^2 x + 2\ln x + 2) + C.$$

$$33. \quad \text{a)} I = \int e^{\sqrt{x}} dx; \quad \text{b)} I = \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx;$$

$$\text{c)} \int \frac{\ln x}{x^2} dx; \quad \text{d)} I = \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Rešenje:

$$\text{a)} I = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x} = t, x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right\} = 2 \int t e^t dt = 2(t e^t - e^t) + C = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + C;$$

b)

$$I = \int \frac{1}{x} \cdot \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{1}{x}, \quad du = -\frac{1}{x^2} dx \\ dv = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx, v = \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = -e^{\frac{1}{x}} \end{array} \right\} = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} - \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} + e^{\frac{1}{x}} + C;$$

$$\text{c)} I = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C;$$

$$\text{d)} I = \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \arcsin x, du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ v = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx, v = -\sqrt{1-x^2} \end{array} \right\} =$$

$$-\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x + \int dx = -\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x + x + C.$$

Rešiti integrale racionalne funkcije:

34. a) $I = \int \frac{x^4 + 2}{x^2 + 1} dx$; b) $I = \int \frac{x^3}{x + 3} dx$.

Rešenje:

a) $I = \int \left(x^2 - 1 + \frac{3}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{x^3}{3} - x + 3 \arctg x + C$;

b) $I = \int \left(x^2 - 3x + 9 - \frac{27}{x + 3} \right) dx = \frac{x^3}{3} - 3 \cdot \frac{x^2}{2} + 9x - 27 \ln |x + 3| + C$.

35. a) $I = \int \frac{x - 3}{x^3 - x} dx$;

b) $I = \int \frac{x + 2}{x(x - 1)(x + 1)} dx$;

c) $I = \int \frac{x + 1}{x(x - 3)(x + 2)} dx$;

d) $I = \int \frac{x}{(x + 2)(x + 3)} dx$.

Rešenje:

a)

$$\frac{x - 3}{x^3 - x} = \frac{x - 3}{x(x + 1)(x - 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x - 1}$$

$$x - 3 = A(x^2 - 1) + Bx(x - 1) + Cx(x + 1)$$

$$x = 0 \Rightarrow A = 3$$

$$x = 1 \Rightarrow C = -1$$

$$x = -1 \Rightarrow B = -2$$

$$I = \int \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{x + 1} - \frac{1}{x - 1} \right) dx$$

$$= 3 \ln |x| - 2 \ln |x + 1| - \ln |x - 1| + C = \ln \left| \frac{x^3}{(x - 1)(x + 1)^2} \right| + C ;$$

b) $\frac{x + 2}{x(x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 1}$

$$A = -2, B = \frac{3}{2}, C = \frac{1}{2}$$

$$I = \int \left(\frac{-2}{x} + \frac{3}{2} \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x + 1} \right) = -2 \ln |x| + \frac{3}{2} \ln |x - 1| + \frac{1}{2} \ln |x + 1| + C =$$

$$= \ln \frac{\sqrt{|x+1| \cdot |x-1|^3}}{x^2} + C;$$

$$\text{c) } I = -\frac{1}{6} \ln|x| + \frac{4}{15} \ln|x-3| - \frac{1}{10} \ln|x+2| + C;$$

$$\text{d) } I = -2 \ln|x+2| + 3 \ln|x+3| + C.$$

$$36. \quad \text{a) } I = \int \frac{x+2}{x^3-2x^2} dx; \quad \text{b) } I = \int \frac{dx}{x^2-6x+5}; \quad \text{c) } I = \int \frac{dx}{x^2-6x+13}.$$

Rešenje:

$$\text{a) } I = \frac{1}{x} + \ln \left| \frac{x-2}{x} \right| + C; \quad \text{b) } I = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-5}{x-1} \right| + C; \quad \text{c) } I = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-3}{2} + C.$$

$$37. \quad \text{a) } I = \int \frac{2x+1}{x^3+4x^2+4x} dx; \quad \text{b) } I = \int \frac{x^2+2}{(x-2)(x+1)^3} dx;$$

$$\text{c) } I = \int \frac{3x+2}{x(x+1)^2} dx; \quad \text{d) } I = \int \frac{dx}{x^3(x-1)^2}.$$

Rešenje:

$$\text{a) } \frac{2x+1}{x^3+4x^2+4x} = \frac{2x+1}{x(x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$$

$$2x+1 = A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx$$

$$2x+1 = x^2(A+B) + x(4A+2B+C) + 4A$$

$$A = \frac{1}{4}, B = -\frac{1}{4}, C = \frac{3}{2}$$

$$I = \int \left(\frac{1}{4x} - \frac{1}{4(x+2)} + \frac{3}{2(x+2)^2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{4} (\ln|x| - \ln|x+2|) - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x+2} + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x}{x+2} \right| - \frac{3}{2(x+2)} + C;$$

$$\text{b) } \frac{x^2+2}{(x-2)(x+1)^3} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3}$$

$$A = -\frac{2}{9}, B = \frac{2}{9}, C = \frac{5}{3}, D = -3$$

$$I = \int \left(-\frac{2}{9(x-2)} + \frac{2}{9(x+1)} + \frac{5}{3(x+1)^2} - \frac{3}{(x+1)^3} \right) dx$$

$$= \frac{2}{9} \ln \left| \frac{x+1}{x-2} \right| - \frac{5}{3(x+1)} + \frac{3}{2(x+1)^2} + C;$$

$$\text{c) } I = 2 \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + \frac{4x+3}{2(x+1)^2} + C;$$

$$\text{d) } I = -\frac{1}{2x^2} - \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} + 3 \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| + C.$$

$$38. \quad \text{a) } I = \int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)}; \quad \text{b) } I = \int \frac{dx}{x^3+1};$$

$$\text{c) } I = \int \frac{x^2-2x-1}{(x-1)x^2(x^2+1)} dx.$$

Rešenje:

a)

$$\frac{1}{(1+x) \cdot (1+x^2)} = \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$$

$$A = C = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}$$

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x} - \frac{1}{2} \int \frac{x-1}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x} - \frac{1}{2} \int \frac{x}{1+x^2} dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$\frac{1}{2} \ln|1+x| - \frac{1}{4} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} \arctg x + C;$$

b)

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{1}{3}, \quad C = \frac{2}{3}$$

$$I = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3} \int \frac{x-2}{x^2-x+1} dx = \frac{1}{3} \ln|x+3| - \frac{1}{3} I_1 =$$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int \frac{x-2}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx \left\{ \begin{array}{l} x-\frac{1}{2}=t \\ dx=dt \end{array} \right\} = \int \frac{t-\frac{3}{2}}{t^2+\frac{3}{4}} dt = \\
 &= \int \frac{t}{t^2+\frac{3}{4}} dt - \frac{3}{2} \int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \ln \left| t^2 + \frac{3}{4} \right| - \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = \\
 &= \frac{1}{2} \ln |x^2 - x + 1| - \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C \\
 I &= \frac{1}{3} \ln |x+1| - \frac{1}{6} \ln (x^2 - x + 1) + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C ;
 \end{aligned}$$

$$\text{c) } I = -\ln|x-1| + 3\ln|x| - \frac{1}{x} - \ln|x^2+1| + C.$$

$$39. \quad \text{a) } I = \int \frac{3x^2+2x-1}{(x-1)(x^2+1)} dx; \quad \text{b) } I = \int \frac{3x}{x^3+1} dx;$$

$$\text{c) } I = \int \frac{dx}{x(x^2+1)}.$$

Rešenje:

$$\text{a) } I = 2\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 3\operatorname{arctg}x + C;$$

$$\text{b) } I = -\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x^2-x+1| + \sqrt{3}\operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C;$$

$$\text{c) } I = -\frac{x}{(x^2-1)^2} + C.$$

$$40. \quad \text{a) } I = \int \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt[4]{\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^3}}; \quad \text{b) } I = \int \frac{\sqrt{2x+3}}{x} dx;$$

$$\text{c) } I = \int \frac{1+\sqrt[3]{x-1}}{1-\sqrt[3]{x-1}} dx.$$

Rešenje:

$$\text{a) } I = \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-3}{x+1} = t \\ \frac{dx}{(x+1)^2} = \frac{1}{4} dt \end{array} \right\} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\sqrt[4]{t^3}} = \frac{1}{4} \int t^{-\frac{3}{4}} dt = t^{\frac{1}{4}} + C = \sqrt[4]{\frac{x-3}{x+1}} + C;$$

b)

$$I = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2x+3} = t, \quad x = \frac{t^2-3}{2} \\ dx = t dt \end{array} \right\} = 2 \int \frac{t^2}{t^2-3} dt = 2 \int \frac{t^2-3+3}{t^2-3} dt = 2 \int \left(1 + \frac{3}{t^2-3} \right) dt$$

$$2 \left(t + 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}} \right| \right) + C = 2\sqrt{2x+3} + \sqrt{3} \ln \left| \frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3}}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3}} \right| + C;$$

c)

$$I = \left\{ \begin{array}{l} x-1 = t^3 \\ dx = 3t^2 dt \end{array} \right\} = 3 \int \frac{(1+t)t^2}{1-t} dt = -3 \int \frac{t^3+t^2}{t-1} dt =$$

$$= -3 \int \left(t^2 + 2t + 2 + \frac{2}{t-1} \right) dt = -3 \left(\frac{t^3}{3} + t^2 + 2t + 2 \ln|t-1| \right) + C =$$

$$= (1-x) - 3(\sqrt[3]{x-1})^2 - 6 \cdot \sqrt[3]{x-1} - 6 \ln|\sqrt[3]{x-1}-1| + C$$

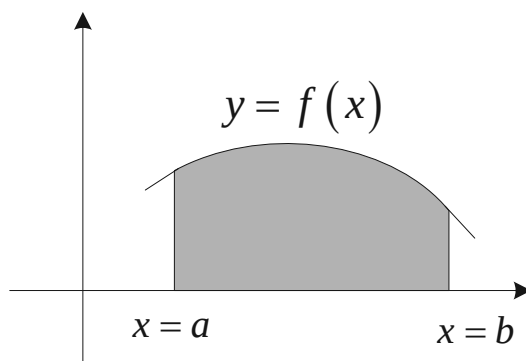
6.2. ODREĐENI INTEGRALI

Kao što smo već naglasili, pojam integrala istorijski je vezan sa problemom merenja površine dela ravni ograničenog nekom krivom linijom. Iz tog razloga u definisanje određenog integrala može da se krene od pojma krivolinijskog trapeza i izračunavanja njegove površine.

6.2.1. POVRŠINA KRIVOLINIJSKOG TRAPEZA

Neka je funkcija $f(x)$ nenegativna, neprekida i ograničena na intervalu $[a, b]$.

Krivolinijski trapez predstavlja figuru ograničenu osom Ox , grafikom funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ i pravama $x = a$, $x = b$.



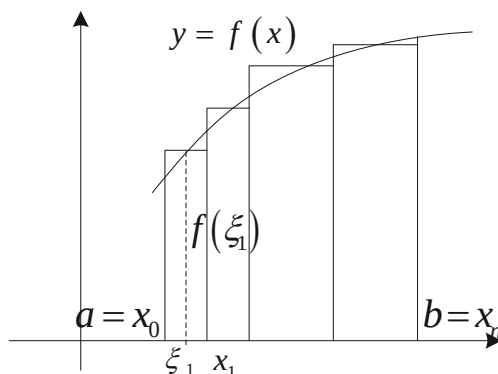
Da bi se izračunala njegova površina, podeli se interval $[a, b]$ na n proizvoljnih delova tačkama $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, tako da je

$$x_1 - x_0 = \Delta x_1, x_2 - x_1 = \Delta x_2, \dots, x_n - x_{n-1} = \Delta x_n.$$

U svakom intervalu $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$ izabere se proizvoljna tačku ξ_i i formiraju proizvodi $\Delta x_i f(\xi_i)$. Ovaj proizvod predstavlja površinu bilo kog pravougaonika stranica Δx_i i $f(\xi_i)$.

Zbir površina svih ovako dobijenih pravougaonika:

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$



Ako postoji granična vrednost, nezavisno od podele intervala $[a, b]$ na n delova i izbora tačaka ξ_i , tj.

$$\lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} S_n = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

onda je ona je **površina krivolinijskog trapeza**

6.2.2. DEFINICIJA ODREĐENOG INTEGRALA

- Neka je funkcija $f(x)$ definisana i ograničena na intervalu $[a, b]$. Neka se interval $[a, b]$ podeli tačkama $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ na n delova takvih da je $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, ..., $x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$.

U svakom intervalu $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$ izabere se proizvoljna tačka ξ_i i formira

$$\text{suma } S_n = f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Ovaj zbir zove se **integralna suma** funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$.

- Ako postoji granična vrednost

$$\lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} S_n = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = I,$$

ona se zove **određeni integral** funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$.

