



Biljana Radičić

PRAKTIKUM IZ MATEMATIKE

Beograd, 2021.

UNIVERZITET SINGIDUNUM

Dr Biljana Radičić

PRAKTIKUM IZ MATEMATIKE

Beograd, 2021.

PRAKTIKUM IZ MATEMATIKE

Autor:

Dr Biljana Radičić

Recenzenti:

Dr Zoran Petrović, redovni profesor Matematičkog fakulteta,
Univerzitet Beograd

Dr Branko Malešević, redovni profesor Elektrotehničkog fakulteta,
Univerzitet Beograd

Izdavač:

Univerzitet Singidunum
Danijelova 32
www.singidunum.ac.rs

Za izdavača:

Dr Milovan Stanišić

Priprema za štampu:

Biljana Radičić
Miloš Višnjić

Dizajn korica:

Aleksandar Mihajlović, MA

Godina izdanja:

2021.

Tiraž:

10

Štampa:

Caligraph, Beograd

ISBN: 978-86-7912-750-1

Copyright:

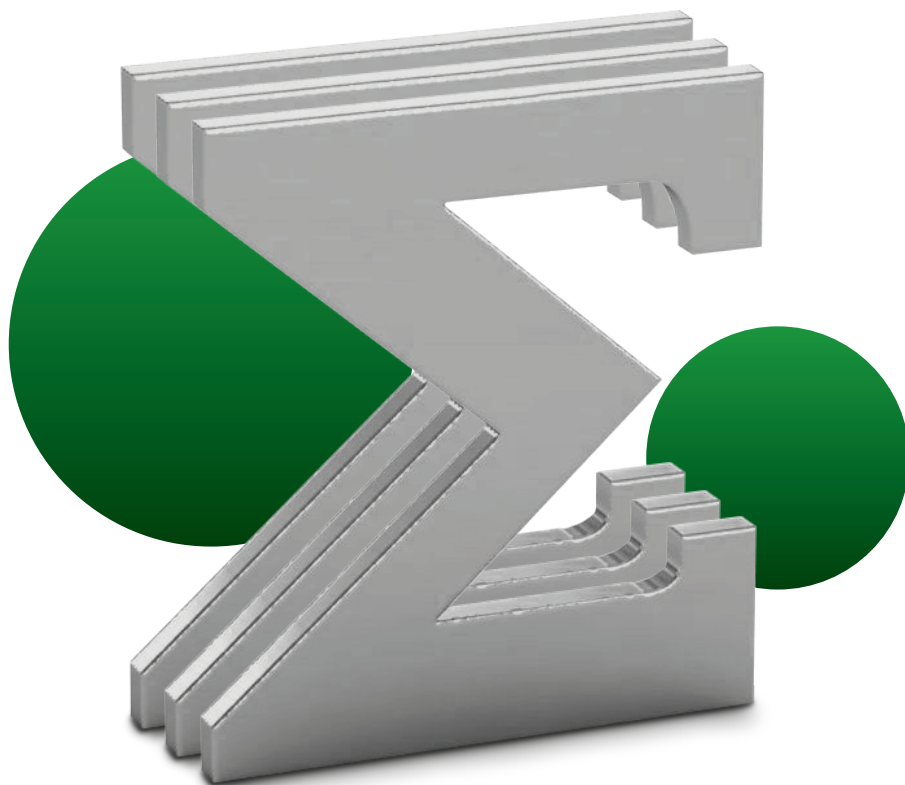
© 2021. Univerzitet Singidunum

Izdavač zadržava sva prava.

Reprodukcija pojedinih delova ili celine ove publikacije nije dozvoljena.

MATEMATIKA TE UČI

da priznaš kada nisi u pravu



MATEMATIKA TE UČI

da misliš nekoliko koraka unapred

Sadržaj

Predgovor	I
1. Determinante	1
1.1. Determinante reda 2	1
1.2. Determinante reda 3	4
1.3. Determinante reda većeg od 3	9
2. Matrice	15
2.1. Operacije sa matricama	15
2.2. Inverzna matrica	20
2.3. Matrične jednačine	24
2.4. Rang matrice	28
3. Sistemi linearnih jednačina	30
3.1. Gausova metoda	30
3.2. Kramerova metoda	35
3.3. Matrična metoda	39
3.4. Homogeni sistemi linearnih jednačina	42
4. Realne funkcije jedne realne promenljive	46
4.1. Domen funkcije	46
4.2. Nule funkcije	59
4.3. Znak funkcije	66
4.4. Parnost i neparnost funkcije	73
4.5. Granična vrednost funkcije	75
4.6. Izvod funkcije	78
4.7. Ispitivanje funkcije i crtanje grafika funkcije	86
4.8. Integrali	100
5. Modeli zadataka za proveru znanja	109
5.1. Modeli zadataka za proveru znanja – I deo	109
5.2. Modeli zadataka za proveru znanja – II deo	111
6. Primeri rešenih modela zadataka	112
6.1. Rešeni model zadataka – I deo	112
6.2. Rešeni model zadataka – II deo	116
Literatura	118

Predgovor

Ovaj Praktikum je namenjen, pre svega, studentima prve godine osnovnih akademskih studija Tehničkog fakulteta i Fakulteta za informatiku i računarstvo Univerziteta Singidunum i napisan je prema planu i programu jednosemestralnog predmeta pod nazivom Matematika koji studenti navedenih fakulteta imaju na prvoj godini osnovnih akademskih studija. Međutim, osim njih, Praktikum mogu koristiti i studenti drugih fakulteta čiji plan i program sadrži gradivo ili deo gradiva obuhvaćeno ovim Praktikumom.

Praktikum je podeljen u 6 poglavlja, pri čemu je svako od tih poglavlja podeljeno na više delova koji objedinjuju zadatke sličnog tipa. Prva četiri poglavlja sadrže zadatke za vežbu odnosno pripremu pismenog dela ispita. Svaki tip zadataka sadrži više primera, od najjednostavnijih prema složenijim, koji imaju za cilj da se studenti što bolje pripreme za pismeni deo ispita kako po pitanju znanja tako i po pitanju veštine pri njihovoj izradi. U petom poglavlju su dati modeli zadataka za proveru znanja kako bi studenti imali uvid koliko zadataka dolazi u obzir na proveru znanja, iz kojih oblasti i koje težine su zadaci. U poslednjem, šestom poglavlju, data su rešenja za jedan model zadataka iz prvog dela gradiva i za jedan model zadataka iz drugog dela gradiva.

Studenti i drugi korisnici ovog Praktikuma mogu svoje sugestije i predloge poslati na e-mail adresu: *bradicic@singidunum.ac.rs*. Primljene sugestije i predlozi će biti razmotreni kako bi sledeća izdanja ovog Praktikuma bila što kvalitetnija.

Zahvaljujem se recenzentima prof. dr Zoranu Petroviću, redovnom profesoru Matematičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu i prof. dr Branku Maleševiću, redovnom profesoru Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu na veoma korisnim sugestijama.

AUTOR

Beograd, 2021.

1. Determinante

Predlog literature za neophodne informacije o determinantama: [1], [4], [6] ili [9].

1.1. Determinante reda 2

Primer 1. Izračunati vrednost sledeće determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - (-2) \cdot 2 = -1 - (-4) = -1 + 4 = 3. \blacklozenge$$

1. Izračunati vrednost sledećih determinanti.

$$1) \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad 3) \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad 4) \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}, \quad 5) \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Izračunati vrednost sledećih determinanti.

$$1) \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 4 \end{vmatrix}, \quad 2) \begin{vmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{vmatrix}, \quad 3) \begin{vmatrix} 2-\sqrt{2} & 1-\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & 2+\sqrt{2} \end{vmatrix}, \quad 4) \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{vmatrix}.$$

3. Izračunati vrednost sledećih determinanti.

$$1) \begin{vmatrix} i & 2 \\ 1 & i \end{vmatrix}, \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & i\sqrt{2} \\ i\sqrt{2} & 1 \end{vmatrix}, \quad 3) \begin{vmatrix} i-1 & \sqrt{3}-1 \\ \sqrt{3}+1 & i+1 \end{vmatrix}, \quad 4) \begin{vmatrix} \sqrt{3}-2i & i-\sqrt{2} \\ i+\sqrt{2} & \sqrt{3}+2i \end{vmatrix}.$$

4. Izračunati vrednost sledećih determinanti.

$$1) \begin{vmatrix} \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \\ 4 & \sqrt{3} \end{vmatrix}, \quad 2) \begin{vmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{3} \\ \cos \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{6} \end{vmatrix}, \quad 3) \begin{vmatrix} \sin \frac{\pi}{4} & \cos \pi \\ \sin \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{4} \end{vmatrix}, \quad 4) \begin{vmatrix} \cos \pi & \sin \frac{\pi}{2} \\ -\sin \frac{\pi}{2} & \cos \pi \end{vmatrix}.$$

5. Izračunati vrednost sledećih determinanti.

$$1) \begin{vmatrix} \log_2 2 & 1 \\ 1 & \log_2 1 \end{vmatrix}, \quad 2) \begin{vmatrix} \log_2 4 & \log_2 8 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad 3) \begin{vmatrix} \log_2 \frac{1}{2} & -4 \\ 1 & \log_2 4 \end{vmatrix}, \quad 4) \begin{vmatrix} 2 & \log_{27} 9 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{vmatrix}.$$

6. Proveriti tačnost sledećih jednakosti.

$$1) \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad 2) \begin{vmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad 3) \begin{vmatrix} i & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & i \end{vmatrix} = 1, \quad 4) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{vmatrix} = 0.$$

7. Odrediti nepoznatu x tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} x & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2, \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ x & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}, \quad 3) \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -1 & x \end{vmatrix} = 3, \quad 4) \begin{vmatrix} -2 & x \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

8. Odrediti nepoznatu x tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} x+2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3, \quad 2) \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ x+\frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = 1, \quad 3) \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & \frac{3}{2}-x \end{vmatrix} = 0.$$

9. Odrediti nepoznatu x tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} x-1 & x+1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad 2) \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ x+\frac{1}{2} & 1-x \end{vmatrix} = 0, \quad 3) \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{4} & \frac{3}{2}-x \end{vmatrix} = -\frac{3}{2}.$$

10. Odrediti nepoznatu x tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} x+1 & x-1 \\ x-1 & x+1 \end{vmatrix} = -1, \quad 2) \begin{vmatrix} x-2 & x+4 \\ x-1 & x+3 \end{vmatrix} = -3, \quad 3) \begin{vmatrix} \frac{1}{2}-x & x+1 \\ \frac{1}{4}-x & x+\frac{3}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

11. Odrediti nepoznatu x tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) x^2 - 2x = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad 2) x^2 + 4x = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad 3) 2x^2 - x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

12. Odrediti nepoznatu x tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} x & x \\ 1 & x \end{vmatrix} = 6, \quad 2) \begin{vmatrix} x & 3 \\ -x & 2x \end{vmatrix} = 2, \quad 3) \begin{vmatrix} 4x & 2x \\ 2x & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad 4) \begin{vmatrix} -1 & 4x \\ 2x & 2x \end{vmatrix} = -1.$$

13. Odrediti nepoznatu x tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} x+1 & 1 \\ x & x+3 \end{vmatrix} = 1, \quad 2) \begin{vmatrix} x-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ x & x+2 \end{vmatrix} = 1, \quad 3) \begin{vmatrix} -3 & 2x-1 \\ x+1 & x \end{vmatrix} = -5.$$

14. Odrediti nepoznatu x tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} x^2+1 & 2x \\ 2x & x^2+1 \end{vmatrix} = 0, \quad 2) \begin{vmatrix} x^2+2 & 6x \\ x & x^2+1 \end{vmatrix} = 0, \quad 3) \begin{vmatrix} x^2+1 & -x \\ 4x & x^2-3 \end{vmatrix} = 0.$$

15. Odrediti nepoznatu x tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} x & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \leq 0, \quad 2) \begin{vmatrix} 3 & x \\ -2 & -1 \end{vmatrix} < 1, \quad 3) \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ x & -1 \end{vmatrix} \leq \frac{1}{2}, \quad 4) \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix} < 4.$$

16. Odrediti nepoznatu x tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} x-2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \geq -2, \quad 2) \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ x-\frac{2}{3} & -1 \end{vmatrix} < 2, \quad 3) \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & \frac{1}{3}-x \end{vmatrix} \leq 0.$$

17. Odrediti nepoznatu x tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} x-2 & x-1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \leq 0, \quad 2) \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ x-\frac{3}{2} & 1+x \end{vmatrix} > 4, \quad 3) \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ \frac{2}{3}x-\frac{1}{4} & \frac{1}{2}+x \end{vmatrix} \leq -\frac{1}{2}.$$

18. Odrediti nepoznatu x tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} x+2 & x-3 \\ x-3 & x+2 \end{vmatrix} > 0, \quad 2) \begin{vmatrix} x+3 & x-4 \\ x+1 & x-3 \end{vmatrix} \leq -3, \quad 3) \begin{vmatrix} x-\frac{3}{2} & \frac{1}{2}+x \\ \frac{1}{2}+x & x+\frac{3}{2} \end{vmatrix} \geq \frac{3}{2}.$$

19. Odrediti nepoznatu x tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) -x^2 + x > \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, \quad 2) x^2 + 2x \leq \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad 3) -3x^2 + 10x < \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

20. Odrediti nepoznatu x tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} 2 & x \\ x & x \end{vmatrix} > -3, \quad 2) \begin{vmatrix} x & x \\ \frac{1}{2} & x \end{vmatrix} \leq 0, \quad 3) \begin{vmatrix} x & -1 \\ x & 2x \end{vmatrix} \geq 1, \quad 4) \begin{vmatrix} 2x & x \\ 5 & x \end{vmatrix} < 3.$$

21. Odrediti nepoznatu x tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} x+4 & 1 \\ x & x+1 \end{vmatrix} < 1, \quad 2) \begin{vmatrix} x+\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ x & x-2 \end{vmatrix} > -2, \quad 3) \begin{vmatrix} -1 & 3x+2 \\ x-1 & x \end{vmatrix} \leq -1.$$

1.2. Determinante reda 3

Primer 1. Sarusovim pravilom izračunati vrednost sledeće determinante.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
 = 2 \cdot (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) \cdot 2 - (-1) \cdot (-1) \cdot 3 - 2 \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) \cdot 2 \\
 = -2 + 0 + (-6) - 3 - 0 - (-2) = -9. \blacklozenge$$

Primer 2. Laplasovim razvojem po II-goj koloni izračunati vrednost sledeće determinante.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^3 a_{k,2} A_{k,2} = \sum_{k=1}^3 a_{k,2} (-1)^{k+2} M_{k,2} \\
 = a_{1,2} (-1)^{1+2} M_{1,2} + a_{2,2} (-1)^{2+2} M_{2,2} + a_{3,2} (-1)^{3+2} M_{3,2} \\
 = -a_{1,2} M_{1,2} + a_{2,2} M_{2,2} - a_{3,2} M_{3,2} \\
 = -2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\
 = -2 \cdot (-1) - 1 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \\
 = -9. \blacklozenge$$

Primer 3. Laplasovim razvojem po III-ćem redu izračunati vrednost sledeće determinante.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^3 a_{3,k} A_{3,k} = \sum_{k=1}^3 a_{3,k} (-1)^{3+k} M_{3,k} \\
 = a_{3,1} (-1)^{3+1} M_{3,1} + a_{3,2} (-1)^{3+2} M_{3,2} + a_{3,3} (-1)^{3+3} M_{3,3} \\
 = a_{3,1} M_{3,1} - a_{3,2} M_{3,2} + a_{3,3} M_{3,3} \\
 = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\
 = -1 \cdot 3 - 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 \\
 = -9. \blacklozenge$$

1. Sarusovim pravilom izračunati vrednost sledećih determinanti.

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \\ -4 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad 2) \begin{vmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}, \quad 3) \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad 4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

2. Sarusovim pravilom izračunati vrednost sledećih determinanti.

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad 2) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad 3) \begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad 4) \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

3. Sarusovim pravilom proveriti tačnost sledećih jednakosti.

$$1) \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 7, \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4, \quad 3) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -6, \quad 4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

4. Sarusovim pravilom odrediti sledeće determinante.

$$1) \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix}, \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 2 & x \\ x & x & 3 \end{vmatrix}, \quad 3) \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}, \quad 4) \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & x & 2 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}.$$

5. Sarusovim pravilom odrediti sledeće determinante.

$$1) \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & y & x \\ 1 & x & y \end{vmatrix}, \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & y & x \\ 1 & x+y & x-y \end{vmatrix}, \quad 3) \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & y & x \\ 1 & xy & xy \end{vmatrix}, \quad 4) \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x-y & x+y \\ 1 & x+y & x-y \end{vmatrix}.$$

6. Sarusovim pravilom izračunati vrednost sledećih determinanti.

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & i \\ -1 & 3 & i \\ 1 & 4 & i \end{vmatrix}, \quad 2) \begin{vmatrix} i & -2 & 1 \\ 1 & i & 0 \\ i & -1 & i \end{vmatrix}, \quad 3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & i \\ 1 & -i & 2 \\ 1 & 2i & 2i \end{vmatrix}, \quad 4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-i & 1+i \\ 1 & 1+i & 1-i \end{vmatrix}.$$

7. Proveriti rezultate iz prethodnih zadataka koristeći Laplasov razvoj po proizvoljnoj koloni (ili proizvoljnom redu).

8. Odrediti nepoznatu x tako da bude ispunjeno sledeće:

$$\begin{aligned}
 1) \begin{vmatrix} x & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} &= 0, & 2) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} &= 4, & 3) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} &= \frac{5}{2}, \\
 4) \begin{vmatrix} 2 & 0 & x \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= 3, & 5) \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 \end{vmatrix} &= 0, & 6) \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & x & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= 1.
 \end{aligned}$$

9. Odrediti nepoznatu x tako da bude ispunjeno sledeće:

$$\begin{aligned}
 1) \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= 0, & 2) \begin{vmatrix} -2 & 1 & x-1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= -2, & 3) \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2-3x & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} &= 0, \\
 4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & x-1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} &= 0, & 5) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & x+2 \end{vmatrix} &= -2, & 6) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1-2x & -1 & 2 \end{vmatrix} &= 0.
 \end{aligned}$$

10. Odrediti nepoznatu x tako da bude ispunjeno sledeće:

$$\begin{aligned}
 1) x^2 - 3x &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}, & 2) x^2 + 3x &= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}, & 3) -2x^2 + x &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}, \\
 4) x^2 + 2x &= \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, & 5) x^2 - 4x &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}, & 6) -2x^2 + x &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

11. Odrediti nepoznatu x tako da bude ispunjeno sledeće:

$$\begin{aligned}
 1) \begin{vmatrix} x & 0 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} &= 0, & 2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & -1 & 1 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} &= 0, & 3) \begin{vmatrix} -2 & x & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ x & 2 & 1 \end{vmatrix} &= 0,
 \end{aligned}$$

$$4) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & x \\ 1 & x & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad 5) \begin{vmatrix} -2 & x & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ x & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad 6) \begin{vmatrix} -1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = 0.$$

12. Odrediti nepoznatu x tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} 1-x & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 3+x \end{vmatrix} = 0, \quad 2) \begin{vmatrix} -2 & 1 & x-1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2+x & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad 3) \begin{vmatrix} -1 & 3+x & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3-x & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$4) \begin{vmatrix} 2-x & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & x+1 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad 5) \begin{vmatrix} 1 & x-1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & x+1 \end{vmatrix} = 0, \quad 6) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2+x \\ 1 & 2-x & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

13. Odrediti nepoznatu x tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} x & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} > 0, \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & x & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \leq 2, \quad 3) \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & x \end{vmatrix} \geq \frac{1}{2},$$

$$4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} < 0, \quad 5) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \geq 2, \quad 6) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ x & -2 & 1 \end{vmatrix} < \frac{2}{3}.$$

14. Odrediti nepoznatu x tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} x+1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} > -2, \quad 2) \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & x-2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \leq 0, \quad 3) \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & x+3 \end{vmatrix} < 0,$$

$$4) \begin{vmatrix} 2 & -3 & x-2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} > -5, \quad 5) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & x-1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \leq 3, \quad 6) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ x+2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \geq 2.$$

15. Odrediti nepoznatu x tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) x^2+3x \leq \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}, \quad 2) x^2-3x > \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{vmatrix}, \quad 3) -2x^2+3x > \begin{vmatrix} -2 & 1 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$4) x^2+4x < \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad 5) x^2-\frac{1}{2}x \geq \begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 6 \end{vmatrix}, \quad 6) -3x^2+x \geq \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix}.$$

16. Odrediti nepoznatu x tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 2 & x & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \geq 0, \quad 2) \begin{vmatrix} -1 & 0 & x \\ 1 & x & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \leq 0, \quad 3) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} < 0,$$

$$4) \begin{vmatrix} 3 & x & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} \geq 0, \quad 5) \begin{vmatrix} -1 & x & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ x & -1 & 1 \end{vmatrix} < 0, \quad 6) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & x \\ 1 & x & 1 \end{vmatrix} \geq 0.$$

17. Odrediti nepoznatu x tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} x+1 & -1 & 0 \\ 2 & x-1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} < 0, \quad 2) \begin{vmatrix} -1 & 0 & x-1 \\ 1 & x+2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \geq 0, \quad 3) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & x-1 & -1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} > 0,$$

$$4) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2-x \\ 1 & 1+x & -1 \end{vmatrix} > 0, \quad 5) \begin{vmatrix} 1 & x-2 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ x+3 & -1 & 1 \end{vmatrix} < 0, \quad 6) \begin{vmatrix} 3 & x-2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3-x \end{vmatrix} \leq 0.$$

18. Odrediti nepoznatu x tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} -1 & 2x-3 & 1 \\ 1-\frac{1}{2}x & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \leq 1, \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & 3-\frac{1}{4}x & 1 \\ 0 & 1 & 4x-1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \geq 0, \quad 3) \begin{vmatrix} 2-\frac{1}{3}x & 0 & 1 \\ -1 & 1-3x & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} > 0.$$

1.3. Determinante reda većeg od 3

Primer 1. Laplasovim razvojem po IV-toj koloni izračunati vrednost sledeće determinante.

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} &= \sum_{k=1}^4 a_{k,4} A_{k,4} = \sum_{k=1}^4 a_{k,4} (-1)^{k+4} M_{k,4} \\
 &= -a_{1,4} M_{1,4} + a_{2,4} M_{2,4} - a_{3,4} M_{3,4} + a_{4,4} M_{4,4} \\
 &= a_{2,4} M_{2,4} \\
 &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

Napomena
 $\equiv 0$.

Napomena. Navedena determinanta je jednaka 0 na osnovu osobine determinanti koja glasi: *Vrednost determinante je jednaka 0 ako su elementi jednog reda (kolone) jednaki (ili proporcionalni) odgovarajućim elementima nekog drugog reda (kolone).* ♦

Primer 2. Laplasovim razvojem po I-vom redu izračunati vrednost sledeće determinante.

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} &= \sum_{k=1}^4 a_{1,k} A_{1,k} = \sum_{k=1}^4 a_{1,k} (-1)^{1+k} M_{1,k} \\
 &= a_{1,1} M_{1,1} - a_{1,2} M_{1,2} + a_{1,3} M_{1,3} - a_{1,4} M_{1,4} \\
 &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= 1 \cdot (-5) + 1 \cdot 5 \\
 &= 0. \blacklozenge
 \end{aligned}$$

1. Izračunati vrednost sledećih determinanti koristeći Laplasov razvoj (po I-voj koloni).

$$1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad 2) \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad 3) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix},$$

$$4) \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad 5) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad 6) \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

2. Proveriti rezultate iz zadatka **1.** koristeći Laplasov razvoj (po proizvoljnom redu).

3. Izračunati vrednost sledećih determinanti koristeći Laplasov razvoj (po I-vom redu).

$$1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad 2) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad 3) \begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix},$$

$$4) \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad 5) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad 6) \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

4. Proveriti rezultate iz zadatka **3.** koristeći Laplasov razvoj (po proizvoljnoj koloni).

5. Proveriti tačnost sledećih nejednakosti.

$$1) \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} > 0, \quad 2) \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} < 0, \quad 3) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} > 0,$$

$$4) \begin{vmatrix} -2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \leq 0, \quad 5) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & -3 \\ -3 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} > 0, \quad 6) \begin{vmatrix} -2 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} \leq 0.$$

6. Odrediti nepoznatu x tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & x & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0, \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ x & 3 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad 3) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & x \\ -1 & -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$4) \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -3 & 5 \\ x & 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 1, \quad 5) \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & x \end{vmatrix} = -6, \quad 6) \begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 & -2 \\ x & -5 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 5.$$

7. Odrediti nepoznatu x tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & x+1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -3, \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3-2x \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad 3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2x+1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2,$$

$$4) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2+x & 2 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad 5) \begin{vmatrix} 2-3x & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad 6) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1-3x \end{vmatrix} = 2.$$

8. Odrediti nepoznatu x tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) x^2 + 4x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \end{vmatrix}, \quad 2) x^2 - \frac{5}{2}x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 3 \end{vmatrix},$$

$$3) x^2 + 5x = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \end{vmatrix}, \quad 4) x^2 - \frac{10}{3}x = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$5) x^2 - 5x = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}, \quad 6) x^2 + \frac{1}{2}x = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

9. Odrediti nepoznatu x tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & x & 2 \\ 1 & x & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad 2) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & x \end{vmatrix} = 6, \quad 3) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & x \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & x & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6,$$

$$4) \begin{vmatrix} -2 & 0 & x & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ x & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad 5) \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & x & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3, \quad 6) \begin{vmatrix} 3 & x & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & x & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 4.$$

10. Odrediti nepoznatu x tako da bude ispunjeno sledeće:

$$1) \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & x+1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -3, \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3-2x \\ 1 & 2 & 3+x & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$3) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & x+1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2-x & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad 4) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1-2x \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1-2x & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2,$$

$$5) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x+1 \\ 2x+1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad 6) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ x-1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & x-1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 6.$$

11. Odrediti nepoznatu x tako da bude ispunjeno sledeće:

$$\begin{aligned}
 1) \quad 2x^2 - 3x &\geq \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 1 & -3 \end{vmatrix}, & 2) \quad x^2 + 5x &> \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}, \\
 3) \quad x^2 - 5x &\leq \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}, & 4) \quad 3x^2 - x &< \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \\
 5) \quad x^2 + \frac{3}{2}x &> \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & \frac{7}{2} & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}, & 6) \quad x^2 - \frac{5}{2}x &\leq \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

12. Odrediti nepoznatu x tako da bude ispunjeno sledeće:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & 3 \\ x & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} &\geq -2, & 2) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & x & -3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} &< 3, \\
 3) \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & x & -1 & 3 \end{vmatrix} &> -4, & 4) \quad \begin{vmatrix} 3 & x & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} &\leq 0, \\
 5) \quad \begin{vmatrix} x & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} &< -2, & 6) \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} &\geq 3.
 \end{aligned}$$

13. Odrediti nepoznatu x tako da bude ispunjeno sledeće:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & x+2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ x-1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} &< -3, & 2) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & x+1 & 3 \\ x+1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} &\geq 4,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3) \quad & \begin{vmatrix} 2+x & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2+x & 2 \end{vmatrix} > -1, & 4) \quad & \begin{vmatrix} 1 & x+1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & x-1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \leq 2, \\
5) \quad & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & x+1 \\ x-1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \leq -2, & 6) \quad & \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & x-1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & x+2 & 2 & 2 \end{vmatrix} < 0.
\end{aligned}$$

14. Izračunati vrednost sledećih determinanti koristeći Laplasov razvoj (po proizvoljnoj koloni).

$$\begin{aligned}
1) \quad & \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}, & 2) \quad & \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}, & 3) \quad & \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \\
4) \quad & \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}, & 5) \quad & \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}, & 6) \quad & \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \\
7) \quad & \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}, & 8) \quad & \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}, & 9) \quad & \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \\
10) \quad & \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}, & 11) \quad & \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}, & 12) \quad & \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

15. Proveriti rezultate iz zadatka **14.** koristeći Laplasov razvoj (po proizvoljnom redu).

2. Matrice

Predlog literature za neophodne informacije o matricama: [1], [3], [4], [6], [7], [8] ili [9].

2.1. Operacije sa matricama

Primer 1. Ako su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

tada je:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad 2 \cdot A = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -2 \end{bmatrix},$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + (-2) & 3 + 1 \\ 2 + 1 & -1 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - (-2) & 3 - 1 \\ 2 - 1 & -1 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix},$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \\ 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -5 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 2 & (-2) \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}. \blacklozenge$$

Napomena. U ovom Praktikumu će proizvod realnog broja α i matrice A ($\alpha \cdot A$), kao i proizvod matrica A i B ($A \cdot B$) biti kraće zapisan, redom, sa αA i AB .

1. Ako je $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, izračunati:

$$1) 2A, \quad 2) -\frac{1}{3}A, \quad 3) A^T, \quad 4) \frac{1}{2}A^T, \quad 5) (A^T)^T, \quad 6) A + I, \quad 7) A - 2I,$$

$$8) 3A + A^T, \quad 9) A - A^T, \quad 10) (A^T + I)^T, \quad 11) (A - 2A^T)^T, \quad 12) (A + 3A^T - I)^T.$$

2. Ako su $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, proveriti sledeće rezultate.

$$1) 3A - B = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad 2) A^T + B = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad 3) A^T - 2B^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix},$$

$$4) B - 2A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}, \quad 5) B^T - A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad 6) B^T - 3A^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Ako su $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, izračunati:

$$1) A + 2B, \quad 2) 2A - B + 3I, \quad 3) 3A + B^T - I, \quad 4) (A^T - B)^T, \quad 5) (A - 3B + 2I)^T, \\ 6) B - 3A, \quad 7) 3B - A + 2I, \quad 8) B - 2A^T + I, \quad 9) (B^T - A)^T, \quad 10) (B + 2A - 3I)^T.$$

4. Ako su $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, izračunati:

$$1) A + 3B, \quad 2) A - 2B, \quad 3) A^T + 3B^T, \quad 4) (A - B)^T, \quad 5) (A + 2B)^T, \\ 6) B - 2A, \quad 7) B + 3A, \quad 8) B^T - 2A^T, \quad 9) (B + A)^T, \quad 10) (B - 3A)^T.$$

5. Ako su $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$, izračunati:

$$1) A - 3B, \quad 2) 2A + 3B, \quad 3) A^T - 2B^T, \quad 4) (A + B)^T, \quad 5) (3A - B)^T, \\ 6) B + 2A, \quad 7) 3B - 2A, \quad 8) B^T + 3A^T, \quad 9) (B - A)^T, \quad 10) (2B + A)^T.$$

6. Ako su $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, izračunati:

$$1) A + 2B^T, \quad 2) 3A^T - B, \quad 3) A^T + 2B, \quad 4) (A - B^T)^T, \quad 5) (2A^T + B)^T, \\ 6) B - 2A^T, \quad 7) 2B^T - A, \quad 8) B^T + 3A, \quad 9) (B + A^T)^T, \quad 10) (3B^T - A)^T.$$

7. Ako su $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, proveriti sledeće rezultate.

$$1) 2A+B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad 2) A^T-B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad 3) A^T+2B^T = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$4) B-3A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 7 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad 5) B^T+A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad 6) B^T-2A^T = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -5 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

8. Ako su $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, izračunati:

$$1) A-3B, \quad 2) A^T+2B, \quad 3) A-3B^T-2I, \quad 4) (A-B+3I)^T, \quad 5) (3A-B^T)^T-I, \\ 6) B-2A, \quad 7) B^T+3A, \quad 8) B-2A^T+3I, \quad 9) (B-A-2I)^T, \quad 10) (2B-A^T)^T+I.$$

9. Ako su $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, izračunati:

$$1) A^T-3B, \quad 2) B-2A^T, \quad 3) B^T-A, \quad 4) 2A-3B^T, \quad 5) \frac{1}{2}B^T + \frac{2}{3}A.$$

10. Ako su $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}$, izračunati:

$$1) A^TB, \quad 2) BA^T, \quad 3) AB^T, \quad 4) B^TA, \quad 5) A^TB-2I, \quad 6) B^TA+3I, \\ 7) (AB^T)^2, \quad 8) (BA^T)^2, \quad 9) (AB^T)^2-(BA^T)^2, \quad 10) (B^TA)^2, \quad 11) (A^TB)^2, \\ 12) (B^TA)^2-3I, \quad 13) (A^TB)^2+I, \quad 14) (B^TA)^2-(A^TB)^2, \quad 15) (A^TB)^2+2(B^TA)^2.$$

11. Ako su $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, izračunati:

$$1) AB, \quad 2) AB^T, \quad 3) A^TB, \quad 4) A^TB^T, \quad 5) BA, \quad 6) BA^T, \quad 7) B^TA,$$

- 8) $B^T A^T$, 9) $A^2 B^T$, 10) $B^2 A^T$, 11) $A^2 B^2 + 2I$, 12) $B^2 A^2 - 3I$,
 13) $A^2 B^2 + B^T A^T - 2I$, 14) $A^T B^T - B^2 A^2 + I$, 15) $A^T B^2 + B^2 A^T - I$.