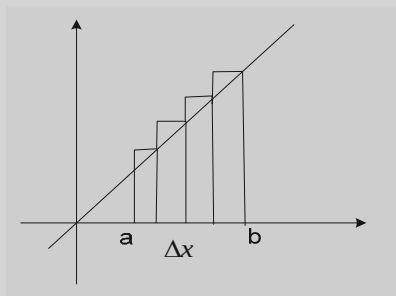
- **Određeni integral** funkcije $f(x)$ simbolički obeležava se sa

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

- Funkcija $f(x)$ se zove **podintegralna funkcija**.
- Broj a je **donja**, a broj b **gornja** granica integrala.

Primer:

Izračunati površinu ograničenu grafikom funkcije $f(x) = x$ na intervalu $[a, b]$ i ordinatama $f(a)$ i $f(b)$, ($a > 0, b > 0$).



Rešenje:

Podelimo interval $[a, b]$ na n jednakih delova, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Zbir površina svih pravougaonika čije su osnovice Δx , a visine redom $a + \Delta x$, $a + 2\Delta x$, ..., $a + n\Delta x$ je

$$S_n = \Delta x(a + \Delta x) + \Delta x(a + 2\Delta x) + \dots + \Delta x(a + n\Delta x) = \Delta x(na + \Delta x(1 + 2 + 3 + \dots + n))$$

$$= \Delta x(na + \Delta x(1 + 2 + 3 + \dots + n)) = \Delta x\left(na + \Delta x \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$= \Delta x na + \Delta x^2 \frac{n(n+1)}{2} = \frac{b-a}{n} na + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \frac{n(n+1)}{2} = (b-a)a + (b-a)^2 \frac{(n+1)}{2n}$$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left((b-a) \cdot a + (b-a)^2 \cdot \frac{(n+1)}{2n} \right) = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Po definiciji određenog integrala imamo da je $P = \int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$.

Ovaj primer pokazuje koliko je složeno izračunavati određeni integral koristeći pojam integralne sume čak i kod najjednostavnijih funkcija.

6.2.3. OSNOVNE TEOREME VEZANE ZA ODREĐENI INTEGRAL

- Ako funkcija $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ ima **određeni integral**, ona na tom intervalu **integrabilna**.
- **Neprekidna** funkcija $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ je **integrabilna** na tom intervalu.
- **Integrabilna** funkcija na intervalu $[a, b]$ mora biti **ograničena** na tom intervalu. (obrnuto ne važi).
- **Ograničena** funkcija na intervalu $[a, b]$ sa konačnim brojem prekida je **integrabilna** na tom intervalu.
- Ako je funkcija $f(x)$ nenegativna i integrabilna, onda izraz $\int_a^b f(x) dx$ predstavlja površinu ograničenu lukom krive, x-osom i pravama $x = a$ i $x = b$.

6.2.4. OSNOVNE OSOBINE ODREĐENOG INTEGRALA

Navodimo osnovne osobine bez dokaza

- $\int_a^a f(x) dx = 0;$
- $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx;$
- $\int_a^b C \cdot f(x) dx = C \cdot \int_a^b f(x) dx \quad C = const ;$
- $\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx ;$
- Ako tačka c pripada intervalu $[a, b]$ tj. $a < c < b$, tada važi

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx .$$

6.2.5. VEZA ODREĐENOG I NEODREĐENOG INTEGRALA NJUTN-LAJBNICOVA FORMULA

Njtn i Lajbnic su dokazali da postoji veza između određenog i neodređenog integrala. Na taj način dobijena je opšta metoda za rešavanje određenih integrala i mogućnost njihove primene u različitim oblastima nauke i prakse.

- Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna na intervalu $[a, b]$, a $F(x)$ njena primitivna funkcija, tj $F'(x) = f(x)$ tada je

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Dokaz:

Neka je $F_1(x)$ takođe primitivana funkcija funkcije $f(x)$, takva da je

$$F_1(x) = \int_a^x f(x) dx, \quad x \in [a, b].$$

Kako su $F(x)$ i $F_1(x)$ dve primitivne funkcije iste funkcije, one se razlikuju za neku konstantu C , pa je

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx + C.$$

Za $x = a$ dobija se $F(a) = \int_a^a f(x) dx + C = 0 + C = C$, čime je određena konstanta

$$C, \text{ pa je } F(x) = \int_a^x f(x) dx + F(a).$$

Neka je sada $x = b > a$. Iz predhodne relacije dobija se

$$F(b) = \int_a^b f(x) dx + F(a), \text{ odnosno } \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Primer:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = 1.$$

6.2.6. METODE REŠAVANJA ODREĐENOG INTEGRALA

METODA SMENE

- Neka je $f(x)$ složena, neprekidna funkcija na intervalu $[a, b]$. Neka se uvede smena $x = g(t)$. Ako funkcija $g(t)$ ima neprekidan izvod na intervalu $[\alpha, \beta]$ gde je $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$ i inverznu funkciju, tada je

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(t)) g'(t) dt$$

Uvođenjem smene $x = g(t)$ menjaju se granice integracije.

Ako su polazne granice integracije bile a i b , onda su nove granice $\alpha = g^{-1}(a)$ i $\beta = g^{-1}(b)$.

Primer:

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} \arcsin x = t, \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt, \\ x = 0, t = 0; x = \frac{1}{2}, t = \frac{\pi}{6} \end{array} \right\} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi^2}{72}.$$

METODA PARCIJALNE INTEGRACIJE

- Ako su $u(x)$ i $v(x)$ diferencijabilne funkcije na intervalu $[a, b]$, a vdu je integrabilna, tada je

$$\int_a^b u(x) dv(x) = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) du(x).$$

Dokaz je sličan kao kod pravila za neodređene integrale.

Primer:

$$I = \int_0^{\pi} x \sin x dx = -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = -\pi \cos \pi + \sin x \Big|_0^{\pi} = \pi.$$

6.3. NESVOJSTVENI INTEGRALI

Integrali kod kojih granice integracije nisu konačne ili podintegralna funkcija nije ograničena na intervalu $[a, b]$, nazivaju se **nesvojstveni integrali**.

6.3.1. INTEGRALI SA BESKONAČNIM GRANICAMA

Neka je funkcija $f(x)$ neprekidna na intervalu $[a, +\infty)$.

- Ako postoji granična vrednost $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$, onda se ona naziva **nesvojstvenim integralom** funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, +\infty)$, tj.

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx.$$

Ako je ova granična vrednost konačna, nesvojstveni integral **konvergira**, inače **divergira**.

- Analogno se definiše nesvojstveni integral funkcije $f(x)$ na intervalu $(-\infty, b]$, tj.

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^b f(x) dx.$$

- Ako su obe granice integracije beskonačne tada je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

Primer:

Izračunati integral $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$.

$$I = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{dx}{x^3} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{-2x^2} \right) \Big|_1^t = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{-2t^2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

Primer:

$$I = \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$$

$$I = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a x e^{-x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} x^2 = t, x dx = \frac{dt}{2} \\ x = 0, t = 0 \\ x = a, t = a^2 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^{a^2} e^{-t} dt = -\frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow +\infty} e^{-t} \Big|_0^{a^2} =$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\lim_{a \rightarrow +\infty} e^{-a^2} - 1 \right) = \frac{1}{2}$$

6.3.2. INTEGRALI NEOGRANIČENIH FUNKCIJA

- Neka je $y = f(x)$ neprekidna funkcija na intervalu $(a, b]$ i $f(x) \rightarrow \infty$ za $x \rightarrow a$.

Ako postoji granična vrednost $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx, \varepsilon > 0$, onda se ona naziva

nesvojstvenim integralom funkcije $f(x)$ na intervalu $(a, b]$, tj

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx.$$

- Neka je $y = f(x)$ neprekidna funkcija na intervalu $[a, b)$ i $f(x) \rightarrow \infty$ za $x \rightarrow b$.

Ako postoji granična vrednost $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx, \varepsilon > 0$, onda se ona naziva

nesvojstvenim integralom funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b)$, tj

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

- Neka je funkcija $y = f(x)$ neograničena u okolini tačke $c \in [a, b]$. Tada se nesvojstveni integral definiše sa

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx, \varepsilon > 0.$$

Primer:

Izračunati integral $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} 2\sqrt{x} \Big|_{\varepsilon}^1 = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} (1 - \sqrt{\varepsilon}) = 2.$$

Primer:

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$$

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x \ln x} = \left\{ \begin{array}{l} \ln x = t, \frac{dx}{x} = dt \\ x = 1, t = 0; x = 2, t = \ln 2 \end{array} \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^{\ln 2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln t \Big|_{\varepsilon}^{\ln 2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\ln \ln 2 - \ln \varepsilon) = +\infty;$$

ZADACI

Primenom Njtn – Lajbnicove formule izračunati sledeće integrale:

$$\begin{array}{ll} \text{1. a) } I = \int_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}; & \text{b) } I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \sin x \right) dx; \\ \text{c) } I = \int_0^1 \frac{dx}{x+2}; & \text{d) } I = \int_0^4 \left(1 + e^{\frac{x}{4}} \right) dx. \end{array}$$

Rešenje:

$$\text{a) } I = \int_8^{27} x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \Big|_8^{27} = \frac{3}{2} \left(\sqrt[3]{x} \right)^2 \Big|_8^{27} = \frac{3}{2} \left(\left(\sqrt[3]{27} \right)^2 - \left(\sqrt[3]{8} \right)^2 \right) = \frac{15}{2};$$

$$\text{b) } I = tg x \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} + \cos x \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = tg \frac{\pi}{4} - tg \left(-\frac{\pi}{4} \right) + \cos \frac{\pi}{4} - \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) = 2tg \frac{\pi}{4} = 2;$$

c) $I = \ln \frac{3}{2}$; d) $I = 4e$.

2. a) $I = \int_0^3 \sqrt{1+x} \, dx$; b) $I = \int_1^2 \frac{dx}{x+2\sqrt{x-1}}$; c) $I = \int_4^9 \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$.

Rešenje:

a)

$$I = \int_0^3 \sqrt{1+x} \, dx = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1+x} = t, x = t^2 - 1, dx = 2t \, dt \\ x = 0, t = 1, \quad x = 3, t = 2 \end{array} \right\} = 2 \int_1^2 t^2 \, dt =$$

$$= \frac{2}{3} t^3 \Big|_1^2 = \frac{2}{3} (8-1) = \frac{14}{3}$$

b)

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x+2\sqrt{x-1}} = \left\{ \begin{array}{l} x-1 = t^2, dx = 2t \, dt \\ x = 1, t = 0; x = 2, t = 1 \end{array} \right\} = \int_0^1 \frac{2t}{t^2 + 2t + 1} \, dt = \int_0^1 \frac{2t+2-2}{t^2 + 2t + 1} \, dt$$

$$= \int_0^1 \frac{2t+2}{t^2 + 2t + 1} \, dt - 2 \int_0^1 \frac{dt}{(t+1)^2} = \ln(t^2 + 1 + 2t) \Big|_0^1 + \frac{2}{t+1} \Big|_0^1 = \ln 4 - 1.$$

c) $I = 7$.

3. a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx$; b) $I = \int_2^e \frac{dx}{x \ln x}$; c) $I = \int_0^2 \frac{dx}{4+x^2}$.

Rešenje

$$a) \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \sin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx = \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t, -\sin x \, dx = dt \\ x = 0, t = \cos 0 = 1 \\ x = \frac{\pi}{2}, t = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \end{array} \right\}$$

$$= - \int_1^0 (1 - t^2) \, dt = \int_0^1 (1 - t^2) \, dt = t \Big|_0^1 - \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3};$$

$$\text{b) } I = \left\{ \begin{array}{l} \ln x = t, \frac{dx}{x} = dt \\ x = 2, t = \ln 2 \\ x = e, t = 1 \end{array} \right\} = \int_{\ln 2}^1 \frac{dt}{t} = \ln t \Big|_{\ln 2}^1 = \ln 1 - \ln \ln 2 = -\ln \ln 2;$$

$$\text{c) } I = \frac{\pi}{8}.$$

$$4. \quad \text{a) } I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^{2x} - 1} dx; \quad \text{b) } I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x (1 + \operatorname{tg} x)^2}; \quad \text{c) } I = \int_0^1 \frac{\arctg x}{1 + x^2} dx.$$

Rešenje:

$$\text{a) } I = \left\{ \begin{array}{l} e^x = t, e^x dx = dt \\ x = \ln 2, t = 2 \\ x = \ln 3, t = 3 \end{array} \right\} = \int_2^3 \frac{dt}{t^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_2^3 = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2};$$

b)

$$I = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \frac{dx}{\cos^2 x} = dt \\ x = \frac{\pi}{4}, t = 1; x = \frac{\pi}{3}, t = \sqrt{3} \end{array} \right\} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{(t+1)^2} = -\frac{1}{t+1} \Big|_1^{\sqrt{3}} =$$

$$= -\left(\frac{1}{\sqrt{3}+1} - \frac{1}{2} \right) = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{c) } I = \frac{\pi^2}{32}.$$

$$5. \quad \text{a) } I = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx. \quad \text{b) } I = \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx;$$

$$\text{c) } I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx; \quad \text{d) } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx.$$

Rešenje:**a)**

$$I = \left\{ \begin{array}{l} x = r \sin t, dx = r \cos t dt \\ x = 0, t = 0; x = r, t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt$$

$$I = \frac{r^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r^2 \pi}{4}$$

$$\text{b) } I = 4 - \pi;$$

$$\text{c) } I = 2 - \frac{\pi}{4};$$

$$\text{d) } I = \frac{\pi}{16}.$$

$$6. \quad \text{a) } I = \int_0^1 x e^x dx; \quad \text{b) } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx; \quad \text{c) } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(3x) dx,$$

Rešenje:

$$\text{a) } I = \left\{ \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = e^x dx, v = e^x \end{array} \right\} = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = x e^x \Big|_0^1 - e^x \Big|_0^1 = 1;$$

b)

$$I = \left\{ \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{array} \right\} = x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1;$$

$$\text{c) } I = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2, du = 2x dx \\ dv = \sin 3x dx, v = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{array} \right\} = -\frac{1}{3} x^2 \cos 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 3x dx$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 3x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \cos 3x dx, v = \frac{1}{3} \sin 3x \end{array} \right\} = \frac{1}{3} x \sin 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x dx =$$

$$-\frac{\pi}{6} + \frac{1}{9} \cos 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{6} - \frac{1}{9}.$$

7. **a)** $I = \int_1^e x^3 \ln x \, dx$; **b)** $I = \int_0^1 x^3 \operatorname{arctg} x \, dx$; **c)** $I = \int_0^1 \arcsin x \, dx$.

Rešenje:

$$\mathbf{a)} \quad I = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x, \, du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^3 dx, \, v = \frac{x^4}{4} \end{array} \right\} = \frac{x^4}{4} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{4} \int_1^e x^3 dx = \frac{x^4}{4} \ln x \Big|_1^e - \frac{x^4}{16} \Big|_1^e = \frac{3e^4 + 1}{16};$$

$$\mathbf{b)} \quad I = \left\{ \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x, \, du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = x^3 dx, \, v = \frac{x^4}{4} \end{array} \right\} = \frac{x^4}{4} \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \frac{1}{4} \int_2^4 \frac{x^4}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4} \int_2^4 \left(x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4} \left(\frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

$$\mathbf{c)} \quad I = \frac{\pi}{2} - 1.$$

8. **a)** $I = \int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$; **b)** $I = \int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; **c)** $I = \int_2^\infty \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

Rešenje

$$\mathbf{a)} \quad I = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_2^a \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \left\{ \begin{array}{l} x-1 = t^2; \, dx = 2t \, dt \\ x = 2, \, t = 1; \, x = a, \, t = \sqrt{a-1} \end{array} \right\} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^{\sqrt{a-1}} \frac{2t \, dt}{t(t^2+1)}$$

$$= 2 \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^{\sqrt{a-1}} \frac{dt}{t^2+1} = 2 \lim_{a \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} t \Big|_1^{\sqrt{a-1}} = 2 \lim_{a \rightarrow +\infty} (\operatorname{arctg} \sqrt{a-1} - \operatorname{arctg} 1) = \frac{\pi}{2};$$

$$\mathbf{b)} \quad I = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_2^a \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x} = t, \, -\frac{1}{x^2} dx = dt \\ x = 2, \, t = \frac{1}{2}; \, x = a, \, t = \frac{1}{a} \end{array} \right\} = - \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{a}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$= -\lim_{a \rightarrow +\infty} \left(\arcsin t \Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{a}} \right) = -\lim_{a \rightarrow +\infty} \arcsin \frac{1}{a} + \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}.$$

c) $I = \frac{1}{\ln 2}.$

9. a) $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 x dx}{x^2};$ b) $I = \int_1^{\infty} \frac{2x}{(1+x^2)^2} dx.$

Rešenje:

a) $I = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_1^a \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$

$$I_1 = \int_1^a \frac{\ln^2 x}{x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln^2 x, du = \frac{2 \ln x}{x} dx \\ dv = \frac{dx}{x^2}, v = -\frac{1}{x} \end{array} \right\} = -\frac{\ln^2 x}{x} \Big|_1^a + 2 \int_1^a \frac{\ln x}{x^2} dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x, du = \frac{1}{x} dx \\ dv = \frac{dx}{x^2}, v = -\frac{1}{x} \end{array} \right\} = -\frac{\ln^2 x}{x} \Big|_1^a + 2 \left(-\frac{\ln x}{x} \Big|_1^a + \int_1^a \frac{1}{x^2} dx \right) =$$

$$-\frac{\ln^2 x}{x} \Big|_1^a + 2 \left(-\frac{\ln x}{x} \Big|_1^a - \frac{1}{x} \Big|_1^a \right) = -\frac{\ln^2 a}{a} - 2 \cdot \frac{\ln a}{a} - \frac{2}{a} + 2.$$

$$I = \lim_{a \rightarrow +\infty} I_1 = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln^2 a}{a} - 2 \frac{\ln a}{a} - \frac{2}{a} + 2 \right) = 2.$$

Zato što je $\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 a}{a} \stackrel{L}{=} \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln a}{a} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{2}{a} = 0$ i $\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{\ln a}{a} \stackrel{L}{=} \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{a} = 0.$

b) $I = \frac{1}{2}.$

10. a) $I = \int_0^{\infty} e^{-x} \sin x dx$ b) $I = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos x dx.$

Rešenje:

a) $I = \frac{1}{2}$; b) $I = \frac{1}{2}$.

11. a) $I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$; b) $I = \int_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx$.

Rešenje

$$\begin{aligned} \text{a) } I &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0-} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0-} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_{\varepsilon}^1 = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0-} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(-1 + \frac{1}{\varepsilon} \right) = \infty; \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \text{c) } I &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0-} \int_{-1}^{\varepsilon} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{1}{x}, dt = -\frac{1}{x^2} dx \\ x = -1, t = -1; x = \varepsilon, t = \frac{1}{\varepsilon} \end{array} \right\} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0-} \int_{-1}^{\frac{1}{\varepsilon}} te^t dt \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0-} \left(te^t - e^t \right) \Big|_{-1}^{\frac{1}{\varepsilon}} = - \left(\frac{1}{\varepsilon} e^{\frac{1}{\varepsilon}} - e^{\frac{1}{\varepsilon}} + \frac{1}{e} + \frac{1}{e} \right) = -\frac{2}{e}; \end{aligned}$$

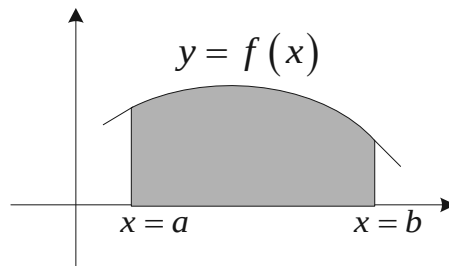
zato što je $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} e^{\frac{1}{\varepsilon}} = \left\{ \frac{1}{\varepsilon} = t \right\} = \lim_{t \rightarrow -\infty} te^t = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t}{e^{-t}} \stackrel{L}{=} \lim_{t \rightarrow -\infty} -\frac{1}{e^{-t}} = 0$; $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{\frac{1}{\varepsilon}} = 0$.

6.4. PRIMENE INTEGRALNOG RAČUNA

6.4.1. IZRAČUNAVANJE POVRŠINA RAVNIH FIGURA

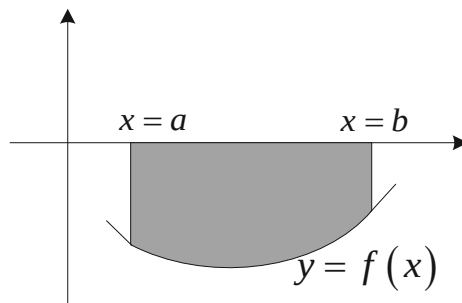
- Ako je $f(x)$ neprekidna i nenegativna funkcija na intervalu $[a, b]$, onda površina ograničena osom x , grafikom funkcije $f(x)$, pravama $x = a$ i $x = b$

iznosi
$$P = \int_a^b f(x) dx.$$



- Ako je funkcija $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ negativna onda je

$$P = -\int_a^b f(x) dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$



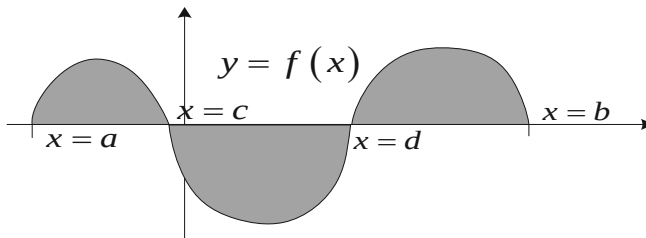
- Ako funkcija $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ menja znak onda se površina koju ova funkcija obrazuje sa x osom i pravama $x = a$ i $x = b$ dobija tako što se interval

podeli na podintervale u kojima je $f(x) \geq 0$ i na podintervale u kojima je $f(x) \leq 0$. Površina će biti zbir vrednosti integrala

$$P = \int_a^c f(x)dx + \left| \int_c^d f(x)dx \right| + \int_d^b f(x)dx$$

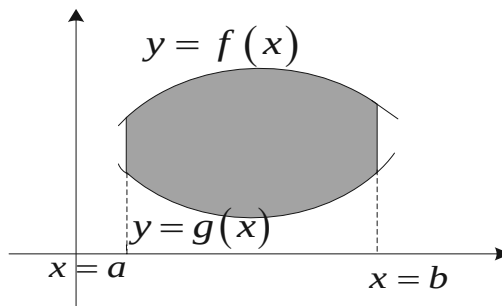
ili

$$P = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx.$$



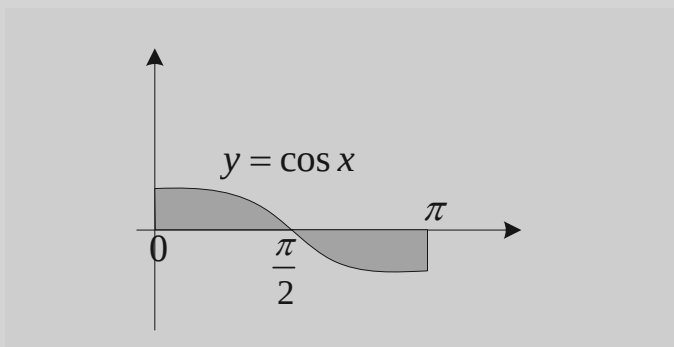
- Ako je oblast ograničena graficima neprekidnih funkcija $f(x)$ i $g(x)$, $f(x) \geq g(x)$ na intervalu $[a, b]$ i pravama $x = a$ i $x = b$, tada je površina razlika površina dva krivolinijska trapeza, tj.

$$P = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$



Primer:

Izračunati površinu ograničenu linijama $y = \cos x$, $x = 0$ i $x = \pi$.



$$P = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 - \sin \pi + \sin \frac{\pi}{2} = 2.$$

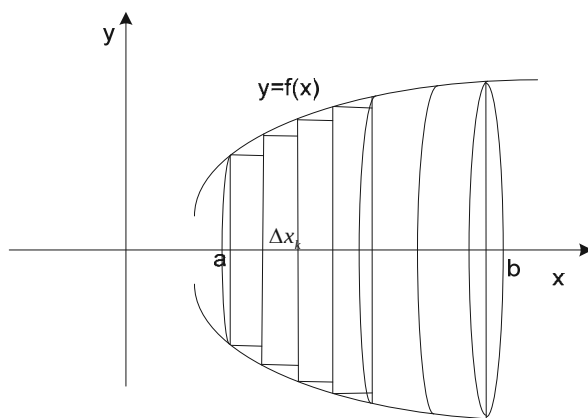
6.4.2. IZRAČUNAVANJE ZAPREMINA OBRTNIH TELA

Neka je funkcija $f(x)$ neprekidna i stalnog znaka na intervalu $[a, b]$.

- **Zapremini obrtnog tela** koje nastaje rotacijom grafika funkcije oko x ose je:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) \, dx.$$

Dokaz:



Ako se interval $[a, b]$ podeli tačkama $a = x_1, x_2, x_3, \dots, x_n = b$ na n delova, tada svaki od upisanih pravougaonika ima osnovicu $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ i visinu

$$y_k = f(x_k), k = 1, 2, \dots, n.$$

Pri obrtanju pravougaonika oko x ose obrazuje po jedan valjak zapremine

$$V_k = y_k^2 \pi \cdot \Delta x_k$$

gde je y_k poluprečnik osnove valjka, Δx_k njegova visina.