12. Ako su $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, izračunati:

- 1) $AB^T - 2I$, 2) $BA^T + I$, 3) $(A^T B)^2$, 4) $(B^T A)^2$, 5) $(AB^T)^2$, 6) $(BA^T)^2$,
 7) $(AB^T)^2 + 3I$, 8) $(BA^T)^2 - 2I$, 9) $(A^T B)^2 + (B^T A)^2$, 10) $(AB^T)^2 - (BA^T)^2$.

13. Ako su $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, izračunati:

- 1) $AB^T - 2I$, 2) $A^T B + I$, 3) $BA^T - I$, 4) $B^T A + 3I$, 5) $(A^T B)^2$, 6) $(B^T A)^2$,
 7) $(AB^T)^2$, 8) $(BA^T)^2$, 9) $(A^T B)^2 + 3I$, 10) $(B^T A)^2 - 2I$, 11) $(AB^T)^2 + I$,
 12) $(BA^T)^2 - 3I$, 13) $(B^T A)^2 - (A^T B)^2 + 2I$, 14) $(AB^T)^2 - (BA^T)^2 - 3I$.

14. Ako su $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, izračunati:

- 1) AB , 2) AB^T , 3) $A^T B$, 4) $A^T B^T$, 5) BA , 6) BA^T , 7) $B^T A$, 8) $B^T A^T$,
 9) $A^2 B^T$, 10) $B^2 A^T$, 11) $A^2 B^2 - 3I$, 12) $B^2 A^2 + 2I$, 13) $A^T B^2 - B^2 A^T + I$,
 14) $B^T A^2 - A^2 B^T - 2I$, 15) $A^2 B^2 + B^T A^T + 3I$, 16) $A^T B^T + B^2 A^2 - I$.

15. Neka je $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Izračunati $p(A)$ ako je:

- 1) $p(x) = x + 1$, 2) $p(x) = -x + 3$, 3) $p(x) = 2x - 1$, 4) $p(x) = -3x + 2$.

16. Neka je $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Izračunati $p(A)$ ako je:

$$1) p(x) = \frac{3}{2}x^2, \quad 2) p(x) = -\frac{1}{2}x^2, \quad 3) p(x) = x^2 - x, \quad 4) p(x) = -x^2 + 2x,$$

$$5) p(x) = x^2 - 2, \quad 6) p(x) = -x^2 + 3, \quad 7) p(x) = x^2 - x + 1, \quad 8) p(x) = -2x^2 + x + 3.$$

17. Neka je $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ i $p(x) = x^2 - x + 1$. Tada je $p(A) = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$.

Proveriti.

18. Neka je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ i $p(x) = -x^2 + 2x + 3$. Tada je $p(A) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Proveriti.

19. Neka je $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Izračunati $p(A)$ ako je:

$$1) p(x) = -x - 1, \quad 2) p(x) = x - 3, \quad 3) p(x) = -2x + 3, \quad 4) p(x) = 3x - 4,$$

$$5) p(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}, \quad 6) p(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}, \quad 7) p(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}, \quad 8) p(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{3}{2}.$$

20. Neka je $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Izračunati $p(A)$ ako je:

$$1) p(x) = x^2 - 1, \quad 2) p(x) = -3x^2 + 2, \quad 3) p(x) = 2x^2 - x, \quad 4) p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x,$$

$$5) p(x) = x^2 - 2x + 3, \quad 6) p(x) = -2x^2 + 3x + 1, \quad 7) p(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}.$$

21. Neka je $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ i $p(x) = 3x^2 - 4x - 5$. Tada je $p(A) = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 11 \\ 8 & 5 & 14 \\ 11 & 14 & 16 \end{bmatrix}$.

Proveriti.

22. Neka je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ i $p(x) = -x^2 + 2x + 3$. Tada je $p(A) = \begin{bmatrix} -3 & -5 & 2 \\ -4 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix}$.

Proveriti.

23. Neka je $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ i $p(x) = 2x^2 - 3x + 4$. Tada je $p(A) = \begin{bmatrix} 7 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Proveriti.

2.2. Inverzna matrica

Primer 1. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tada je, $|A| = 3$, $A_{1,1} = -1$, $A_{1,2} = -2$, $A_{2,1} = 2$ i $A_{2,2} = 1$.

Dakle,

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}. \blacklozenge$$

Primer 2. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tada je, $|A| = 4$,

$$A_{1,1} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 8, \quad A_{2,1} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{3,1} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_{1,2} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{2,2} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{3,2} = - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{1,3} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{2,3} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{3,3} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4.$$

Dakle,

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 8 & -4 & 4 \\ -6 & 4 & -4 \\ 5 & -2 & 4 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 8 & -6 & 5 \\ -4 & 4 & -2 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix}. \blacklozenge$$

1. Naći inverznu matricu A^{-1} , ako je:

$$1) A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad 2) A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad 3) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad 4) A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$5) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad 6) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad 7) A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad 8) A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Neka je $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$. Tada je $A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$. Proveriti.

3. Neka je $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Tada je $A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Proveriti.

4. Odrediti u zavisnosti od realnog parametra a kada postoji inverz matrice A i (u slučaju kada postoji) naći inverznu matricu A^{-1} , ako je:

$$1) A = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad 2) A = \begin{bmatrix} -2 & a \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad 3) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ a & -4 \end{bmatrix}, \quad 4) A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & a \end{bmatrix},$$

$$5) A = \begin{bmatrix} a & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad 6) A = \begin{bmatrix} 3 & a \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad 7) A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ a & 2 \end{bmatrix}, \quad 8) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & a \end{bmatrix}.$$

5. Odrediti u zavisnosti od realnog parametra a kada postoji inverz matrice A i (u slučaju kada postoji) naći inverznu matricu A^{-1} , ako je:

$$1) A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{bmatrix}, \quad 2) A = \begin{bmatrix} -1 & a \\ a & -2 \end{bmatrix}, \quad 3) A = \begin{bmatrix} -1 & a \\ a & 2 \end{bmatrix}, \quad 4) A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 4 & a \end{bmatrix},$$

$$5) A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ -2 & a \end{bmatrix}, \quad 6) A = \begin{bmatrix} a & -4 \\ -1 & a \end{bmatrix}, \quad 7) A = \begin{bmatrix} -3 & a \\ -a & 1 \end{bmatrix}, \quad 8) A = \begin{bmatrix} 2 & a \\ a & 6 \end{bmatrix}.$$

6. Ako je $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$, izračunati vrednost sledećih izraza:

- 1) $A - A^{-1}$, 2) $A + A^{-1}$, 3) $-2A + 3A^{-1}$, 4) $3A - 2A^{-1}$, 5) $-4A + 2A^{-1}$,
6) $A - 2A^{-1} + I$, 7) $-A + A^{-1} - 2I$, 8) $3A + 2A^{-1} - 4I$, 9) $-3A + 4A^{-1} + 2I$.

7. Neka je $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. Tada je $A^{-1} + 2A = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$. Proveriti.

8. Neka je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Tada je $3A - A^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$. Proveriti.

9. Naći inverznu matricu A^{-1} , ako je:

$$1) A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad 2) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad 3) A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix},$$

$$4) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad 5) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad 6) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

10. Neka je $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Tada je $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 8 & -6 & 5 \\ -4 & 4 & -2 \\ 4 & -4 & 4 \end{bmatrix}$. Proveriti.

11. Neka je $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. Tada je $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Proveriti.

12. Odrediti u zavisnosti od realnog parametra a kada postoji inverz matrice A i (u slučaju kada postoji) naći inverznu matricu A^{-1} , ako je:

$$1) A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad 2) A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ a & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad 3) A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & a \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$4) A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ a & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad 5) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & a \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad 6) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}.$$

13. Odrediti u zavisnosti od realnog parametra a kada postoji inverz matrice A i (u slučaju kada postoji) naći inverznu matricu A^{-1} , ako je:

$$1) A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ a & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad 2) A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & a \end{bmatrix}, \quad 3) A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$4) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad 5) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a \\ a & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad 6) A = \begin{bmatrix} 2 & a & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ a & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

14. Ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, izračunati vrednost sledećih izraza:

$$1) A + A^{-1}, \quad 2) A - 2A^{-1}, \quad 3) 2A - 3A^{-1}, \quad 4) 3A + 2A^{-1}, \quad 5) -A - 4A^{-1},$$

$$6) A + 3A^{-1} - I, \quad 7) -2A + A^{-1} + 3I, \quad 8) A - A^{-1} + 2I, \quad 9) -3A + 2A^{-1} - 2I.$$

15. Neka je $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Tada je $A^{-1} - 2A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 7 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$. Proveriti.

16. Neka je $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Tada je $A^2 + 3A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & \frac{11}{2} \end{bmatrix}$. Proveriti.

17. Ako su $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, izračunati:

$$1) A^{-1} - 3B, \quad 2) 3A^{-1} + B^{-1}, \quad 3) A^{-1}B - AB^{-1}, \quad 4) A^{-1}B^{-1} + A - 3I,$$

$$5) B^{-1} + 2A, \quad 6) 2B^{-1} - A^{-1}, \quad 7) B^{-1}A + BA^{-1}, \quad 8) B^{-1}A^{-1} - B + 2I.$$

18. Neka su $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Tada je $A^{-1} - 2B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$. Proveriti.

19. Neka su $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Tada je $B^{-1} + 3A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{7}{2} \\ -5 & -\frac{11}{2} \end{bmatrix}$. Proveriti.

20. Ako su $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, izračunati:

1) $A^{-1} + B$, 2) $3A^{-1} - B^{-1}$, 3) $AB^{-1} + A^{-1}B$, 4) $A^{-1}B^{-1} - 2A + I$,
5) $B^{-1} - A$, 6) $2B^{-1} + A^{-1}$, 7) $BA^{-1} - B^{-1}A$, 8) $B^{-1}A^{-1} + 3B - I$.

21. Neka su $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Tada je $A^{-1} + 3B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 7 \\ 5 & -7 & 5 \\ 2 & 5 & -6 \end{bmatrix}$. Proveriti.

22. Neka su $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Tada je $B^{-1} - 2A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 6 & -5 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Proveriti.

2.3. Matrične jednačine

Primer 1. Date su matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Rešiti matričnu jednačinu: $AX = B^T - X$.

Rešenje. Iz $AX = B^T - X$ sledi $AX + X = B^T$ tj. $(A + I)X = B^T$.

Neka je $C = A + I$ tj. $CX = B^T$, iz čega, pod uslovom da postoji inverz matrice C , dobijamo da je $X = C^{-1}B^T$.

Potrebno je naći C^{-1} tj.

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \quad \text{odnosno} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Pošto je

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

i

$$C_{1,1} = 1, \quad C_{1,2} = -1, \quad C_{2,1} = 1, \quad C_{2,2} = 2,$$

dobijamo da je

$$C^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Prema tome, rešenje date matricne jednačine je

$$X = C^{-1}B^T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \blacklozenge$$

1. Ako je $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, odrediti nepoznatu matricu X .

- 1) $AX = I$, 2) $XA = I$, 3) $XA = A^T$, 4) $AX = A^{-1}$, 5) $XA = A^{-1} + I$,
6) $AX - I = A^T$, 7) $XA + 2I = A^2$, 8) $AX = A^T - X$, 9) $XA - 2X = A + I$.

2. Ako su $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, odrediti nepoznatu matricu X .

- 1) $AX = B$, 2) $XB = A$, 3) $AX = B^T$, 4) $XB = A^T$, 5) $XA = B^{-1}$,
6) $XA + I = B^T$, 7) $XB - 2I = A^2$, 8) $AX + 2X = B$, 9) $BX = A^T + X$.

3. Ako su $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, odrediti nepoznatu matricu X .

- 1) $AXB = I$, 2) $B^{-1}XA^{-1} = I$, 3) $A^T XB^{-1} = I$, 4) $XA^T = B^{-1} + X$,
5) $(X^T + A)^T = 2I - BX$, 6) $(AX^{-1})^{-1} = B + I - X$, 7) $(A + X)^{-1} = B$.

4. Ako su $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, odrediti nepoznatu matricu X .

- 1) $AX = B$, 2) $XA = B^T$, 3) $A^T X = B$, 4) $XA^T = B^T$, 5) $AX + 2X = B$,
6) $XA = B^T - X$, 7) $A^T X = B + 3X$, 8) $AX - A^T X = B$, 9) $XA + XA^T = B^T$.

5. Ako su $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, odrediti nepoznatu matricu X .

- 1) $AX = B^T$, 2) $XA = B$, 3) $A^T X = B^T$, 4) $XA^T = B$, 5) $AX + 2X = B^T$,
6) $XA = B + X$, 7) $A^T X = B^T - 2X$, 8) $AX + A^T X = B^T$, 9) $XA - XA^T = B$.

6. Ako su $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, odrediti nepoznatu matricu X .

- 1) $BX = A$, 2) $XB = A^T$, 3) $B^T X = A$, 4) $XB^T = A^T$, 5) $XB - X = A^T$,
6) $BX = A + 2X$, 7) $B^T X = A - 3X$, 8) $BX + B^T X = A$, 9) $XB - XB^T = A^T$.

7. Ako su $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, odrediti nepoznatu matricu X .

- 1) $BX = A^T$, 2) $XB = A$, 3) $B^T X = A^T$, 4) $XB^T = A$, 5) $BX + 2X = A^T$,
6) $XB = A - 3X$, 7) $B^T X = A^T + X$, 8) $BX - B^T X = A^T$, 9) $XB + XB^T = A$.

8. Ako je $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, odrediti nepoznatu matricu X .

- 1) $AX = I$, 2) $XA = I$, 3) $AX = A^T$, 4) $XA = A^T$, 5) $AX = A^T + 2I$,
6) $XA = A^2 - 2I$, 7) $AX + I = A^{-1}$, 8) $XA = A^T - X$, 9) $AX - 3X = A + I$.

9. Ako su $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, odrediti nepoznatu matricu X .

- 1) $AX = B$, 2) $BX = A$, 3) $XA = B^T$, 4) $XB = A^T$, 5) $XA = B^T + I$,
6) $XB - 2I = A^2$, 7) $AX + I = B^{-1}$, 8) $BX = A^T + X$, 9) $XA + 2X = B - I$.

10. Ako su $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, odrediti nepoznatu matricu X .

- 1) $AXB = I$, 2) $BXA = I$, 3) $A^T X B^{-1} = I$, 4) $B^T X - I = A^T + 2X$,
6) $(X^T - A)^T = BX$, 7) $(AX^T)^T = X + B$, 8) $(X^{-1}B)^{-1} = A$, 9) $(X - B)^{-1} = A$.

11. Ako su $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, odrediti nepoznatu matricu X .

- 1) $XA = B$, 2) $A^T X = B^T$, 3) $AX = B^T$, 4) $XA^T = B$, 5) $XA + X = B$,
6) $AX = B^T + X$, 7) $XA^T = B - 2X$, 8) $XA - XA^T = B$, 9) $AX + A^T X = B^T$.

12. Ako su $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, odrediti nepoznatu matricu X .

- 1) $XA = B$, 2) $A^T X = B^T$, 3) $AX = B^T$, 4) $XA^T = B$, 5) $XA + 2X = B$,
6) $AX = B^T + X$, 7) $XA^T = B - 3X$, 8) $XA + XA^T = B$, 9) $AX - A^T X = B^T$.

13. Ako su $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, odrediti nepoznatu matricu X .

- 1) $BX = A^T$, 2) $B^T X = A^T$, 3) $XB = A$, 4) $XB^T = A$, 5) $BX - 2X = A^T$,
6) $XB = A + 3X$, 7) $B^T X = A^T - X$, 8) $BX + B^T X = A^T$, 9) $XB - XB^T = A$.

14. Ako su $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, odrediti nepoznatu matricu X .

- 1) $BX = A^T$, 2) $B^T X = A^T$, 3) $XB = A$, 4) $XB^T = A$, 5) $BX + 3X = A^T$,
6) $XB = A - 2X$, 7) $B^T X = A^T + X$, 8) $BX - B^T X = A^T$, 9) $XB + XB^T = A$.

2.4. Rang matrice

Primer 1. Odrediti rang matrice A .

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Iz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 5 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\diamond} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\square} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

zaključujemo da je $\text{rang}(A) = 2$.

Napomena.

Napomenimo da se $\diamond$ dobija primenom sledećih elementarnih operacija:

- 1) I-vi red se doda II-gom redu;
- 2) I-vi red se pomnoži sa 3 i doda III-ćem redu;
- 3) I-vi red se pomnoži sa 4 i doda IV-tom redu;

Napomenimo da se $\square$ dobija primenom sledećih elementarnih operacija:

- 1) II-gi red se pomnoži sa -1 i doda III-ćem redu;
- 2) II-gi red se pomnoži sa -3 i doda IV-tom redu. $\blacklozenge$

1. Odrediti rang sledećih matrica.

$$1) A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad 2) A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad 3) A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad 4) A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix},$$

$$5) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad 6) A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad 7) A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$8) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad 9) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad 10) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$11) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & -3 & -6 \\ 2 & -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad 12) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad 13) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Odrediti rang matrice A u zavisnosti od realnog parametra a .

$$1) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & a \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad 2) A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ a & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad 3) A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \\ 1 & a \end{bmatrix}, \quad 4) A = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$5) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & a \end{bmatrix}, \quad 6) A = \begin{bmatrix} 1 & a & -1 \\ -3 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad 7) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ a & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$8) A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ a & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad 9) A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & a \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad 10) A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & -2 \end{bmatrix},$$

$$11) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & a \\ -2 & 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}, \quad 12) A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad 13) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & a & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Sistemi linearnih jednačina

Predlog literature za neophodne informacije o sistemima linearnih jednačina i metodama rešavanja takvih sistema: [1], [4] ili [9].

3.1. Gausova metoda

Primer 1. Rešiti Gausovom metodom sledeći sistem linearnih jednačina.

$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 2 \\ 3x + 4y + 3z &= 4 \\ 2x + y - 3z &= 6 \end{aligned} \quad (1)$$

Rešenje. Množenjem prve jednačine sistema (1) sa -3 i dodavanjem drugoj jednačini, kao i množenjem prve jednačine istog sistema sa -2 i dodavanjem trećoj jednačini dobijamo sledeći (ekvivalentan) sistem:

$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 2 \\ -5y - 3z &= -2 \\ -5y - 7z &= 2 \end{aligned} \quad (2)$$

Množenjem druge jednačine sistema (2) sa -1 i dodavanjem trećoj jednačini istog sistema dobijamo sledeći (ekvivalentan) sistem:

$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 2 \\ -5y - 3z &= -2 \\ -4z &= 4 \end{aligned} \quad (3)$$

Iz poslednje jednačine sistema (3) sledi da je $z = -1$. Iz pretposlednje jednačine istog sistema sledi da je $y = 1$. Na kraju, iz prve jednačine istog sistema sledi da je $x = 1$.

Dakle, rešenje sistema (3), a time i njemu ekvivalentnog sistema (1), je uređena trojka $(x, y, z) = (1, 1, -1)$ tj. sistem (1) ima jedinstveno rešenje – *određen* sistem. ♦

Primer 2. Rešiti Gausovom metodom sledeći sistem linearnih jednačina.

$$\begin{aligned} x - 2y - 3z &= -2 \\ -x + y + z &= 1 \\ 3x - y + z &= -1 \end{aligned} \quad (4)$$

Rešenje. Dodavanjem prve jednačine sistema (4) drugoj jednačini, kao i množenjem prve jednačine istog sistema sa -3 i dodavanjem trećoj jednačini dobijamo sledeći (ekvivalentan) sistem:

$$\begin{aligned} x - 2y - 3z &= -2 \\ -y - 2z &= -1 \\ 5y + 10z &= 5 \end{aligned} \quad (5)$$

Množenjem druge jednačine sistema (5) sa 5 i dodavanjem trećoj jednačini istog sistema dobijamo sledeći (ekvivalentan) sistem:

$$\begin{aligned} x - 2y - 3z &= -2 \\ -y - 2z &= -1 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Identitet $0 = 0$ možemo izostaviti iz sistema (6), pa se sistem (6) svodi na sledeći sistem od dve jednačine:

$$\begin{aligned} x - 2y - 3z &= -2 \\ -y - 2z &= -1 \end{aligned} \quad (7)$$

Iz poslednje jednačine sistema (7) sledi da je $y = 1 - 2z$. Na kraju, iz prve jednačine istog sistema sledi da je $x = -z$.

Dakle, rešenje sistema (7), a time i njemu ekvivalentnog sistema (4), je svaka uređena trojka oblika $(x, y, z) = (-t, 1 - 2t, t)$, $t \in \mathbf{R}$, tj. sistem (4) ima beskonačno mnogo rešenja – *neodređen* sistem. ♦

Primer 3. Rešiti Gausovom metodom sledeći sistem linearnih jednačina.

$$\begin{aligned} x - 3y - 2z &= 3 \\ -x + 2y + 3z &= 1 \\ x - y - 4z &= 2 \end{aligned} \quad (8)$$

Rešenje. Dodavanjem prve jednačine sistema (8) drugoj jednačini, kao i množenjem prve jednačine istog sistema sa -1 i dodavanjem trećoj jednačini dobijamo sledeći (ekvivalentan) sistem:

$$\begin{aligned} x - 3y - 2z &= 3 \\ -y + z &= 4 \\ 2y - 2z &= -1 \end{aligned} \quad (9)$$

Množenjem druge jednačine sistema (9) sa 2 i dodavanjem trećoj jednačini istog sistema dobijamo sledeći (ekvivalentan) sistem:

$$\begin{aligned} x - 2y + 2z &= 3 \\ -y + z &= 4 \\ 0 &= 7 \end{aligned} \quad (10)$$

Iz poslednje jednakosti sistema (10) koja je nemoguća sledi da sistem (10), a time i njemu ekvivalentan sistem (8), nema rešenja – *nemoguć* sistem. ♦

1. Rešiti Gausovom metodom sledeći sistem linearnih jednačina.

$$\begin{array}{ll} x + y + z = 3 & x + y - z = 1 \\ 1) \quad x - 2y - 3z = -4 & 2) \quad 2x + 3y + z = 0 \\ 2x + y - z = 2 & x + 2y + 2z = 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 3x + y - 2z &= 7 \\ 3) \quad x + 2y - 3z &= 8 \\ 2x - y + z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= -5 \\ 5) \quad 2x - 3y + z &= -4 \\ x - 4y + 3z &= -7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ 7) \quad 3x - 2y + 2z &= -5 \\ 2x - y + 3z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 9 \\ 4) \quad 3x - 4y - 2z &= 7 \\ x - 2y - z &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 3y - 2z &= 1 \\ 6) \quad 2x - 3y - 2z &= 1 \\ 2x + 3y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 3y - 4z &= 6 \\ 8) \quad x + 2y + 5z &= 5 \\ 2x + 5y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

2. Rešiti Gausovom metodom sledeći sistem linearnih jednačina.

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 2z &= -2 \\ 1) \quad 3x + 4y + 5z &= 6 \\ 2x + 5y + 3z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x - 4y + 3z &= -5 \\ 3) \quad 4x + 3y - 5z &= 1 \\ 2x - 3y + 2z &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 4z &= -7 \\ 5) \quad 3x + 2y - 7z &= 9 \\ 4x - 3y + 2z &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 5z &= 0 \\ 7) \quad 4x + 3y - 7z &= -6 \\ 2x - 5y + 3z &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 4z &= 0 \\ 2) \quad -2x + 3y - 5z &= 2 \\ 2x - 2y + 4z &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 2z &= 0 \\ 4) \quad -4x + 2y - 2z &= -3 \\ 4x + 2y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x + 3y + 3z &= -4 \\ 6) \quad -3x + 2y - 2z &= 3 \\ 4x - 5y + 3z &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -4x + 2y - 3z &= 6 \\ 8) \quad 3x + 4y - 2z &= -2 \\ 2x + 3y - 4z &= -6 \end{aligned}$$

3. Rešiti Gausovom metodom sledeći sistem linearnih jednačina.

$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= -1 \\ 1) \quad 3x + 4y - 2z &= 3 \\ x + 3y &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 6 \\ 3) \quad 4y - 3z &= 5 \\ 3x + 2y - 5z &= -7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 2z &= 3 \\ 2) \quad 3x + z &= -2 \\ 2x - 4y + 3z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x - y &= 1 \\ 4) \quad x + 4y - 3z &= -4 \\ 5x - y - z &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} 3x + 4y - 2z = -5 \\ 5) \quad 5x + 3y - 4z = 2 \\ \quad 4x + 5y = -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3x + 2z = -2 \\ 7) \quad 5x + 2y + 3z = -4 \\ \quad 4x + 3y + 2z = -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3x + 2y - 5z = -2 \\ 6) \quad -3y + 2z = 2 \\ \quad 2x + 5y - 3z = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x + 4y - 3z = -1 \\ 8) \quad 6y - 5z = 0 \\ \quad x + 5y - 4z = -1 \end{array}$$

4. Rešiti Gausovom metodom sledeći sistem linearnih jednačina.

$$\begin{array}{l} x - y + 2z = 3 \\ 2x + y - 2z = 6 \\ 1) \quad 3x - 2y - z = 4 \\ \quad x - 5y + 4z = -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x + y - z = 3 \\ x + y + 2z = -1 \\ 3) \quad 4x + 2y + 3z = 1 \\ \quad x - 3y - z = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x + 3y + 4z = -3 \\ x + y + z = 0 \\ 5) \quad 4x + y + 3z = -1 \\ \quad x + 2y - 2z = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + 2y - 2z = -7 \\ 3x - 4y - z = -6 \\ 7) \quad 2x - 2y - z = -5 \\ \quad x - 4y + z = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x - 3y - 2z = 1 \\ 2x - 2y - 3z = 5 \\ 2) \quad x + y + z = 2 \\ \quad 3x - 4y + 2z = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x + 3y + 4z = 3 \\ x + 2y + 3z = 3 \\ 4) \quad 3x + 4y + 5z = 3 \\ \quad x + y + z = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + y + 2z = 3 \\ 2x + 3y + 5z = 6 \\ 6) \quad 3x - 5y - 2z = 9 \\ \quad 3x + 4y + 7z = 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x - 7y + 8z = 6 \\ 2x - 5y + 3z = 7 \\ 8) \quad 4x + 3y - 7z = 1 \\ \quad 2x - 4y + 5z = 3 \end{array}$$

5. Rešiti Gausovom metodom sledeći sistem linearnih jednačina.

$$\begin{array}{l} 2x - 3y + 2z = 1 \\ 2x + 5y - 3z = 4 \\ 1) \quad -3x + 2y + 4z = 3 \\ \quad 4x - 3y + 5z = 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x - 3y - 2z = 0 \\ -3x - 2y + 4z = -1 \\ 2) \quad 4x + 3y - 5z = 1 \\ \quad -3x - 4y + 2z = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 2x + 3y - 5z = 5 \\
 3) \quad -3x + 5y - 2z = 2 \\
 -4x - 3y + 7z = -7 \\
 3x + 2y - 5z = 5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 2x + 3y - 4z = 1 \\
 5) \quad -3x + 4y - 5z = -5 \\
 4x - 2y + 3z = 4 \\
 -3x + 2y - 5z = 2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 2x - 3y - 5z = 4 \\
 7) \quad -3x + 2y + 5z = -6 \\
 4x - 3y - 7z = 8 \\
 3x + 5y + 2z = 6
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 -2x + 4y - 3z = -2 \\
 4) \quad 3x - 5y + 2z = 4 \\
 2x - 3y + 5z = 3 \\
 -3x + 4y + 2z = -5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 -2x + 3y + 4z = 9 \\
 6) \quad 3x - 5y - 2z = -5 \\
 4x - 2y + 3z = 0 \\
 5x + 4y + 3z = -8
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 2x + 3y + 2z = -2 \\
 8) \quad 5x + 2y + 3z = -1 \\
 -3x + 5y - 4z = 5 \\
 4x + 3y + 5z = -6
 \end{array}$$

6. Rešiti Gausovom metodom sledeći sistem linearnih jednačina.

$$\begin{array}{l}
 4x + y + 2z = 1 \\
 1) \quad 3x + z = 0 \\
 x + y + z = 1 \\
 3x - 3y - 2z = -3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 x + 2y - 4z = -3 \\
 3) \quad 3x + 5y - 2z = 2 \\
 x - 3z = 0 \\
 2x + y - 5z = 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 x - 2y - 4z = -3 \\
 5) \quad x + 3y = 0 \\
 2x + y - 3z = -1 \\
 3x + 4y - 5z = 3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 x - y - 2z = -4 \\
 7) \quad 3x + 2y - z = -2 \\
 x + 3y + 2z = 4 \\
 x - z = -2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 x - y + z = 0 \\
 2) \quad -2x + y + 3z = 2 \\
 -4x + 3y - 2z = -1 \\
 3x - 2y = 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 x + 2y + z = 6 \\
 4) \quad y + 2z = 4 \\
 -2x + 3y - 5z = -1 \\
 x - 2y + 3z = 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 x + y - z = 2 \\
 6) \quad -3x - 2y + z = 0 \\
 y + 2z = -2 \\
 2x + 5y + 3z = 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 x + y + 2z = 3 \\
 8) \quad -2x - 3y - z = -2 \\
 y - z = -2 \\
 x + 4y + 3z = 1
 \end{array}$$

7. Rešiti Gausovom metodom sledeći sistem linearnih jednačina.

$$\begin{array}{ll}
 \begin{array}{l}
 3x - 2y + 4z = -1 \\
 -2x + 3y + 5z = -1 \\
 1) \quad 4x - 5y \quad \quad = 1 \\
 2x - 4y + 3z = 2
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 5y + 2z = -4 \\
 2x + 3y + 4z = 4 \\
 2) \quad 5x - 4y - 3z = -6 \\
 -3x + 4y + 2z = 1
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{l}
 5x - 4y - 2z = -1 \\
 3x \quad \quad - 2z = 1 \\
 3) \quad -2x - 5y + 3z = -4 \\
 3x + 6y - 4z = 5
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 3x + 4y + 2z = 4 \\
 2x + 5y + 3z = 0 \\
 4) \quad 2y + 3z = -7 \\
 -2x - 3y - 2z = -1
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{l}
 3x - 2y \quad \quad = 0 \\
 4x - 3y - 2z = -5 \\
 5) \quad -5x + 4y + 3z = 7 \\
 2x - 5y - 4z = -1
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 4x - 2y - 5z = -5 \\
 2y + 3z = 3 \\
 6) \quad 2x + 5y + 4z = -1 \\
 -3x - 4y - 2z = 3
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{l}
 -5x \quad \quad + 4z = 1 \\
 3x + 2y - 5z = 0 \\
 7) \quad 4x - 3y + 2z = -3 \\
 2x - 4y + 3z = -2
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 -5x + 2y - 3z = 5 \\
 2x \quad \quad + 3z = 6 \\
 8) \quad 3x - 2y + 4z = 5 \\
 4x + 3y + 2z = -1
 \end{array}
 \end{array}$$

3.2. Kramerova metoda

Primer 1. Rešiti Kramerovom metodom sledeći sistem linearnih jednačina.

$$\begin{array}{l}
 x + 3y + 2z = 2 \\
 3x + 4y + 3z = 4 \\
 2x + y - 3z = 6
 \end{array} \tag{11}$$

Rešenje. Treba odrediti D determinantu sistema (11) i D_x , D_y i D_z determinante koje odgovaraju, redom, nepoznatoj x , y i z .

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 4 \cdot (-3) + 3 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 4 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \cdot 1 - (-3) \cdot 3 \cdot 3 = 20,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot 4 \cdot (-3) + 3 \cdot 3 \cdot 6 + 2 \cdot 4 \cdot 1 - 6 \cdot 4 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \cdot 2 - (-3) \cdot 4 \cdot 3 = 20,$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 4 \cdot (-3) + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 6 - 2 \cdot 4 \cdot 2 - 6 \cdot 3 \cdot 1 - (-3) \cdot 3 \cdot 2 = 20,$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 4 \cdot 6 + 3 \cdot 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 4 \cdot 2 - 1 \cdot 4 \cdot 1 - 6 \cdot 3 \cdot 3 = -20.$$

Dakle,

$$x = \frac{D_x}{D} = 1, \quad y = \frac{D_y}{D} = 1, \quad z = \frac{D_z}{D} = -1.$$

Prema tome, rešenje sistema (11) je uređena trojka $(x, y, z) = (1, 1, -1)$ tj. sistem (11) ima jedinstveno rešenje – *određen* sistem. ♦

Primer 2. Rešiti Kramerovom metodom sledeći sistem linearnih jednačina.

$$\begin{aligned} x - 2y - 3z &= -2 \\ -x + y + z &= 1 \\ 3x - y + z &= -1 \end{aligned} \tag{12}$$

Rešenje. Treba odrediti D determinantu sistema (12) i D_x , D_y i D_z determinante koje odgovaraju, redom, nepoznatoj x , y i z .

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 \cdot 3 + (-3) \cdot (-1) \cdot (-1) - 3 \cdot 1 \cdot (-3) - (-1) \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \cdot (-2) = 0,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad D_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Napomena. $D_y = 0$ jer je $D_y = D$, $D_x = D_z = 0$ na osnovu osobine determinanti koja glasi: Vrednost determinante je jednaka 0 ako su elementi jednog reda (kolone) jednaki (ili proporcionalni) odgovarajućim elementima nekog drugog reda (kolone).

Dakle,

$$D = D_x = D_y = D_z = 0.$$

Na osnovu toga zaključujemo da sistem (12) može biti *neodređen* ili *nemoguć*. Međutim, **Primer 2.** – Gausova metoda pokazuje da je sistem (12) *neodređen* sistem. ♦

Primer 3. Rešiti Kramerovom metodom sledeći sistem linearnih jednačina.

$$\begin{aligned} x - 3y - 2z &= 3 \\ -x + 2y + 3z &= 1 \\ x - y - 4z &= 2 \end{aligned} \tag{13}$$

Rešenje. Treba odrediti D determinantu sistema (13) i D_x , D_y i D_z determinante koje odgovaraju, redom, nepoznatoj x , y i z .

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot 2 \cdot (-4) + (-3) \cdot 3 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) \cdot (-1) - 1 \cdot 2 \cdot (-2) - (-1) \cdot 3 \cdot 1 - (-4) \cdot (-1) \cdot (-3) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_x &= \begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} \\ &= 3 \cdot 2 \cdot (-4) + (-3) \cdot 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 \cdot (-2) - (-1) \cdot 3 \cdot 3 - (-4) \cdot 1 \cdot (-3) = -35. \end{aligned}$$

Pošto je determinanta sistema (13) jednaka 0, i determinanta koja odgovara bar jednoj nepoznatoj, a to je u ovom slučaju determinanta D_x , različita od 0, zaključujemo da sistem (13) nema rešenje – *nemoguć* sistem. ♦

1. Rešiti Kramerovom metodom sledeći sistem linearnih jednačina.

$$\begin{array}{ll} x - 2y + 3z = -5 & 3x + 2y - 3z = 3 \\ 1) \quad 3x + 3y + z = 2 & 2) \quad 2x - 3y - 2z = 2 \\ 2x - 4y - 2z = -2 & 5x - 4y - 4z = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 4x + 3y + 2z = -2 & x + 2y - 3z = 0 \\
 3) \quad 3x + 2y - 2z = -9 & 4) \quad 2x - y + z = 1 \\
 2x + 4y - 3z = -4 & 3x + y - 2z = 1 \\
 \\
 x + 2y + z = -2 & x + y + 2z = 2 \\
 5) \quad 2x - 3y - 2z = 1 & 6) \quad 3x + 2y + 3z = 8 \\
 2x + 5y + z = 0 & 2x + y + z = 6 \\
 \\
 x - y - 2z = -1 & 4x + y - z = 2 \\
 7) \quad x + 2y + 3z = 0 & 8) \quad x + 4y + z = 1 \\
 2x + y + 2z = 1 & 3x - 3y - 2z = 2
 \end{array}$$

2. Rešiti Kramerovom metodom sledeći sistem linearnih jednačina.

$$\begin{array}{ll}
 x - 2y - 3z = 2 & 4x - y - 5z = 1 \\
 1) \quad x - y - 2z = 1 & 2) \quad y - 3z = -1 \\
 2x + 3y = -3 & 3x - y - 3z = 1 \\
 \\
 x + y + z = 0 & x - y - 3z = -1 \\
 3) \quad 2x + 5y - 3z = -2 & 4) \quad x + 2z = 1 \\
 3y - 2z = 1 & 3x - y + z = -1 \\
 \\
 x + y - z = -3 & x - 2z = -6 \\
 5) \quad 2x - y = 2 & 6) \quad 2x + 3y + 4z = 4 \\
 5x + 2y - 3z = -7 & 3x - 4y + 5z = 4 \\
 \\
 x + 2y - 4z = 3 & x + z = 1 \\
 7) \quad -y + 2z = -1 & 8) \quad 2x + 3y - 4z = -4 \\
 2x - y + 2z = 4 & 3x - 2y + 5z = 1
 \end{array}$$

3. Diskutovati i rešiti primenom Kramerove metode, u zavisnosti od realnog parametra a , sledeći sistem linearnih jednačina.

$$\begin{array}{ll}
 -y + az = a & 2x + ay + z = 1 \\
 1) \quad -x + az = a & 2) \quad 3x + 5z = 2 \\
 ax + y = a & x - y + 4z = 1 \\
 \\
 ax + y + z = 1 & x + y + az = 1 \\
 3) \quad x + ay + z = 1 & 4) \quad x + ay + z = 2 \\
 x + y + az = 1 & ax + y + z = 3
 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x + ay + z &= 1 \\ 5) \quad x - y + 2z &= -2 \\ 2x + ay + z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x + y + az &= a \\ 7) \quad x + ay - z &= a \\ ax - y + z &= a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 9) \quad x + ay + az &= 1 \\ x + y + a^2z &= a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ax + y + z &= a^2 \\ 6) \quad x + ay + z &= a^2 \\ x + y + az &= a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ax - y + z &= 1 \\ 8) \quad x + ay - z &= 0 \\ -x + y + az &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y + az &= a^2 \\ 10) \quad x + ay + z &= a \\ ax + y + z &= 1 \end{aligned}$$

4. Diskutovati i rešiti primenom Kramerove metode, u zavisnosti od realnog parametra a , sledeći sistem linearnih jednačina.

$$\begin{aligned} (a-1)x - y + z &= a \\ 1) \quad x + y - z &= a \\ x + y + (a+1)z &= a \end{aligned} \quad \begin{aligned} x - y + (a+1)z &= 1 \\ 2) \quad x + ay + z &= 0 \\ (a-1)x + y - z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a-3)x + y + z &= 0 \\ 3) \quad (a-1)x + 2y + 2z &= 1 \\ 3x + 3y + (a+1)z &= a \end{aligned} \quad \begin{aligned} x - y + (a-1)z &= a \\ 4) \quad -x + (a-1)y - z &= -2 \\ (a+1)x - 3y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

3.3. Matrična metoda

Primer 1. Rešiti matričnom metodom sledeći sistem linearnih jednačina.

$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 2 \\ 3x + 4y + 3z &= 4 \\ 2x + y - 3z &= 6 \end{aligned} \tag{14}$$

Rešenje. Sistem (14) možemo zapisati u obliku: $AX=B$, gde je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Prema tome, $X=A^{-1}B$. Dakle, potrebno je naći A^{-1} . Iz

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot (-3) + 3 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 4 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \cdot 1 - (-3) \cdot 3 \cdot 3 = 20$$

i

$$A_{1,1} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -15, \quad A_{2,1} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 11, \quad A_{3,1} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{1,2} = -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 15, \quad A_{2,2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{3,2} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{1,3} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{2,3} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{3,3} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -5,$$

dobijamo da je

$$A^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} -15 & 15 & -5 \\ 11 & -7 & 5 \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} -15 & 11 & 1 \\ 15 & -7 & 3 \\ -5 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

tj.

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} -15 & 11 & 1 \\ 15 & -7 & 3 \\ -5 & 5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

odnosno $(x, y, z) = (1, 1, -1)$. ♦

1. Rešiti matricnom metodom sledeći sistem linearnih jednačina.

$$\begin{aligned} & x + 2y - 3z = -4 \\ 1) \quad & -2x + y + 2z = 6 \\ & 2x - y + z = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x + 2y - 3z = 5 \\ 3) \quad & -2x - 3y + 5z = -8 \\ & 5x + y - 8z = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x + 2y - 3z = 0 \\ 5) \quad & -2x + y + 2z = 1 \\ & x + 3y - 5z = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x + y + z = 6 \\ 2) \quad & 3x + y - 2z = -1 \\ & 2x - 3y + z = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x - y - 2z = -3 \\ 4) \quad & 2x + y + z = -1 \\ & 3x + 2y + 4z = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x + 3y - 5z = 4 \\ 6) \quad & 2x + y + 3z = 3 \\ & 3x - 5y + 2z = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 7 \\ 7) \quad -3x + 2y + z &= -3 \\ x - y + 2z &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 6 \\ 9) \quad -2x + 3y - z &= -1 \\ x - y - 3z &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= -3 \\ 11) \quad -2x - 3y - z &= 1 \\ x - y - 3z &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 13) \quad -2x + 3y + 4z &= -5 \\ x - 4y + 5z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + 2y - 3z &= -4 \\ 8) \quad 5x + y + 4z &= 2 \\ 3x + y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 3y + z &= -2 \\ 10) \quad 3x - 2y + z &= 4 \\ 4x - 5y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= -2 \\ 12) \quad 2x + 3y + 4z &= 1 \\ x + 4y + z &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 4z &= -6 \\ 14) \quad 5x - 3y - 2z &= 5 \\ 4x - 5y + 3z &= 8 \end{aligned}$$

2. Rešiti matricnom metodom sledeći sistem linearnih jednačina.

$$\begin{aligned} 2x - 3y - 2z &= 3 \\ 1) \quad 2y + 3z &= -4 \\ 3x + 4y + 5z &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x - y &= 2 \\ 3) \quad x + 2y - z &= -2 \\ 2x + y - 3z &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ 5) \quad 3x - 2z &= -3 \\ 2x - 3y + z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x - 2y + 4z &= -6 \\ 7) \quad 5x - 3y - 2z &= 5 \\ 4x - 5y &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -y + 3z &= 1 \\ 9) \quad 2x + 3y - z &= -5 \\ x - 4y - 5z &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 0 \\ 2) \quad 3y - z &= -1 \\ x - 5y + 3z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y - z &= 2 \\ 4) \quad 3y + 4z &= -2 \\ x - 4y + 5z &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 4 \\ 6) \quad x - 3y &= -4 \\ x + 5y - 4z &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x - 2y + z &= -2 \\ 8) \quad x - y + 2z &= 5 \\ 2x + z &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x + y + 4z &= -1 \\ 10) \quad 2x - 3y + 2z &= -4 \\ 3x - 5y - 6z &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
 2x + 3y - 2z = 2 & -x + 3z = 5 \\
 11) \quad x - 2y = 7 & 12) \quad 3x + 4y + 2z = -4 \\
 3x + 4y + 2z = -1 & 2x - 3y + 5z = 1 \\
 \\
 3x - 4y + 2z = 3 & 2x + z = 0 \\
 13) \quad x - 2y = -1 & 14) \quad -x + 2y - 3z = -4 \\
 2x + 3y - 5z = 7 & 3x + y + 2z = 5
 \end{array}$$

3.4. Homogeni sistemi linearnih jednačina

Primer 1. Rešiti homogeni sistem linearnih jednačina.

$$\begin{array}{l}
 x + 3y + 2z = 0 \\
 3x + 4y + 3z = 0 \\
 2x + y - 3z = 0
 \end{array} \quad (15)$$

Rešenje. Treba odrediti D determinantu sistema (15).

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} \\
 = 1 \cdot 4 \cdot (-3) + 3 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 4 \cdot 2 - 1 \cdot 3 \cdot 1 - (-3) \cdot 3 \cdot 3 = 20.$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0, \quad D_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0, \quad D_z = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Napomena. $D_x = D_y = D_z = 0$ na osnovu osobine determinanti koja glasi: Vrednost determinante je jednaka 0 ako su svi elementi jednog reda (kolone) jednaki 0.

Pošto je $D \neq 0$, sistem (15) ima jedinstveno rešenje:

$$x = \frac{D_x}{D} = 0, \quad y = \frac{D_y}{D} = 0, \quad z = \frac{D_z}{D} = 0.$$

Prema tome, rešenje sistema (15) je uređena trojka $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ tj. sistem (15) ima jedinstveno rešenje - *određen* sistem. ♦

Primer 2. Rešiti homogeni sistem linearnih jednačina.

$$\begin{array}{l}
 x - 2y - 3z = 0 \\
 x - y - z = 0 \\
 3x - y + z = 0
 \end{array} \quad (16)$$

Rešenje. Treba odrediti D determinantu sistema (16).

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) \cdot 3 + (-3) \cdot 1 \cdot (-1) - 3 \cdot (-1) \cdot (-3) - (-1) \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot (-2) = 0.$$

Pošto je $D = 0$ sistem (16) nema jedinstveno rešenje (a to je uređena trojka $(x, y, z) = (0, 0, 0)$), već ima beskonačno mnogo rešenja - *neodređen* sistem.

Iz

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

zaključujemo da je rang matrice sistema (16) jednak 2 tj. da je sistem (16) neodređen sistem po jednoj, razlika između broja nepoznatih sistema i ranga matrice sistema, (slobodnoj) nepoznatoj.

Iz sistema (16), prebacivanjem jedne nepoznate, npr. x , na drugu stranu jednakosti, dobijamo:

$$\begin{aligned} -2y - 3z &= -x \\ -y - z &= -x \\ -y + z &= -3x \end{aligned} \tag{17}$$

Da bismo odredili zavisnost nepoznatih y i z od nepoznate x dovoljno je, imajući u vidu da je rang matrice sistema (16) jednak 2, izabrati bilo koje dve jednačine sistema (17). Primenom Kramerove metode, na npr. prve dve jednačine sistema (17), dobijamo:

$$y = -\frac{\begin{vmatrix} x & -3 \\ x & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}} = 2x, \quad z = -\frac{\begin{vmatrix} -2 & x \\ -1 & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}} = -x,$$

odakle sledi da je svaka uređena trojka oblika $(x, y, z) = (t, 2t, -t), t \in \mathbf{R}$, rešenje sistema (16).

Napomena. U navedenom primeru smo kod sistema (16) prebacili nepoznatu x na drugu stranu jednakosti i određivali zavisnost nepoznatih y i z od nepoznate x . Međutim, kod sistema (16) možemo: prebaciti nepoznatu y na drugu stranu jednakosti i određivati zavisnost nepoznatih x i z od nepoznate y , ili prebaciti nepoznatu z na drugu stranu jednakosti i određivati zavisnost nepoznatih x i y od nepoznate z . ♦

1. Rešiti homogeni sistem linearnih jednačina.

$$\begin{aligned} & x - y - z = 0 \\ 1) \quad & 4x - y - 2z = 0 \\ & x + 2y + z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2x - y - 2z = 0 \\ 3) \quad & x - 2y - 3z = 0 \\ & 2x + 3y + z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x + y - z = 0 \\ 5) \quad & 2x - y + 2z = 0 \\ & x - 2y + z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 4x + y - 2z = 0 \\ 7) \quad & x + y - z = 0 \\ & 5x + 2y - 3z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x + 2y + 3z = 0 \\ 9) \quad & 2x + y + 4z = 0 \\ & x + 3y + 2z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x + y + 2z = 0 \\ 11) \quad & 3x - 4y + 2z = 0 \\ & x - 3y - z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x - y + 2z = 0 \\ 2) \quad & 2x + 3y - z = 0 \\ & x - 2y + 3z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2x + 3y + z = 0 \\ 4) \quad & x + 2y + z = 0 \\ & 2x - y - 3z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x - 2y + z = 0 \\ 6) \quad & 5x - 4y + 3z = 0 \\ & x - 5y + 2z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 3x - y + 4z = 0 \\ 8) \quad & x - 2y + z = 0 \\ & 3x + y - 2z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x + y - z = 0 \\ 10) \quad & 2x - y - z = 0 \\ & x + 4y - 2z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x + y + z = 0 \\ 12) \quad & 4x + y + 2z = 0 \\ & x - 2y - z = 0 \end{aligned}$$

2. Rešiti homogeni sistem linearnih jednačina.

$$\begin{aligned} & 3x - 2z = 0 \\ 1) \quad & x + 4y - 2z = 0 \\ & 2x - y - z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x - y - z = 0 \\ 3) \quad & 2y + z = 0 \\ & 3x - y - 2z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2x - 2y - z = 0 \\ 5) \quad & x - 2y = 0 \\ & 3x + y - 2z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x - 2y + 3z = 0 \\ 2) \quad & y - 2z = 0 \\ & 2x + 3y - z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x + 6y + z = 0 \\ 4) \quad & 3x - 2y - 2z = 0 \\ & 4y + z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 4x - 2y - z = 0 \\ 6) \quad & x - y - 2z = 0 \\ & 2x + 3z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
2x - y + z = 0 & 2x + 3y = 0 \\
7) \quad 3x + 2z = 0 & 8) \quad x - y - 5z = 0 \\
2x + 3y + 3z = 0 & x + y - z = 0 \\
\\
2x - z = 0 & x + 2y - 3z = 0 \\
9) \quad x - y - z = 0 & 10) \quad 2x - y = 0 \\
x - 3y - 2z = 0 & 3x + y - 2z = 0 \\
\\
2x - y - 4z = 0 & 2x - y - 3z = 0 \\
11) \quad y - 2z = 0 & 12) \quad x - z = 0 \\
3x - 4y - z = 0 & 2x + 3y - 4z = 0
\end{array}$$

3. Odrediti, u zavisnosti od realnog parametra a , kada homogeni sistem linearnih jednačina ima i netrivialnih rešenja i, u tom slučaju, odrediti ih.

$$\begin{array}{ll}
-2x + y + 3z = 0 & -x + (a+1)y + z = 0 \\
1) \quad -y + az = 0 & 2) \quad (a-3)x + y + (a+3)z = 0 \\
2x + y - z = 0 & x - y + z = 0 \\
\\
ax + y - az = 0 & -x + 2y + az = 0 \\
3) \quad x + ay + z = 0 & 4) \quad x + (a+1)y - 2z = 0 \\
x - ay + z = 0 & x - 3y - az = 0 \\
\\
ax + y - 2z = 0 & -x + 3y + (a+1)z = 0 \\
5) \quad 2x - y + z = 0 & 6) \quad x + ay + 2z = 0 \\
x - 2y + z = 0 & -x + 6y + (a-1)z = 0 \\
\\
2x - y - z = 0 & x - ay + 2z = 0 \\
7) \quad x + ay - 2z = 0 & 8) \quad (1+a)x + y + (1+a)z = 0 \\
x - y = 0 & 2x + (1+a)y + z = 0 \\
\\
ax + y + az = 0 & x + y - z = 0 \\
9) \quad x + ay - z = 0 & 10) \quad (a-1)x + ay + (a-1)z = 0 \\
x + ay + z = 0 & -x + ay + z = 0 \\
\\
ax + y - z = 0 & x + 2y + 3z = 0 \\
11) \quad x - y + az = 0 & 12) \quad x + ay + z = 0 \\
x + ay - z = 0 & (a+1)x + y + (a-1)z = 0
\end{array}$$

4. Realne funkcije jedne realne promenljive

Predlog literature za neophodne informacije o realnim funkcijama jedne realne promenljive: [2], [4], [5], [6] ili [9].

4.1. Domen funkcije

Primer 1. Odrediti domen sledećih funkcija.

$$1) y = \frac{x}{x^2+3x+2}, \quad 2) y = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}, \quad 3) y = \frac{x+1}{e^{3x+2}-1}, \quad 4) y = \ln\left(\frac{x+1}{2-x}\right).$$

Rešenje:

1) $D_y = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 3x + 2 \neq 0\} = \mathbf{R} \setminus \{-2, -1\}$. Poslednja jednakost sledi iz

$$x^2 + 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \Leftrightarrow x \neq -2 \wedge x \neq -1.$$

2) $D_y = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 - 2x > 0\} = (-\infty, \frac{1}{2})$. Poslednja jednakost sledi iz

$$1 - 2x > 0 \Leftrightarrow -2x > -1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}.$$

3) $D_y = \{x \in \mathbf{R} \mid e^{3x+2} - 1 \neq 0\} = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$. Poslednja jednakost sledi iz

$$e^{3x+2} - 1 \neq 0 \Leftrightarrow e^{3x+2} \neq 1 \Leftrightarrow e^{3x+2} \neq e^0 \Leftrightarrow 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{2}{3}.$$

4) $D_y = \{x \in \mathbf{R} \mid \frac{x+1}{2-x} > 0\} = (-1, 2)$. Poslednja jednakost sledi iz

	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$x+1$	$-$	$+$	$+$		
$2-x$	$+$	$+$	$-$		
$\frac{x+1}{2-x}$	$-$	$+$	$-$		$\blacklozenge$

1. Odrediti domen sledećih funkcija.

$$1) y = \frac{1}{x}, \quad 2) y = \frac{3}{1-3x}, \quad 3) y = \frac{x}{2x+1}, \quad 4) y = \frac{1-x}{x+4}, \quad 5) y = \frac{2+x^2}{2-5x},$$

$$6) y = \frac{x^2-x}{4x-1}, \quad 7) y = \frac{2}{x^2}, \quad 8) y = \frac{4}{4-3x^2}, \quad 9) y = \frac{4x}{2x^2-1}, \quad 10) y = \frac{1-x}{x^2+1},$$

$$11) y = \frac{x^2+2}{1-x^2}, \quad 12) y = \frac{4-x^2}{x^2-2}, \quad 13) y = \frac{2x^2-x}{3-x^2}, \quad 14) y = \frac{x^2+x}{4x^2-1},$$

$$15) y = \frac{3}{x^2+4x}, \quad 16) y = \frac{1}{2x^2-x}, \quad 17) y = \frac{x-1}{4x-x^2}, \quad 18) y = \frac{x+3}{x^2+x},$$

$$19) y = \frac{2-x}{x-x^2}, \quad 20) y = \frac{1-x^2}{3x^2+x}, \quad 21) y = \frac{3x^2-2}{x^2+2x}, \quad 22) y = \frac{2x^2+1}{3x-2x^2}.$$

2. Odrediti domen sledećih funkcija.

$$\begin{aligned} 1) y &= \frac{2}{x^2+2x+3}, & 2) y &= \frac{3}{2x^2-3x+1}, & 3) y &= \frac{1}{x^2-x-20}, \\ 4) y &= \frac{x}{x^2+2x+1}, & 5) y &= \frac{2x}{3x^2-7x+4}, & 6) y &= \frac{3x}{6x-x^2-9}, \\ 7) y &= \frac{x-2}{x^2-3x-4}, & 8) y &= \frac{2x+3}{5+3x-2x^2}, & 9) y &= \frac{1-3x}{x^2+4x+4}, \\ 10) y &= \frac{x^2}{x^2-2x-3}, & 11) y &= \frac{1-x^2}{x^2-7x+10}, & 12) y &= \frac{x^2-3}{9-5x-4x^2}, \\ 13) y &= \frac{x^2-x}{x^2-x-6}, & 14) y &= \frac{6x-3x^2}{8x-4x^2-3}, & 15) y &= \frac{x^2+3x}{3+4x-4x^2}, \\ 16) y &= \frac{x^2-5x+4}{2x^2+x-1}, & 17) y &= \frac{x^2+3x+2}{6x-x^2-5}, & 18) y &= \frac{2x^2-3x-2}{3+8x-3x^2}. \end{aligned}$$

3. Odrediti domen sledećih funkcija.

$$\begin{aligned} 1) y &= \frac{3}{x} - \frac{1}{x+1}, & 2) y &= \frac{2}{1+2x} + \frac{x}{3-x^2}, & 3) y &= \frac{x}{1-x} - \frac{1+x}{2x^2-x}, \\ 4) y &= \frac{1+x}{x-1} - \frac{2x^2}{2x^2-x-1}, & 5) y &= \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x-x^2}, & 6) y &= \frac{x+5}{3x^2-4} - \frac{x-2}{1-4x^2}, \\ 7) y &= \frac{x}{x^2+2} + \frac{2-x}{x^2+5x+4}, & 8) y &= \frac{3}{x^2+x} - \frac{x+1}{3x+4}, & 9) y &= \frac{2x+3}{x^2-3x} + \frac{2x-3}{x^2+4}, \\ 10) y &= \frac{x-2}{x^2+2x} + \frac{3}{4x-x^2}, & 11) y &= \frac{2x+5}{3x^2-x} - \frac{2x}{3x-x^2-2}, & 12) y &= \frac{4-3x}{x^2-x+1} + \frac{1}{x}, \\ 13) y &= \frac{x^2+1}{x-x^2-3} - \frac{3}{x^2+3} - \frac{x}{x^2-1}, & 14) y &= \frac{3x+5}{x^2-3x-4} + \frac{2}{x^2-4x} - \frac{2}{x^2}, \\ 15) y &= \frac{3-4x}{x^2-3x+2} - \frac{2}{x^2-4x+4}, & 16) y &= \frac{4x-1}{x^2+2x+1} + \frac{x}{x^2-4x-5}. \end{aligned}$$

4. Odrediti domen sledećih funkcija.

$$1) y = \sqrt{x}, \quad 2) y = \sqrt{-x}, \quad 3) y = \sqrt{x^2}, \quad 4) y = \sqrt{-x^2}, \quad 5) y = \sqrt{x^3},$$

$$6) y = \sqrt{-x^3}, \quad 7) y = \sqrt{1+x}, \quad 8) y = \sqrt{2-x}, \quad 9) y = \sqrt{-x(x+3)},$$

$$10) y = \sqrt{x(3-4x)}, \quad 11) y = \sqrt{(x+2)(1-x)}, \quad 12) y = \sqrt{(3x+2)(2x-1)},$$

$$13) y = \sqrt{x^2-3}, \quad 14) y = \sqrt{x^2+4}, \quad 15) y = \sqrt{3x^2-1}, \quad 16) y = \sqrt{\frac{1}{4}-x^2},$$

$$17) y = \sqrt{x^2+x}, \quad 18) y = \sqrt{x^2-2x}, \quad 19) y = \sqrt{\frac{3}{2}x-x^2}, \quad 20) y = \sqrt{x-\frac{2}{3}x^2},$$

$$21) y = \sqrt{x^2-4x-12}, \quad 22) y = \sqrt{7+6x-x^2}, \quad 23) y = \sqrt{x^2+3x+3},$$

$$24) y = \sqrt{x(x+2)(1-x)}, \quad 25) y = \sqrt{-x(2x-1)(3-5x)}, \quad 26) y = \sqrt{x^3-4x},$$

$$27) y = \sqrt{x^3-3x^2+2x}, \quad 28) y = \sqrt{x^3-3x^2-x+3}, \quad 29) y = \sqrt{x^3-3x^2+2}.$$

5. Odrediti domen sledećih funkcija.

$$1) y = \sqrt{\frac{1}{x}}, \quad 2) y = \sqrt{1-\frac{3}{x}}, \quad 3) y = \sqrt{\frac{2}{x}+3}, \quad 4) y = \sqrt{\frac{1}{2x-1}},$$

$$5) y = \sqrt{\frac{2}{1-x}}, \quad 6) y = \sqrt{\frac{x}{x+3}}, \quad 7) y = \sqrt{\frac{3-x}{x-1}}, \quad 8) y = \sqrt{2+\frac{x+1}{x-2}},$$

$$9) y = \sqrt{\frac{x^2}{x+2}}, \quad 10) y = \sqrt{\frac{x^2-1}{x}}, \quad 11) y = \sqrt{\frac{x^2-2x}{1-x}}, \quad 12) y = \sqrt{\frac{x^2-2x+1}{x}},$$

$$13) y = \sqrt{\frac{x^2+x-12}{x+3}}, \quad 14) y = \sqrt{\frac{x-5}{x^2-4}-1}, \quad 15) y = \sqrt{2+\frac{x+3}{x^2-2}},$$

$$16) y = \sqrt{1-\frac{2x^2-3}{x^2}}, \quad 17) y = \sqrt{\frac{2x^2+3x}{x^2+1}-2}, \quad 18) y = \sqrt{\frac{x^2-4x+4}{x^2-9}},$$

$$\begin{aligned}
19) y &= \sqrt{\frac{x^2 - 5x - 6}{1 - x^2}} + 1, & 20) y &= \sqrt{\frac{2x + 1}{x^2 + 4x}}, & 21) y &= \sqrt{1 - \frac{x^2 + 5}{x^2 - x}}, \\
22) y &= \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x}}, & 23) y &= \sqrt{\frac{2x - x^2 - 1}{x^2 - 3x}}, & 24) y &= \sqrt{\frac{2x^2 + 3x - 1}{x^2 + x}} - 2, \\
25) y &= \sqrt{\frac{1}{x^2 - 6x + 9}}, & 26) y &= \sqrt{\frac{2x + 1}{3x - x^2 + 4}}, & 27) y &= \sqrt{3 - \frac{2x^2 + 3}{x^2 + x - 2}}, \\
28) y &= \sqrt{\frac{x^2 + x}{x^2 - 10x + 25}}, & 29) y &= \sqrt{\frac{8x - x^2 - 16}{x^2 + 5x - 6}}, & 30) y &= \sqrt{\frac{2x^2 + x - 3}{2x^2 + x - 1}} - 1.
\end{aligned}$$

6. Odrediti domen sledećih funkcija.

$$\begin{aligned}
1) y &= \frac{3}{\sqrt{1 + 2x}}, & 2) y &= \frac{x}{\sqrt{2 - 3x}}, & 3) y &= \frac{2 - x}{\sqrt{1 + 4x}}, & 4) y &= \frac{x^2 + 3}{\sqrt{3 - 4x}}, \\
5) y &= \frac{x - 3x^2}{\sqrt{5 - x}}, & 6) y &= \frac{x^2 + 3x + 2}{\sqrt{2x + 5}}, & 7) y &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}, & 8) y &= \frac{4x}{\sqrt{4x^2 - 1}}, \\
9) y &= \frac{3 + 2x}{\sqrt{3x^2 + 2}}, & 10) y &= \frac{2 + x^2}{\sqrt{x^2 - 2}}, & 11) y &= \frac{x^2 - x}{\sqrt{3 - 2x^2}}, & 12) y &= \frac{x^2 - 2x + 1}{\sqrt{9 - x^2}}, \\
13) y &= \frac{3}{\sqrt{x^2 + 2x}}, & 14) y &= \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 - x}}, & 15) y &= \frac{x^2 + 3}{\sqrt{4x - x^2}}, & 16) y &= \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{3x - 2x^2}}, \\
17) y &= \frac{2}{\sqrt{x^2 + 3x - 10}}, & 18) y &= \frac{5x}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}, & 19) y &= \frac{3x - 1}{\sqrt{1 - 3x + 4x^2}}, \\
20) y &= \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}, & 21) y &= \frac{3x - x^2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}, & 22) y &= \frac{3x - 2x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 12x + 36}}.
\end{aligned}$$

7. Odrediti domen sledećih funkcija.

$$\begin{aligned}
1) y &= \frac{3}{x} - \sqrt{2x + 1}, & 2) y &= \frac{x}{1 - 2x} + \sqrt{x + 3}, & 3) y &= \frac{2 - x}{x + 1} - \sqrt{2 - 3x}, \\
4) y &= \frac{x + 1}{x + 3} - \sqrt{x^2 - 3}, & 5) y &= \frac{2}{x} + \sqrt{1 - 2x^2}, & 6) y &= \frac{x}{1 - x} - \sqrt{x^2 + 4},
\end{aligned}$$

$$7) y = \frac{3-x}{2+x} - \sqrt{x^2+x}, \quad 8) y = \frac{2x}{x-1} + \sqrt{3x-x^2}, \quad 9) y = \frac{1}{x} - \sqrt{4x^2-x},$$

$$10) y = \frac{3}{x} - \sqrt{2-x-x^2}, \quad 11) y = \frac{x-1}{x+4} + \sqrt{x^2+x-6}, \quad 12) y = \frac{2}{x} - \sqrt{x^2+4x+3}.$$

8. Odrediti domen sledećih funkcija.

$$1) y = \frac{2}{x^2-1} + \sqrt{2x+5}, \quad 2) y = \frac{1-x}{x^2+2} - \sqrt{1+3x}, \quad 3) y = \frac{3x}{1-9x^2} + \sqrt{1-4x},$$

$$4) y = \frac{x}{3-x^2} - \sqrt{x^2+1}, \quad 5) y = \frac{3}{1-4x^2} + \sqrt{4-x^2}, \quad 6) y = \frac{2+x}{3x^2+4} - \sqrt{x^2-2},$$

$$7) y = \frac{1}{x^2-x} + \sqrt{x+3}, \quad 8) y = \frac{x+3}{x-2x^2} - \sqrt{1-3x}, \quad 9) y = \frac{2-x}{x^2+3x} + \sqrt{x+5},$$

$$10) y = \frac{2}{x^2-2x} - \sqrt{3x-x^2}, \quad 11) y = \frac{x+1}{3x-2x^2} + \sqrt{x^2-x}, \quad 12) y = \frac{x-3}{x^2-x} - \sqrt{x^2+x},$$

$$13) y = \frac{x^2+3x-4}{4x^2+x} - \sqrt{2+x-x^2} + \frac{3x}{x+1}, \quad 14) y = \frac{x-1}{x^2+5x} + \sqrt{x^2+4x+3},$$

$$15) y = \sqrt{x+4} - \frac{x}{x^2+7x+10}, \quad 16) y = \frac{2}{x^2+2x+1} + \sqrt{1-x}, \quad 17) y = \frac{x-1}{3-x+x^2} - \sqrt{x},$$

$$18) y = \frac{1+x}{4x^2-4x-3} - \sqrt{3-x^2}, \quad 19) y = \frac{4x-1}{x^2+6x+9} + \sqrt{3x^2+1} - \frac{2x}{x+3},$$

$$20) y = \frac{3x}{x^2-3x+2} + \sqrt{3x-x^2} - \frac{1}{1-x}, \quad 21) y = \frac{3+2x}{x^2-x-2} - \sqrt{x^2-x} + \frac{4}{x},$$

$$22) y = \frac{1-3x}{4x^2-4x-3} - \sqrt{10-3x-x^2}, \quad 23) y = \frac{x+2}{2x^2-x-3} + \sqrt{2x^2-3x+1}.$$