Zbir zapremine svih tih valjaka je

$$\sum_{k=1}^n y_k^2 \pi \cdot \Delta x_k.$$

- **Zapremina obrtnog tela** jednaka je sledećoj graničnoj vrednosti

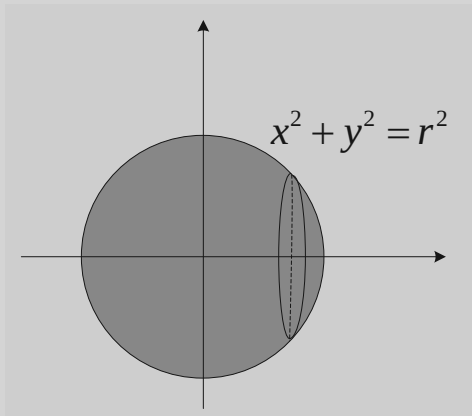
$$V = \lim_{\substack{\max \Delta x_k \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^n y_k^2 \pi \cdot \Delta x_k = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

- **Zapremina obrtnog tela** koje se dobije rotacijom grafikom funkcije oko y ose dobija se po obrascu

$$V = \pi \int_c^d x^2(y) dy.$$

Primer:

Izračunati zapreminu lopte poluprečnika r .



Lopta se dobija rotacijom kruga jednačine $x^2 + y^2 = r^2$ oko x - ose.

$$V = 2\pi \int_0^r y^2 dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = 2\pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^r = \frac{4}{3} r^3 \pi.$$

6.4.3. DUŽINA LUKA KRIVE

Neka je $f(x)$ neprekidna funkcija, sa neprekidanim izvodom $f'(x)$, na intervalu $[a, b]$

▪ **Dužina luka krive** je:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Obrazac se daje bez dokaza.

Izračunati dužinu luka krive $y = \frac{x\sqrt{5x}}{3}$, $x \in [0, 1]$.

$$y = \frac{x\sqrt{5x}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{3} x^{\frac{3}{2}}, \quad y' = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \sqrt{x},$$

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{5}{4} x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{4 + 5x} dx = \left\{ \begin{array}{l} 4 + 5x = t^2 \\ dx = \frac{2}{5} t dt \end{array} \right\} = \frac{1}{5} \int_2^3 t^2 dt = \frac{1}{15} t^3 \Big|_2^3 = \frac{19}{15}.$$

ZADACI

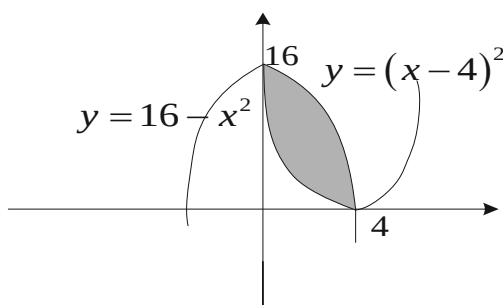
Izračunati površinu koju zaklapaju grafici datih krivih:

1. $y = (x-4)^2$ i $y = 16 - x^2$.

Rešenje

Apscise presečnih tačaka grafika funkcija dobijaju se rešavanjem sistema jednačina:

$$(x-4)^2 = 16 - x^2 \text{ i iznose } x = 0 \vee x = 4.$$



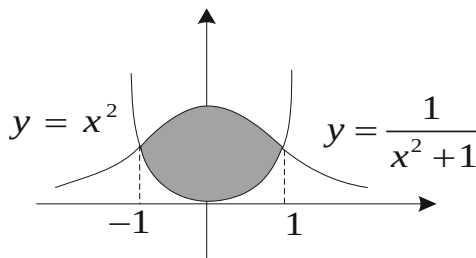
Tražena površina iznosi:

$$P = \int_0^4 (16 - x^2 - (x-4)^2) dx = 2 \int_0^4 (4x - x^2) dx = 2 \left(2x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^4 = \frac{64}{3}.$$

2. $y = \frac{x^2}{2}$ i $y = \frac{1}{x^2 + 1}$.

Rešenje

Apscise presečnih tačaka grafika funkcija su: $x = \pm 1$.



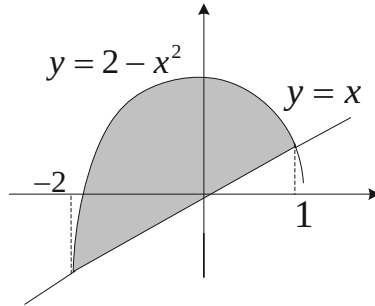
Tražena površina iznosi:

$$P = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{x^2}{2} \right) dx = 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{x^2}{2} \right) dx = 2 \left(\arctg x - \frac{1}{6} x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$$

3. $y = -x^2 + 2$ i $y = x$.

Rešenje

Apscise presečnih tačaka grafika funkcija su $x = -2 \vee x = 1$.



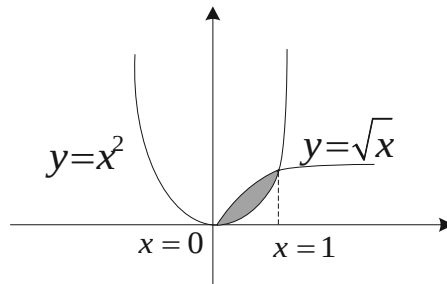
Tražena površina iznosi:

$$P = \int_{-2}^1 (-x^2 + 2) dx - \int_{-2}^1 x dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-2}^1 = \frac{9}{2}.$$

4. $y = x^2$ i $y = \sqrt{x}$

Rešenje

Apscise presečnih tačaka, uz uslov $x > 0$, su: $x = 0 \vee x = 1$.



$$P = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

5. $y = x^2$ i $y = 2 - x^2$.

Rešenje

$$P = \int_{-1}^1 (2 - x^2 - x^2) dx = 2 \int_0^1 (2 - x^2 - x^2) dx = 4 \int_0^1 (1 - x^2) dx = 4 \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{8}{3}.$$

6. $y = x^2 - 5x + 4$ i $y = x - 1$

Rešenje

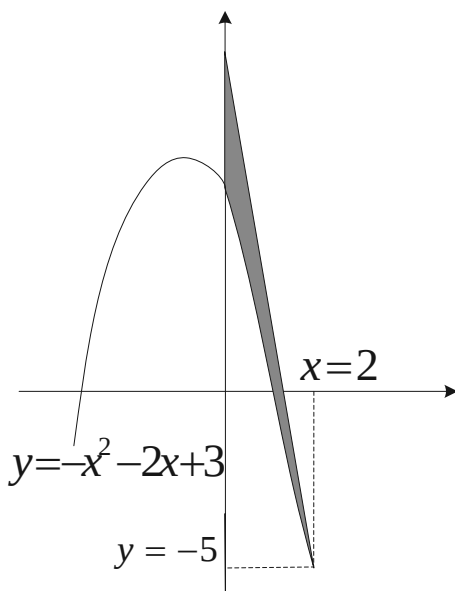
$$P = \int_1^5 \left((x-1) - (x^2 - 5x + 4) \right) dx = \int_1^5 (-x^2 + 6x - 5) dx = \frac{32}{3}$$

7. Odrediti površinu ograničenu parabolom $y = -x^2 - 2x + 3$, njenom tangentom u tački $M(2, y)$ i y -osom.

Rešenje:

Kako tačka $M(2, y)$ pripada paraboli, biće $y = -5$.

$y' = -2x - 2$, pa je $k = y'(2) = -6$. Jednačina tangente parabole u tački $M(2, -5)$ glasi $y + 5 = -6 \cdot (x - 2)$ ili $y = 7 - 6x$.

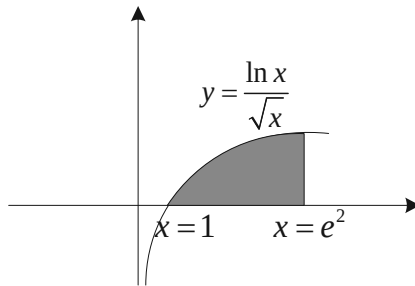


Tražena površina iznosi:

$$P = \int_0^2 \left(7 - 6x - (-x^2 - 2x + 3) \right) dx = \int_0^2 (x^2 - 4x + 4) dx = \int_0^2 (x-2)^2 dx = \frac{8}{3}$$

8. Izračunati površinu figure ograničene grafikom funkcije $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ nad odsečkom $[1, e^2]$.

Rešenje:



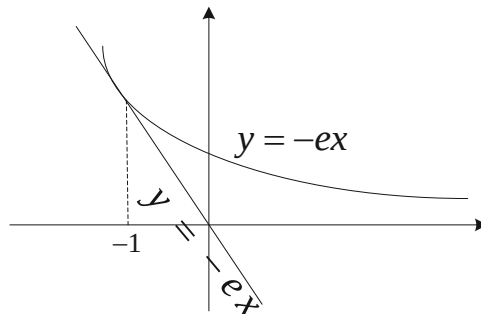
Tražena površina iznosi

$$P = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x, du = \frac{dx}{x} \\ dv = \frac{dx}{\sqrt{x}}, v = 2x^{\frac{1}{2}} \end{array} \right\} = 2 \left(x^{\frac{1}{2}} \ln x \Big|_1^{e^2} - \int_1^{e^2} x^{-\frac{1}{2}} dx \right) = 4e - 4x^{\frac{1}{2}} \Big|_1^{e^2} = 4$$

9. Odrediti površinu koja je ograničena lukom krive $y = e^{-x}$, njenom asimptomom i tangentom u tački $M(-1, y_0)$.

Rešenje:

Koordinata y_0 tačke M je $y_0 = e^{-(-1)} = e$, pa jednačina tangente date krive u tački $M(-1, e)$ glasi $y - e = y'(-1)(x + 1)$. Kako je $y' = -e^{-x}$, $y'(-1) = -e$, pa je $y = -ex$ tražena jednačina tangente. Asimptota je x osa.



$$P = \int_{-1}^{+\infty} e^{-x} dx - \int_{-1}^0 (-ex) dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-1}^a e^{-x} dx - \int_{-1}^0 (-ex) dx =$$

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \left(-e^{-x} \right) \Big|_{-1}^a + e \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^0 = - \lim_{a \rightarrow +\infty} (e^{-a} - e) - \frac{e}{2} = \frac{e}{2}.$$

Izračunati površinu ograničenu krivim linijama :

10. $y^2 = 2x + 1$ i $x - y - 1 = 0$.

Rešenje: $P = \frac{16}{3}$.

11. $y = x^2 - 8x + 18$ i $y = -2x^2 + 18$.

Rešenje: $P = 36$.

12. $y = 2 - x^2$ i $y = |x|$.

Rešenje: $P = \frac{7}{3}$.

13. $y = e^x$, $y = e^{-x}$ i $x = 2$.

Rešenje: $P = e^2 + e^{-2} - 2$.

14. $y = \frac{x^2 - 1}{2}$, $y = x + 1$

Rešenje: $P = \frac{16}{3}$.

15. $y = \sin^2 x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$.

Rešenje: $P = \frac{\pi}{2}$.

16. $y = \frac{3}{x}$ i $x + y = 4$.

Rešenje: $P = 4 - 3 \ln 3$.

17. $y^2 = 8x$ i $2x - 3y + 8 = 0$.

Rešenje: $P = \frac{4}{3}$.

18. Izračunati površinu ograničenu krivom $y = x^2 - 2x + 2$, njenom tangentom u tački $M(3, y)$ i y - osom.

Rešenje: $P = 9$.

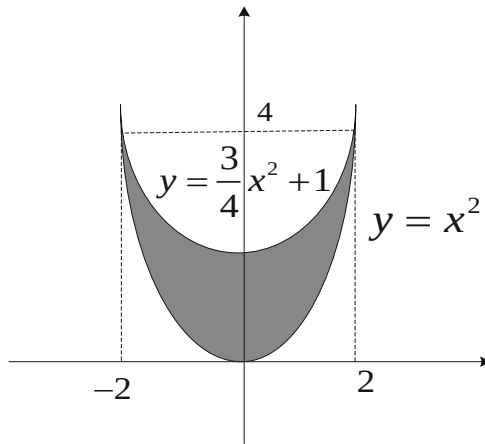
19. Izračunati zapreminu tela koje nastaje rotacijom oko x - ose površi ograničene linijama $y = x^2$ i $y = \frac{3}{4}x^2 + 1$.

Rešenje:

Presečne tačke grafika funkcija su rešenja sistema $y = x^2$ i $y = \frac{3}{4}x^2 + 1$. Dobijamo da se date krive seku u tačkama $A(-2, 4)$ i $B(2, 4)$.

$$V = 2\pi \int_0^2 \left(\left(\frac{3}{4}x^2 + 1 \right)^2 - (x^2)^2 \right) dx = 2\pi \int_0^2 \left(\frac{9}{16}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 1 - x^4 \right) dx =$$

$$= 2\pi \int_0^2 \left(-\frac{7}{16}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 1 \right) dx = 2\pi \left(-\frac{7}{16} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{3}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^2 = \frac{32}{5}\pi.$$



- 20.** Odrediti zapreminu tela nastalog rotacijom oko y - ose površi ograničene linijama $y = x^2$ i $y = \frac{3}{4}x^2 + 1$.