9. Odrediti domen sledećih funkcija.

$$1) y = \log_2 x, \quad 2) y = \log_{\frac{1}{3}} x, \quad 3) y = \log_3(2x+1), \quad 4) y = \ln(1+x),$$

$$5) y = \log_{\frac{1}{2}}(3+4x), \quad 6) y = \ln(3-2x), \quad 7) y = \log_{\frac{1}{3}}(2-x), \quad 8) y = \log_2(1-4x),$$

$$\begin{aligned}
9) y &= \log_3 \left(\frac{2}{x} - 1 \right), & 10) y &= \ln \left(2 + \frac{1}{x} \right), & 11) y &= \log_{\frac{1}{3}} \left(3 - \frac{4}{x} \right), \\
12) y &= \log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{5x+2} \right), & 13) y &= \log_{\frac{4}{3}} \left(\frac{3}{2x-1} \right), & 14) y &= \ln \left(\frac{2}{3-4x} \right), \\
15) y &= \log_{\frac{3}{4}} \left(\frac{4}{1-x} \right), & 16) y &= \ln \left(\frac{x+1}{x-3} \right), & 17) y &= \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{x+3}{1-2x} \right), \\
18) y &= \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{2-3x}{x+2} \right), & 19) y &= \ln \left(\frac{2x-3}{3x+1} \right), & 20) y &= \log_{\frac{5}{2}} \left(\frac{3-2x}{1-3x} \right), \\
21) y &= \log_{\frac{4}{5}} \left(1 - \frac{3}{x+2} \right), & 22) y &= \ln \left(\frac{2}{3x+1} - 1 \right), & 23) y &= \log_{\frac{5}{3}} \left(2 - \frac{3}{1-x} \right), \\
24) y &= \log_{\frac{4}{3}} \left(2 + \frac{4-3x}{x-1} \right), & 25) y &= \log_{\frac{2}{5}} \left(3 - \frac{4x-1}{x-2} \right), & 26) y &= \ln \left(\frac{2x+3}{3x+1} - 1 \right).
\end{aligned}$$

10. Odrediti domen sledećih funkcija.

$$\begin{aligned}
1) y &= \ln(x^2 - 2), & 2) y &= \log_{\frac{3}{2}}(1 - 3x^2), & 3) y &= \log_{\frac{1}{3}}(2x^2 + 1), \\
4) y &= \log_{\frac{4}{3}}(x^2 + 3x), & 5) y &= \ln(2x - 4x^2), & 6) y &= \log_{\frac{1}{4}}(3x^2 - 2x), \\
7) y &= \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{1-x^2} \right), & 8) y &= \log_3 \left(\frac{3}{4x^2-1} \right), & 9) y &= \ln \left(\frac{1}{x^2-3} \right), \\
10) y &= \log_{\frac{3}{4}} \left(\frac{x-3}{1-2x^2} \right), & 11) y &= \ln \left(\frac{1-2x}{x^2-4} \right), & 12) y &= \log_2 \left(\frac{3x+2}{x^2+1} \right), \\
13) y &= \ln \left(\frac{x^2+x}{x^2-25} \right), & 14) y &= \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{x^2-2x}{3x^2+2} \right), & 15) y &= \log_3 \left(\frac{2x-3x^2}{9-x^2} \right).
\end{aligned}$$

11. Odrediti domen sledećih funkcija.

$$\begin{aligned}
1) y &= \log_{\frac{3}{5}}(x^2+5x+6), & 2) y &= \log_{\frac{5}{2}}(x^2-6x+9), & 3) y &= \ln(2x-x^2+3), \\
4) y &= \ln \left(\frac{1}{x^2-2x+1} \right), & 5) y &= \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{4x-x^2-3} \right), & 6) y &= \log_3 \left(\frac{3}{x^2+3x-4} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7) y &= \log_2 \left(\frac{2x-1}{x^2+5x+6} \right), & 8) y &= \ln \left(\frac{2-3x}{2x^2+5x-3} \right), & 9) y &= \log_{\frac{3}{4}} \left(\frac{x+2}{x^2-7x+10} \right), \\
10) y &= \log_{\frac{4}{5}} \left(\frac{x^2-1}{2x^2-3x-2} \right), & 11) y &= \log_4 \left(\frac{x^2+3}{x^2-x-2} \right), & 12) y &= \ln \left(\frac{4-x^2}{4x^2+4x-3} \right), \\
13) y &= \ln \left(\frac{2x^2+x}{x^2+4x+3} \right), & 14) y &= \log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{x^2-2x}{8x^2+2x-1} \right), & 15) y &= \log_{\frac{4}{3}} \left(\frac{x-3x^2}{2x^2-3x+1} \right), \\
16) y &= \log_{\frac{5}{2}} \left(\frac{x^2-3x-4}{x^2+4x-5} \right), & 17) y &= \ln \left(\frac{x-x^2+6}{x^2+2x-8} \right), & 18) y &= \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{4x^2-8x+3}{2x-3x^2+1} \right).
\end{aligned}$$

12. Odrediti domen sledećih funkcija.

$$\begin{aligned}
1) y &= \sqrt{\ln(4+x)}, & 2) y &= \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(5x-2)}, & 3) y &= \sqrt{\log_2(3-2x)}, \\
4) y &= \sqrt{\log_3 \left(\frac{1}{x-3} \right)}, & 5) y &= \sqrt{\ln \left(\frac{2}{x+1} \right)}, & 6) y &= \sqrt{\log_{\frac{2}{5}} \left(\frac{3}{2x-1} \right)}, \\
7) y &= \sqrt{\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{x}{x-1} \right)}, & 8) y &= \sqrt{\log_2 \left(\frac{2x}{3+2x} \right)}, & 9) y &= \sqrt{\ln \left(\frac{3x}{3x+2} \right)}, \\
10) y &= \sqrt{\ln \left(\frac{2x}{x+3} \right)}, & 11) y &= \sqrt{\log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{3x}{2x-1} \right)}, & 12) y &= \sqrt{\log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{2x}{2-3x} \right)}, \\
13) y &= \sqrt{\log_{\frac{4}{3}} \left(\frac{x-2}{x+2} \right)}, & 14) y &= \sqrt{\log_{\frac{2}{5}} \left(\frac{3-x}{1-2x} \right)}, & 15) y &= \sqrt{\ln \left(\frac{x+1}{2x-3} \right)}.
\end{aligned}$$

13. Odrediti domen sledećih funkcija.

$$\begin{aligned}
1) y &= \sqrt{\log_2(x^2-3)}, & 2) y &= \sqrt{\ln(3x^2-2)}, & 3) y &= \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(1-x^2)}, \\
4) y &= \sqrt{\ln \left(\frac{2}{x^2+1} \right)}, & 5) y &= \sqrt{\log_{\frac{4}{5}} \left(\frac{1}{3-x^2} \right)}, & 6) y &= \sqrt{\log_{\frac{3}{2}} \left(\frac{4}{1-3x^2} \right)}, \\
7) y &= \sqrt{\log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{5x}{2x^2+3} \right)}, & 8) y &= \sqrt{\log_{\frac{4}{3}} \left(\frac{x}{x^2-2} \right)}, & 9) y &= \sqrt{\ln \left(\frac{3x}{4-x^2} \right)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10) y &= \sqrt{\ln\left(\frac{x+3}{x^2+1}\right)}, & 11) y &= \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x+2}{2x^2-1}\right)}, & 12) y &= \sqrt{\log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{2-3x}{2-3x^2}\right)}, \\
13) y &= \sqrt{\log_3\left(\frac{x^2}{x^2-3}\right)}, & 14) y &= \sqrt{\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)}, & 15) y &= \sqrt{\ln\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)}, \\
16) y &= \sqrt{\log_{\frac{4}{3}}\left(\frac{3x^2}{x^2-1}\right)}, & 17) y &= \sqrt{\ln\left(\frac{2+x^2}{3-x^2}\right)}, & 18) y &= \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2-2}{2x^2-5}\right)}, \\
19) y &= \sqrt{\ln\left(\frac{x^2+2x}{x^2+2}\right)}, & 20) y &= \sqrt{\log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{2x^2+x}{2x^2-1}\right)}, & 21) y &= \sqrt{\log_{\frac{3}{5}}\left(\frac{x-x^2}{3-x^2}\right)}, \\
22) y &= \sqrt{\ln\left(\frac{x^2+3x}{3x^2-2}\right)}, & 23) y &= \sqrt{\log_{\frac{5}{2}}\left(\frac{2x^2-x}{x^2+2}\right)}, & 24) y &= \sqrt{\log_{\frac{3}{5}}\left(\frac{3x-x^2}{x^2-5}\right)}.
\end{aligned}$$

14. Odrediti domen sledećih funkcija.

$$\begin{aligned}
1) y &= \sqrt{\log_2\left(\frac{3}{x^2-x-3}\right)}, & 2) y &= \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{x^2+4x+6}\right)}, & 3) y &= \sqrt{\ln\left(\frac{1}{2x^2-5x+3}\right)}, \\
4) y &= \sqrt{\ln\left(\frac{x+1}{x^2+3x-4}\right)}, & 5) y &= \sqrt{\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{x-1}{x^2+4x+3}\right)}, & 6) y &= \sqrt{\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{2-x}{x^2-6x+5}\right)}, \\
7) y &= \sqrt{\log_{\frac{2}{5}}\left(\frac{x^2+1}{x^2+3x-4}\right)}, & 8) y &= \sqrt{\ln\left(\frac{2x^2-5}{x^2+2x-8}\right)}, & 9) y &= \sqrt{\log_3\left(\frac{1-2x^2}{x^2+x-2}\right)}, \\
10) y &= \sqrt{\log_4\left(\frac{x^2+x}{x^2-4x+3}\right)}, & 11) y &= \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x^2-2x}{6+x-x^2}\right)}, & 12) y &= \sqrt{\ln\left(\frac{x-3x^2}{x^2-2x-1}\right)}, \\
13) y &= \sqrt{\ln\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x-3}\right)}, & 14) y &= \sqrt{\log_2\left(\frac{x-x^2-3}{2+x-x^2}\right)}, & 15) y &= \sqrt{\log_{\frac{3}{4}}\left(\frac{2x^2+3x-2}{4x^2+3x-1}\right)}.
\end{aligned}$$

15. Odrediti domen sledećih funkcija.

$$1) y = \sqrt{1 - \log_3(x+1)}, \quad 2) y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(2x-1) - 1}, \quad 3) y = \sqrt{2 + \log_{\frac{1}{2}}(3-4x)},$$

$$\begin{aligned}
4) y &= \sqrt{1 + \log_2 \left(\frac{2}{x+3} \right)}, & 5) y &= \sqrt{2 - \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x-5} \right)}, & 6) y &= \sqrt{\log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2-3x} \right) - 1}, \\
7) y &= \sqrt{1 + \log_2 \left(\frac{2x}{3+2x} \right)}, & 8) y &= \sqrt{1 - \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{x}{2-5x} \right)}, & 9) y &= \sqrt{\log_4 \left(\frac{1+x}{1-x} \right) - \frac{1}{2}}, \\
10) y &= \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{2-x}{x+3} \right) + 1}, & 11) y &= \sqrt{\frac{1}{2} - \log_{\frac{9}{4}} \left(\frac{3-4x}{x+2} \right)}, & 12) y &= \sqrt{\log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{1-2x}{2x-3} \right) - 1}.
\end{aligned}$$

16. Odrediti domen sledećih funkcija.

$$\begin{aligned}
1) y &= \sqrt{\log_2(4-x^2) - 1}, & 2) y &= \sqrt{1 + \log_{\frac{1}{3}}(x^2+2)}, & 3) y &= \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x^2+1) + 2}, \\
4) y &= \sqrt{1 - \log_2 \left(\frac{5}{1-x^2} \right)}, & 5) y &= \sqrt{2 - \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x^2+2} \right)}, & 6) y &= \sqrt{\log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{x^2+3} \right) - 1}, \\
7) y &= \sqrt{1 + \log_2 \left(\frac{2x}{x^2+3} \right)}, & 8) y &= \sqrt{1 - \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{x}{x^2-4} \right)}, & 9) y &= \sqrt{\log_4 \left(\frac{1-3x}{x^2-2} \right) - \frac{1}{2}}, \\
10) y &= \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{4-x}{x^2-1} \right) + 1}, & 11) y &= \sqrt{\frac{1}{2} - \log_{\frac{9}{4}} \left(\frac{x^2-2}{x^2-3} \right)}, & 12) y &= \sqrt{\log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right) - 1}, \\
13) y &= \sqrt{1 - \log_2 \left(\frac{x^2+4x}{2-x^2} \right)}, & 14) y &= \sqrt{\log_{\frac{9}{4}} \left(\frac{x^2-2x}{x^2+1} \right) - \frac{1}{2}}, & 15) y &= \sqrt{1 - \log_{\frac{2}{5}} \left(\frac{x-x^2}{3-2x^2} \right)}.
\end{aligned}$$

17. Odrediti domen sledećih funkcija.

$$\begin{aligned}
1) y &= \sqrt{\log_2(x^2+x) - 1}, & 2) y &= \sqrt{1 + \log_{\frac{1}{3}}(x^2-3x)}, & 3) y &= \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(3x-2x^2) + 1}, \\
4) y &= \sqrt{1 - \log_2 \left(\frac{5}{x^2+2x} \right)}, & 5) y &= \sqrt{\log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{x^2-3x} \right) - 1}, & 6) y &= \sqrt{2 - \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{x^2+3x} \right)}, \\
7) y &= \sqrt{\log_4 \left(\frac{x+1}{2x^2-x} \right) - \frac{1}{2}}, & 8) y &= \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{2-x}{x-3x^2} \right) + 1}, & 9) y &= \sqrt{\frac{1}{2} - \log_{\frac{9}{4}} \left(\frac{x^2+2}{4x-x^2} \right)}, \\
10) y &= \sqrt{\log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{1-2x^2}{2x-3x^2} \right) - 1}, & 11) y &= \sqrt{1 + \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{2x^2+x-1}{x^2-x} \right)}.
\end{aligned}$$

18. Odrediti domen sledećih funkcija.

- 1) $y = \sqrt{\log_2(x^2 + 3x + 4) - 1}$,
- 2) $y = \sqrt{1 + \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 5x + 7)}$,
- 3) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 2x + 5) + 2}$,
- 4) $y = \sqrt{1 - \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{x^2 + 3x + 2}\right)}$,
- 5) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{x^2 - 2x + 1}\right) + 1}$,
- 6) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{3}{4 + 3x - x^2}\right) - 1}$,
- 7) $y = \sqrt{1 + \log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{2x}{x^2 + 3x - 10}\right)}$,
- 8) $y = \sqrt{1 - \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{x}{2x^2 + 3x + 1}\right)}$,
- 9) $y = \sqrt{\log_4\left(\frac{2x - 3}{x^2 - x - 2}\right) - \frac{1}{2}}$,
- 10) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1 - x}{x^2 - 2x - 3}\right) - 1}$,
- 11) $y = \sqrt{\frac{1}{2} - \log_{\frac{4}{9}}\left(\frac{2x^2 + 3}{3x^2 + 5x + 2}\right)}$,
- 12) $y = \sqrt{\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{4 - x^2}{x^2 + 7x + 6}\right) - 1}$,
- 13) $y = \sqrt{\log_4\left(\frac{x^2 - x}{x^2 - 2x - 3}\right) + \frac{1}{2}}$,
- 14) $y = \sqrt{1 - \log_{\frac{4}{3}}\left(\frac{x^2 + 4x}{x^2 + 3x + 2}\right)}$,
- 15) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 8}\right) - \frac{1}{2}}$,
- 16) $y = \sqrt{1 - \log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x - 3}\right)}$.

19. Odrediti domen sledećih funkcija.

- 1) $y = e^{2x}$,
- 2) $y = e^{\frac{x}{3}}$,
- 3) $y = e^{\frac{1-x}{4}}$,
- 4) $y = e^{\frac{2}{x+1}}$,
- 5) $y = e^{\frac{3}{4-3x}}$,
- 6) $y = e^{\frac{x}{2x+3}}$,
- 7) $y = e^{\frac{2-3x}{4x-1}}$,
- 8) $y = e^{\frac{3}{x^2+1}}$,
- 9) $y = e^{\frac{1}{4-x^2}}$,
- 10) $y = e^{\frac{x}{1-2x^2}}$,
- 11) $y = e^{\frac{x+2}{3x^2-4}}$,
- 12) $y = e^{\frac{1-3x}{x^2+3}}$,
- 13) $y = e^{\frac{x^2+2}{1-4x^2}}$,
- 14) $y = e^{\frac{1-x^2}{2-x^2}}$,
- 15) $y = e^{\frac{x^2-2x}{x^2-9}}$,
- 16) $y = e^{\frac{3x-4x^2}{9x^2-1}}$,
- 17) $y = e^{\frac{2}{2x^2+3x}}$,
- 18) $y = e^{\frac{1}{x-3x^2}}$,
- 19) $y = e^{\frac{x+4}{x^2-4x}}$,
- 20) $y = e^{\frac{1-x}{2x-3x^2}}$,
- 21) $y = e^{\frac{1+x^2}{3x^2+x}}$,
- 22) $y = e^{\frac{2x^2-1}{x-4x^2}}$,
- 23) $y = e^{\frac{1}{4x^2-x-5}}$,
- 24) $y = e^{\frac{3-x}{x^2+4x+4}}$,
- 25) $y = e^{\frac{x^2+2}{2x-3x^2+1}}$,
- 26) $y = e^{\frac{x^2-x}{4x^2+x-3}}$.

20. Odrediti domen sledećih funkcija.

$$\begin{aligned}
 1) y &= 1 - \frac{2}{e^x}, & 2) y &= \frac{3}{1 - e^x} - 2x, & 3) y &= \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{1 - e^x}, & 4) y &= \frac{2}{e^{x+1} - 1} - \frac{3}{x}, \\
 5) y &= 2 + \frac{x}{1 - e^{2x-3}}, & 6) y &= \frac{5}{e^{2x+1} - 1} + \frac{x}{x - 2}, & 7) y &= \frac{4}{x^2 - 1} - \frac{x}{1 - e^{x-1}}, \\
 8) y &= \frac{3x}{e^{2x-5} - 1} + \frac{1}{1 - 4x^2}, & 9) y &= \frac{2}{x^2 + x} - \frac{x}{e^{3x+2} - 1}, & 10) y &= \frac{5x}{e^{x-2} - 1} + \frac{4}{2x - x^2}, \\
 11) y &= \frac{1}{e^x - 1} + \frac{x}{x^2 - 2x + 1} + \frac{3}{x^2 - 4x + 3}, & 12) y &= \frac{2}{2x^2 - 3x - 5} - \frac{x + 1}{1 - e^{4-3x}}, \\
 13) y &= \frac{1}{e^{5x+2} - 1} - \frac{4x}{3 - 4x - 4x^2}, & 14) y &= \frac{x}{x - 5} + \frac{3}{1 - e^{x^2+4}} - \frac{2}{4 - 3x}, \\
 15) y &= \frac{4x}{e^{x^2-2} - 1}, & 16) y &= \frac{5}{1 - e^{x^2-4}} + \frac{1}{x}, & 17) y &= \frac{3}{3x + 4} + \frac{2x}{e^{3-x^2} - 1}, \\
 18) y &= \frac{1}{e^{1-4x^2} - 1} + \frac{x}{3 - 4x}, & 19) y &= \frac{2}{1 - e^{x^2+2x}}, & 20) y &= \frac{2}{x} - \frac{3x}{e^{3x^2+2x} - 1}, \\
 21) y &= \frac{x + 3}{1 - e^{x-x^2}} - \frac{1}{x-2}, & 22) y &= \frac{1}{x^2} + \frac{x}{e^{x-2x^2} - 1}, & 23) y &= \frac{x}{e^{2x-x^2} - 1} - \frac{2-x}{x^2-x}, \\
 24) y &= \frac{x-1}{e^{x^2+2x-3} - 1}, & 25) y &= \frac{1}{3} + \frac{x}{1 - e^{4+5x+x^2}}, & 26) y &= \frac{2}{e^{x-x^2-2} - 1} + \frac{3}{x}, \\
 27) y &= \frac{x}{e^{x^2+4x+3} - 1} - \frac{2}{3x-1} + \frac{1}{4x}, & 28) y &= \frac{x-4}{1 - e^{x-x^2+6}} + \frac{2x-3}{x^2-1} - \frac{2}{x^2+2}, \\
 29) y &= \frac{1}{x^2+x} + \frac{3-x}{1 - e^{6+5x-x^2}}, & 30) y &= \frac{2}{e^{x^2+10x+9} - 1} + \frac{3x-2}{3x^2+13x+12}.
 \end{aligned}$$

21. Odrediti domen sledećih funkcija.

$$\begin{aligned}
 1) y &= \frac{1}{e^x} + \sqrt{x+1}, & 2) y &= \sqrt{1-x} - \frac{2x}{e^x - 1}, & 3) y &= \frac{x+3}{1 - e^{x+2}} + \frac{x}{\sqrt{2x-1}}, \\
 4) y &= \sqrt{x^2-4} - \frac{1}{e^{3-x}-1}, & 5) y &= \frac{2+x}{1 - e^{2x+3}} + \frac{3}{\sqrt{1-3x^2}}, & 6) y &= \frac{1}{\sqrt{x^2}} - \frac{x-3}{e^{x-2}-1},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7) y &= \frac{5}{1-e^{4x+1}} + \frac{2-x}{\sqrt{x^2+3x}}, & 8) y &= \sqrt{x-x^2} - \frac{1}{e^{3-x}-1}, & 9) y &= \frac{3}{\sqrt{x^2+x}} + \frac{2x}{1-e^{3x-4}}, \\
10) y &= \frac{x}{\sqrt{x^2-2x-3}} + \frac{3}{1-e^{2x+3}}, & 11) y &= \frac{4x}{e^{x-2}-1} - \sqrt{3x-x^2+4} + \frac{1}{x+1}, \\
12) y &= \frac{1+x}{1-x} + \frac{2}{\sqrt{x^2-2x+1}} - \frac{x}{1-e^{x-1}}, & 13) y &= \frac{1}{x} - \frac{5}{e^{x^2-x}-1} + \sqrt{x+2}, \\
14) y &= \frac{x}{1-e^{1-2x^2}}, & 15) y &= \frac{x+4}{e^{x^2-9}-1} + \sqrt{2-x}, & 16) y &= \frac{2}{\sqrt{4x-1}} - \frac{3x}{1-e^{1-4x^2}}, \\
17) y &= \frac{1+x}{e^{3x^2-x}-1}, & 18) y &= \sqrt{2x+1} - \frac{x-1}{1-e^{x^2-3x}}, & 19) y &= \frac{x}{\sqrt{2-3x}} + \frac{2}{e^{x-2x^2}-1}, \\
20) y &= \frac{2-x}{e^{2x^2+5x}-1} - \frac{1}{\sqrt{x^2-3}} + \frac{x}{x+2}, & 21) y &= \sqrt{1-x^2} + \frac{x-1}{1-e^{x^2-x}} - \frac{3}{x}, \\
22) y &= \frac{2}{x+1} - \sqrt{x^2-4x} + \frac{x}{1-e^{x^2-5x}}, & 23) y &= \frac{x+1}{e^{x^2-x}-1} + \frac{1}{x} - \frac{5}{\sqrt{2x-x^2}}, \\
24) y &= \sqrt{x^2-4x+3} + \frac{x}{e^{x^2-4x}-1} - \frac{3}{1-2x}, & 25) y &= \frac{4}{1-e^{2x-x^2}} - \frac{3x-2}{\sqrt{2x-x^2+3}}, \\
26) y &= \sqrt{4x+5} + \frac{x+3}{e^{2x^2-x-1}-1} - \frac{1}{3x+2}, & 27) y &= \frac{1-x}{1-e^{2x-x^2+8}} - \frac{2}{\sqrt{5-x}} + \frac{4}{x}, \\
28) y &= \frac{3}{1-e^{x^2+6x+5}} + \frac{2+x}{\sqrt{x^2+x}} - \frac{x}{x-3}, & 29) y &= \frac{1}{x} - \sqrt{4x-x^2} + \frac{x-2}{e^{4x-x^2+5}-1}, \\
30) y &= \frac{3}{\sqrt{x^2-8x-9}} + \sqrt{x-1} - \frac{x+1}{e^{x^2+5x+6}-1}, & 31) y &= \frac{1}{1-e^{6x-x^2+7}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-3x-4}}.
\end{aligned}$$

22. Odrediti domen sledećih funkcija.

$$\begin{aligned}
1) y &= \sqrt{e^x-1}, & 2) y &= \sqrt{1-e^{x-1}} + \frac{1}{x+2}, & 3) y &= \sqrt{e^{2x+1}-1} - \frac{x}{2-x}, \\
4) y &= \sqrt{e^{2-x^2}-1}, & 5) y &= \sqrt{1-e^{x^2-1}} - \frac{4}{3x+2}, & 6) y &= \sqrt{1-e^{1-4x^2}} + \frac{2+x}{3-4x},
\end{aligned}$$

$$7) y = \sqrt{1 - e^{x^2 - x}}, \quad 8) y = \frac{1 - 2x}{3x - 1} + \sqrt{e^{x^2 + 3x} - 1}, \quad 9) y = \sqrt{1 - e^{x - 4x^2}} - \frac{3}{3 - 5x},$$

$$10) y = \sqrt{e^{x^2 - x - 2} - 1}, \quad 11) y = \sqrt{1 - e^{x^2 + 3x + 2}} - \frac{x}{2x + 3}, \quad 12) y = \frac{1}{x} + \sqrt{e^{x - x^2 + 6} - 1},$$

$$13) y = \frac{1}{x^2} + \sqrt{1 - e^x}, \quad 14) y = \sqrt{e^{2x + 1} - 1} - \frac{x}{x^2 - 4}, \quad 15) y = \frac{3}{1 - x^2} + \sqrt{1 - e^{1 - 3x}},$$

$$16) y = \sqrt{1 - e^{1 - 4x^2}} - \frac{2}{x^2}, \quad 17) y = \frac{1}{x^2 - 2} + \sqrt{e^{3 - x^2} - 1}, \quad 18) y = \sqrt{1 - e^{x^2 - 4}} - \frac{5}{9 - x^2},$$

$$19) y = \frac{3}{x^2} - \sqrt{1 - e^{2x^2 + x}}, \quad 20) y = \frac{x + 1}{x^2 + 3} + \sqrt{e^{3 - x^2} - 1}, \quad 21) y = \sqrt{1 - e^{x^2 - 2x}} - \frac{x + 3}{4 - x^2},$$

$$22) y = \sqrt{1 - e^{x^2 + 2x - 8}} - \frac{2 - 3x}{2x^2 + 1} + \frac{4}{1 - x^2}, \quad 23) y = \frac{2x + 3}{x^2 - 2} + \sqrt{e^{x - 2x^2 + 1} - 1},$$

$$24) y = \sqrt{e^x - 1} - \frac{1}{x^2 - x}, \quad 25) y = \frac{x - 4}{x^2 + x} + \sqrt{1 - e^{x - 2}}, \quad 26) y = \sqrt{e^{3 - x} - 1} - \frac{3 + x}{4x - x^2},$$

$$27) y = \frac{5}{x^2 + x} + \sqrt{1 - e^{x^2 - x}} - \frac{1 - x}{3x - 4x^2}, \quad 28) y = \sqrt{e^{x - 3x^2} - 1} + \frac{x + 3}{x - 2x^2},$$

$$29) y = \frac{x - 2}{x^2 - 3x} + \sqrt{1 - e^{x^2 - 5x - 6}}, \quad 30) y = \frac{x + 1}{x^2 - x} - \sqrt{e^{3x - 4x^2 + 1} - 1} + \frac{2}{4x - 3x^2},$$

$$31) y = \sqrt{1 - e^{5x + 1}} + \frac{x + 1}{3x^2 - 2x - 1}, \quad 32) y = \frac{x - 2}{x - x^2 + 12} - \sqrt{e^{5 - x} - 1} + \frac{1}{x},$$

$$33) y = \frac{5 - x}{3x^2 - x - 4} + \sqrt{e^{3x^2 - 1} - 1}, \quad 34) y = \sqrt{1 - e^{25 - x^2}} - \frac{3}{x - 5x^2 + 4},$$

$$35) y = \sqrt{1 - e^{x^2 - 3x}} - \frac{2x + 1}{x^2 + 4x + 4}, \quad 36) y = \frac{1}{x - 2x^2 + 3} + \sqrt{e^{2x - 3x^2} - 1},$$

$$37) y = \frac{x}{x^2 - 10x + 9} + \sqrt{e^{x^2 - 6x + 9} - 1}, \quad 38) y = \sqrt{1 - e^{4x - 5x^2 + 1}} - \frac{4 + x}{2x - x^2 - 1},$$

$$39) y = \sqrt{e^{x - 2} - 1} - \frac{x + 5}{x^3 - 7x^2 + 12x}, \quad 40) y = \frac{3x}{x^3 - 2x^2 - x + 2} + \sqrt{1 - e^{2x - 5}}.$$

23. Odrediti domen sledećih funkcija.

$$\begin{aligned}
 1) y &= \frac{1}{\cos x}, & 2) y &= -\frac{3}{\sin x}, & 3) y &= \frac{\cos x}{\cos x - 1}, & 4) y &= \frac{\sin x}{1 + \sin x}, \\
 5) y &= \frac{\sin x - 1}{\cos x + 1}, & 6) y &= \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x}, & 7) y &= \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}, & 8) y &= \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}, \\
 9) y &= \frac{2 + \sin x}{\sqrt{3} + 2 \cos x}, & 10) y &= \frac{\cos x - 2}{2 \sin x - \sqrt{3}}, & 11) y &= \frac{\sin x + 1}{\sin x - 2}, & 12) y &= \frac{1 - \cos x}{2 + \cos x}, \\
 13) y &= \frac{2 + \cos x}{1 - 2 \cos x}, & 14) y &= \frac{\sin x - 2}{2 \sin x + 1}, & 15) y &= \frac{2}{\sin x + \cos x}, & 16) y &= \frac{1}{\cos x - \sin x}, \\
 17) y &= \frac{\sin x - 1}{\cos 2x - 1}, & 18) y &= \frac{1 - \cos x}{1 + \sin 2x}, & 19) y &= \frac{\cos x + 2}{\sin 3x - 1}, & 20) y &= \frac{2 + \sin x}{1 + \cos 3x}, \\
 21) y &= \frac{\sin 2x}{2 \cos^2 x - 1}, & 22) y &= \frac{\cos 2x}{1 - 2 \sin^2 x}, & 23) y &= \frac{\sin 3x}{4 \cos^2 x - 3}, & 24) y &= \frac{\cos 3x}{3 - 4 \sin^2 x}, \\
 25) y &= -\frac{3}{\operatorname{tg} x}, & 26) y &= \frac{2}{\operatorname{ctg} x}, & 27) y &= \frac{\cos x + 1}{\operatorname{tg} x + 1}, & 28) y &= \frac{\sin x - 1}{\operatorname{ctg} x - 1}.
 \end{aligned}$$

4.2. Nule funkcije

Primer 1. Odrediti nule sledećih funkcija.

$$1) y = \frac{9-x^2}{x^2+5x+4}, \quad 2) y = \frac{x+2}{\sqrt{2x+3}}, \quad 3) y = \frac{e^{x^2-2x}-1}{\sqrt{x^2+2x-3}}, \quad 4) y = \ln\left(\frac{x+2}{1-x}\right).$$

Rešenje:

$$1) y = 0 \Leftrightarrow \frac{9-x^2}{x^2+5x+4} = 0 \Leftrightarrow 9-x^2 = 0 \Leftrightarrow (3+x)(3-x) = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3.$$

Pošto je $D_y = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 5x + 4 \neq 0\} = \mathbf{R} \setminus \{-4, -1\}$, pri čemu poslednja jednakost sledi iz

$$x^2 + 5x + 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{-5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x \neq -4 \wedge x \neq -1,$$

zaključujemo da $x = -3 \in D_y$ i $x = 3 \in D_y$. Prema tome, data funkcija ima nule za $x = -3$ i $x = 3$ tj. data funkcija seče x -osu u tačkama $A(-3, 0)$ i $B(3, 0)$.

$$2) y = 0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{\sqrt{2x+3}} = 0 \Leftrightarrow x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

Pošto je $D_y = \{x \in \mathbf{R} \mid 2x+3 > 0\} = (-\frac{3}{2}, +\infty)$, pri čemu poslednja jednakost sledi iz

$$2x + 3 > 0 \Leftrightarrow 2x > -3 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2},$$

zaključujemo da $x = -2 \notin D_y$. Prema tome, data funkcija nema nula tj. data funkcija ne seče x -osu.

$$\begin{aligned} 3) y=0 &\Leftrightarrow e^{x^2-2x}-1=0 \Leftrightarrow e^{x^2-2x}=1 \Leftrightarrow e^{x^2-2x}=e^0 \Leftrightarrow x^2-2x=0 \\ &\Leftrightarrow x(x-2)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2. \end{aligned}$$

Pošto je $D_y = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 + 2x - 3 > 0\} = (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$, pri čemu poslednja jednakost sledi iz

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1,$$

odnosno, imajući u vidu da je $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$, iz

$$\begin{array}{c} -\infty \quad -3 \quad 1 \quad +\infty \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x+3 & - & + & + \\ \hline x-1 & - & - & + \\ \hline (x+3)(x-1) & + & - & + \\ \hline \end{array}, \end{array}$$

zaključujemo da $x=0 \notin D_y$ i $x=2 \in D_y$. Prema tome, data funkcija ima nulu samo za $x=2$ tj. data funkcija seče x -osu u tački $A(2, 0)$.

$$\begin{aligned} 4) y=0 &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+2}{1-x}\right)=0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+2}{1-x}\right)=\ln 1 \Leftrightarrow \frac{x+2}{1-x}=1 \Leftrightarrow \frac{x+2}{1-x}-1=0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x+1}{1-x}=0 \Leftrightarrow 2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Pošto je $D_y = \{x \in \mathbf{R} \mid \frac{x+2}{1-x} > 0\} = (-2, 1)$, pri čemu poslednja jednakost sledi iz

$$\begin{array}{c} -\infty \quad -2 \quad 1 \quad +\infty \\ \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x+2 & - & + & + \\ \hline 1-x & + & + & - \\ \hline \frac{x+2}{1-x} & - & + & - \\ \hline \end{array}, \end{array}$$

zaključujemo da $x = -\frac{1}{2} \in D_y$. Prema tome, data funkcija ima nulu za $x = -\frac{1}{2}$ tj. data funkcija seče x -osu u tački $A(-\frac{1}{2}, 0)$. ♦

1. Odrediti (ako postoje) nule funkcija iz zadatka **1.** (4.1.).
2. Odrediti (ako postoje) nule funkcija iz zadatka **2.** (4.1.).
3. Odrediti (ako postoje) nule sledećih funkcija.

$$1) y = \frac{3}{4x+1}, \quad 2) y = \frac{x+1}{x}, \quad 3) y = \frac{3-2x}{x-1}, \quad 4) y = \frac{2+3x}{x+2}, \quad 5) y = 1 - \frac{2}{x+3},$$

$$\begin{aligned}
6) y &= 2 + \frac{3}{x-2}, & 7) y &= \frac{x^2-4}{x-3}, & 8) y &= \frac{x^2+1}{2x+1}, & 9) y &= \frac{x^2+1}{x} - 2, \\
10) y &= 1 - \frac{x^2+1}{x+3}, & 11) y &= \frac{x^2+2x}{x+1}, & 12) y &= \frac{3x-x^2}{3x+1}, & 13) y &= \frac{2x^2-3x}{1-x} + 2, \\
14) y &= 3 - \frac{x^2-2x}{x-2}, & 15) y &= \frac{x^2-6x+9}{x+4}, & 16) y &= \frac{3x-x^2-2}{5-2x}, & 17) y &= \frac{x^2+x+2}{x+1} + 2, \\
18) y &= \frac{x^2+4x-5}{3-4x} + 1, & 19) y &= \frac{2}{x^2-1}, & 20) y &= \frac{1+x}{3-x^2}, & 21) y &= \frac{5-4x}{3x^2+2}, \\
22) y &= 2 - \frac{2x^2+3}{2x^2+1}, & 23) y &= \frac{x^2+3}{2-x^2} - 1, & 24) y &= 1 - \frac{2}{x^2+x}, & 25) y &= \frac{3-4x}{4x-x^2}, \\
26) y &= \frac{1+x^2}{x^2-2x}, & 27) y &= 2 + \frac{1-3x^2}{x^2+x} - \frac{1}{x}, & 28) y &= \frac{3}{x^2+4x+3} - 1, \\
29) y &= \frac{1}{x} - \frac{x+4}{x^2+4x-12}, & 30) y &= \frac{2x^2-1}{x^2+x-12}, & 31) y &= 1 - \frac{2+x^2}{x^2+2x+1}, \\
32) y &= \frac{3x^2+x}{x^2+x-12}, & 33) y &= \frac{x-2x^2}{2x-x^2+3} - 2, & 34) y &= 2 - \frac{x^2+4x+7}{x^2+5x+6}.
\end{aligned}$$

4. Odrediti (ako postoje) nule funkcija iz zadatka 4. (4.1.).

5. Odrediti (ako postoje) nule funkcija iz zadatka 5. (4.1.).

6. Odrediti (ako postoje) nule sledećih funkcija.

$$\begin{aligned}
1) y &= \sqrt{\frac{3}{2} - 2x}, & 2) y &= \sqrt{\frac{x}{x+2}}, & 3) y &= \sqrt{\frac{1-3x}{x+1}}, & 4) y &= \sqrt{\frac{x-4}{x+3}} + 2, \\
5) y &= \frac{2x-3}{\sqrt{x+1}}, & 6) y &= \frac{\sqrt{3x-1}}{x}, & 7) y &= \sqrt{2 - \frac{x^2+1}{x+2}}, & 8) y &= \frac{x^2-1}{\sqrt{x+3}}, \\
9) y &= \frac{\sqrt{5-3x}}{4x^2-3}, & 10) y &= \frac{x^2-3x}{\sqrt{x-2}}, & 11) y &= \frac{\sqrt{3x+2}}{x-4x^2}, & 12) y &= \sqrt{\frac{x^2-x}{3-x}} - 1, \\
13) y &= \frac{\sqrt{5x-1}}{x^2-3x-4}, & 14) y &= \frac{4+3x-x^2}{\sqrt{3x+2}}, & 15) y &= \sqrt{1 - \frac{x+3x^2-5}{x+1}}, \\
16) y &= \sqrt{\frac{1}{3} - x^2}, & 17) y &= \frac{4-3x}{\sqrt{3x^2-4}}, & 18) y &= \frac{\sqrt{5-x^2}}{3x+1}, & 19) y &= \sqrt{1 - \frac{4-3x}{2-x^2}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
20) y &= \frac{1-x^2}{\sqrt{3x^2-2}}, & 21) y &= \frac{\sqrt{2+x^2}}{x^2+1}, & 22) y &= \sqrt{\frac{x^2+1}{2x^2-3}}-1, & 23) y &= \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2+3x}, \\
24) y &= \frac{2x-5x^2}{\sqrt{3-x^2}}, & 25) y &= \frac{\sqrt{1-2x^2}}{x^2-4x+4}, & 26) y &= \frac{4x-x^2+5}{\sqrt{x^2-4}}, & 27) y &= \sqrt{3-\frac{3x^2-x+4}{x^2+1}}, \\
28) y &= \frac{\sqrt{x^2+x}}{x-2}, & 29) y &= \frac{4-3x}{\sqrt{x-x^2}}, & 30) y &= \sqrt{\frac{1-2x}{x+4x^2}}-1, & 31) y &= \frac{x^2-1}{\sqrt{2x-x^2}}, \\
32) y &= \frac{\sqrt{x^2-x}}{x^2+5}, & 33) y &= \frac{\sqrt{x-2x^2}}{x^2-6x+5}, & 34) y &= \frac{4x-x^2+5}{\sqrt{x^2-3x}}, & 35) y &= \sqrt{\frac{x-x^2+2}{x^2-x}}+1, \\
36) y &= \frac{4+5x}{\sqrt{x^2-6x-7}}, & 37) y &= \frac{\sqrt{5-4x-x^2}}{5-2x}, & 38) y &= \sqrt{2-\frac{3x}{x^2+2x-3}}, \\
39) y &= \frac{\sqrt{x^2-3x-4}}{x^2+3}, & 40) y &= \frac{2-x^2}{\sqrt{x^2+x-1}}, & 41) y &= \sqrt{\frac{x^2-3}{2x-x^2+3}}+1, \\
42) y &= \frac{x^2+3x}{\sqrt{2x^2-x-1}}, & 43) y &= \frac{\sqrt{4x^2-4x+1}}{x-x^2}, & 44) y &= \sqrt{1-\frac{x^2+4x}{2x^2+4x-1}}, \\
45) y &= \frac{x^2-3x+4}{\sqrt{x^2-10x+25}}, & 46) y &= \frac{\sqrt{12-x-x^2}}{x^2-3x+4}, & 47) y &= \sqrt{\frac{x^2-5x+4}{x^2-4x-5}}-1.
\end{aligned}$$

7. Odrediti (ako postoje) nule funkcija iz zadatka **9.** (4.1.).

8. Odrediti (ako postoje) nule funkcija iz zadatka **10.** (4.1.).

9. Odrediti (ako postoje) nule funkcija iz zadatka **11.** (4.1.).

10. Odrediti (ako postoje) nule funkcija iz zadatka **12.** (4.1.).

11. Odrediti (ako postoje) nule funkcija iz zadatka **13.** (4.1.).

12. Odrediti (ako postoje) nule funkcija iz zadatka **14.** (4.1.).

13. Odrediti (ako postoje) nule funkcija iz zadatka **15.** (4.1.).

14. Odrediti (ako postoje) nule funkcija iz zadatka **16.** (4.1.).

15. Odrediti (ako postoje) nule funkcija iz zadatka **17.** (4.1.).

16. Odrediti (ako postoje) nule funkcija iz zadatka **18.** (4.1.).

17. Odrediti (ako postoje) nule sledećih funkcija.

$$\begin{aligned}
 1) y &= \frac{\ln(3-x)}{x}, & 2) y &= \frac{\log_{\frac{1}{3}}(2x-3)}{2-x}, & 3) y &= \frac{3+4x}{\log_2(1-2x)}, & 4) y &= \frac{2x+1}{\ln(x+1)}, \\
 5) y &= \frac{\log_{\frac{4}{3}}(3-x)}{x^2}, & 6) y &= \frac{\ln(4x-3)}{3-x^2}, & 7) y &= \frac{x^2+2}{\log_{\frac{2}{3}}(1+4x)}, & 8) y &= \frac{2x^2-x}{\ln(x-2)}, \\
 9) y &= \frac{\log_{\frac{1}{2}}(2-x)-2}{x^2+3x+2}, & 10) y &= \frac{x^2+x+3}{\ln(3x+2)}, & 11) y &= \frac{1+\log_{\frac{5}{3}}(4x-1)}{3x-x^2+4}, \\
 12) y &= \frac{1-\log_{\frac{3}{2}}(2-x^2)}{x}, & 13) y &= \frac{1-x^2}{\ln(2x^2-1)}, & 14) y &= \frac{\log_{\frac{1}{4}}(4x^2+3)+1}{4x^2+3x}, \\
 15) y &= \frac{2+3x^2}{\ln(x^2-4x+4)}, & 16) y &= \frac{1-\log_2(3x-x^2)}{x-3}, & 17) y &= \frac{x^2}{\ln(2x^2+x)}, \\
 18) y &= \frac{\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x)+1}{4x^2-x}, & 19) y &= \frac{2x^2-3}{\ln(x^2-4x-5)}, & 20) y &= \frac{2+\log_{\frac{1}{4}}(x^2+2x+1)}{1-x}, \\
 21) y &= \frac{x^2+1}{\ln(2x^2+x-3)}, & 22) y &= \frac{\log_{\frac{5}{3}}(x^2-2x+1)}{2x-x^2}, & 23) y &= \frac{2x-x^2-1}{\log_{\frac{2}{3}}(4x-x^2+5)}.
 \end{aligned}$$

18. Odrediti (ako postoje) nule sledećih funkcija.

$$\begin{aligned}
 1) y &= \frac{\ln(1-2x)}{\sqrt{x+2}}, & 2) y &= \frac{\log_{\frac{1}{3}}(2x+3)}{\sqrt{x+5}}, & 3) y &= \frac{4-3x}{\sqrt{\log_2(3x-5)}}, \\
 4) y &= \frac{5-x}{\sqrt{\ln(x-2)}}, & 5) y &= \frac{\log_{\frac{3}{4}}(3+4x)}{\sqrt{4-x^2}}, & 6) y &= \frac{\ln(2x-5)}{\sqrt{x^2-5}}, \\
 7) y &= \frac{3+x^2}{\sqrt{\log_{\frac{1}{4}}(1-3x)}}, & 8) y &= \frac{\log_{\frac{5}{3}}(x+4)}{\sqrt{x^2+2x}}, & 9) y &= \frac{2x^2-x}{\sqrt{\ln(x-2)}}, \\
 10) y &= \frac{\log_{\frac{1}{3}}(2-x)+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}, & 11) y &= \frac{2x-x^2-3}{\sqrt{\ln(3x+1)}}, & 12) y &= \frac{\log_4(3x-4)-\frac{1}{2}}{\sqrt{3x^2-x-4}},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
13) y &= \frac{1 - \log_{\frac{5}{2}}(1 + x^2)}{\sqrt{x+1}}, & 14) y &= \frac{2 - x^2}{\sqrt{\ln(3x^2 - 2)}}, & 15) y &= \frac{\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 3x) + 1}{\sqrt{x^2 + 3}}, \\
16) y &= \frac{3 + 2x^2}{\sqrt{\ln(x^2 - 2x + 1)}}, & 17) y &= \frac{\log_2(x^2 - 3x) - 2}{\sqrt{x}}, & 18) y &= \frac{x^2 - 3}{\sqrt{\ln(2x^2 + x)}}, \\
19) y &= \frac{\log_{\frac{1}{2}}(3x - x^2) + 1}{\sqrt{x^2 - 3x}}, & 20) y &= \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{\ln(x^2 - 4x - 5)}}, & 21) y &= \frac{1 + \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 2x + 4)}{\sqrt{3 - x}}, \\
22) y &= \frac{x^2 - 2}{\sqrt{\ln(x^2 + 3x - 3)}}, & 23) y &= \frac{\log_2(x^2 - 4x + 4)}{\sqrt{4x - x^2}}, & 24) y &= \frac{3x - 2x^2 + 2}{\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 2x - 3)}}.
\end{aligned}$$

19. Odrediti (ako postoje) nule sledećih funkcija.

$$\begin{aligned}
1) y &= \frac{1 - e^{3-x}}{\sqrt{x-1}}, & 2) y &= \frac{3 - 2x}{\sqrt{e^{x+1} - 1}}, & 3) y &= \frac{e^{16-x^2} - 1}{\sqrt{5x+2}}, \\
4) y &= \frac{1 + 4x}{\sqrt{1 - e^{x^2-1}}}, & 5) y &= \frac{1 - e^{x^2+2x}}{\sqrt{x+1}}, & 6) y &= \frac{1 + 2x}{\sqrt{1 - e^{x^2+x}}}, \\
7) y &= \frac{e^{2x^2-x-1} - 1}{\sqrt{2x+3}}, & 8) y &= \frac{3 + 5x}{\sqrt{e^{x^2+2x+3} - 1}}, & 9) y &= \frac{e^{2-x^2} - 1}{\sqrt{x^2-1}}, \\
10) y &= \frac{1 + 4x^2}{\sqrt{1 - e^{x^2-3}}}, & 11) y &= \frac{1 - e^{x^2+3x}}{\sqrt{x^2+1}}, & 12) y &= \frac{3 - 4x^2}{\sqrt{e^{x^2+2x} - 1}}, \\
13) y &= \frac{1 - e^{x^2-2x+1}}{\sqrt{4-x^2}}, & 14) y &= \frac{1 - 3x^2}{\sqrt{e^{2-x-x^2} - 1}}, & 15) y &= \frac{1 - e^{2x^2-1}}{\sqrt{x^2-3x}}, \\
16) y &= \frac{2x^2 - x}{\sqrt{e^{1-x^2} - 1}}, & 17) y &= \frac{e^{2x^2+3x} - 1}{\sqrt{x^2+x}}, & 18) y &= \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{1 - e^{x^2+3x}}}, \\
19) y &= \frac{1 - e^{x^2+3x-4}}{\sqrt{x^2-x}}, & 20) y &= \frac{3x^2 - 4x}{\sqrt{e^{x-x^2+2} - 1}}, & 21) y &= \frac{1 - e^{2+5x}}{\sqrt{x^2+2x+2}}, \\
22) y &= \frac{x^2 + 6x + 9}{\sqrt{e^{x+4} - 1}}, & 23) y &= \frac{e^{x^2-2x} - 1}{\sqrt{4x^2 - x - 5}}, & 24) y &= \frac{4x - x^2 + 5}{\sqrt{1 - e^{x-x^2}}}.
\end{aligned}$$

20. Odrediti (ako postoje) nule sledećih funkcija.

$$\begin{aligned}
 1) y &= \frac{e^{2x-3}-1}{\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(1-x)}}, & 2) y &= \frac{\log_{\frac{3}{2}}(5+4x)}{\sqrt{1-e^{x-1}}}, & 3) y &= \frac{e^{3-x^2}-1}{\sqrt{\ln(5x+1)}}, \\
 4) y &= \frac{\log_{\frac{1}{5}}(1-5x)}{\sqrt{1-e^{1-x^2}}}, & 5) y &= \frac{e^{x^2-5x}-1}{\sqrt{\ln(x-2)}}, & 6) y &= \frac{\log_{\frac{5}{4}}(4+3x)}{\sqrt{1-e^{x^2-x}}}, \\
 7) y &= \frac{e^{x^2-x-2}-1}{\sqrt{\log_{\frac{3}{2}}(2x-1)}}, & 8) y &= \frac{\log_{\frac{1}{3}}(6+5x)}{\sqrt{e^{x^2+3x+4}-1}}, & 9) y &= \frac{1-e^{4+x^2}}{\sqrt{\ln(x^2+1)}}, \\
 10) y &= \frac{\log_{\frac{1}{4}}(4-x^2)}{\sqrt{e^{x^2-2}-1}}, & 11) y &= \frac{1-e^{x^2-2x}}{\sqrt{\ln(x^2-1)}}, & 12) y &= \frac{\log_{\frac{5}{2}}(3-x^2)}{\sqrt{e^{3x-x^2}-1}}, \\
 13) y &= \frac{1-e^{x^2-4x+4}}{\sqrt{\ln(9-x^2)}}, & 14) y &= \frac{\log_{\frac{3}{5}}(1-4x^2)}{\sqrt{e^{1+x-2x^2}-1}}, & 15) y &= \frac{1-e^{2x^2-1}}{\sqrt{\log_2(2x^2-x)}}, \\
 16) y &= \frac{\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x)}{\sqrt{1-e^{3-x^2}}}, & 17) y &= \frac{e^{x^2-3x}-1}{\sqrt{\ln(x^2-x)}}, & 18) y &= \frac{\log_3(x^2+x)}{\sqrt{e^{x^2+4x}-1}}, \\
 19) y &= \frac{e^{x^2-3x-4}-1}{\sqrt{\log_{\frac{5}{4}}(x^2-3x)}}, & 20) y &= \frac{\log_{\frac{1}{2}}(2x^2-x)}{\sqrt{1-e^{x-x^2+2}}}, & 21) y &= \frac{1-e^{5x+3}}{\sqrt{\ln(x^2+3x+2)}}, \\
 22) y &= \frac{\log_{\frac{3}{4}}(x^2+2x+1)}{\sqrt{e^{x+2}-1}}, & 23) y &= \frac{e^{x^2+5x}-1}{\sqrt{\ln(x^2-x-6)}}, & 24) y &= \frac{\log_{\frac{4}{3}}(3x-x^2+4)}{\sqrt{1-e^{5x-x^2}}}.
 \end{aligned}$$

21. Odrediti (ako postoje) nule sledećih funkcija.

$$\begin{aligned}
 1) y &= \frac{2}{\cos x}, & 2) y &= \frac{1}{\sin x + 1}, & 3) y &= \frac{\sin x + 1}{\cos x}, & 4) y &= \frac{\cos x - 1}{\sin x}, \\
 5) y &= \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1}, & 6) y &= \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}, & 7) y &= \frac{2 - \cos x}{1 - \sin x}, & 8) y &= \frac{\sin x + 2}{1 + \cos x}, \\
 9) y &= \frac{\cos x + \sin x}{\sin x + 1}, & 10) y &= \frac{\sin x - \cos x}{\cos x - 1}, & 11) y &= \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \cos x}, & 12) y &= \frac{\cos^2 x - 1}{1 - \sin x}, \\
 13) y &= \frac{2 \cos x - 1}{\sin x - 1}, & 14) y &= \frac{1 + 2 \sin x}{\cos x - 1}, & 15) y &= \frac{\sqrt{3} + 2 \cos x}{1 + \sin x}, & 16) y &= \frac{2 \sin x - \sqrt{3}}{1 + \cos x}, \\
 17) y &= \frac{4 \cos^2 x - 3}{1 + \sin x}, & 18) y &= \frac{3 - 4 \sin^2 x}{1 + \cos x}, & 19) y &= \frac{1 - 2 \sin^2 x}{1 - \cos x}, & 20) y &= \frac{2 \cos^2 x - 1}{\sin x - 1}, \\
 21) y &= \frac{\operatorname{ctg} x + 1}{\operatorname{ctg} x - 1}, & 22) y &= \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}, & 23) y &= \frac{1}{\sin x} - \operatorname{ctg} x, & 24) y &= \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}.
 \end{aligned}$$

4.3. Znak funkcije

Primer 1. Odrediti znak sledećih funkcija.

$$1) y = \frac{x^2-4}{1-x^2}, \quad 2) y = \frac{x}{\sqrt{3-2x}}, \quad 3) y = \frac{x+2}{1-e^{3x+4}}, \quad 4) y = \log_2\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Rešenje:

1) $D_y = \{x \in \mathbf{R} \mid 1-x^2 \neq 0\} = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$, pri čemu poslednja jednakost sledi iz

$$1-x^2 \neq 0 \Leftrightarrow (1+x)(1-x) \neq 0 \Leftrightarrow 1+x \neq 0 \wedge 1-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \wedge x \neq 1.$$

Iz

	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$
$x+2$	-	+	+	+	+	
$x-2$	-	-	-	-	+	
$1+x$	-	-	+	+	+	
$1-x$	+	+	+	-	-	
y	-	+	-	+	-	

sledi:

$$y > 0 \text{ za } x \in (-2, -1) \cup (1, 2),$$

$$y < 0 \text{ za } x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty).$$

2) $D_y = \{x \in \mathbf{R} \mid 3-2x > 0\} = (-\infty, \frac{3}{2})$, pri čemu poslednja jednakost sledi iz

$$3-2x > 0 \Leftrightarrow -2x > -3 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}.$$

Iz

	$-\infty$	0	$\frac{3}{2}$
x	-	+	
$\sqrt{3-2x}$	+	+	
y	-	+	

sledi:

$$y > 0 \text{ za } x \in (0, \frac{3}{2}),$$

$$y < 0 \text{ za } x \in (-\infty, 0).$$

3) $D_y = \{x \in \mathbf{R} \mid 1-e^{3x+4} \neq 0\} = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{4}{3}\}$, pri čemu poslednja jednakost sledi iz

$$1-e^{3x+4} \neq 0 \Leftrightarrow e^{3x+4} \neq 1 \Leftrightarrow e^{3x+4} \neq e^0 \Leftrightarrow 3x+4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{4}{3}.$$

Iz

$$\begin{array}{c} -\infty \quad -\frac{4}{3} \quad 2 \quad +\infty \\ \hline \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x-2 & - & - & + \\ \hline 1-e^{3x+4} & + & - & - \\ \hline y & - & + & - \\ \hline \end{array} \end{array}$$

sledi:

$$y > 0 \text{ za } x \in \left(-\frac{4}{3}, 2\right),$$

$$y < 0 \text{ za } x \in \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right) \cup (2, +\infty).$$

4) $D_y = \{x \in \mathbf{R} \mid \frac{1+x}{1-x} > 0\} = (-1, 1)$, pri čemu poslednja jednakost sledi iz
$$\begin{array}{c} -\infty \quad -1 \quad 1 \quad +\infty \\ \hline \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1+x & - & + & + \\ \hline 1-x & + & + & - \\ \hline \frac{1+x}{1-x} & - & + & - \\ \hline \end{array} . \end{array}$$

Iz

$$y > 0 \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{1+x}{1-x}\right) > 0 \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{1+x}{1-x}\right) > \log_2 1 \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} > 1 \Leftrightarrow \frac{1+x}{1-x} - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x}{1-x} > 0$$

tj.

$$\begin{array}{c} -1 \quad 0 \quad 1 \\ \hline \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2x & - & + \\ \hline 1-x & + & + \\ \hline \frac{2x}{1-x} & - & + \\ \hline \end{array} \end{array}$$

sledi:

$$y > 0 \text{ za } x \in (0, 1),$$

$$y < 0 \text{ za } x \in (-1, 0). \blacklozenge$$

1. Ispitati znak sledećih funkcija.

$$1) y = \frac{1}{x}, \quad 2) y = \frac{3}{x-2}, \quad 3) y = \frac{2}{x+3}, \quad 4) y = \frac{4}{3-x}, \quad 5) y = \frac{1-x}{x},$$

$$6) y = \frac{4+x}{x}, \quad 7) y = \frac{2+x}{x+1}, \quad 8) y = \frac{3-x}{x-2}, \quad 9) y = \frac{x+1}{1-x}, \quad 10) y = \frac{x-4}{3+x},$$

$$11) y = \frac{3}{(x+1)(x+2)}, \quad 12) y = -\frac{2}{(x-1)(x+3)}, \quad 13) y = \frac{1}{(x-4)(x-2)},$$

$$14) y = \frac{2}{(2+x)(3+x)}, \quad 15) y = -\frac{1}{(4+x)(2-x)}, \quad 16) y = \frac{4}{(1-x)(3-x)},$$

$$\begin{aligned}
17) y &= \frac{x}{(x+2)(x+3)}, & 18) y &= \frac{x-1}{(x-3)(x+1)}, & 19) y &= \frac{2-x}{(x-1)(x-3)}, \\
20) y &= \frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)(x+4)}, & 21) y &= \frac{(x+2)(x-1)}{(x-3)(x+1)}, & 22) y &= \frac{(3-x)(4-x)}{(x-2)(x-1)}, \\
23) y &= \frac{(3+2x)(1-x)}{(x+3)(x-2)}, & 24) y &= \frac{(1+x)(1+2x)}{(x+2)(2x+3)}, & 25) y &= \frac{(3x-4)(2x-5)}{(5x-3)(x-2)}.
\end{aligned}$$

2. Ispitati znak sledećih funkcija.

$$\begin{aligned}
1) y &= \frac{1}{x} + 2, & 2) y &= \frac{2}{x} - 3, & 3) y &= 1 - \frac{3}{x}, & 4) y &= -3 - \frac{5}{x}, \\
5) y &= \frac{1}{x+1} - 2, & 6) y &= \frac{2}{3-x} + 1, & 7) y &= 1 - \frac{4}{x-2}, & 8) y &= -3 - \frac{5}{1+x}, \\
9) y &= \frac{x}{3x-2} - 1, & 10) y &= \frac{2x}{4-x} + 1, & 11) y &= 3 - \frac{x}{x+1}, & 12) y &= -2 - \frac{3x}{3+2x}, \\
13) y &= \frac{2x+1}{2x-3} + 1, & 14) y &= \frac{3+x}{4-x} - 2, & 15) y &= 1 - \frac{x-1}{x+1}, & 16) y &= -1 - \frac{2-3x}{2+3x}, \\
17) y &= \frac{2}{2x-3} - \frac{1}{x}, & 18) y &= \frac{3}{1-x} + \frac{2}{x}, & 19) y &= \frac{2}{x} - \frac{3}{x+3}, & 20) y &= -\frac{3}{x} - \frac{1}{1+2x}, \\
21) y &= \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}, & 22) y &= \frac{3}{1-2x} + \frac{2}{x+2}, & 23) y &= \frac{2}{x-3} - \frac{3}{3x+1}.
\end{aligned}$$

3. Ispitati znak sledećih funkcija.

$$\begin{aligned}
1) y &= \frac{2}{x^2}, & 2) y &= -\frac{1}{x^2}, & 3) y &= \frac{3}{x^2-1}, & 4) y &= \frac{4}{4-x^2}, & 5) y &= \frac{2+x}{x^2}, \\
6) y &= \frac{1-x}{x^2}, & 7) y &= \frac{x}{x^2+1}, & 8) y &= \frac{2-x}{x^2-3}, & 9) y &= \frac{x+1}{2-x^2}, & 10) y &= \frac{x-4}{3+x^2}, \\
11) y &= \frac{3+x^2}{2x^2-1}, & 12) y &= \frac{3-4x^2}{x^2+2}, & 13) y &= \frac{x^2-5}{4-x^2}, & 14) y &= \frac{1-3x^2}{2x^2-1}, \\
15) y &= \frac{1}{(2-x)(x^2-2)}, & 16) y &= -\frac{3}{(x+1)(2+x^2)}, & 17) y &= \frac{2}{(x+2)(3-x^2)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
18) y &= -\frac{3-x}{(x-1)(x^2-2)}, & 19) y &= \frac{2+x}{(x-3)(1+x^2)}, & 20) y &= \frac{x+1}{(2+x)(3-x^2)}, \\
21) y &= \frac{(x-1)(2-x)}{x^2-3}, & 22) y &= \frac{(x-3)(1+x)}{2+x^2}, & 23) y &= -\frac{(x+3)(2+x)}{1-x^2}, \\
24) y &= -\frac{2}{(1-x^2)(x^2-2)}, & 25) y &= \frac{1}{(x^2+1)(4+x^2)}, & 26) y &= \frac{3}{(x^2+1)(3-x^2)}, \\
27) y &= \frac{x}{(2-x^2)(x^2-1)}, & 28) y &= \frac{1-x}{(x^2+1)(2+x^2)}, & 29) y &= \frac{x+2}{(2x^2+3)(3-x^2)}, \\
30) y &= \frac{(x+1)(x^2-2)}{4-x^2}, & 31) y &= \frac{x(x^2+5)}{1-x^2}, & 32) y &= \frac{(x-3)(x^2+2)}{x^2-5}.
\end{aligned}$$

4. Ispitati znak sledećih funkcija.

$$\begin{aligned}
1) y &= 1 - \frac{2}{x^2}, & 2) y &= \frac{2}{x^2+1} - 1, & 3) y &= 1 - \frac{3}{4x^2+1}, & 4) y &= \frac{5}{x^2-4} + 2, \\
5) y &= 2 + \frac{x-1}{x^2}, & 6) y &= \frac{x}{x^2-1} - 1, & 7) y &= 1 - \frac{x+2}{x^2-3}, & 8) y &= \frac{x}{x^2+2} + 2, \\
9) y &= \frac{x^2+1}{x^2} - 3, & 10) y &= \frac{x^2+2}{x^2-1} + 1, & 11) y &= 2 - \frac{2x^2+2}{x^2+3}, & 12) y &= 1 + \frac{x^2-3}{x^2+4}, \\
13) y &= 1 + \frac{x^2+x}{2-x^2}, & 14) y &= 2 - \frac{x^2+2x}{x^2+1}, & 15) y &= \frac{x^2-x}{x^2-1} - 3, & 16) y &= \frac{x^2-3x}{x^2+3} - 1, \\
17) y &= \frac{2}{x+1} + \frac{4}{1-x^2}, & 18) y &= \frac{3}{x^2-4} + \frac{2}{x-2}, & 19) y &= \frac{1}{1+3x} - \frac{1}{3-4x^2}, \\
20) y &= \frac{2}{x^2-3} + \frac{3}{2-x^2}, & 21) y &= \frac{1}{x^2-4} + \frac{2}{x^2+2}, & 22) y &= \frac{1}{1-3x^2} - \frac{2}{2-3x^2}, \\
23) y &= \frac{3}{x^2+2x} - \frac{1}{4-x^2}, & 24) y &= \frac{2}{x^2-4} + \frac{3}{x^2+x}, & 25) y &= \frac{3}{x-3x^2} - \frac{1}{1-2x^2}.
\end{aligned}$$

5. Ispitati znak sledećih funkcija.

$$\begin{aligned}
1) y &= \frac{3}{x^2-4x+3} - 1, & 2) y &= 1 - \frac{6}{x^2+3x-4}, & 3) y &= 1 + \frac{2}{x-2x^2+1},
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
4) y = 1 - \frac{3}{x^2+x+1}, & 5) y = \frac{2}{2x^2+x+1} - 1, & 6) y = 2 + \frac{1}{x-x^2-2}, \\
7) y = \frac{x}{x^2+x-2} - 1, & 8) y = 1 + \frac{x-1}{2x^2+3x-5}, & 9) y = \frac{1-2x}{x-3x^2+4} + 2, \\
10) y = 2 - \frac{3+x}{x^2+2x+2}, & 11) y = \frac{4x-3}{2x-x^2-1} - 2, & 12) y = 1 - \frac{2x+3}{x^2+4x-5}, \\
13) y = \frac{x^2}{x^2+x-12} - 1, & 14) y = 1 - \frac{x^2-2}{x^2+x-6}, & 15) y = \frac{1-2x^2}{3x-x^2-2} - 2, \\
16) y = 1 + \frac{1+x^2}{2x^2+x-1}, & 17) y = \frac{3x^2+4}{4x-x^2-4} + 3, & 18) y = \frac{x^2-1}{x^2+2x+1} - 1, \\
19) y = \frac{x^2+x}{4x^2+x-3} - 1, & 20) y = 2 - \frac{x^2-2x}{x^2-x-6}, & 21) y = \frac{x-3x^2}{3x-2x^2-1} + 1, \\
22) y = 1 + \frac{4x+x^2}{x^2+x+3}, & 23) y = \frac{x-4x^2}{2x-3x^2+1} - 1, & 24) y = 3 - \frac{2x^2+3x}{x^2+2x+1}, \\
25) y = \frac{2x^2+5x-3}{3x^2+x-2} - 2, & 26) y = 1 - \frac{x^2+6x+9}{x^2+4x-5}, & 27) y = \frac{x-2x^2+4}{x-x^2-4} - 1, \\
28) y = 2 - \frac{2x^2+3x-2}{x^2+4x+4}, & 29) y = \frac{3x-4x^2+5}{2x-x^2+3} - 1, & 30) y = 1 - \frac{4x-x^2+5}{x^2+4x+3}.
\end{array}$$