Rešenje:

$$V = V_1 - V_2$$

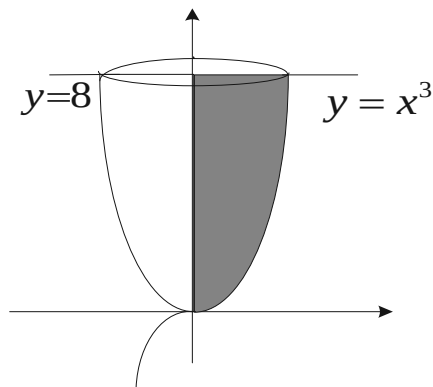
$$V_1 = \pi \int_0^4 y dy = \frac{\pi}{2} y^2 \Big|_0^4 = 8\pi.$$

$$V_2 = \pi \int_1^4 \frac{4}{3}(y-1) dy = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{y^2}{2} - y \right) \Big|_1^4 = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{9}{2} = 6\pi.$$

$$V_1 - V_2 = 2\pi.$$

- 21.** Izračunati zapreminu obrtnog tela koje se dobija kada površina koju čine krive $y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$, rotira oko y ose.

Rešenje:



$$V = \pi \int_0^8 x(y)^2 dy = \pi \int_0^8 y^{\frac{2}{3}} dy = \frac{3\pi}{5} \left(\sqrt[3]{y} \right)^5 \Big|_0^8 = \frac{96\pi}{5}.$$

- 22.** Izračunati zapreminu obrtnog tela koje se dobija kada površina koju čine krive $xy = 4$, $x = 2$, $x = 4$, $y = 0$, rotira oko x ose.

Rešenje

$$V = \pi \int_2^4 \frac{16}{x^2} dx = 16\pi \int_2^4 \frac{dx}{x^2} = -16\pi \frac{1}{x} \Big|_2^4 = 4\pi.$$

- 23.** Izračunati zapreminu obrtnog tela koje se dobija kada površina koju čine krive $xy = 3$, $x + y = 4$, rotira oko x ose.

Rešenje

Apscise presečnih tačka krivih su $x = 3$ i $x = 1$.

$$V = V_1 - V_2$$

$$V_1 = \pi \int_1^3 (4 - x)^2 dx = \pi \int_1^3 (16 - 8x + x^2) dx = \frac{26}{3}\pi$$

$$V_2 = \pi \int_1^3 \left(\frac{3}{x} \right)^2 dx = 9\pi \int_1^3 \frac{dx}{x^2} = 6\pi$$

$$V = \frac{8}{3}\pi$$

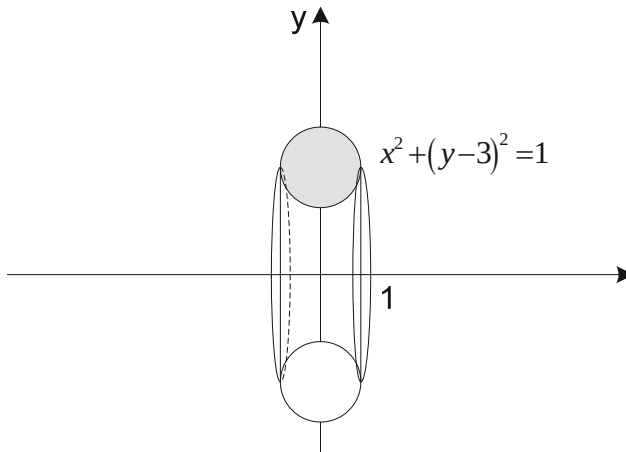
24. Izračunati zapreminu tela koje nastaje rotacijom oko x - ose krive linije $x^2 + (y-3)^2 = 1$.

Rešenje:

Data jednačina predstavlja krug sa centrom $S(0,3)$ i poluprečnikom $r=1$. Iz nje je $y = 3 \pm \sqrt{1-x^2}$, pa su $y_1 = 3 + \sqrt{1-x^2}$ i $y_2 = 3 - \sqrt{1-x^2}$ jednačine gornjeg i donjeg polukruga tog kruga.

Telo koje nastaje rotacijom date krive je torus čija je zapremina

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-1}^1 (y_1^2 - y_2^2) dx = 2\pi \int_0^1 (y_1^2 - y_2^2) dx = 2\pi \int_0^1 \left((3 + \sqrt{1-x^2})^2 - (3 - \sqrt{1-x^2})^2 \right) dx \\ &= 24\pi \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = 24\pi \cdot \frac{\pi}{4} = 6\pi^2. \end{aligned}$$



25. $y = \sin x$, $x=0$ i $x=\pi$ oko x ose. **Rešenje:** $V = \frac{\pi^2}{2}$
26. $x^2 + y^2 = 4$ i $y^2 - 3x = 0$ oko x ose. **Rešenje:** $V = \frac{19}{6}\pi$
27. $x^2 - y^2 = 4$ i $y^2 - 3x = 0$ oko x ose. **Rešenje:** $V = \frac{40}{3}\pi$.
28. $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+4}}$, $x=0$, $x=1$, $y=0$ oko x ose. **Rešenje:** $V = \pi \left(1 + 2 \ln \frac{4}{5} \right)$.

Izračunati dužinu luka sledećih krivih na zadatom intervalu.

29. $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x$, za $x \in [1, e]$

Rešenje:

$$f'(x) = y' = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} = \frac{x^2 - 1}{2x},$$

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{x^2 - 1}{2x}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{4x^2}} = \frac{x^2 + 1}{2x},$$

$$l = \int_1^e \frac{x^2 + 1}{2x} dx = \frac{1}{2} \int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + \ln|x|\right) \Big|_1^e = \frac{1}{4}(e^2 + 1).$$

30. Izračunati obim kruga $x^2 + y^2 = r^2$.

Rešenje:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$l = 4 \cdot \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = 4r \cdot \int_0^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 4r \cdot \arcsin \frac{x}{r} \Big|_0^r = 2r\pi.$$

31. $y = \ln(\sin x)$, $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Rešenje:

$$y' = \frac{1}{\sin x} \cos x = \operatorname{ctg} x, \quad 1 + y'^2 = 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x},$$

$$l = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 \frac{2dt}{1+t^2} = \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 \frac{dt}{t} = \ln|t| \Big|_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 = \ln 1 - \ln \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2} \ln 3.$$

32. $y = 2 \ln(4 - x^2)$, $x \in [0, 1]$.

Rešenje:

$$y' = \frac{4x}{x^2 - 4} , \quad 1 + y'^2 = 1 + \left(\frac{4x}{x^2 - 4} \right)^2 = \left(\frac{4 + x^2}{x^2 - 4} \right)^2 ,$$

$$l = \int_0^1 \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{8}{x^2 - 4} \right) dx = \left(x + 8 \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| \right) \Big|_0^1 = 1 + \ln 3..$$

33. $y = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2 - 1} - \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \right)$, $x \in [1, a+1]$, $a > 0$

Rešenje

$$y' = \frac{1}{2} \left(\sqrt{x^2 - 1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \right) \right) = \sqrt{x^2 - 1} ,$$

$$l = \int_1^{a+1} \sqrt{1 + x^2 - 1} dx = \int_1^{a+1} x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_1^{a+1} = \frac{a(a+2)}{2} .$$

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

1. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE PRVOG REDA

2. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE DRUGOG REDA

7.

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

Diferencijalnom jednačinom naziva se jednačina koja izražava neku vezu između nezavisno promenljive, nepoznate funkcije i njenih izvoda:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Najviši red izvoda u toj jednačini naziva se **red** te diferencijalne jednačine.

Ako se može rešiti po izvodu najvišeg reda, diferencijalna jednačina n -tog reda ima oblik

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}).$$

Rešenje diferencijalne jednačine je svaka funkcija koja identički zadovoljava tu jednačinu.

Opšte rešenje (opšti integral) diferencijalne jednačine n -tog reda je skup funkcija

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n),$$

odnosno

$$\phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0,$$

koji zavisi od n parametara $C_1, C_2, \dots, C_n$ i koji identički zadovoljava tu diferencijalnu jednačinu.

Partikularno rešenje diferencijalne jednačine je svaka ona funkcija $y = y(x)$ koja se dobija iz opšteg rešenja te jednačine za odgovarajuće posebne vrednosti integracionih konstanata.

Ako datu diferencijalnu jednačinu identički zadovoljava i funkcija $y(x)$ koja nije sadržana u njenom opštem rešenju (tj. ni za koje vrednosti integracionih konstanata ne može se dobiti iz njenog opšteg rešenja), tada se ova funkcija $y(x)$ naziva **singularno rešenje** te jednačine.

7.1. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE PRVOG REDA

Diferencijalna jednačina prvog reda je jednačinu koja izražava neku vezu između nezavisno promenljive, nepoznate funkcije i prvog izvoda te funkcije.

$$F(x, y, y') = 0 \text{ ili } y' = f(x, y)$$

Opšte rešenje te diferencijalne jednačine prvog reda je funkcija

$$y = \varphi(x, C),$$

odnosno

$$\phi(x, y, C) = 0,$$

koja identički zadovoljava jednačinu $y' = f(x, y)$, odnosno $F(x, y, y') = 0$

Teorema: (o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja) Ako je funkcija $f(x, y)$ neprekidna i ograničena u oblasti kojoj pripada tačka $M_0(x_0, y_0)$, tada jednačina $y' = f(x, y)$ ima rešenje $y = y(x)$ koje zadovoljava početni uslov $y(x_0) = y_0$.

Ako je i parcijalni izvod $\frac{\partial f}{\partial y}$ neprekidan i ograničen u toj oblasti, tada je to rešenje istovremeno i jedinstveno.

Tačke u kojima uslovi teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti nisu ispunjeni zovu se **singularne** tačke integralnih krivih $y = \varphi(x, C)$.

7.1.1. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE PRVOG REDA KOD KOJIH SE PROMENLJIVE MOGU RAZDVOJITI

Ako se diferencijalna jednačina prvog reda može napisati u obliku

$$g(y)dy = f(x)dx$$

u toj jednačini se mogu promenljive razdvojiti ili da takva **jednačina razdvaja promenljive**.

Promenljive su razdvojene ako se svaka nalazi na onoj strani jednačine na kojoj je njen diferencijal.

Treba odrediti promenljivu y kao funkciju od x .

Integracijom obe strane jednačine dobija se da je:

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + C.$$

Ova relacija daje vezu između x , y i C , pa po definiciji predstavlja **opšte rešenje** diferencijalne jednačine.

Ako se zada početni uslov $y(x_0) = y_0$, određuje se konstanta C i njoj odgovarajuće **partikularno rešenje** koje zadovoljava dati početni uslov.

Primer:

Rešiti diferencijalnu jednačinu $xdx + ydy = 0$.

Rešenje:

$$xdx + ydy = 0 \Rightarrow xdx = -ydy$$

Integracijom dobija se: $\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + C_1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2C_1$, ali $x^2 + y^2 > 0$ za

$(x, y) \neq (0, 0)$ pa mora biti $2C_1 > 0$, pa možemo staviti $2C_1 = C^2$.

Znači opšte rešenje date diferencijalne jednačine glasi $x^2 + y^2 = C^2$.

To je familija koncentričnih krugova sa centrom u koordinatnom početku.

7.1.2. HOMOGENA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA PRVOG REDA

Jednačina $y' = f(x, y)$ zove se **homogena** diferencijalna jednačina ako se funkcija

$f(x, y)$ može predstaviti u obliku

$$f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Iako se u opštem slučaju promenljive u homogenoj jednačini ne razdvajaju, uvođenjem pomoćne, nepoznate diferencijabilne funkcije $u(x)$ tako da je:

$$\frac{y}{x} = u \quad \text{tj.} \quad y = xu ,$$

svaka homogena jednačina se može svesti na jednačinu sa razdvojenim promenljivim.

Naime, kako je $y' = u + xu'$ jednačina $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ se svodi na

$$u + xu' = \varphi(u) \quad \text{tj.} \quad x \frac{du}{dx} = \varphi(u) - u ,$$

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} \quad (\varphi(u) - u \neq 0),$$

dakle

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \ln Cx , \quad C > 0 \text{ za } x > 0, \text{ a } C < 0 \text{ za } x < 0 .$$

Pošto se izvrši integracija, smenom $y = xu$ dolazi se do opšteg rešenja date homogene jednačine. Ukoliko se ne mogu naći eksplicitno rešenje po promenljivoj u ,

tada se posle izvršene integracije u zameni sa $\frac{y}{x}$ i na taj način dobija traženo

rešenje u implicitnom obliku.

Primer:

Rešiti diferencijalnu jednačinu $y' = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$.

Rešenje:

smena: $\frac{y}{x} = u$; $u = u(x) \Rightarrow u' = \frac{du}{dx}$; $y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$.

$$u'x + u = u + u^2 \Rightarrow u'x = u^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} \cdot x = u^2 \Rightarrow \int \frac{du}{u^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{u} = \ln|x| + \ln C \Rightarrow -\frac{1}{u} = \ln C|x| \Rightarrow \frac{y}{x} = -\frac{1}{\ln Cx} \Rightarrow y = -\frac{x}{\ln Cx} .$$

7.1.3. LINEARNA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA PRVOG REDA

Linearna diferencijalna jednačina prvog reda je jednačina

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

koja je linearna u odnosu na traženu funkciju $y(x)$ i njen izvod.

$P(x)$ i $Q(x)$ su zadate neprekidne funkcije nezavisno promenljive x .

Opšte rešenje je

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C \right].$$

Primer:

Rešiti diferencijalnu jednačinu $y' + y = x$.

Rešenje:

Data jednačina je oblika $y' + P(x)y = Q(x)$, linearna diferencijalna jednačina prvog reda.

$P(x) = 1$, $Q(x) = x$, pa zamenom u opšte rešenje dobija se:

$$y = e^{-\int dx} \cdot \left[C + \int x \cdot e^{\int dx} dx \right] \Rightarrow y = e^{-x} \cdot \left[C + \int x e^x dx \right];$$

$$\int x e^x dx = x e^x + e^x + C$$

$$y = e^{-x} [C + x e^x + e^x] = C e^x + x + 1, C = \text{const.}$$

7.1.4. BERNULIJEVA DIFERENCIJALNA JEDNAČINA

Bernulijeva jednačina je diferencijalna jednačina oblika

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n, \quad (n \in \mathbb{N}, n \neq 0, n \neq 1).$$

Za $n = 0$ predstavlja linearnu jednačinu.

Za $n = 1$ jednačinu u kojoj se promenljive mogu razdvojiti.

Za proizvoljno $n \notin \{0, 1\}$ uvodi se smena $y = u^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{N}$, gde je $u = u(x)$ nova nepoznata funkcija.

$$y = u^\alpha \Rightarrow y' = \alpha u^{\alpha-1} u'$$

$$\alpha u^{\alpha-1} u' + P(x) u^\alpha = Q(x) u^{n\alpha} \quad | : \alpha u^{\alpha-1}$$

$$u' + \frac{1}{\alpha} P(x) u = \frac{1}{\alpha} Q(x) u^{n\alpha - \alpha + 1}.$$

Da bi dobijena jednačina bila linearna, mora biti:

$$n\alpha - \alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha(n-1) = -1 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{n-1} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{1-n}.$$

Smenom $\alpha = \frac{1}{1-n}$ dobija se linearna diferencijalna jednačina prvog reda

$$u' + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x),$$

čije opšte rešenje nalazi se na već pokazani način.

Vraćanjem smene nalazi se opšte rešenje polazne diferencijalne jednačine.

Primer:

Odrediti ono partikularno rešenje diferencijalne jednačine $xy' + y + xy^2 = 0$ za koje je $y(1) = 1$.

Rešenje:

Ako datu jednačinu podelimo sa $x \neq 0$, dobijamo:

$$y' + \frac{1}{x}y = -y^2. \text{ Ovo je Bernulijeva diferencijalna jednačina.}$$

Uvedimo novu funkciju u smenom $y = u^{-1}$.

Odavde je $y' = -u^{-2} \cdot u'$, pa data jednačina postaje

$$-u^{-2} \cdot u' + \frac{1}{x}u^{-1} = -u^{-2},$$

odnosno posle deljenja sa $-u^{-2} \neq 0$, linearna diferencijalna jednačina po u :

$$u' - \frac{1}{x}u = 1.$$

Opšte rešenje ove jednačine je:

$$u = e^{\int \frac{dx}{x}} \left(C + \int e^{-\int \frac{dx}{x}} dx \right) = x \left(C + \int \frac{dx}{x} \right) = x(C + \ln|x|),$$

$y = \frac{1}{u}$, pa zamenom dobijamo opšte rešenje date jednačine

$$y = \frac{1}{x(C + \ln|x|)}.$$

Kako je $y(1) = 1$, biće $1 = \frac{1}{C} \Rightarrow C = 1$,

pa je traženo partikularno rešenje za zadati početni uslov glasi

$$y = \frac{1}{x(1 + \ln|x|)}.$$

7.2. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE DRUGOG REDA

Opšti oblik diferencijalne jednačine **drugog reda** je $F(x, y, y', y'') = 0$, ili ako se može rešiti po y''

$$y'' = f(x, y, y').$$

Opšte rešenje diferencijalne jednačine drugog reda ima oblik

$$\phi(x, y, C_1, C_2) = 0, \text{ odnosno } y = \varphi(x, C_1, C_2).$$

Početni uslovi za određivanje integracionih konstanta C_1, C_2 koje odgovaraju traženom **partikularnom rešenju** su: $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$.

7.2.1. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE DRUGOG REDA KOJE NE SADRŽE y I y'

Ove jednačine su oblika

$$y'' = P(x).$$

S obzirom da je $y'' = (y')'$, da mora biti

$$y'' = \frac{dy'}{dx} \Rightarrow dy' = P(x)dx \Rightarrow y' = \int P(x)dx + C_1.$$

Neka je $\int P(x)dx = f_1(x)$,

tada je $dy = (f_1(x) + C_1)dx \Rightarrow y = \int f_1(x)dx + C_1x + C_2 \Rightarrow y = f_2(x) + C_1x + C_2$.

$y = f_2(x) + C_1x + C_2$ je opšte rešenje te jednačine, gde je $\int f_1(x)dx = f_2(x)$.

Primer:

Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' = x$.

Rešenje:

$$y' = \int y''dx = \int xdx = \frac{x^2}{2} + C_1, \quad y = \int y'dx = \int \left(\frac{x^2}{2} + C_1 \right) dx = \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2.$$

Opšte rešenje date diferencijalne jednačine je $y(x, C_1, C_2) = \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2$.

7.2.2. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE DRUGOG REDA KOJE NE SADRŽE y

Ovaj tip jednačina je oblika

$$y'' = f(x, y').$$

Ako uvedemo smenu $y' = p$, tada je $y'' = p'$, čime smo datu jednačinu sveli na jednačinu prvog reda

$$p' = f(x, p), p = \varphi(x, C_1).$$

Dakle, $y' = \varphi(x, C_1)$, što znači da je opšte rešenje date diferencijalne jednačine

$$y = \int \varphi(x, C_1) dx + C_2.$$

Primer:

Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $xy'' + y' - x^2 = 0$.

Rešenje:

Data jednačina smenom $y' = p$ svodi na linearnu diferencijalnu jednačinu prvog reda.

$p' + \frac{1}{x}p = x$, čije je opšte rešenje $p(x, C_1) = C_1 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{3}x^2$, pa je opšte rešenje polazne jednačine

$$y(x, C_1, C_2) = \int y' dx = \int p(x, C_1) dx = C_1 \ln x + \frac{1}{9}x^3 + C_2.$$

7.2.3. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE DRUGOG REDA KOJE NE SADRŽE x

Ove jednačine su oblika

$$y'' = f(y, y').$$

Ako stavimo da je $p = y' = \frac{dy}{dx}$, gde je p funkcija od y , $p = p(y)$, tada je

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p'_y \cdot y'.$$

Zamenom $y'' = p'_y \cdot y'$ jednačina $F(y, y', y'') = 0$ se svodi na $F(y, p, p'_y \cdot y') = 0$

čije opšte rešenje se određuje, pa na osnovu smene $p = y'$ nalazi se i opšte rešenje polazne diferencijalne jednačine.

Primer:

Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'^2 + yy'' = 0$.

Rešenje:

Data diferencijalna jednačina se smenom $y'_x = p(y)$ svodi na jednačinu

$$(p(y))^2 + y \cdot p(y) \cdot p'_y = 0, \text{ za } p(y) \neq 0 \text{ se dobija jednačina } p(y) + y \cdot p'_y = 0,$$

odakle je

$$\frac{dp}{p} = -\frac{1}{y} dy \Rightarrow p = C_1 \cdot \frac{1}{y};$$

$$y'_x = C_1 \cdot \frac{1}{y} \Rightarrow y dy = C_1 dx.$$

Integracijom se dobija $y^2 = 2C_1x + C_2$, pa je opšte rešenje date jednačine familija

$$y(x, C_1, C_2) = \pm \sqrt{2C_1x + C_2}.$$

Za $p(y) = 0$ je $y'_x = 0$, tako da se dobija još i familija $y(x, D_1) = D_1$ partikularnih rešenja date jednačine. Sva rešenja iz ove familije su međutim sadržana u opštem rešenju (dovoljno je uzeti $C_1 = 0$ i $C_2 = D_1^2$).

Ostali tipovi diferencijalnih jednačina drugog tipa prevazilaze nivo ovog kursa.

ZADACI

Diferencijalne jednačine prvog reda:

Rešiti diferencijalne jednačine prvog reda kod kojih se razdvajaju promenljive:

1. Rešiti diferencijalnu jednačinu $xdx + ydy = 0$.

Rešenje:

$$xdx + ydy = 0 \Rightarrow xdx = -ydy$$

Integracijom dobijamo: $\frac{x^2}{2} = -\frac{y^2}{2} + C_1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2C_1$, ali $x^2 + y^2 > 0$ za

$(x, y) \neq (0, 0)$ pa mora biti $2C_1 > 0$, pa možemo staviti $2C_1 = C^2$.

Znači opšte rešenje date diferencijalne jednačine glasi $x^2 + y^2 = C^2$.

To je familija koncentričnih krugova sa centrom u koordinatnom početku.

2. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y' = \frac{y}{x}$, $x \neq 0$.

Rešenje:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, y \neq 0.$$

Integracijom dobijamo $\ln|y| = \ln|x| + C_2$, uvedemo smenu $C_2 = \ln C_1$, $C_1 > 0$,

dobijamo $\ln|y| = \ln|x| + \ln C_1$ odakle je $|y| = C_1|x|$ ili $y = \pm C_1 x$. Stavimo

$C = \pm C_1$, pa dobijamo opšte rešenje $y = Cx$.

Ove integralne krive predstavljaju familiju pravih koje prolaze kroz koordinatni početak. Tačka $(0, 0)$ je singularna tačka.

3. Odrediti ono partikularno rešenje diferencijalne jednačine

$$(1+x^2)y' + y\sqrt{1+x^2} = xy \text{ za koje je } y(0) = 1.$$

Rešenje:

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx} = y(x - \sqrt{1+x^2})$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{1+x^2} dx \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{xdx}{1+x^2} - \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Integracijom dobijamo:

$$\ln|y| = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \ln C_1$$

$$|y| = \frac{C_1 \sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}}, y = \frac{C \sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}}, C = \pm C_1.$$

$$\text{Odredimo partikularno rešenje: } 1 = \frac{C \cdot 1}{1} \Rightarrow C = 1 \Rightarrow y_p = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}}.$$