6. Ispitati znak sledećih funkcija.

$$\begin{array}{lll}
1) y = x \log_3(x+3), & 2) y = (x-1) \ln(2-x), & 3) y = (2-3x) \log_{\frac{1}{4}}(4-3x), \\
4) y = (1+2x) \log_2(2x-3), & 5) y = x^2 \log_{\frac{1}{3}}(x+1), & 6) y = (1+3x^2) \log_4(2-x), \\
7) y = (1-x^2) \log_{\frac{1}{5}}(3x+4), & 8) y = (x^2-2) \ln(3-x), & 9) y = (x^2-x) \ln(x+1), \\
10) y = (x-2x^2)(x^2-3x) \log_3(5-2x), & 11) y = (x-x^2)(x^2+2x) \log_{\frac{1}{2}}(4x+5), \\
12) y = x(x^2-2x+1) \log_3(x+3), & 13) y = (x+2)(1-x-2x^2) \ln(1-2x),
\end{array}$$

- 14) $y = (2x-3x^2+3) \log_{\frac{1}{5}}(2-5x),$
- 15) $y = (1+x)(4+3x) \log_2(x^2-3),$
- 16) $y = (x+3)(2x-3) \ln(1-4x^2),$
- 17) $y = (x-2)(2-5x) \log_{\frac{1}{4}}(4-3x^2),$
- 18) $y = (1-x^2)(x^2-3) \ln(2+x^2),$
- 19) $y = (2x^2-1)(x^2+1) \log_{\frac{3}{4}}(x^2-4),$
- 20) $y = (1+2x^2)(3-2x^2) \log_{\frac{5}{3}}(1-2x^2),$
- 21) $y = (x^2+x) \log_{\frac{3}{4}}(1+3x^2),$
- 22) $y = (x^2+2x)(x^2-3x) \log_{\frac{4}{5}}(x^2-1),$
- 23) $y = (x-2x^2) \ln(2-3x^2),$
- 24) $y = (x^2+2x-3) \log_{\frac{1}{2}}(4x^2-3),$
- 25) $y = (3x^2-2x-1) \ln(2x^2+3),$
- 26) $y = (x-x^2+12) \log_{\frac{5}{3}}(2-3x^2),$
- 27) $y = (2-3x) \log_{\frac{1}{3}}(3x-2x^2),$
- 28) $y = (1-x)(3x-4) \ln(3x^2+2x),$
- 29) $y = (2x+3) \log_4(6x^2-x),$
- 30) $y = (x^2+1)(x^2-4) \ln(2x-x^2),$
- 31) $y = (x^2-2) \log_{\frac{1}{2}}(4x^2-5x),$
- 32) $y = (1-2x^2) \log_{\frac{3}{2}}(5x-6x^2),$
- 33) $y = (x^2+2x) \log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x),$
- 34) $y = (2x^2+3x) \ln(5x^2+6x),$
- 35) $y = (x^2-x) \log_{\frac{4}{3}}(3x^2-4x),$
- 36) $y = (1-3x-4x^2) \ln(x^2+6x),$
- 37) $y = (x^2+3x-4) \log_{\frac{1}{5}}(4x^2-3x),$
- 38) $y = (x-3x^2+4) \log_{\frac{5}{4}}(6x^2+x),$
- 39) $y = (3x-2) \log_{\frac{2}{3}}(x^2-4x-5),$
- 40) $y = (2x+3) \ln(1+2x-3x^2),$
- 41) $y = (x-3)(1-4x) \log_{\frac{3}{2}}(5+x-5x^2),$
- 42) $y = (x^2+2) \log_{\frac{5}{4}}(x^2-2x+1),$
- 43) $y = (3x^2+2)(4x^2-3) \ln(1+3x-4x^2),$
- 44) $y = (1-3x^2) \log_{\frac{1}{3}}(x-4x^2+5),$
- 45) $y = (2x-3x^2) \log_5(x-2x^2+1),$
- 46) $y = (x^2-3x) \ln(x^2+4x+4),$
- 47) $y = (x^2+4x) \log_{\frac{3}{4}}(x^2+3x+3),$
- 48) $y = (x^2-2x-8) \log_3(x^2-6x+10),$
- 49) $y = (7-6x-x^2) \log_{\frac{2}{5}}(1-x-2x^2).$

7. Ispitati znak sledećih funkcija.

- | | | |
|---|---|--|
| 1) $y = \frac{x}{e^{x+1} - 1},$ | 2) $y = \frac{1 - e^{2x+1}}{1 - 2x},$ | 3) $y = \frac{3x + 2}{e^{1-4x} - 1},$ |
| 4) $y = \frac{x^2}{1 - e^{2x+3}},$ | 5) $y = \frac{e^{3x-1} - 1}{1 - 4x^2},$ | 6) $y = \frac{x^2 + 3}{1 - e^{1-2x}},$ |
| 7) $y = \frac{x^2 + 2x}{e^{4x+5} - 1},$ | 8) $y = \frac{1 - e^{2x-3}}{x - 3x^2},$ | 9) $y = \frac{x^2 - x}{e^{3-4x} - 1},$ |
| 10) $y = \frac{x^2 - 6x + 9}{1 - e^{x+4}},$ | 11) $y = \frac{e^{3x-5} - 1}{x - 4x^2 + 3},$ | 12) $y = \frac{x^2 - x + 1}{1 - e^{2-x}},$ |
| 13) $y = \frac{x - 2}{e^{x^2-1} - 1},$ | 14) $y = \frac{1 - e^{1-3x^2}}{x + 3},$ | 15) $y = \frac{3 - 2x}{e^{2+x^2} - 1},$ |
| 16) $y = \frac{x^2 - 3}{1 - e^{x^2-2}},$ | 17) $y = \frac{e^{1-2x^2} - 1}{x^2 + 1},$ | 18) $y = \frac{3 - 4x^2}{1 - e^{3+x^2}},$ |
| 19) $y = \frac{x^2 + 2x}{e^{x^2-3} - 1},$ | 20) $y = \frac{1 - e^{4-x^2}}{x^2 - 4x},$ | 21) $y = \frac{3x - x^2}{e^{4+3x^2} - 1},$ |
| 22) $y = \frac{3x^2 - 2x - 5}{1 - e^{4-x^2}},$ | 23) $y = \frac{e^{x^2-1} - 1}{x^2 - 4x + 1},$ | 24) $y = \frac{3x - 5x^2 + 2}{1 - e^{1+2x^2}},$ |
| 25) $y = \frac{x - 3}{e^{x^2+x} - 1},$ | 26) $y = \frac{1 - e^{x-2x^2}}{x + 1},$ | 27) $y = \frac{4 - 3x}{e^{3x^2-x} - 1},$ |
| 28) $y = \frac{x^2 - 5}{1 - e^{x^2+2x}},$ | 29) $y = \frac{e^{3x-2x^2} - 1}{x^2 + 2},$ | 30) $y = \frac{1 - 4x^2}{1 - e^{3x^2-4x}},$ |
| 31) $y = \frac{x^2 - 3x}{e^{x^2+x} - 1},$ | 32) $y = \frac{1 - e^{x-3x^2}}{2x - x^2},$ | 33) $y = \frac{x^2 + 4x}{e^{5x^2-2x} - 1},$ |
| 34) $y = \frac{5x^2 + 2x - 3}{1 - e^{3x-x^2}},$ | 35) $y = \frac{e^{2x^2-x} - 1}{x^2 - x + 2},$ | 36) $y = \frac{3x - 2x^2 + 5}{1 - e^{3x^2+2x}},$ |
| 37) $y = \frac{x - 3}{e^{x^2-4x+4} - 1},$ | 38) $y = \frac{1 - e^{x-2x^2+1}}{x + 1},$ | 39) $y = \frac{3 - 4x}{e^{4x^2-x-2} - 1},$ |
| 40) $y = \frac{x^2 - 5}{1 - e^{x^2+2x-1}},$ | 41) $y = \frac{e^{3x-2x^2-1} - 1}{x^2 + 2},$ | 42) $y = \frac{1 - 4x^2}{1 - e^{3x^2-4x+1}},$ |

$$43) y = \frac{x^2 - 3x}{e^{x^2+4x-1} - 1}, \quad 44) y = \frac{1 - e^{x-3x^2+2}}{2x - x^2}, \quad 45) y = \frac{x^2 + x}{e^{5x^2-2x-3} - 1},$$

$$46) y = \frac{3x^2 + 2x - 5}{1 - e^{3x-x^2+4}}, \quad 47) y = \frac{e^{2x^2-x-1} - 1}{x^2 - x + 1}, \quad 48) y = \frac{3x - 5x^2 + 2}{1 - e^{3x^2+2x-1}}.$$

4.4. Parnost i neparnost funkcije

Primer 1. Ispitati da li su sledeće funkcije parne ili neparne.

$$1) y = \frac{x^3 - x}{4 - x^2}, \quad 2) y = \frac{2+x}{1-e^{1-2x}}, \quad 3) y = \frac{1+\cos x}{x^2}, \quad 4) y = x^2 e^x.$$

Rešenje:

$$1) D_y = \{x \in \mathbf{R} \mid 4 - x^2 \neq 0\} = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}, \text{ pri čemu poslednja jednakost sledi iz}$$

$$4 - x^2 \neq 0 \Leftrightarrow (2+x)(2-x) \neq 0 \Leftrightarrow 2+x \neq 0 \wedge 2-x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2 \wedge x \neq 2.$$

Dakle, domen date funkcije je simetričan u odnosu na 0.

Iz

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 - (-x)}{4 - (-x)^2} = \frac{-x^3 + x}{4 - x^2} = -\frac{x^3 - x}{4 - x^2} = -f(x)$$

zaključujemo da je data funkcija *neparna*.

$$2) D_y = \{x \in \mathbf{R} \mid 1 - e^{1-2x} \neq 0\} = \mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}, \text{ pri čemu poslednja jednakost sledi iz}$$

$$1 - e^{1-2x} \neq 0 \Leftrightarrow e^{1-2x} \neq 1 \Leftrightarrow e^{1-2x} \neq e^0 \Leftrightarrow 1 - 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}.$$

Dakle, domen date funkcije nije simetričan u odnosu na 0 na osnovu čega zaključujemo da data funkcija *nije ni parna ni neparna*.

$$3) D_y = \{x \in \mathbf{R} \mid x^2 \neq 0\} = \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

Dakle, domen date funkcije je simetričan u odnosu na 0.

Iz

$$f(-x) = \frac{1+\cos(-x)}{(-x)^2} = \frac{1+\cos x}{x^2} = f(x)$$

zaključujemo da je data funkcija *parna*.

$$4) D_y = \mathbf{R}.$$

Dakle, domen date funkcije je simetričan u odnosu na 0.

Iz

$$f(-x) = (-x)^2 e^{-x} = \frac{x^2}{e^x} \neq \begin{matrix} f(x) \\ -f(x) \end{matrix},$$

zaključujemo da data funkcija *nije ni parna ni neparna*. ♦

1. Ispitati da li su sledeće funkcije parne ili neparne.

$$1) y = \frac{1}{x}, \quad 2) y = \frac{2}{x+3}, \quad 3) y = \frac{3}{x^2}, \quad 4) y = -\frac{2}{x^3}, \quad 5) y = \frac{1}{x^2-2},$$

$$6) y = \frac{2x}{1-x^2}, \quad 7) y = \frac{x+1}{x^2+1}, \quad 8) y = \frac{x^2-4}{2-x^2}, \quad 9) y = \frac{x^2+1}{x^2-3},$$

$$10) y = \frac{3}{x-2x^2}, \quad 11) y = \frac{1-2x}{x^2+3x}, \quad 12) y = \frac{x^2-5}{x^2-x}, \quad 13) y = \frac{2}{x^3+1},$$

$$14) y = \frac{x^2+3}{x^3}, \quad 15) y = \frac{x-x^3}{x^2+1}, \quad 16) y = \frac{x^3}{3-4x^2}, \quad 17) y = \frac{x}{3} - \frac{3}{x}.$$

2. Ispitati da li su sledeće funkcije parne ili neparne.

$$1) y = \sqrt{1-x^2}, \quad 2) y = \frac{x+1}{\sqrt{x}}, \quad 3) y = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}, \quad 4) y = \frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}},$$

$$5) y = \frac{\sqrt{x^2+3}}{x^3}, \quad 6) y = \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}, \quad 7) y = \frac{\sqrt{x^2-3}}{x^3}, \quad 8) y = \frac{x^3}{\sqrt{5-x^2}},$$

$$9) y = \frac{\sqrt{x^2+4}}{3x-x^3}, \quad 10) y = \frac{x^3+2x}{\sqrt{2-x^2}}, \quad 11) y = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x-x^3}, \quad 12) y = \frac{x^3}{\sqrt{x^2-2x-3}}.$$

3. Ispitati da li su sledeće funkcije parne ili neparne.

$$1) y = \frac{e^x-1}{e^x+1}, \quad 2) y = \frac{3^x+1}{3^x-1}, \quad 3) y = e^{x^2} \sin x + 3x, \quad 4) y = 2x^2 - 1 - 3 \cos x,$$

$$5) y = \sin x - x^3, \quad 6) y = \frac{\sin x}{x}, \quad 7) y = \frac{\cos x - 1}{x}, \quad 8) y = \frac{\operatorname{tg} x}{x^2}, \quad 9) y = \frac{\operatorname{ctg} x + 1}{x^3},$$

$$10) y = x^3 e^{-x^2}, \quad 11) y = x^2 e^{x^3}, \quad 12) y = x e^{\frac{2}{x^2}}, \quad 13) y = x^2 e^{\frac{1}{x}}, \quad 14) y = x e^{-\frac{1}{x^3}}.$$

4.5. Granična vrednost funkcije

Primer 1. Izračunati sledeće granične vrednosti.

$$\begin{array}{lll} 1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2-4x+3}, & 2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-\sqrt{2x}}{x^2-4}, & 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-3x+1}{2x^2+x}, \\ 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-3}{x^2+4x-1}, & 5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+3x-x^2}{1-x}, & 6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^x. \end{array}$$

Rešenje:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2-4x+3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-3} = \frac{1+1}{1-3} = -1,$$

pri čemu prva jednakost sledi iz

$$x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Leftrightarrow x=1 \vee x=3,$$

$$\begin{aligned} 2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-\sqrt{2x}}{x^2-4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-\sqrt{2x}}{x^2-4} \cdot \frac{2+\sqrt{2x}}{2+\sqrt{2x}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-2x}{(x-2)(x+2)(2+\sqrt{2x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(2-x)}{(x-2)(x+2)(2+\sqrt{2x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2(x-2)}{(x-2)(x+2)(2+\sqrt{2x})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2}{(x+2)(2+\sqrt{2x})} \\ &= \frac{-2}{(2+2)(2+\sqrt{4})} = -\frac{1}{8}, \end{aligned}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-3x+1}{2x^2+x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}} = \frac{1}{2},$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-3}{x^2+4x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0,$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+3x-x^2}{1-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x}+3-x}{\frac{1}{x}-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{x}-1}\right) \left(\frac{2}{x}+3-x\right) = (-1)(-\infty) = +\infty,$$

$$\begin{aligned} 6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x+2}{x-2} - 1\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x-2}\right)^x \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x-2}\right)^{x-2} \left(1 + \frac{4}{x-2}\right)^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{t}\right)^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{t}\right)^{\frac{4t}{4}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{4}{t}\right)^{\frac{t}{4}}\right)^4 = e^4. \blacklozenge \end{aligned}$$

1. Izračunati sledeće granične vrednosti.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{2x-1}, \quad 2) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2-2x-3}, \quad 3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-1}{3x-2}, \quad 4) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+4x+3}{x+3},$$

$$\begin{aligned}
& 5) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x^2 - x + 3}{x^2 + 1}, \quad 6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \quad 7) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{4 - x^2}, \quad 8) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x - 2x^2}{4x^2 - 1}, \\
& 9) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}, \quad 10) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 3}{2 - x}, \quad 11) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{9 - x^2}, \\
& 12) \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} \frac{x - 2x^2 + 6}{9 - 4x^2}, \quad 13) \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{x^2 - 2x + 1}{1 - x^2}, \quad 14) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 - x - 20}, \\
& 15) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 - x}, \quad 16) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^3 + 2x^2 + x + 2}, \quad 17) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 1}{2x^2 - x - 3}.
\end{aligned}$$

2. Izračunati sledeće granične vrednosti.

$$\begin{aligned}
& 1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}, \quad 2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x} + 2 - 2}, \quad 3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{3x} - 3}, \\
& 4) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3(1 - \sqrt{x - 3})}{x^2 - 16}, \quad 5) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{2(\sqrt{x + 3} - 3)}{36 - x^2}, \quad 6) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 7} - 3}{\sqrt{x} + 2 - 2}, \\
& 7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 9} - 3}{2 - \sqrt{x + 4}}, \quad 8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 3} - 2}{3 - \sqrt{x + 8}}, \quad 9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 25} - 5}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}, \\
& 10) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x^2 + 3}}{\sqrt{x^2 + 8} - 3}, \quad 11) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{8\sqrt{x} - x^2}{2 - \sqrt{x}}, \quad 12) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 27\sqrt{x}}{3 - \sqrt{x}}, \\
& 13) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1} - 1}{x^2}, \quad 14) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt{x}}, \quad 15) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{8 - x}.
\end{aligned}$$

3. Izračunati sledeće granične vrednosti.

$$\begin{aligned}
& 1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x}, \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x - 1}, \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2}{1 - 3x}, \quad 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^2}, \quad 5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - x^2}{x^2 - 1}, \\
& 6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x + 1}, \quad 7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{3x - 2x^2 + 4}, \quad 8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 1}{x^2}, \quad 9) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 3x^2 + 5}{4x^2}, \\
& 10) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x + 3}, \quad 11) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3}, \quad 12) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x}{2x^3 - x^2 + 3x - 4}, \quad 13) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 2x^2}{x^3 + 1}, \\
& 14) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + x^3 - 2}{x - x^2 + 1}, \quad 15) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x^3 + 1}, \quad 16) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x^3}{3x^3}, \quad 17) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^2 + 3}{x^2 + 3x - 4}.
\end{aligned}$$

4. Imajući u vidu da je

$$e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad \text{odnosno} \quad e = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}},$$

izračunati sledeće granične vrednosti.

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4x}\right)^x, \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3x}\right)^x, \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{2}{x}}, \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{3}{x}},$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x, \quad 6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+3}\right)^x, \quad 7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)^x, \quad 8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-3}{x^2+2}\right)^x,$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+3x-4}{x^2+x-3}\right)^x, \quad 10) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-4x+5}{x^2-2x+3}\right)^x, \quad 11) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2x+3}{x^2+2x+2}\right)^x,$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x + 3)^{\frac{1}{x-1}}, \quad 13) \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 5x + 5)^{\frac{1}{1+x}}, \quad 14) \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - x - 1)^{\frac{1}{2-x}},$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}, \quad 16) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{2}{\operatorname{ctg}^2 x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}, \quad 17) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}.$$

5. Odrediti asimptote sledećih funkcija.

$$1) y = \frac{1}{1-x}, \quad 2) y = \frac{2x}{x+1}, \quad 3) y = \frac{4-x^2}{x-1}, \quad 4) y = \frac{x^2-2x+1}{2+x},$$

$$5) y = \frac{1}{x^2}, \quad 6) y = \frac{2x}{1-x^2}, \quad 7) y = \frac{2-x^2}{x^2+1}, \quad 8) y = \frac{3-2x-x^2}{x^2-3},$$

$$9) y = \frac{x^3}{2-x}, \quad 10) y = \frac{x^3}{x^2-4}, \quad 11) y = \frac{x^3-x^2}{3-2x}, \quad 12) y = \frac{x^3+x^2}{1+2x^2},$$

$$13) y = e^{\frac{1}{x}}, \quad 14) y = xe^{\frac{1}{x}}, \quad 15) y = x^2 e^{\frac{1}{x}}, \quad 16) y = xe^{\frac{1}{x^2}}, \quad 17) y = x^2 e^{\frac{1}{x^2}},$$

$$18) y = \frac{e^x}{x}, \quad 19) y = \frac{e^x}{x-1}, \quad 20) y = \frac{x}{e^x-1}, \quad 21) y = \frac{x-1}{e^x}, \quad 22) y = \frac{e^x-1}{x-1},$$

$$23) y = \frac{e^x}{x^2}, \quad 24) y = \frac{e^x}{x^2+1}, \quad 25) y = \frac{e^x}{1-x^2}, \quad 26) y = \frac{x^2+1}{e^x}, \quad 27) y = \frac{x^2-1}{e^x-1},$$

$$28) y = x \ln x, \quad 29) y = \frac{\ln x}{x}, \quad 30) y = \frac{\ln x}{1-x}, \quad 31) y = \ln \frac{x-1}{x+1}, \quad 32) y = \frac{1+\ln x}{1-\ln x}.$$

4.6. Izvod funkcije

Primer 1. Odrediti prvi izvod sledećih funkcija.

$$1) y = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x, \quad 2) y = (1 - x - 2x^2)e^x, \quad 3) y = \frac{\sin x - 1}{\cos x}, \quad 4) y = \frac{\ln x + 1}{x}.$$

Rešenje:

$$\begin{aligned} 1) y' &= \left(\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x\right)' = \left(\frac{1}{9}x^3\right)' - \left(\frac{1}{2}x^2\right)' + (4x)' \\ &= \frac{1}{9}(x^3)' - \frac{1}{2}(x^2)' + 4(x)' = \frac{1}{9} \cdot 3x^2 - \frac{1}{2} \cdot 2x + 4 \cdot 1 \\ &= \frac{1}{3}x^2 - x + 4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) y' &= ((1 - x - 2x^2)e^x)' = (1 - x - 2x^2)'e^x + (1 - x - 2x^2)(e^x)' \\ &= (-1 - 4x)e^x + (1 - x - 2x^2)e^x = e^x(-1 - 4x + 1 - x - 2x^2) \\ &= e^x(-2x^2 - 5x) = -e^x(2x^2 + 5x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) y' &= \left(\frac{\sin x - 1}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x - 1)' \cos x - (\sin x - 1)(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{(\cos x) \cos x - (\sin x - 1)(-\sin x)}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x - \sin x}{(\cos x)^2} = \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x}, \end{aligned}$$

$$4) y' = \left(\frac{\ln x + 1}{x}\right)' = \frac{(\ln x + 1)'x - (\ln x + 1)(x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (\ln x + 1) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x - 1}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}. \blacklozenge$$

1. Odrediti prvi izvod sledećih funkcija.

$$1) y = 2 + x, \quad 2) y = 1 - 3x, \quad 3) y = x^2 + 4x, \quad 4) y = -2x^2 + 3x + 1,$$

$$5) y = -\frac{1}{4}x^2 + x - \frac{1}{2}, \quad 6) y = x^3 + 2x, \quad 7) y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x, \quad 8) y = x^4 - 2x^3,$$

$$9) y = \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 5x, \quad 10) y = 2\sqrt{x} - 3\sqrt{x^3}, \quad 11) y = 6\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{2}x\sqrt[3]{x},$$

$$12) y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}}, \quad 13) y = \frac{2x}{\sqrt[4]{x^3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3}{x^2}, \quad 14) y = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} - \frac{x}{\sqrt{x^3}} + \frac{2}{x},$$

$$15) y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^3 - 4e^x, \quad 16) y = 2e^x + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x}, \quad 17) y = \frac{x}{\sqrt{x^4}} - e^x + \frac{1}{4}x^2,$$

$$18) y = \frac{3}{x} - \ln x + 2x, \quad 19) y = \ln x + \frac{2}{\sqrt{x^3}} - x^4, \quad 20) y = \frac{1}{\sqrt{x^4}} - 2 \ln x,$$

$$21) y = \sin x - \cos x - x, \quad 22) y = \operatorname{ctg} x + x, \quad 23) y = \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x.$$

2. Odrediti prvi izvod sledećih funkcija.

$$1) y = (2 - x)(x^2 + 3x - 1), \quad 2) y = (1 + 3x - \frac{1}{2}x^2)(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4x - 2),$$

$$3) y = (\sqrt{x^3} + 1)(3 - \sqrt{x}), \quad 4) y = (\frac{1}{\sqrt{x}} - 2x - 4\sqrt{x})(\sqrt[3]{x} - 1 + \frac{3}{\sqrt{x}}),$$

$$5) y = x^3 \cos x, \quad 6) y = x^2 \sin x, \quad 7) y = (\sin x - 2x)(\cos x + 1),$$

$$8) y = x^4 e^x, \quad 9) y = (3 - 2x + x^2 - x^3)e^x, \quad 10) y = x(e^x - 1),$$

$$11) y = x^3 \ln x, \quad 12) y = (1 - 3x + x^2 - 2x^3) \ln x, \quad 13) y = x(\ln x + 1),$$

$$14) y = (x^2 + 3x - 1) \cos x, \quad 15) y = (2 + 4x - 3x^2) \sin x, \quad 16) y = \cos x \sin x - x.$$

3. Odrediti prvi izvod sledećih funkcija.

$$1) y = \frac{2}{1 + 3x}, \quad 2) y = \frac{1}{1 - 2x}, \quad 3) y = \frac{x}{x - 2}, \quad 4) y = \frac{2x}{x + 3},$$

$$5) y = \frac{1 + x}{1 + 2x}, \quad 6) y = \frac{1 - 3x}{2 + x}, \quad 7) y = \frac{2 - x}{1 - x}, \quad 8) y = \frac{1}{x^2},$$

$$9) y = \frac{2}{1 - x^2}, \quad 10) y = \frac{x}{x^2 - 2}, \quad 11) y = \frac{1 - x}{1 + x^2}, \quad 12) y = \frac{2x - 3}{3 - x^2},$$

$$13) y = \frac{2 - x^2}{1 - x^2}, \quad 14) y = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 1}, \quad 15) y = \frac{x^2 + 3}{x^2 + 2}, \quad 16) y = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 2},$$

$$17) y = \frac{e^x}{x - 1}, \quad 18) y = \frac{x}{e^x}, \quad 19) y = \frac{1 + 2x}{e^x}, \quad 20) y = \frac{1 - x}{e^x},$$

$$21) y = \frac{e^x + 1}{x}, \quad 22) y = \frac{2 + e^x}{1 + e^x}, \quad 23) y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}, \quad 24) y = \frac{3 - e^x}{1 - e^x},$$

$$25) y = \frac{\sin x}{e^x}, \quad 26) y = \frac{\cos x}{e^x}, \quad 27) y = \frac{\sin x - \cos x}{e^x}, \quad 28) y = \frac{\cos x - \sin x}{e^x - 1},$$

$$29) y = \frac{1 + \sin x}{\cos x}, \quad 30) y = \frac{1 - \cos x}{\sin x}, \quad 31) y = \frac{1 + \cos x}{\cos x}, \quad 32) y = \frac{1 - \sin x}{\sin x},$$

$$33) y = \frac{\cos x}{1 - \sin x}, \quad 34) y = \frac{\sin x}{1 - \cos x}, \quad 35) y = \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x}, \quad 36) y = \frac{\operatorname{ctg} x}{1 - \operatorname{ctg} x},$$

$$37) y = \frac{x}{\ln x}, \quad 38) y = \frac{\ln x}{x}, \quad 39) y = \frac{2 + \ln x}{\ln x}, \quad 40) y = \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x}.$$

4. Neka je $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 5x - 3$. Odrediti $f'(-2)$.
5. Neka je $f(x) = \frac{x^2-x+2}{x-1}$. Odrediti $f'(-1)$.
6. Neka je $f(x) = 3x^2 - \ln x$. Odrediti $f'(1)$.
7. Neka je $f(x) = 2x + 3 - e^x$. Odrediti $f'(0)$.
8. Neka je $f(x) = \frac{1}{\ln x}$. Odrediti $f'(e)$ i $f'(e^{-1})$.
9. Neka je $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Odrediti $f'(e)$ i $f'(e^{-1})$.
10. Neka je $f(x) = \frac{1}{e^x}$. Odrediti $f'(1)$, $f'(0)$ i $f'(-1)$.
11. Neka je $f(x) = \frac{e^x}{x}$. Odrediti $f'(1)$ i $f'(-1)$.
12. Neka je $f(x) = \frac{1-\sin x}{\cos x}$. Odrediti $f'(\frac{\pi}{6})$ i $f'(\frac{\pi}{4})$.
13. Neka je $f(x) = \frac{1-\sin x}{1+\sin x}$. Odrediti $f'(\alpha)$, gde je:
- 1) $\alpha = \frac{\pi}{6}$, 2) $\alpha = \frac{\pi}{3}$, 3) $\alpha = \frac{\pi}{2}$, 4) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$, 5) $\alpha = -\frac{\pi}{4}$, 6) $\alpha = -\frac{2\pi}{3}$.
14. Neka je $f(x) = \frac{1+\cos x}{1-\sin x}$. Odrediti $f'(\alpha)$, gde je:
- 1) $\alpha = \frac{\pi}{6}$, 2) $\alpha = \frac{\pi}{4}$, 3) $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, 4) $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, 5) $\alpha = -\frac{\pi}{3}$, 6) $\alpha = -\frac{5\pi}{6}$.
15. Neka je $f(x) = \operatorname{tg} x - x$. Odrediti $f'(\alpha)$, gde je:
- 1) $\alpha = \frac{\pi}{3}$, 2) $\alpha = \frac{2\pi}{3}$, 3) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$, 4) $\alpha = -\frac{\pi}{6}$, 5) $\alpha = -\frac{\pi}{4}$, 6) $\alpha = -\pi$.
16. Naći jednačine tangente i normale grafika funkcije:
- 1) $y = x^2 - 4x$ u njenoj tački $A(1, -3)$,
- 2) $y = x^2 + x - 2$ u njenoj tački $A(-1, -2)$,
- 3) $y = 2x^2 - 5x + 3$ u njenoj tački $A(1, 0)$,
- 4) $y = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 2$ u njenoj tački $A(-2, 3)$.
17. Naći jednačinu tangente na grafiku date funkcije u datoj tački koja pripada grafiku:
- 1) $y = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + 2$ u njenoj tački $A(-1, y)$,

2) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x + 1$ u njenoj tački $A(1, y)$,

3) $y = x - 2 \ln x$ u njenoj tački $A(1, y)$,

4) $y = e^x - 3x$ u njenoj tački $A(0, y)$,

5) $y = \cos x - \sin x$ u njenoj tački $A(\frac{\pi}{4}, y)$.

18. Odrediti jednačine tangente i normale parabole

1) $y = 1 - x^2$, 2) $y = x^2 + x$, 3) $y = 2x^2 - x - 3$, 4) $y = x - x^2 + 6$,

u tačkama preseka sa x -osom. Konstruisati parabolu, tangentu i normalu.

19. Odrediti tačke u kojima su tangente krivih

1) $y = x^3 - x^2 - 3x + 1$ i $y = 5x^2 + 6x + 1$,

2) $y = -x^3 + 3x^2 + 2x - 3$ i $y = -x^2 - x$,

3) $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + 2$ i $y = -x^2 + 5x - 4$,

4) $y = x^3 + x^2 + x + 1$ i $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 4$,

paralelne.

20. U kojoj tački parabole

1) $y = x^2 + 2x - 3$, 2) $y = 6x^2 - x - 1$, 3) $y = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 1$, 4) $y = -x^2 + 3$,

je njena tangenta paralelna x -osi.

21. Odrediti parametre m i n tako da parabola $y = x^2 + mx + n$ dodiruje pravu

1) $y = x$, 2) $y = 2x - 3$, 3) $y = -x + 1$, 4) $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$, 5) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$,

u tački $A(-1, 1)$.

22. Odrediti prvi izvod sledećih funkcija.

1) $y = (3 - 2x)^5$, 2) $y = (x^2 - 3x + 1)^7$, 3) $y = \sqrt{1 - x}$, 4) $y = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$,

5) $y = \sqrt[3]{3x - 1}$, 6) $y = \sin^3 x$, 7) $y = \cos^5 x$, 8) $y = \ln^3 x$, 9) $y = e^{-3x}$,

10) $y = e^{x^2 + 2x - 1}$, 11) $y = \sin 3x$, 12) $y = \cos(1 - x^2)$, 13) $y = \ln(x^2 + 2)$,

14) $y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3$, 15) $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$, 16) $y = \ln\left(\frac{2-x}{x+1}\right)$, 17) $y = \ln\left(\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right)$.