4. Rešiti diferencijalnu jednačinu $xy' = y(1 + x \cos x)$.

Rešenje:

$$xy' = y(1 + x \cos x) \quad | : x, x \neq 0$$

$$y' = \frac{y(1 + x \cos x)}{x} \Rightarrow y' = y \cdot \frac{1 + x \cos x}{x}; \quad y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \frac{1 + x \cdot \cos x}{x} \quad \left| \cdot \frac{dx}{y} \right.$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{1 + x \cos x}{x} dx \Rightarrow \ln|y| = \int \frac{dx}{x} + \int \cos x dx$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \sin x + \ln C \Rightarrow \ln|y| - \ln|x| - \ln C = \sin x$$

$$\ln \left| \frac{y}{Cx} \right| = \sin x \Rightarrow \frac{y}{Cx} = e^{\sin x} \Rightarrow$$

$$y = Cxe^{\sin x}, C = \text{const.}$$

Rešiti homogene diferencijalne jednačine prvog reda:

$$5. \quad y' = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

Rešenje:

$$\text{smena: } \frac{y}{x} = u; u = u(x) \quad y = ux \Rightarrow y' = u'x + u.$$

$$u'x + u = u + u^2 \Rightarrow u'x = u^2; u' = \frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} \cdot x = u^2 \Rightarrow \int \frac{du}{u^2} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow -\frac{1}{u} = \ln C|x| \Rightarrow$$

$$\frac{y}{x} = -\frac{1}{\ln Cx} \Rightarrow y = -\frac{x}{\ln Cx}.$$

$$6. \quad xy' = \sqrt{3x^2 + y^2} + y.$$

Rešenje:

$$xy' = \sqrt{3x^2 + y^2} + y \quad | : x \quad x \neq 0$$

$$y' = \sqrt{3 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}$$

$$\text{smena: } \frac{y}{x} = u; u = u(x) \quad y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$$

$$u'x + u = \sqrt{3+u^2} + u \Rightarrow u'x = \sqrt{3+u^2} ; u' = \frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} \cdot x = \sqrt{3+u^2} \Rightarrow \int \frac{du}{\sqrt{3+u^2}} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + u^2}} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|u + \sqrt{3+u^2}| = \ln|x| + \ln C$$

$$\ln|u + \sqrt{3+u^2}| = \ln C|x|$$

$$u + \sqrt{3+u^2} = Cx \Rightarrow \frac{y}{x} + \sqrt{3 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = Cx \Rightarrow y + \sqrt{3x^2 + y^2} = Cx^2.$$

$$7. \quad 2xyy' = x^2 + 3y^2.$$

Rešenje:

$$2xyy' = x^2 + 3y^2 \quad | : xy \quad xy \neq 0$$

$$2y' = \frac{x^2}{xy} + \frac{3y^2}{xy}, 2y' = \frac{x}{y} + \frac{3y}{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{y}{x}} + \frac{3}{2} \cdot \frac{y}{x}$$

$$\text{smena: } \frac{y}{x} = u ; u = u(x) \quad y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$$

$$u'x + u = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u} + \frac{3}{2}u, u'x = \frac{1}{2u} + \frac{u}{2} \Rightarrow$$

$$u'x = \frac{1+u^2}{2u} ; u' = \frac{du}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} \cdot x = \frac{1+u^2}{2u} \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{2udu}{1+u^2} \Rightarrow$$

$$\ln|x| = \ln(1+u^2) - \ln C, \ln|x| = \ln \frac{x^2 + y^2}{x^2} - \ln C$$

$$xC = \frac{x^2 + y^2}{x^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = Cx^3 \Rightarrow y^2 = Cx^3 - x^2$$

8. $(x^2 + y^2)dx + xydy = 0.$

Rešenje

$$(x^2 + y^2)dx + xydy = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + xy \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} + y' = 0$$

smena: $\frac{y}{x} = u ; y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$

$$\frac{1}{u} + u + u'x + u = 0 \Rightarrow u'x = -2u - \frac{1}{u} \Rightarrow$$

$$\frac{du}{dx} \cdot x = \frac{-2u^2 - 1}{u} \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = - \int \frac{u du}{2u^2 + 1} \Rightarrow$$

$$\ln|x| = -\frac{1}{4} \ln(2u^2 + 1) - \ln C_1$$

$$C_1 x = \frac{1}{\sqrt[4]{\frac{2u^2}{x^2} + 1}} \Rightarrow Cx^4 = \frac{1}{2y^2 + x^2} \Rightarrow 2y^2 + x^2 = \frac{1}{Cx^4}$$

$$\Rightarrow 2y^2 = \frac{1}{Cx^4} - x^2 \Rightarrow y^2 = \frac{1 - Cx^6}{2Cx^4} \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{1 - Cx^6}{2Cx^4}}$$

9. $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0.$

Rešenje:

$$(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0 \Rightarrow \frac{x}{y} - 3\frac{y}{x} + 2\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\frac{y}{x}} - 3\frac{y}{x} + 2y' = 0.$$

smena: $\frac{y}{x} = u$; $y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$.

$$\frac{1}{u} - 3u + 2u'x + 2u = 0 \Rightarrow 2u'x = \frac{u^2 - 1}{u} \Rightarrow \frac{du}{dx} \cdot x = \frac{u^2 - 1}{2u} \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{2u}{u^2 - 1} du$$

$$\ln|x| + \ln C_1 = \ln|u^2 - 1|, |u^2 - 1| = |x| \cdot C_1, u^2 - 1 = Cx, C = \pm C_1 \Rightarrow u^2 = Cx + 1$$

$$\frac{y^2}{x^2} = Cx + 1 \Rightarrow y^2 = Cx^3 + x^2$$

10. $(3x + y)y' = x + 3y$

Rešenje:

$$(3x + y)y' = x + 3y \Rightarrow \left(3 + \frac{y}{x}\right)y' = 1 + 3\frac{y}{x}$$

$$y' = \frac{1 + 3 \cdot \frac{y}{x}}{3 + \frac{y}{x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 + 3 \cdot \frac{y}{x}}{3 + \frac{y}{x}}$$

smena: $\frac{y}{x} = u$; $y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$

$$u'x + u = \frac{1 + 3u}{3 + u} \Rightarrow u'x = \frac{1 + 3u}{3 + u} - u \Rightarrow \frac{du}{dx} x = \frac{1 - u^2}{3 + u} \Rightarrow$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{3 + u}{1 - u^2} du \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = 3 \int \frac{du}{1 - u^2} + \int \frac{u}{1 - u^2} du$$

$$\ln|x| + \ln C = \frac{3}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| - \frac{1}{2} \ln|1-u^2|$$

$$\ln Cx = \frac{1}{2} \ln \frac{(1+u)^3}{(1-u)^4 (1+u)} \Rightarrow \ln Cx = \frac{1}{2} \ln \frac{(1+u)^2}{(1-u)^4}$$

$$\ln Cx = \ln \frac{1+u}{(1-u)^2} \Rightarrow Cx = \frac{1+u}{(1-u)^2}, Cx = \frac{1 + \frac{y}{x}}{\left(1 - \frac{y}{x}\right)^2}, Cx = \frac{x+y}{x\left(1 - \frac{y}{x}\right)^2}$$

$$11. xy' = y \ln \frac{y}{x}$$

Rešenje:

$$xy' = y \ln \frac{y}{x} \Rightarrow y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$$

$$\text{smena: } \frac{y}{x} = u ; y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$$

$$u'x + u = u \ln u \Rightarrow u'x = u \ln u - u \Rightarrow \frac{du}{dx} x = u (\ln u - 1) \Rightarrow$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{u(\ln u - 1)} \Rightarrow$$

$$\ln |x| + \ln C = \ln (\ln u - 1) \Rightarrow \ln Cx = \ln (\ln u - 1) \Rightarrow$$

$$Cx = \ln u - 1 \Rightarrow y = xe^{Cx+1}.$$

Rešiti linearne diferencijalne jednačine prvog reda:

$$12. y' + y = \sin x$$

Rešenje:

Data jednačina je oblika $y' + P(x)y = Q(x)$, linearna diferencijalna jednačina prvog reda.

$P(x) = 1$, $Q(x) = \sin x$, pa zamenom u opšte rešenje dobijamo:

$$y = e^{-\int dx} \cdot \left[C + \int \sin x \cdot e^{\int dx} dx \right] \Rightarrow y = e^{-x} \cdot \left[C + \int e^x \sin x dx \right]$$

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x)$$

$$y = e^{-x} \left[C + \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) \right] \Rightarrow y = \frac{C}{e^x} + \frac{1}{2} (\sin x - \cos x), C = \text{const}.$$

13. $y' + y \sin x = \sin x$

Rešenje:

$$y = e^{-\int \sin x dx} \cdot \left[C + \int \sin x \cdot e^{\int \sin x dx} dx \right] \Rightarrow y = e^{\cos x} \cdot \left[C + \int \sin x \cdot e^{-\cos x} dx \right]$$

$$y = e^{\cos x} \cdot \left[C + e^{-\cos x} \right]$$

$$y = C \cdot e^{\cos x} + 1, C = \text{const}$$

14. $y' + y \operatorname{tg} x = \sin x$

Rešenje:

$$y = e^{-\int \operatorname{tg} x dx} \cdot \left[C + \int \sin x \cdot e^{\int \operatorname{tg} x dx} dx \right]$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x|$$

$$y = e^{\ln(\cos x)} \cdot \left[C + \int \sin x \cdot e^{\ln(\cos x)^{-1}} dx \right] \Rightarrow y = \cos x \cdot \left[C + \int \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} dx \right]$$

$$y = \cos x \cdot \left[C + \int \operatorname{tg} x dx \right] \Rightarrow y = \cos x \cdot \left[C - \ln(\cos x) \right], C = \text{const.}$$

je opšte rešenje polazne diferencijalne jednačine.

15. $xy' - y = x^5$.

Rešenje: $y' - \frac{1}{x}y = x^4$

$$y = e^{-\int \left(\frac{1}{x}\right) dx} \cdot \left[C + \int x^4 e^{\int \left(\frac{1}{x}\right) dx} dx \right] \Rightarrow y = e^{\ln x} \cdot \left[C + \int x^4 e^{-\ln x} dx \right]$$

$$\Rightarrow y = x \cdot \left[C + \int x^4 \frac{1}{x} dx \right] \Rightarrow y = x \cdot \left[C + \frac{x^4}{4} \right]$$

$$\Rightarrow y = x \cdot \left[C + \frac{x^4}{4} \right] \Rightarrow y = Cx + \frac{x^5}{4}, C = \text{const.}$$

je opšte rešenje date diferencijalne jednačine.

$$16. xy' + 2y = e^{x^2}.$$

Rešenje:

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{e^{x^2}}{x}$$

$$y = e^{-\int \frac{2}{x} dx} \left[C + \int \frac{e^{x^2}}{x} e^{\int \frac{2}{x} dx} dx \right] \Rightarrow y = e^{-2\int \frac{dx}{x}} \left[C + \int \frac{e^{x^2}}{x} e^{2\int \frac{dx}{x}} dx \right]$$

$$\Rightarrow y = e^{-2\ln x} \left[C + \int \frac{e^{x^2}}{x} e^{2\ln x} dx \right] \Rightarrow y = \frac{1}{x^2} \cdot \left[C + \int \frac{e^{x^2}}{x} x^2 dx \right]$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{x^2} \cdot \left[C + \int x \cdot e^{x^2} dx \right] \Rightarrow y = \frac{1}{x^2} \cdot \left[C + \frac{1}{2} \int e^{x^2} d(x^2) \right]$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{x^2} \cdot \left[C + \frac{1}{2} e^{x^2} \right], C = \text{const.}$$

je opšte rešenje date diferencijalne jednačine.

$$17. xy' - y = x \ln x.$$

Rešenje:

$$y' - \frac{1}{x}y = \ln x$$

$$y = e^{-\int \left(-\frac{1}{x}\right) dx} \cdot \left[C + \int \ln x \cdot e^{\int \left(-\frac{1}{x}\right) dx} dx \right]$$

$$y = e^{\int \frac{dx}{x}} \cdot \left[C + \int \ln x \cdot e^{-\int \frac{dx}{x}} dx \right]$$

$$y = e^{\ln x} \cdot \left[C + \int \ln x \cdot e^{-\ln x} dx \right] \Rightarrow y = x \cdot \left[C + \int \frac{\ln x}{x} dx \right]$$

$$y = x \cdot \left[C + \frac{\ln^2 x}{2} \right], C = \text{const}$$

$$18. y' \cdot \sin x - y \cdot \cos x = -\cos^2 x$$

Rešenje:

$$y' - \operatorname{ctgx} \cdot y = -\frac{\cos^2 x}{\sin x}$$

$$y = e^{-\int (-\operatorname{ctgx}) dx} \cdot \left[C + \int \left(-\frac{\cos^2 x}{\sin x} \right) \cdot e^{\int (-\operatorname{ctgx}) dx} dx \right]$$

$$y = e^{\int \operatorname{ctgx} dx} \cdot \left[C - \int \frac{\cos^2 x}{\sin x} e^{-\int \operatorname{ctgx} dx} dx \right]$$

$$\int \operatorname{ctgx} dx = \ln |\sin x|$$

$$y = e^{\ln(\sin x)} \cdot \left[C - \int \frac{\cos^2 x}{\sin x} e^{-\ln(\sin x)} dx \right]$$

$$y = \sin x \cdot \left[C - \int \frac{\cos^2 x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} dx \right]$$

$$y = \sin x \cdot \left[C - \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx \right] \Rightarrow y = \sin x \cdot \left[C - \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int dx \right]$$

$$y = \sin x \cdot [C - (-\operatorname{ctgx}) + x] \Rightarrow y = \sin x \cdot [C + \operatorname{ctgx} + x], C = \text{const.}$$

Rešiti Bernulijeve diferencijalne jednačine prvog reda:

19. Odrediti ono partikularno rešenje difenencijalne jednačine $xy' + y + xy^2 = 0$ za koje je $y(1) = 1$.

Rešenje:

Ako datu jednačinu podelimo sa $x \neq 0$, dobijamo:

$$y' + \frac{1}{x} y = -y^2. \text{ Ovo je takozvana Bernulijeva diferencijalna jednačina.}$$