23. Primenom Lopitalovog pravila izračunati sledeće granične vrednosti.

$$\begin{aligned}
 &1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-x^2}{x^2-2x-3}, \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+x^2-x-1}{x^2-4x+3}, \quad 3) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-25}{\sqrt{5x}-5}, \\
 &4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x}-2}{x}, \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sin x - x}, \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}-e^{5x}}{\sin x}, \quad 7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}, \\
 &8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2-x)}{4(x-1)}, \quad 9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin 2x)}{3x}, \quad 10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\ln \sqrt{1-x}}, \quad 11) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln^3 x}{1-x}, \\
 &12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x-2^x}{x}, \quad 13) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-x^2+x-1}{4-3x+2x^2-x^3}, \quad 14) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+2x^2+3x}{x^2-2x+4}, \\
 &15) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-3}{2-x+2x^3}, \quad 16) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}}{x^2}, \quad 17) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}, \quad 18) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-\ln x}{1+\ln x}.
 \end{aligned}$$

24. Izračunati sledeće granične vrednosti.

$$\begin{aligned}
 &1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x-1} - \frac{1}{x} \right), \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right), \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\cos x-1} \right), \\
 &4) \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x, \quad 5) \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}, \quad 6) \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}, \quad 7) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} \right)^{\ln x}, \\
 &8) \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}, \quad 9) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right)^x, \quad 10) \lim_{x \rightarrow 0} (1-\sin x)^{\frac{1}{x}}, \quad 11) \lim_{x \rightarrow 1} (\ln x + 1)^{\frac{1}{x-1}}.
 \end{aligned}$$

25. Ispitati monotonost sledećih funkcija i odrediti (ako postoje) njihove ekstremne vrednosti.

$$\begin{aligned}
 &1) y = x^2 + 1, \quad 2) y = x^2 + 2x, \quad 3) y = x^2 - x, \quad 4) y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x, \\
 &5) y = x^2 + \frac{1}{2}x - 3, \quad 6) y = x^3 - 3x + 1, \quad 7) y = x^3 - \frac{1}{2}x^2, \quad 8) y = -x^3 + 3x^2, \\
 &9) y = x^3 + 12x - 1, \quad 10) y = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 3x, \quad 11) y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2, \\
 &12) y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1, \quad 13) y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x, \quad 14) y = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x, \\
 &15) y = \frac{3}{x+1}, \quad 16) y = \frac{1}{1-2x}, \quad 17) y = \frac{2+3x}{3+2x}, \quad 18) y = \frac{1+x}{2-x},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
19) y &= \frac{2x^2}{x+1}, & 20) y &= \frac{x^2+2x}{x-1}, & 21) y &= \frac{x^2-3x}{4-x}, & 22) y &= \frac{6x-x^2-9}{x-2}, \\
23) y &= \frac{2}{x+1} + 2x, & 24) y &= \frac{1}{x^2-4}, & 25) y &= \frac{x}{1-x^2}, & 26) y &= \frac{3x}{x^2+1}, \\
27) y &= \frac{4-x^2}{x^2-1}, & 28) y &= \frac{x^2+3x}{1-x^2}, & 29) y &= \frac{x^2-4x+4}{x^2+2}, & 30) y &= \frac{x^2}{x^2+4x+3}.
\end{aligned}$$

26. Ispitati monotonost sledećih funkcija i odrediti (ako postoje) njihove ekstremne vrednosti.

$$\begin{aligned}
1) y &= xe^x, & 2) y &= (1-x)e^x, & 3) y &= x^2e^x, & 4) y &= \left(-\frac{1}{2}x^2+1\right)e^x, \\
5) y &= (3x^2-2x)e^x, & 6) y &= (2+2x-x^2)e^x, & 7) y &= \left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)e^x, \\
8) y &= \frac{3}{e^x}, & 9) y &= \frac{x}{e^x}, & 10) y &= \frac{x-2}{e^x}, & 11) y &= \frac{1-2x}{e^x}, & 12) y &= \frac{x^2}{e^x}, \\
13) y &= \frac{x^2-3}{e^x}, & 14) y &= \frac{x^2+2x}{e^x}, & 15) y &= \frac{x^2+5x+1}{e^x}, & 16) y &= \frac{e^x}{x}, \\
17) y &= \frac{e^x}{x-1}, & 18) y &= \frac{e^x}{2-3x}, & 19) y &= \frac{e^x}{x^2}, & 20) y &= \frac{e^x}{x^2+1}, \\
21) y &= \frac{e^x}{3-x^2}, & 22) y &= \frac{e^x}{x^2+2x+1}, & 23) y &= \frac{e^x}{3x-x^2-2}.
\end{aligned}$$

27. Ispitati monotonost sledećih funkcija i odrediti (ako postoje) njihove ekstremne vrednosti.

$$\begin{aligned}
1) y &= \ln x + 2x, & 2) y &= \ln x - x^2, & 3) y &= 3 \ln x + \frac{1}{x}, & 4) y &= \ln x + \frac{1}{2x^2}, \\
5) y &= x \ln x, & 6) y &= x^2 \ln x, & 7) y &= (\ln x + 1)x, & 8) y &= (2 - \ln x)x, \\
9) y &= \frac{1}{\ln x}, & 10) y &= \frac{x}{\ln x}, & 11) y &= \frac{x^2}{\ln x}, & 12) y &= \frac{\ln x}{x}, & 13) y &= \frac{\ln x}{x^2}, \\
14) y &= \frac{1 - \ln x}{x}, & 15) y &= \frac{2 + \ln x}{x^2}, & 16) y &= \frac{1 - \ln x}{\ln x}, & 17) y &= \frac{\ln x}{\ln x - 2}, \\
18) y &= \ln x - \frac{1}{x}, & 19) y &= \frac{1}{x^2} + 4 \ln x, & 20) y &= \frac{1}{x-1} + 2 \ln x, & 21) y &= \frac{x-1}{x+1} - \ln x.
\end{aligned}$$

28. Odrediti drugi izvod sledećih funkcija.

$$\begin{aligned} 1) y &= x^3 - x^2 + x - 1, & 2) y &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x, & 3) y &= (x^3 - 2x^2)(1 - x), \\ 4) y &= xe^x, & 5) y &= x(\sin x - \cos x), & 6) y &= x^2 \cos x, & 7) y &= x^2 \sin x, \\ 8) y &= x^2 \ln x, & 9) y &= x^2 e^x, & 10) y &= \frac{1}{x}, & 11) y &= \frac{2}{1 - x}, & 12) y &= \frac{x - 1}{e^x}. \end{aligned}$$

29. Odrediti drugi izvod sledećih funkcija.

$$\begin{aligned} 1) y &= \sqrt{x^2 + 1}, & 2) y &= x^2 e^{-x}, & 3) y &= x e^{x^2 + x + 1}, & 4) y &= \ln^2 x, & 5) y &= \cos^2 x, \\ 6) y &= \sin^2 x, & 7) y &= \ln(x^2 + 1), & 8) y &= \ln\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right), & 9) y &= \ln\left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}\right). \end{aligned}$$

30. Odrediti n -ti izvod sledećih funkcija.

$$\begin{aligned} 1) y &= e^x, & 2) y &= \cos x, & 3) y &= \sin x, & 4) y &= \ln x, & 5) y &= \frac{1}{1 + x}, \\ 6) y &= e^{-3x}, & 7) y &= \ln(1 - x), & 8) y &= \sin(2x), & 9) y &= \cos(3x). \end{aligned}$$

31. Ispitati konveksnost i konkavnost sledećih funkcija, i odrediti (ako postoje) njihove prevojne tačke.

$$\begin{aligned} 1) y &= \frac{1}{2}x - \frac{2}{3}, & 2) y &= 2 - 3x, & 3) y &= -3x^2 + 2x, & 4) y &= x^3 - 6x^2 + 6x - 3, \\ 5) y &= \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3, & 6) y &= -x^3 + 9x - 1, & 7) y &= \frac{3}{x}, & 8) y &= \frac{2x - 1}{x}, \\ 9) y &= \frac{4 - 3x}{x}, & 10) y &= \frac{1 + x^2}{x}, & 11) y &= \frac{1 - 3x - x^2}{x}, & 12) y &= \frac{2}{x + 1}, \\ 13) y &= \frac{x}{x - 2}, & 14) y &= \frac{2 - x}{1 - x}, & 15) y &= \frac{x^2}{x + 3}, & 16) y &= \frac{x^2 - 3x}{x - 4}, \\ 17) y &= \frac{x^2 + 4x - 5}{x - 3}, & 18) y &= \frac{2}{x^2}, & 19) y &= \frac{x + 1}{x^2}, & 20) y &= \frac{1 - 2x}{x^2}, \\ 21) y &= \frac{1 + x^2}{x^2}, & 22) y &= \frac{2x - 3x^2 - 1}{x^2}, & 23) y &= \frac{1}{x^2 + 2}, & 24) y &= \frac{x}{x^2 - 4}, \\ 25) y &= \frac{2 - x}{1 - x^2}, & 26) y &= \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}, & 27) y &= \frac{x^2 + x}{x^2 + 2}, & 28) y &= \frac{(x + 1)^2}{(x + 3)^2}. \end{aligned}$$

32. Ispitati konveksnost i konkavnost sledećih funkcija, i odrediti (ako postoje) njihove prevojne tačke.

$$1) y = xe^x, \quad 2) y = (2x - 3)e^x, \quad 3) y = x^2e^x, \quad 4) y = (3 - x^2)e^x,$$

$$5) y = (x^2 - 3x)e^x, \quad 6) y = (x^2 + 3x - 4)e^x, \quad 7) y = \left(3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)e^x, \quad 8) y = x^3e^x,$$

$$9) y = (x^2 - x^3)e^x, \quad 10) y = (x - x^2 + 2x^3)e^x, \quad 11) y = (4 - 3x + 2x^2 - x^3)e^x,$$

$$12) y = \frac{x}{e^x}, \quad 13) y = \frac{1 - 2x}{e^x}, \quad 14) y = \frac{x^2}{e^x}, \quad 15) y = \frac{x^2 + 1}{e^x}, \quad 16) y = \frac{x^2 - 2x}{e^x},$$

$$17) y = \frac{2x^2 - 3x + 1}{e^x}, \quad 18) y = \frac{x^3}{e^x}, \quad 19) y = \frac{3 - 2x^3}{e^x}, \quad 20) y = \frac{x^3 - x^2 + 1}{e^x},$$

$$21) y = \frac{x^3 - x + 1}{e^x}, \quad 22) y = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{e^x}, \quad 23) y = \frac{4 - 3x + 2x^2 - x^3}{e^x}.$$

33. Ispitati konveksnost i konkavnost sledećih funkcija, i odrediti (ako postoje) njihove prevojne tačke.

$$1) y = \ln x - x, \quad 2) y = x^2 - 2 \ln x, \quad 3) y = \ln x - \frac{3}{x}, \quad 4) y = \frac{2}{x^2} - \ln x,$$

$$5) y = x \ln x, \quad 6) y = (x - 1) \ln x, \quad 7) y = (2 - 3x) \ln x, \quad 8) y = x^2 \ln x,$$

$$9) y = x^2(\ln x - 1), \quad 10) y = x^2(3 - 2 \ln x), \quad 11) y = x^3 \ln x, \quad 12) y = x^3(1 - \ln x),$$

$$13) y = \frac{1}{1 + \ln x}, \quad 14) y = \frac{x}{\ln x}, \quad 15) y = \frac{x}{1 + \ln x}, \quad 16) y = \frac{x}{\ln x - 1},$$

$$17) y = \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}, \quad 18) y = \frac{\ln x - 2}{\ln x + 1}, \quad 19) y = \frac{\ln x + 1}{\ln x}, \quad 20) y = \frac{\ln x}{\ln x + 1},$$

$$21) y = \frac{\ln x}{x}, \quad 22) y = \frac{\ln x - 1}{x}, \quad 23) y = \frac{\ln x}{x^2}, \quad 24) y = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

4.7. Ispitivanje funkcije i crtanje grafika funkcije

Primer 1. Ispitati sledeće funkcije i nacrtati njihove grafike.

$$1) y = \frac{x}{x^2 + 1}, \quad 2) y = \frac{x^2 + 1}{x}, \quad 3) y = \frac{e^x}{x}, \quad 4) y = \frac{1 + 2\ln x}{x}.$$

Rešenje:

$$1) y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

1. Domen funkcije

$$D_y = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 \neq 0\} = \mathbb{R}$$

2. Nule funkcije i znak funkcije

* Nule funkcije

$$y = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x^2 + 1} = 0 \Leftrightarrow x = 0. \text{ Dakle, tačka preseka sa } x\text{-osom je } A(0, 0).$$

* Znak funkcije

	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$-$	$+$	
$x^2 + 1$	$+$	$+$	
y	$-$	$+$	

3. Parnost i neparnost funkcije

Domen date funkcije je simetričan u odnosu na 0.

Iz

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 + 1} = -\frac{x}{x^2 + 1} = -f(x)$$

zaključujemo da je data funkcija *neparna*.

4. Asimptote funkcije

* Vertikalne asimptote funkcije

Data funkcija nema vertikalne asimptote jer je $D_y = \mathbb{R}$.

* Horizontalne asimptote funkcije

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

Dakle, prava $y = 0$ je horizontalna asimptota date funkcije kada $x \rightarrow \pm\infty$.

Napomena. Pošto je funkcija $y = \frac{x}{x^2+1} > 0$ za $x \in (0, +\infty)$ grafik ove funkcije se približava pravoj $y = 0$, kada $x \rightarrow +\infty$, sa pozitivne tj. gornje strane. Takođe, pošto je funkcija $y = \frac{x}{x^2+1} < 0$ za $x \in (-\infty, 0)$ grafik ove funkcije se približava pravoj $y = 0$, kada $x \rightarrow -\infty$, sa negativne tj. donje strane.

* Kose asimptote funkcije

Data funkcija nema kosu asimptotu ni kada $x \rightarrow +\infty$ ni kada $x \rightarrow -\infty$ jer i u jednom i u drugom slučaju ima horizontalnu asimptotu ($y = 0$).

5. Monotonost funkcije

$$y' = \frac{x' \cdot (x^2+1) - x \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{1 \cdot (x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

Iz

	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$1+x$	−	+	+	
$1-x$	+	+	−	
$(x^2+1)^2$	+	+	+	
y'	−	+	−	
y	↘	↗	↘	

sledi da su ekstremne tačke date funkcije: $M_{min}(-1, -\frac{1}{2})$ i $N_{max}(1, \frac{1}{2})$.

6. Konveksnost i konkavnost funkcije

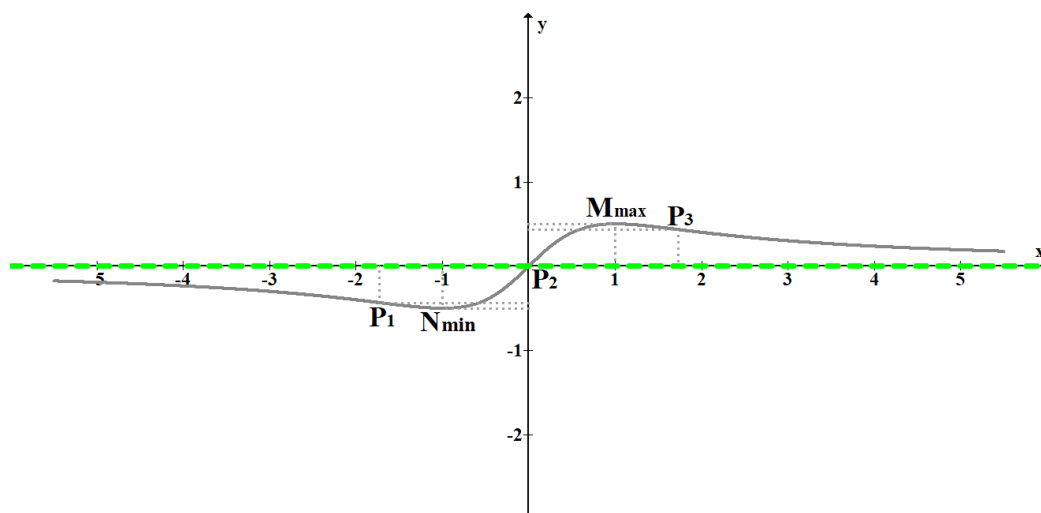
$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(1-x^2)' \cdot (x^2+1)^2 - (1-x^2) \cdot ((x^2+1)^2)'}{(x^2+1)^4} = \frac{-2x \cdot (x^2+1)^2 - (1-x^2) \cdot (2(x^2+1)2x)}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{-2x(x^2+1)(x^2+1+2(1-x^2))}{(x^2+1)^4} = \frac{-2x(3-x^2)}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

Iz

	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$-2x$	+	+	−	−	
$\sqrt{3}-x$	+	+	+	−	
$\sqrt{3}+x$	−	+	+	+	
$(x^2+1)^3$	+	+	+	+	
y''	−	+	−	+	
y	∩	∪	∩	∪	

sledi da su prevojne tačke date funkcije: $P_1(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4})$, $P_2(0, 0)$ i $P_3(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4})$.

7. Grafik funkcije



2) $y = \frac{x^2+1}{x}$

1. Domen funkcije

$$D_y = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

2. Nule funkcije i znak funkcije

✱ Nule funkcije

$$y = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$$

što nije moguće jer je $x^2 \geq 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$. Prema tome, data funkcija nema nula tj. data funkcija ne seče x -osu.

✱ Znak funkcije

	$-\infty$	0	$+\infty$
$x^2 + 1$	+	+	
x	-	+	
y	-	+	

3. Parnost i neparnost funkcije

Domen date funkcije je simetričan u odnosu na 0.

Iz

$$f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{-x} = -\frac{x^2+1}{x} = -f(x)$$

zaključujemo da je data funkcija *neparna*.

4. Asimptote funkcije

✱ Vertikalne asimptote funkcije

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{x^2+1}{x} = \frac{1}{0} = \pm\infty$$

Dakle, prava $x = 0$ je vertikalna asimptota date funkcije (i sa leve i sa desne strane).

Napomena. U prvom slučaju tj. kada $x \rightarrow 0^+$ rešenje je $+\infty$ jer je funkcija $y = \frac{x^2+1}{x} > 0$ za $x > 0$. Analogno, kada $x \rightarrow 0^-$ rešenje je $-\infty$ jer je funkcija $y = \frac{x^2+1}{x} < 0$ za $x < 0$.

✱ Horizontalne asimptote funkcije

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+1}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x + \frac{1}{x} \right) = \pm\infty$$

Dakle, data funkcija nema horizontalnu asimptotu ni kada $x \rightarrow +\infty$ ni kada $x \rightarrow -\infty$.

✱ Kose asimptote funkcije

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Dakle, prava $y = x$ je kosa asimptota date funkcije kada $x \rightarrow \pm\infty$.

5. Monotonost funkcije

$$y' = \frac{(x^2+1)' \cdot x - (x^2+1) \cdot x'}{x^2} = \frac{2x \cdot x - (x^2+1) \cdot 1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$

Iz

	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$	
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$	
x^2	$+$	$+$	$+$	$+$	
y'	$+$	$-$	$-$	$+$	
y	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

sledi da su ekstremne tačke date funkcije: $M_{\max}(-1, -2)$ i $N_{\min}(1, 2)$.

6. Konveksnost i konkavnost funkcije

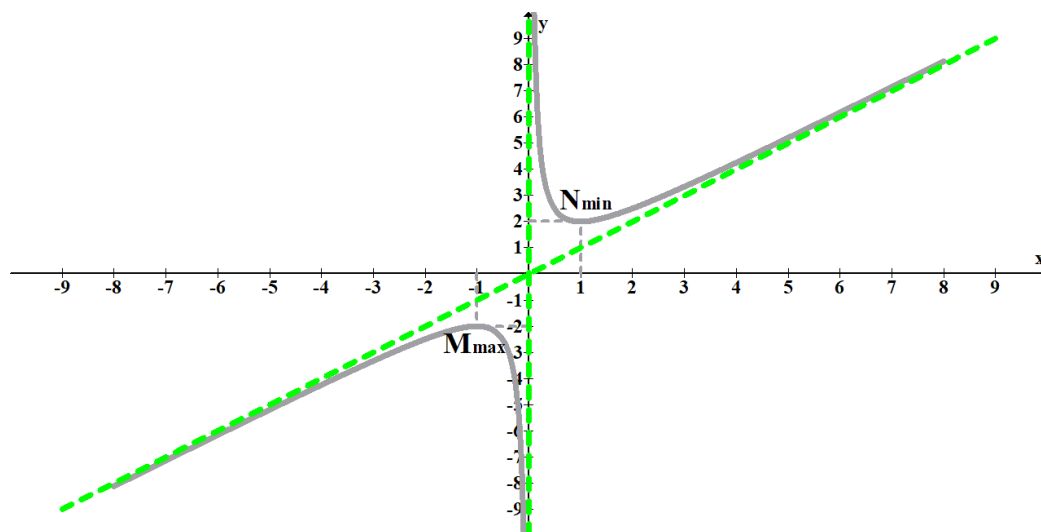
$$y'' = \frac{(x^2-1)' \cdot x^2 - (x^2-1) \cdot (x^2)'}{x^4} = \frac{2x \cdot x^2 - (x^2-1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2x(x^2 - x^2 + 1)}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

Iz

	$-\infty$	0	$+\infty$
2	+	+	
x^2	+	+	
x	-	+	
y''	-	+	
y	$\cap$	$\cup$	

sledi da data funkcija nema prevojnih tačaka ($x = 0 \notin D_y$).

7. Grafik funkcije



3) $y = \frac{e^x}{x}$

1. Domen funkcije

$$D_y = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

2. Nule funkcije i znak funkcije

✱ Nule funkcije

$$y = 0 \Leftrightarrow \frac{e^x}{x} = 0 \Leftrightarrow e^x = 0$$

što nije moguće jer je $e^x > 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$. Prema tome, data funkcija nema nula tj. data funkcija ne seče x -osu.

✱ Znak funkcije

	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x	+	+	+
x	-	-	+
y	-	-	+

3. Parnost i neparnost funkcije

Domen date funkcije je simetričan u odnosu na 0.

Iz

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{-x} = -\frac{\frac{1}{e^x}}{x} = -\frac{1}{xe^x} \neq \frac{f(x)}{-f(x)},$$

zaključujemo da data funkcija *nije ni parna ni neparna*.

4. Asimptote funkcije

✱ Vertikalne asimptote funkcije

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{e^x}{x} = \frac{1}{0} = \pm\infty$$

Dakle, prava $x = 0$ je vertikalna asimptota date funkcije (i sa leve i sa desne strane).

Napomena. U prvom slučaju tj. kada $x \rightarrow 0^+$ rešenje je $+\infty$ jer je funkcija $y = \frac{e^x}{x} > 0$ za $x > 0$. Analogno, kada $x \rightarrow 0^-$ rešenje je $-\infty$ jer je funkcija $y = \frac{e^x}{x} < 0$ za $x < 0$.

✱ Horizontalne asimptote funkcije

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{\text{Lopital}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

Dakle, prava $y = 0$ je horizontalna asimptota date funkcije kada $x \rightarrow -\infty$.

Napomena. Pošto je funkcija $y = \frac{e^x}{x} < 0$ za $x \in (-\infty, 0)$ grafik ove funkcije se približava pravoj $y = 0$, kada $x \rightarrow -\infty$, sa negativne tj. donje strane.

✱ Kose asimptote funkcije

Data funkcija nema kosu asimptotu kada $x \rightarrow -\infty$ jer ima horizontalnu asimptotu ($y = 0$) kada $x \rightarrow -\infty$.

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} \stackrel{\text{Lopital}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} \stackrel{\text{Lopital}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

Data funkcija nema kosu asimptotu ni kada $x \rightarrow +\infty$.

5. Monotonost funkcije

$$y' = \frac{(e^x)' \cdot x - (e^x) \cdot x'}{x^2} = \frac{e^x \cdot x - e^x \cdot 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

Iz

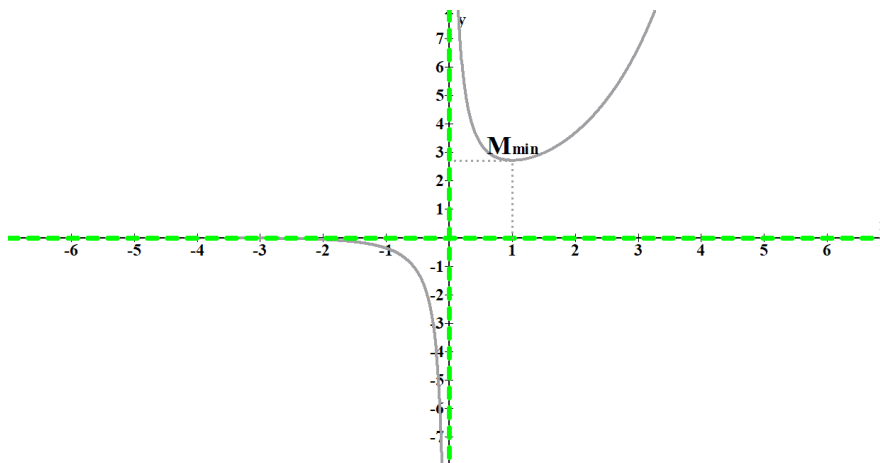
	$-\infty$	0	1	$+\infty$
e^x	+	+	+	
$x-1$	-	-	+	
x^2	+	+	+	
y'	-	-	+	
y	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

sledi da je ekstremna tačka date funkcije: $M_{\min}(1, e)$.6. Konveksnost i konkavnost funkcije

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(e^x(x-1))' \cdot x^2 - (e^x(x-1)) \cdot (x^2)'}{x^4} = \frac{xe^x \cdot x^2 - (e^x(x-1)) \cdot 2x}{x^4} \\ &= \frac{xe^x(x^2 - 2x + 2)}{x^4} = \frac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3} \end{aligned}$$

Iz

	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x	+	+	
$x^2 - 2x + 2$	+	+	
x^2	+	+	
x	-	+	
y''	-	+	
y	$\cap$	$\cup$	

sledi da data funkcija nema prevojnih tačaka ($x = 0 \notin D_y$).7. Grafik funkcije

4) $y = \frac{1+2\ln x}{x}$

1. Domen funkcije

$$D_y = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \wedge x \neq 0\} = (0, +\infty)$$

2. Nule funkcije i znak funkcije

* Nule funkcije

$$y = 0 \Leftrightarrow \frac{1+2\ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}.$$

Dakle, tačka preseka sa x -osom je $A(\frac{1}{\sqrt{e}}, 0)$.

* Znak funkcije

	0	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$+\infty$
x	+	+	
$1 + 2\ln x$	-	+	
y	-	+	

3. Parnost i neparnost funkcije

Domen date funkcije nije simetričan u odnosu na 0 na osnovu čega zaključujemo da data funkcija *nije ni parna ni neparna*.

4. Asimptote funkcije

* Vertikalne asimptote funkcije

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + 2\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + 2\ln x) \cdot \frac{1}{x} = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$$

Dakle, prava $x = 0$ je vertikalna asimptota date funkcije (sa desne strane).

* Horizontalne asimptote funkcije

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2\ln x}{x^2} \stackrel{\text{Lopital}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Dakle, prava $y = 0$ je horizontalna asimptota date funkcije kada $x \rightarrow +\infty$.

Napomena. Pošto je funkcija $y = \frac{1+2\ln x}{x^2} > 0$ za $x \in (\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty)$ grafik ove funkcije se približava pravoj $y = 0$, kada $x \rightarrow +\infty$, sa pozitivne tj. gornje strane.

* Kose asimptote funkcije

Data funkcija nema kosu asimptotu kada $x \rightarrow +\infty$ jer ima horizontalnu asimptotu ($y = 0$) kada $x \rightarrow +\infty$.

5. Monotonost funkcije

$$y' = \frac{(1+2\ln x)' \cdot x - (1+2\ln x) \cdot x'}{x^2} = \frac{\frac{2}{x} \cdot x - (1+2\ln x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1-2\ln x}{x^2}$$

Iz

	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$1-2\ln x$	+	-	
x^2	+	+	
y'	+	-	
y	$\nearrow$	$\searrow$	

sledi da je ekstremna tačka date funkcije: $M_{\max}(\sqrt{e}, \frac{2}{\sqrt{e}})$.

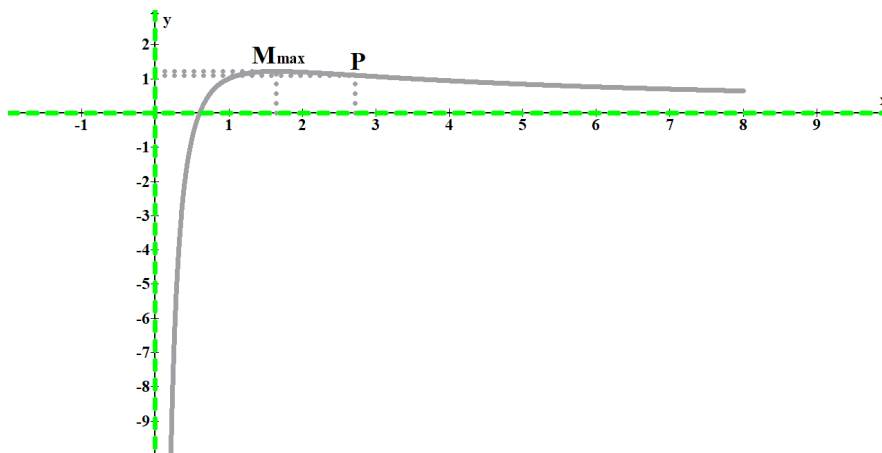
6. Konveksnost i konkavnost funkcije

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(1-2\ln x)' \cdot x^2 - (1-2\ln x) \cdot (x^2)'}{x^4} = \frac{-\frac{2}{x} \cdot x^2 - (1-2\ln x) \cdot 2x}{x^4} \\ &= \frac{-2x - (1-2\ln x)2x}{x^4} = \frac{-2x(1+1-2\ln x)}{x^4} = \frac{-2(2-2\ln x)}{x^3} = \frac{-4(1-\ln x)}{x^3} \end{aligned}$$

Iz

	0	e	$+\infty$
-4	-	-	
$1-\ln x$	+	-	
x^3	+	+	
y''	-	+	
y	$\cap$	$\cup$	

sledi da je prevojna tačka date funkcije: $P(e, \frac{3}{e})$.

7. Grafik funkcije

1. Ispitati funkciju i nacrtati njen grafik.

$$\begin{aligned} 1) y = \frac{2}{3}x^2, \quad 2) y = -\frac{1}{2}x^2, \quad 3) y = x^2 + 1, \quad 4) y = 4 - x^2, \quad 5) y = x^2 - 3, \\ 6) y = x^2 + 4x, \quad 7) y = -2x^2 + x, \quad 8) y = 2x^2 - 3x, \quad 9) y = -x^2 - 2x, \\ 10) y = x^2 + 3x + 2, \quad 11) y = -x^2 - 3x + 4, \quad 12) y = x^2 + 2x + 2, \quad 13) y = -x^2 + x - 5. \end{aligned}$$

2. Ispitati funkciju i nacrtati njen grafik.

$$\begin{aligned} 1) y = x^3 - 9x, \quad 2) y = x^3 + 3x, \quad 3) y = x^3 - 3x + 2, \quad 4) y = \frac{1}{3}x^3 - 4x - \frac{11}{3}, \\ 5) y = x^3 - 3x^2, \quad 6) y = x^3 + x^2, \quad 7) y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2, \quad 8) y = x^3 + 2x^2 + x, \\ 9) y = x^3 - 3x^2 - 9x, \quad 10) y = x^3 + 2x^2 - 8x, \quad 11) y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1. \end{aligned}$$

3. Ispitati funkciju i nacrtati njen grafik.

$$\begin{aligned} 1) y = \frac{2}{x}, \quad 2) y = \frac{1}{1-2x}, \quad 3) y = \frac{3-2x}{1+x}, \quad 4) y = \frac{x^2+2}{x-2}, \quad 5) y = \frac{3x-x^2}{x-4}, \\ 6) y = \frac{x^2-8x+16}{x-3}, \quad 7) y = \frac{5+4x-x^2}{x+3}, \quad 8) y = \frac{1}{4-x^2}, \quad 9) y = \frac{2x}{x^2-1}, \\ 10) y = \frac{x}{x^2+3}, \quad 11) y = \frac{x^2}{x^2-3}, \quad 12) y = \frac{x^2-4}{1-x^2}, \quad 13) y = \frac{x^2}{(x+1)^2}, \quad 14) y = \frac{2x^3}{x^2-4}. \end{aligned}$$

4. Ispitati funkciju i nacrtati njen grafik.

$$\begin{aligned} 1) y = xe^x, \quad 2) y = (2-x)e^x, \quad 3) y = x^2e^{-x}, \quad 4) y = (1-x^2)e^x, \quad 5) y = (x^2+1)^2e^{-x}, \\ 6) y = \frac{1}{e^x}, \quad 7) y = \frac{x}{e^x}, \quad 8) y = \frac{x+1}{e^x}, \quad 9) y = \frac{x^2}{e^x}, \quad 10) y = \frac{x^2-1}{e^x}, \quad 11) y = \frac{(2-x^2)^2}{e^x}, \\ 12) y = xe^{\frac{1}{x}}, \quad 13) y = xe^{\frac{2}{x}}, \quad 14) y = (x-1)e^{\frac{1}{x}}, \quad 15) y = x^2e^{\frac{1}{x}}, \quad 16) y = (x^2-x)e^{\frac{1}{x}}, \\ 17) y = \frac{e^x}{x}, \quad 18) y = \frac{e^x}{x^2}, \quad 19) y = \frac{e^x}{x^3}, \quad 20) y = \frac{e^x}{x-1}, \quad 21) y = \frac{e^x}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

5. Ispitati funkciju i nacrtati njen grafik.

$$1) y = x \ln x, \quad 2) y = x^2 \ln x, \quad 3) y = x(\ln x - 1), \quad 4) y = x^2(2 - \ln x),$$

$$\begin{aligned}
& 5) y = \ln(x-1), \quad 6) y = \ln(2-x), \quad 7) y = \ln(1-x^2), \quad 8) y = \ln(x^2-4), \\
& 9) y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad 10) y = \ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right), \quad 11) y = x \ln 2x, \quad 12) y = x \ln^2 x, \\
& 13) y = \frac{\ln x}{x}, \quad 14) y = \frac{\ln x - 1}{x}, \quad 15) y = \frac{1}{\ln x}, \quad 16) y = \frac{x}{\ln x}, \quad 17) y = \frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}.
\end{aligned}$$

4.8. Integrali

4.8.1. Neodređeni integrali

Primer 1. Odrediti sledeće integrale.

$$1) \int (x^3 + 4x^2 - 3x + 2) dx, \quad 2) \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx, \quad 3) \int \frac{x+2}{x^2-x} dx, \quad 4) \int (2-x)e^x dx.$$

Rešenje:

$$\begin{aligned}
1) \int (x^3 + 4x^2 - 3x + 2) dx &= \int x^3 dx + 4 \int x^2 dx - 3 \int x dx + 2 \int dx \\
&= \frac{x^4}{4} + 4 \cdot \frac{x^3}{3} - 3 \cdot \frac{x^2}{2} + 2 \cdot x + C \\
&= \frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x + C,
\end{aligned}$$

2) Primenimo *smenu*.

$$t = \sin x \quad \text{tj.} \quad dt = \cos x dx \quad (18)$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx \stackrel{(18)}{=} \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2} dt = \frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\sin x} + C,$$

3) Iz

$$\frac{x+2}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)} = \frac{(A+B)x-A}{x(x-1)}$$

sledi

$$\begin{aligned}
A + B &= 1 \\
-A &= 2
\end{aligned}$$

Iz prethodnog sistema dobijamo da je $A = -2$ i $B = 3$.