Da bismo je rešili, uvodimo novu funkciju u smenom $y = u^{-1}$. Odavde je

$$y' = -u^{-2} \cdot u', \text{ pa data jednačina postaje } -u^{-2} \cdot u' + \frac{1}{x} u^{-1} = -u^{-2}, \text{ odnosno posle}$$

deljenja sa $-u^{-2} \neq 0$, dobijamo linearnu diferencijalnu jednačinu po u :

$$u' - \frac{1}{x} u = 1.$$

Opšte rešenje ove jednačine je:

$$u = e^{\int \frac{dx}{x}} \left(C + \int e^{-\int \frac{dx}{x}} dx \right) = x \left(C + \int \frac{dx}{x} \right) = x(C + \ln|x|),$$

$$y = \frac{1}{u}, \text{ pa zamenom dobijamo opšte rešenje date jednačine}$$

$$y = \frac{1}{x(C + \ln|x|)}.$$

Kako je $y(1) = 1$, biće $1 = \frac{1}{C} \Rightarrow C = 1$, pa je traženo rešenje za zadati početni

$$\text{uslov } y = \frac{1}{x(1 + \ln|x|)}.$$

20. Naći opšte rešenje jednačine $y' + y = xy^5$.

Rešenje:

$$y = u^{\frac{1}{1-5}} \Rightarrow y = u^{-\frac{1}{4}}$$

$$y' = -\frac{1}{4} u^{-\frac{1}{4}-1} u' \Rightarrow y' = -\frac{1}{4} u^{-\frac{5}{4}} u'$$

Zamenom u polaznu jednačinu dobijamo:

$$-\frac{1}{4} u^{-\frac{5}{4}} u' + u^{-\frac{1}{4}} = xu^{-\frac{5}{4}} \quad | : -\frac{1}{4} u^{-\frac{5}{4}}$$

$$u' - 4u = -4x$$

$$u(x, C) = e^{4x} \left(C - 4 \int x e^{-4x} dx \right) = C e^{4x} + x + \frac{1}{4}$$

$$\text{Kako je } y^{-4} = u \Rightarrow y^4 = u^{-1} \Rightarrow y = \pm \sqrt[4]{u^{-1}},$$

opšte rešenje polazne diferencijalne jednačine je:

$$y(x, C) = \pm \left(Ce^{4x} + x + \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{4}},$$

gde je C proizvoljna konstanta.

Funkcija $y(x, C)$ nije definisana za one x za koje je $u(x, C) \leq 0$, a za ostale $x \in \mathbb{R}$ zadovoljava polaznu diferencijalnu jednačinu.

21. Odrediti partikularno rešenje diferencijalne jednačine

$$xy' - y = 2y^2 x \ln x, \text{ za početni uslov } y(1) = 1.$$

Rešenje:

Deljenjem ove jednačine sa $x \neq 0$ dobijamo

$$y' - \frac{1}{x}y = 2y^2 \ln x.$$

Sada uvodimo novu funkciju $u = u(x)$ smenom

$$y = u^{-1} \Rightarrow y' = -u^{-2}u'$$

pa dobijamo

$$-u^{-2} \cdot u' - \frac{1}{x}u^{-1} = 2u^{-2} \ln x.$$

Posle deobe sa $-u^{-2}$ imamo $u' + \frac{1}{x}u = -2 \ln x$.

Opšte rešenje ove jednačine je

$$\begin{aligned} u &= e^{-\int \frac{dx}{x}} \left(C - 2 \int e^{\int \frac{dx}{x}} \ln x dx \right) = e^{-\ln x} \left(C - 2 \int e^{\ln x} \ln x dx \right) = \\ &= \frac{1}{x} \left(C - 2 \int x \ln x dx \right) \end{aligned}$$

$$\int x \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}.$$

Sada je

$$u = \frac{1}{x} \left(C - x^2 \ln x + \frac{x^2}{2} \right),$$

pa je opšte rešenje date jednačine $y = u^{-1} = x \left(C - x^2 \ln x + \frac{x^2}{2} \right)^{-1}$.

Odredimo sada partikularno rešenje diferencijalne jednačine za početni uslov $y(1) = 1$.

$y(1) = 1$, pa je $1 = \left(C + \frac{1}{2} \right)^{-1} \Rightarrow C = \frac{1}{2}$.

Traženo rešenje glasi: $y = x \left(\frac{1}{2} - x^2 \ln x + \frac{x^2}{2} \right)^{-1}$

$$y = \frac{x}{\frac{1}{2} - x^2 \ln x + \frac{x^2}{2}} \Rightarrow y = \frac{2x}{1 - 2x^2 \ln x + x^2}$$

Rešiti diferencijalne jednačine drugog reda:

Rešiti diferencijalne jednačine drugog reda koje ne sadrže y i y' :

22. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' = x$.

Rešenje:

$$y' = \int y'' dx = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C_1,$$

$$y = \int y' dx = \int \left(\frac{x^2}{2} + C_1 \right) dx = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2$$

Opšte rešenje date diferencijalne jednačine je $y(x, C_1, C_2) = \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2$.

23. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' = \sin x$, za početne uslove

$$y(0) = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Rešenje:

Opšte rešenje dobijamo neposredno dva puta integracijom date jednačine.

$$y' = \int y'' dx = \int \sin x dx = -\cos x + C_1,$$

$$y = \int y' dx = \int (-\cos x + C_1) dx = -\sin x + C_1x + C_2$$

što predstavlja opšte rešenje $y(x, C_1, C_2) = -\sin x + C_1x + C_2$ date diferencijalne jednačine drugog reda.

Za početne uslove je:

$$\left. \begin{aligned} 1 &= -\sin 0 + C_1 \cdot 0 + C_2 \\ 1 &= -\cos \frac{\pi}{2} + C_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} C_2 &= 1 \\ C_1 &= 1 \end{aligned}$$

pa je traženo partikularno rešenje $y(x) = -\sin x + x + 1$.

Rešiti diferencijalne jednačine drugog reda koje ne sadrže y :

24. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $xy'' + y' - x^2 = 0$.

Rešenje:

U ovoj diferencijalnoj jednačini se ne pojavljuje eksplicitno funkcija y , pa se ona uvođenjem smene $y' = p$ može svesti na diferencijalnu jednačinu prvog reda po funkciji $p(x)$.

$$p' + \frac{1}{x} p = x,$$

čije je opšte rešenje

$$p(x, C_1) = C_1 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{3} x^2,$$

pa je opšte rešenje polazne jednačine

$$y(x, C_1, C_2) = \int y' dx = \int p(x, C_1) dx = C_1 \ln x + \frac{1}{9} x^3 + C_2.$$

25. Rešiti diferencijalnu jednačinu $(x^2 + 1)y'' - 2xy' = x$

Rešenje:

Ako uvedemo novu funkciju $p = p(x)$ smenom $y' = p \Rightarrow y'' = p'$,

data diferencijalna jednačina postaje

$$(x^2 + 1)p' - 2xp = x \Rightarrow p' - \frac{2x}{x^2 + 1} p = \frac{x}{x^2 + 1}$$

Dobili smo linearnu diferencijalnu jednačinu prvog reda.

$$p = e^{\int \frac{2x}{x^2+1} dx} \left(C_1 + \int \frac{x}{x^2+1} e^{-\int \frac{2x}{x^2+1} dx} dx \right), \text{ odnosno}$$

$$p = e^{\ln(x^2+1)} \left(C_1 + \int \frac{x}{x^2+1} e^{-\ln(x^2+1)} dx \right), \text{ ili}$$

$$p = (x^2 + 1) \left(C_1 + \int \frac{x dx}{(x^2 + 1)^2} \right),$$

$$p = (x^2 + 1) \left(C_1 - \frac{1}{2(x^2 + 1)} \right),$$

$$p = C_1(x^2 + 1) - \frac{1}{2}.$$

Kako je $dy = \left(C_1(x^2 + 1) - \frac{1}{2} \right) dx$, posle integracije imamo

$$y = C_1 \left(\frac{x^3}{3} + x \right) - \frac{1}{2}x + C_2.$$

Rešiti diferencijalne jednačine drugog reda koje ne sadrže x :

26. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'^2 + yy'' = 0$.

Rešenje:

Data diferencijalna jednačina se smenom $y'_x = p(y)$ svodi na jednačinu

$(p(y))^2 + y \cdot p(y) \cdot p'_y = 0$, za $p(y) \neq 0$ se dobija jednačina

$p(y) + y \cdot p'_y = 0$, odakle je

$$\frac{dp}{p} = -\frac{1}{y} dy \Rightarrow p = C_1 \cdot \frac{1}{y};$$

$$y'_x = C_1 \cdot \frac{1}{y} \Rightarrow y dy = C_1 dx.$$

Integracijom se dobija $y^2 = 2C_1x + C_2$, pa je opšte rešenje date jednačine familija

$$y(x, C_1, C_2) = \pm \sqrt{2C_1x + C_2}.$$

Za $p(y) = 0$ je $y'_x = 0$, tako da se dobija još i familija $y(x, D_1) = D_1$

partikularnih rešenja date jednačine. Sva rešenja iz ove familije su međutim

sadržana u opštem rešenju (dovoljno je uzeti $C_1 = 0$ i $C_2 = D_1^2$).

27. Rešiti diferencijalnu jednačinu $yy'' = y'^2 - y'^3$

Rešenje:

Ako iskoristimo smenu $y' = p$, biće $y'' = p'_y \cdot p$, pa data diferencijalna jednačina postaje

$$yp'_y p = p^2 - p^3, \quad p(py'_y - p + p^2) = 0$$

Odavde je $p = 0$ ili $yp'_y = p - p^2$. Iz $p = 0$, ili $y' = 0$ izlazi $y = \text{const}$. To je

takozvano singularno rešenje date jednačine. Iz $yp'_y = p - p^2$ izlazi redom

$$y \frac{dp}{dy} = p - p^2, \quad \frac{dp}{p - p^2} = \frac{dy}{y}, \quad \frac{dy}{y} + \frac{dp}{p(p-1)} = 0 \text{ odnosno}$$

$$\frac{dy}{y} + \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right) dp = 0.$$

Odavde integracijom dobijamo

$$\ln|y| + \ln \left| \frac{p-1}{p} \right| = \ln A, \quad A > 0; \quad \frac{y(p-1)}{p} = B, \quad B = \pm A; \quad y(p-1) = Bp$$

$$p(y-B) = y, \quad \frac{dy}{dx}(y-B) = y, \quad \frac{y-B}{y} dy = dx, \quad \left(1 - \frac{B}{y} \right) dy = dx$$

Integracijom ove jednačine dobijamo $y - B \ln|y| = x + C$,

što predstavlja opšte rešenje date diferencijalne jednačine.

LITERATURA

1. I. Kovacevic, Z. Mišković, A. Savić , MATEMATIKA ZA INŽENJERE, Visoka škola elektrotehnike i računarstva, Beograd 2008.
2. O. Nikolić, M.Žižović, I. Kovačević, KVANTITATIVNE METODE, Univerzitet Singidunum, Beograd, 2009.
3. B. Boričić, M. Ivović, MATEMATIKA, Ekonomski fakultet Beograd 2003.
4. B. Boričić, M. Ivović D. Azdeljković, I. Spasić, ZBIRKA ZADATAKA IZ MATEMATIKE, Ekonomski fakultet Beograd 2003.
5. M. Merkle MATEMATIČKA ANALIZA teorija i hiljadu zadataka, Akademska misao, Beograd 2005.

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

51(075.8)

КОСТИЋ Ковачевић, Ивана, 1952-

Matematika : sa zbirkom zadataka / Ivana Kostić Kovačević. - 8. izd. -
Beograd : Univerzitet Singidunum, 2025 (Beograd : Birograf). - VIII, 292
str. : ilustr. ; 24 cm

Tiraž 400. - Bibliografija: str. 292.

ISBN 978-86-7912-607-8

a) Математика

COBISS.SR-ID 173154313

© 2025.

Sva prava zadržana. Nijedan deo ove publikacije ne može biti reprodukovan u bilo kom vidu i putem bilo kog medija, u delovima ili celini bez prethodne pismene saglasnosti izdavača.



Ivana Kostić Kovačević

Matematika

sa zbirkom zadataka



Ovaj udžbenik napisan je za studente prve godine Univerziteta Singidunum, koji slušaju jednosemestralni kurs matematike, na Fakultetu za informatiku i računarstvo i Tehničkom fakultetu. Prilagođen je planu i programu ovog predmeta. Podeljen je u 7 poglavlja. Udžbenik objedinjuje teoriju i zadatke, što je standard u savremenoj literaturi. Ideja autora je bila da se izloži kratak pregled teorije, odnosno najvažnije definicije i teoreme koje su neophodne studentima. Dokazi su lišeni često opterećujućih detalja, sa željom da ovaj način izlaganja bude prihvatljiv za što širi krug čitalaca. Osim teorije udžbenik sadrži veliki broj zadataka koji pomažu da se izložena teorija lakše savlada.