Prema tome,

$$\frac{x+2}{x(x-1)} = -\frac{2}{x} + \frac{3}{x-1}. \quad (19)$$

Dakle,

$$\begin{aligned}\int \frac{x+2}{x^2-x} dx &\stackrel{(19)}{=} -\int \frac{2}{x} dx + \int \frac{3}{x-1} dx = -2 \int \frac{1}{x} dx + 3 \int \frac{1}{x-1} dx \\ &= -2 \ln |x| + 3 \ln |x-1| + C,\end{aligned}$$

4) Primenimo *parcijalnu integraciju*.

$$\begin{array}{ll} u = 2-x & du = -dx \\ dv = e^x dx & \text{tj.} \quad v = e^x \end{array} \quad (20)$$

$$\int (2-x)e^x dx \stackrel{(20)}{=} (2-x)e^x + \int e^x dx = (2-x)e^x + e^x + C = (3-x)e^x + C. \blacklozenge$$

1. Odrediti sledeće integrale.

$$\begin{aligned}1) \int 4x dx, \quad 2) \int x^3 dx, \quad 3) \int \frac{\sqrt{x}}{3} dx, \quad 4) \int \sqrt[3]{x^2} dx, \quad 5) \int x\sqrt{x} dx, \\ 6) \int \sqrt{\sqrt{x}} dx, \quad 7) \int \frac{1}{x^2} dx, \quad 8) \int \frac{2}{\sqrt{x}} dx, \quad 9) \int \frac{3x}{\sqrt[3]{x}} dx, \quad 10) \int \frac{\sqrt{x}}{x^2} dx, \\ 11) \int 5 \sin x dx, \quad 12) \int 4e^x dx, \quad 13) \int 2^x dx, \quad 14) \int \frac{2}{\cos^2 x} dx, \quad 15) \int \frac{3}{\sin^2 x} dx.\end{aligned}$$

2. Odrediti sledeće integrale.

$$\begin{aligned}1) \int \left(\frac{3}{2}\sqrt{x} + 2x - 3x^2\right) dx, \quad 2) \int \left(4\sqrt[3]{x} + \frac{3}{x^2} - 2\right) dx, \quad 3) \int \left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}} + x\right) dx, \\ 4) \int \frac{x^3 - 2\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x}}{x^2} dx, \quad 5) \int \frac{x^3 - 3x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx, \quad 6) \int \frac{x^2 - 2x + 3\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} dx, \\ 7) \int \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+1)}{2x} dx, \quad 8) \int \frac{(x-3)(1+x)}{3x^2} dx, \quad 9) \int \frac{(x^2-3)(x^2+1)}{2x^3} dx, \\ 10) \int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \cos x - 2e^x\right) dx, \quad 11) \int \left(\frac{3}{\sqrt{x^3}} - \sin x + e^x\right) dx, \quad 12) \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx, \\ 13) \int \frac{1-x}{1+\sqrt{x}} dx, \quad 14) \int \frac{x-9}{\sqrt{x}+3} dx, \quad 15) \int \frac{2x-8}{\sqrt{x}-2} dx, \quad 16) \int \frac{8x^2-2}{2x+1} dx.\end{aligned}$$

3. Odrediti sledeće integrale.

$$1) \int (5-3x)^8 dx, \quad 2) \int (x+3)^{\frac{2}{3}} dx, \quad 3) \int (2-x^2)^6 x dx, \quad 4) \int (4+x^4)^5 x^3 dx,$$

$$\begin{aligned}
& 5) \int x e^{x^2} dx, \quad 6) \int \frac{1}{3} x e^{-2x^2} dx, \quad 7) \int 2x^2 e^{-x^3} dx, \quad 8) \int (2x+3) e^{x^2+3x} dx, \\
& 9) \int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx, \quad 10) \int \frac{2}{x^3} e^{\frac{2}{x^2}} dx, \quad 11) \int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} dx, \quad 12) \int \frac{3 \ln^2 x}{x} dx, \\
& 13) \int \frac{\ln^3 x}{x} dx, \quad 14) \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx, \quad 15) \int x \sin(x^2-1) dx, \quad 16) \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx, \\
& 17) \int \frac{x}{\sin^2 x^2} dx, \quad 18) \int \frac{x^2}{\cos^2 2x^3} dx, \quad 19) \int e^{\sin x} \cos x dx, \quad 20) \int 2^{\cos x} \sin x dx.
\end{aligned}$$

4. Odrediti sledeće integrale.

$$\begin{aligned}
& 1) \int \frac{1}{1-3x} dx, \quad 2) \int \frac{x}{2+3x^2} dx, \quad 3) \int \frac{x^2}{2+x^3} dx, \quad 4) \int \frac{x^2}{(1-2x^3)^2} dx, \\
& 5) \int \frac{2}{\sqrt[4]{4x-3}} dx, \quad 6) \int \frac{x}{\sqrt{1-2x^2}} dx, \quad 7) \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{3+2x^3}} dx, \quad 8) \int \frac{2x+3}{x^2+3x-1} dx, \\
& 9) \int \frac{1-2x}{1+3x-3x^2} dx, \quad 10) \int \frac{3x-1}{\sqrt{3x^2-2x+1}} dx, \quad 11) \int \frac{\sqrt[3]{1-\ln x}}{x} dx, \quad 12) \int \frac{1}{x \ln x} dx, \\
& 13) \int \frac{1}{x(2+\ln x)} dx, \quad 14) \int \frac{\sin x}{1-\cos x} dx, \quad 15) \int \frac{\cos x}{\sqrt{1+2 \sin x}} dx, \quad 16) \int \frac{\sin x}{\sqrt[4]{1+\cos x}} dx.
\end{aligned}$$

5. Odrediti sledeće integrale.

$$\begin{aligned}
& 1) \int \frac{1}{x^2-3x+2} dx, \quad 2) \int \frac{1}{x^2-5x+6} dx, \quad 3) \int \frac{1}{x^2-7x+10} dx, \\
& 4) \int \frac{x+1}{x^2-x} dx, \quad 5) \int \frac{2x-1}{x^2+x} dx, \quad 6) \int \frac{x+2}{x^2-2x} dx, \quad 7) \int \frac{x-1}{x-3x^2} dx, \\
& 8) \int \frac{x+1}{x^2+2x-8} dx, \quad 9) \int \frac{3x-11}{x^2+2x-3} dx, \quad 10) \int \frac{2x+7}{x^2-x-2} dx, \\
& 11) \int \frac{4-x}{x^3-4x} dx, \quad 12) \int \frac{x+6}{x^3-9x} dx, \quad 13) \int \frac{3x-4}{x^3-16x} dx, \quad 14) \int \frac{4+x-2x^2}{x^3+x^2-2x} dx.
\end{aligned}$$

6. Odrediti sledeće integrale.

$$\begin{aligned}
 &1) \int \frac{x^2}{x+1} dx, \quad 2) \int \frac{x^2}{x-2} dx, \quad 3) \int \frac{x^2-2}{x-1} dx, \quad 4) \int \frac{3-2x^2}{x+1} dx, \\
 &5) \int \frac{2-3x^2}{x-1} dx, \quad 6) \int \frac{x^3}{x-1} dx, \quad 7) \int \frac{x^3}{x+2} dx, \quad 8) \int \frac{1-x^3}{x+1} dx, \\
 &9) \int \frac{x^3-4x+3}{x-2} dx, \quad 10) \int \frac{x^3+x^2}{x-1} dx, \quad 11) \int \frac{x^3+3x^2-2x-1}{x+1} dx, \\
 &12) \int \frac{x^3}{x^2-1} dx, \quad 13) \int \frac{x^3+2}{1-x^2} dx, \quad 14) \int \frac{x^3-2}{x^2+x} dx, \quad 15) \int \frac{x^3-2x+2}{x^2-x} dx, \\
 &16) \int \frac{2x^3-x^2+x-2}{x^2+x} dx, \quad 17) \int \frac{x^3+1}{x^2-x-6} dx, \quad 18) \int \frac{2x^3-3x-1}{x^2-x-2} dx, \\
 &19) \int \frac{x^3+x^2-3}{x^2-2x-3} dx, \quad 20) \int \frac{2x^3-3x-1}{x^2-x-2} dx, \quad 21) \int \frac{2x^3+2x^2-3x+2}{x^2+3x-4} dx.
 \end{aligned}$$

7. Odrediti sledeće integrale.

$$\begin{aligned}
 &1) \int \ln x dx, \quad 2) \int x \ln x dx, \quad 3) \int x e^x dx, \quad 4) \int x \cos x dx, \\
 &5) \int x \sin x dx, \quad 6) \int \frac{\ln x}{x^2} dx, \quad 7) \int \frac{\ln x}{x^3} dx, \quad 8) \int x^2 \ln x dx, \\
 &9) \int x^2 e^x dx, \quad 10) \int x^2 \cos x dx, \quad 11) \int x^2 \sin x dx, \quad 12) \int (2x-1) \ln x dx, \\
 &13) \int (1+x) e^x dx, \quad 14) \int (1-2x) \cos x dx, \quad 15) \int (2+3x) \sin x dx, \\
 &16) \int (x^2+1) \ln x dx, \quad 17) \int \ln^2 x dx, \quad 18) \int (3x^2-1) e^x dx, \quad 19) \int (1-x^2) \cos x dx, \\
 &20) \int (2+x^2) \sin x dx, \quad 21) \int e^x \cos x dx, \quad 22) \int e^x \sin x dx, \quad 23) \int e^{\sqrt{x}} dx.
 \end{aligned}$$

4.8.2. Određeni integrali

Primer 1. Izračunati sledeće integrale.

$$1) \int_{-1}^2 (x^2 + 4x - 2) dx, \quad 2) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \sin x dx, \quad 3) \int_e^{e^2} \ln x dx.$$

Rešenje:

$$\begin{aligned} 1) \int_{-1}^2 (x^2 - 4x + 2) dx &= \int_{-1}^2 x^2 dx - 4 \int_{-1}^2 x dx + 2 \int_{-1}^2 dx \\ &= \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-1}^2 - 4 \left. \frac{x^2}{2} \right|_{-1}^2 + 2x \Big|_{-1}^2 \\ &= \frac{1}{3}(2^3 - (-1)^3) - 2(2^2 - (-1)^2) + 2(2 - (-1)) \\ &= \frac{1}{3}(8 + 1) - 2(4 - 1) + 2(2 + 1) = 3 - 6 + 6 = 3, \end{aligned}$$

2) Primenimo *smenu*.

$$t = \cos x \quad \text{tj.} \quad dt = -\sin x dx \quad (21)$$

Na osnovu (21) dobijamo:

$$\begin{aligned} \text{Ako je } x = \frac{\pi}{6}, \text{ tada je } t &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{Ako je } x = \frac{\pi}{4}, \text{ tada je } t &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \quad (22)$$

Prema tome,

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x \sin x dx &\stackrel{(21),(22)}{=} - \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t^2 dt = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} t^2 dt = \left. \frac{t^3}{3} \right|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3} \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{2\sqrt{2}}{8} \right) = \frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{24}, \end{aligned}$$

3) Primenimo *parcijalnu integraciju*.

$$\begin{aligned} u &= \ln x & du &= \frac{1}{x} dx \\ dv &= dx & \text{tj.} & & v &= x \end{aligned} \quad (23)$$

Prema tome,

$$\begin{aligned} \int_e^{e^2} \ln x dx &\stackrel{(23)}{=} x \ln x \Big|_e^{e^2} - \int_e^{e^2} x \frac{1}{x} dx = x \ln x \Big|_e^{e^2} - \int_e^{e^2} dx = x \ln x \Big|_e^{e^2} - x \Big|_e^{e^2} \\ &= x(\ln x - 1) \Big|_e^{e^2} = e^2(\ln e^2 - 1) - e(\ln e - 1) = e^2(2 - 1) - e(1 - 1) \\ &= e^2. \blacklozenge \end{aligned}$$

1. Izračunati sledeće integrale.

$$\begin{aligned}
 &1) \int_2^5 2 \, dx, \quad 2) \int_{-2}^{-1} \frac{1}{3} \, dx, \quad 3) \int_1^2 \frac{x}{2} \, dx, \quad 4) \int_{-1}^1 2x^2 \, dx, \quad 5) \int_1^4 \sqrt{x} \, dx, \\
 &6) \int_0^8 \sqrt[3]{x} \, dx, \quad 7) \int_0^4 \sqrt{x^3} \, dx, \quad 8) \int_2^3 x^2 \sqrt{x} \, dx, \quad 9) \int_2^3 \frac{3}{x^2} \, dx, \quad 10) \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx, \\
 &11) \int_4^9 \frac{\sqrt[4]{x}}{x} \, dx, \quad 12) \int_{\frac{1}{9}}^{\frac{1}{4}} \frac{x^2}{2\sqrt{x}} \, dx, \quad 13) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x \, dx, \quad 15) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{2} \, dx, \quad 16) \int_2^3 \frac{1}{x} \, dx, \\
 &17) \int_{-1}^1 3e^x \, dx, \quad 18) \int_1^2 \frac{3x}{2} \, dx, \quad 19) \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x} \, dx, \quad 20) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{6}} \frac{4}{\cos^2 x} \, dx.
 \end{aligned}$$

2. Izračunati sledeće integrale.

$$\begin{aligned}
 &1) \int_1^2 (5 - 4x + 3x^2) \, dx, \quad 2) \int_{-1}^1 \left(2 - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4}\right) \, dx, \quad 3) \int_0^1 \left(\frac{3}{2}\sqrt{x} - 2x + 3x^2\right) \, dx, \\
 &4) \int_0^1 \frac{1-x}{1+\sqrt{x}} \, dx, \quad 5) \int_4^9 \frac{3-3x}{1-\sqrt{x}} \, dx, \quad 6) \int_{-3}^2 \frac{4x^2-1}{2x+1} \, dx, \quad 7) \int_{-2}^{-1} \frac{1-25x^2}{5x-1} \, dx, \\
 &8) \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (2\cos x - \sin x) \, dx, \quad 9) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{2}{\cos^2 x}\right) \, dx, \quad 10) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} \, dx, \\
 &11) \int_{-1}^1 (x + e^x) \, dx, \quad 12) \int_0^1 (e^x - 3x^2) \, dx, \quad 13) \int_1^2 \left(x^3 - \frac{e^x}{4}\right) \, dx, \quad 14) \int_{-1}^0 \left(\frac{e^x}{3} - x^2\right) \, dx.
 \end{aligned}$$

3. Izračunati sledeće integrale.

$$\begin{aligned}
 &1) \int_0^1 (1-2x)^5 \, dx, \quad 2) \int_0^3 (x+1)^{\frac{3}{2}} \, dx, \quad 3) \int_0^1 (2-x^2)^7 x \, dx, \quad 4) \int_0^1 (x^3-1)^4 x^2 \, dx, \\
 &5) \int_{-2}^{-1} \frac{e^{2x+1}}{3} \, dx, \quad 6) \int_0^{\sqrt{2}} x e^{x^2} \, dx, \quad 7) \int_1^{\sqrt{3}} 3x e^{2x^2} \, dx, \quad 8) \int_{-1}^0 \frac{3}{2} x^2 e^{x^3} \, dx,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 9) \int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx, \quad 10) \int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^3} e^{\frac{2}{x^2}} dx, \quad 11) \int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x^3}} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} dx, \quad 12) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x e^{\sin x} dx, \\
& 13) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx, \quad 14) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx, \quad 15) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin^2 x dx, \quad 16) \int_{\sqrt{\frac{\pi}{4}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} x \cos x^2 dx, \\
& 17) \int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} \frac{x}{\sin^2(2x^2)} dx, \quad 18) \int_{\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{3}}} \frac{x^2}{\cos^2 x^3} dx, \quad 19) \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx, \quad 20) \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln^2 x} dx.
\end{aligned}$$

4. Izračunati sledeće integrale.

$$\begin{aligned}
& 1) \int_{-2}^{-1} \frac{1}{1-x} dx, \quad 2) \int_0^1 \frac{x}{2x^2+1} dx, \quad 3) \int_0^{\sqrt[3]{2}} \frac{x^2}{2+x^3} dx, \quad 4) \int_0^1 \frac{x^2}{(1+2x^3)^2} dx, \\
& 5) \int_1^2 \frac{2}{\sqrt[3]{3x-2}} dx, \quad 6) \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}} dx, \quad 7) \int_{-1}^0 \frac{x^2}{\sqrt[3]{3+2x^3}} dx, \quad 8) \int_1^{e^2} \frac{1-2\ln x}{x} dx, \\
& 9) \int_e^{e^2} \frac{1}{x(4-3\ln x)^2} dx, \quad 10) \int_{e^2}^{e^3} \frac{\sqrt[3]{3-\ln x}}{x} dx, \quad 11) \int_0^1 \frac{3}{4-x^2} dx, \quad 12) \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^{2x}-1} dx, \\
& 13) \int_3^4 \frac{3-2x}{x^2-3x+2} dx, \quad 14) \int_4^5 \frac{2x-5}{x^2-5x+6} dx, \quad 15) \int_0^1 \frac{5x+8}{x^2+3x+2} dx, \\
& 16) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2+\cos x} dx, \quad 17) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\sqrt[4]{3-2\cos x}} dx, \quad 18) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sqrt{2}\sin x}} dx.
\end{aligned}$$

5. Izračunati sledeće integrale.

$$\begin{aligned}
& 1) \int_1^e \ln x dx, \quad 2) \int_e^{e^2} x \ln x dx, \quad 3) \int_{-1}^1 x e^x dx, \quad 4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx, \\
& 5) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x \sin x dx, \quad 6) \int_{e^{-1}}^e \frac{\ln x}{x^2} dx, \quad 7) \int_{e^{-1}}^1 \frac{\ln x}{x^3} dx, \quad 8) \int_1^e x^2 \ln x dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 9) \int_{-1}^1 x^2 e^x dx, \quad 10) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx, \quad 11) \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx, \quad 12) \int_1^e (x+1) \ln x dx, \\
& 13) \int_{-1}^0 (1-2x) e^x dx, \quad 14) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (x-2) \cos x dx, \quad 15) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2+x) \sin x dx, \\
& 20) \int_1^e \ln^2 x dx, \quad 16) \int_0^e (x^2-1) \ln x dx, \quad 17) \int_0^1 (1+2x^2) e^x dx, \\
& 18) \int_0^{\pi} (3-x^2) \cos x dx, \quad 19) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-x^2) \sin x dx, \quad 21) \int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx.
\end{aligned}$$

6. Izračunati površinu figure ograničene pravom $y = 0$ i lukom krive:

$$\begin{aligned}
& 1) y = -x^2 + x, \quad 2) y = -x^2 + 2x, \quad 3) y = x^2 + x, \quad 4) y = -x^2 - 3x, \\
& 5) y = 3x^2 + 2x, \quad 6) y = -2x^2 + 3x, \quad 7) y = -x^2 + 2x + 3, \quad 8) y = -x^2 + x + 6, \\
& 9) y = x^2 - 3x - 4, \quad 10) y = -2x^2 + x + 3, \quad 11) y = 2x^2 - 3x + 1, \\
& 12) y = 3x^2 + x - 4, \quad 13) y = -3x^2 + 2x + 1, \quad 14) y = -3x^2 + 5x - 2.
\end{aligned}$$

7. Izračunati površinu figure koja je ograničena linijama:

$$\begin{aligned}
& 1) y = -x^2 + 6x - 3 \quad \text{i} \quad y = x + 1, \quad 2) y = -x^2 + 8x - 10 \quad \text{i} \quad y = x + 2, \\
& 3) y = x^2 - 6x + 7 \quad \text{i} \quad y = x - 3, \quad 4) y = -x^2 + 10x - 15 \quad \text{i} \quad y = x + 3, \\
& 5) y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 3 \quad \text{i} \quad y = x + 1, \quad 6) y = \frac{1}{2}x^2 + x - 1 \quad \text{i} \quad y = x + 1, \\
& 7) y = -\frac{1}{2}x^2 + x - 3 \quad \text{i} \quad y = 1 - 2x, \quad 8) y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 5 \quad \text{i} \quad y = 3 - 2x,
\end{aligned}$$

8. Izračunati površinu figure koja je ograničena linijama:

$$1) y = x^2 - 5x \quad \text{i} \quad y = -x^2 + x, \quad 2) y = x^2 - 2x \quad \text{i} \quad y = -x^2 + 3x,$$

$$3) y = x^2 + x \quad \text{i} \quad y = -x^2 - 4x, \quad 4) y = x^2 - x - 2 \quad \text{i} \quad y = -x^2 + 2x,$$

$$5) y = x^2 - 4 \quad \text{i} \quad y = -x^2 + x + 2, \quad 6) y = x^2 - 3 \quad \text{i} \quad y = -x^2 - 1,$$

$$7) y = x^2 + 3x - 4 \quad \text{i} \quad y = -x^2 - x + 2, \quad 8) y = x^2 \quad \text{i} \quad y = -x^2 + 4,$$

$$9) y = x^2 - 4 \quad \text{i} \quad y = -x^2 + 2, \quad 10) y = x^2 + x - 1 \quad \text{i} \quad y = -x^2 + 9,$$

9. Izračunati zapreminu tela koje nastaje rotacijom oko x -ose dela površi ograničenog x -osom i lukom krive:

$$1) y = 3x - x^2, \quad 2) y = -x - x^2, \quad 3) y = x^2 + 2x, \quad 4) y = x^2 - 4x,$$

$$5) y = -x^2 - x + 6, \quad 6) y = x^2 + 4x + 3, \quad 7) y = -2x^2 + x + 1, \quad 8) y = 2x^2 - x - 6.$$

10. Izračunati zapreminu tela koje nastaje rotacijom oko x -ose površi ograničene linijama:

$$1) y = \frac{3}{2}x^2 + 2 \quad \text{i} \quad y = x^2, \quad 2) y = \frac{1}{2}x^2 + 1 \quad \text{i} \quad y = x^2, \quad 3) y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad y = \frac{1}{4}x^2 + 1,$$

$$4) y = \frac{1}{3}x^2 + 2 \quad \text{i} \quad y = x^2, \quad 5) y = \frac{2}{3}x^2 + 1 \quad \text{i} \quad y = x^2 + \frac{2}{3}, \quad 6) y = \frac{1}{4}x^2 + 1 \quad \text{i} \quad y = x^2 + \frac{1}{2}.$$

11. Izračunati zapreminu tela koje nastaje rotacijom oko y -ose površi ograničene linijama iz prethodnog zadatka.

12. Izračunati dužinu luka

$$1) \text{ parabole } y = \frac{3}{2}x^2 \text{ između tačaka } O(0, 0) \text{ i } A(\sqrt{2}, 3),$$

$$2) \text{ parabole } y = \frac{1}{4}x^2 \text{ između tačaka } O(0, 0) \text{ i } A(\sqrt{3}, \frac{3}{4}),$$

$$3) \text{ parabole } y = 1 - x^2 \text{ između tačaka } A(-1, 0) \text{ i } B(1, 0),$$

$$4) \text{ parabole } y = 9 - x^2 \text{ između tačaka } A(-3, 0) \text{ i } B(3, 0),$$

$$5) \text{ krive } y^2 = 4x^3 \text{ između tačaka } O(0, 0) \text{ i } A(2, 4\sqrt{2}),$$

$$6) \text{ krive } y^2 = \frac{1}{9}x^3 \text{ između tačaka } O(0, 0) \text{ i } A(3, \sqrt{3}),$$

$$7) \text{ krive } y = \ln x \text{ između tačaka } A(\sqrt{3}, \ln\sqrt{3}) \text{ i } B(\sqrt{8}, \ln\sqrt{8}).$$

5. Modeli zadataka za proveru znanja

5.1. Modeli zadataka za proveru znanja – I deo

Model 1.

1. Odrediti nepoznatu x tako da je ispunjeno sledeće: $\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & x+1 \end{vmatrix} \leq 0$.

2. Date su matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Rešiti matricnu jednačinu $AX = B^T - X$.

3. Diskutovati i rešiti sistem linearnih jednačina u zavisnosti od realnog parametra a , primenom Kramerove metode.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} x & + & ay & + & 2z & = & 1 \\ 5x & & & + & 3z & = & 2 \\ 4x & - & y & + & z & = & 1 \end{array}$$

4. Izračunati graničnu vrednost

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - x^3}{x^2 - 3x - 4}, \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}.$$

Napomena: pod a) bez primene Lopitalovog pravila.

5. a) Odrediti prvi izvod funkcije $y = \left(\frac{5x-x^2}{1-x}\right)^2$,

b) Odrediti drugi izvod funkcije $y = 3x(1-2x^2)$.

Model 2.

1. Ispitati da li postoji inverz matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ i izračunati $p(A)$

ako je $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x - 1$.

2. Date su matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. Rešiti matricnu jednačinu $A^T X = B + 3X$.

3. Odrediti, u zavisnosti od realnog parametra a , kada homogeni sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} x + ay + (a+1)z &= 0 \\ x + (a+1)y + az &= 0 \\ (a+1)x + y + az &= 0 \end{aligned}$$

ima i netrivialnih rešenja i, u tom slučaju, odrediti ih.

4. Izračunati graničnu vrednost

$$a) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{49 - x^2}{\sqrt{7x} - 7}, \quad b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Napomena: pod a) bez primene Lopitalovog pravila.

5. a) Odrediti prvi izvod funkcije $y = (2 + 3x - 2x^2)e^x$,

b) Odrediti drugi izvod funkcije $y = \ln(2 - x^2)$.

Model 3.

1. Odrediti, u zavisnosti od realnog parametra a , kada postoji inverz matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & a \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ i (u slučaju kada postoji) naći inverznu matricu } A^{-1}.$$

2. Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$. Rešiti matricnu jednačinu $A^T X = A^2 - 3X$.

3. Rešiti sistem linearnih jednačina matricnom i Gausovom metodom.

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ 2x + 3y + z &= 0 \\ -x + y - z &= 1 \end{aligned}$$

4. Izračunati graničnu vrednost

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 - 2x + 1}{x^2 + 4x + 1}, \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Napomena: pod a) bez primene Lopitalovog pravila.

5. a) Odrediti prvi izvod funkcije $y = (1 - 2x - x^2)(x^2 - 1)$,

b) Odrediti drugi izvod funkcije $y = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$.

5.2. Modeli zadataka za proveru znanja – II deo**Model 1.**

1. Ispitati funkciju $y = \frac{x^2+3x}{x+4}$ i nacrtati njen grafik.
2. Neka je $y = \frac{1-x}{e^x}$. Odrediti (ako postoje) ekstremne vrednosti i prevojne tačke date funkcije.
3. Odrediti znak i asimptote funkcije $y = \frac{1-\ln x}{1+\ln x}$.
4. Odrediti sledeći integral: $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1) dx$.
5. Odrediti sledeći integral: $\int \frac{1}{x^2-5x+6} dx$.
6. Izračunati sledeći integral: $\int_1^e x^2 \ln x dx$.

Model 2.

1. Ispitati funkciju $y = \frac{1-x^2}{e^x}$ i nacrtati njen grafik.
2. Neka je $y = \frac{2x-1}{x^2}$. Odrediti (ako postoje) ekstremne vrednosti i prevojne tačke date funkcije.
3. Odrediti znak i asimptote funkcije $y = \frac{1}{\ln x - 1}$.
4. Odrediti sledeći integral: $\int (x\sqrt{x} - 2e^x + \sin x) dx$.
5. Odrediti sledeći integral: $\int \frac{x+2}{x^3-x} dx$.
6. Izračunati sledeći integral: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$.

Model 3.

1. Ispitati funkciju $y = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ i nacrtati njen grafik.
2. Neka je $y = \frac{e^x}{1+x}$. Odrediti (ako postoje) ekstremne vrednosti i prevojne tačke date funkcije.
3. Odrediti znak i asimptote funkcije $y = \frac{x^2+2x-3}{3-x^2}$.
4. Odrediti sledeći integral: $\int \frac{(x^2-2)(x^2+1)}{3x^3} dx$.
5. Odrediti sledeći integral: $\int \frac{x^3}{x+1} dx$.
6. Neka su $y = x^2 - x - 1$ i $y = -x^2 + 9$. Izračunati površinu figure koja je ograničena datim linijama.

6. Primeri rešenih modela zadataka

6.1. Rešeni model zadataka – I deo

Zadaci:

1. Sarusovim pravilom izračunati vrednost determinante $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ i proveriti rezultat Laplasovim razvojem (po II-gom redu).

2. Date su matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Rešiti matričnu jednačinu $XA = B^T + X$.

3. Rešiti sistem linearnih jednačina matričnom i Gausovom metodom.

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 5 \\ 2x + 3y - 5z &= 8 \\ 5x + y - 8z &= 7 \end{aligned}$$

4. Izračunati graničnu vrednost

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - 3x + 2}, \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{5x}}{\sin x}.$$

Napomena: pod a) bez primene Lopitalovog pravila.

5. a) Odrediti prvi izvod funkcije $y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$,
b) Odrediti drugi izvod funkcije $y = (2 - 3x)x^2$.

Rešenja:

1. Sarusovim pravilom izračunati vrednost determinante $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ i proveriti rezultat Laplasovim razvojem (po II-gom redu).

Rešenje:

* Sarusovo pravilo

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1) \cdot 3 - 2 \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 2 = -1,$$

* Laplasov razvoj (po II-gom redu)

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(2-6) - (2+3) = -1.$$

2. Date su matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Rešiti matričnu jednačinu $XA = B^T + X$.

Rešenje:

Iz $XA = B^T + X$ sledi $XA - X = B^T$ tj. $X(A - I) = B^T$.

Neka je $C = A - I$ tj. $XC = B^T$, iz čega, pod uslovom da postoji inverz matrice C , dobijamo da je $X = B^T C^{-1}$.

Potrebno je naći C^{-1} tj.

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \quad \text{odnosno} \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Kako je,

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

i

$$C_{1,1} = 0, \quad C_{1,2} = -1, \quad C_{2,1} = -2, \quad C_{2,2} = 2,$$

dobijamo da je

$$C^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}^T = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Prema tome, rešenje date matrične jednačine je

$$X = B^T C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -10 \end{bmatrix}.$$

3. Rešiti sistem linearnih jednačina matričnom i Gausovom metodom.

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 5 \\ 2x + 3y - 5z &= 8 \\ 5x + y - 8z &= 7 \end{aligned} \tag{24}$$

Rešenje:

* matrična metoda:

Sistem (24) možemo zapisati u sledećem obliku: $AX=B$, gde je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -5 \\ 5 & 1 & -8 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Prema tome, $X=A^{-1}B$. Potrebno je naći A^{-1} .

Kako je, koristeći Sarusovo pravilo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -5 \\ 5 & 1 & -8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot (-8) + 2 \cdot (-5) \cdot 5 + (-3) \cdot 2 \cdot 1 - 5 \cdot 3 \cdot (-3) - 1 \cdot (-5) \cdot 1 - (-8) \cdot 2 \cdot 2 = 2$$

i

$$A_{1,1} = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} = -19, \quad A_{2,1} = - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} = 13, \quad A_{3,1} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{1,2} = - \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} = -9, \quad A_{2,2} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} = 7, \quad A_{3,2} = - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{1,3} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -13, \quad A_{2,3} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 9, \quad A_{3,3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1,$$

dobijamo da je

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -19 & -9 & -13 \\ 13 & 7 & 9 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -19 & 13 & -1 \\ -9 & 7 & -1 \\ -13 & 9 & -1 \end{bmatrix}$$

tj.

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -19 & 13 & -1 \\ -9 & 7 & -1 \\ -13 & 9 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

odnosno $(x, y, z) = (1, 2, 0)$.

✱ Gausova metoda:

Množenjem prve jednačine sistema (24) sa -2 i dodavanjem drugoj jednačini, kao i množenjem prve jednačine istog sistema sa -5 i dodavanjem trećoj jednačini dobijamo sledeći (ekvivalentan) sistem:

$$\begin{array}{rcl} x + 2y - 3z & = & 5 \\ -y + z & = & -2 \\ -9y + 7z & = & -18 \end{array} \quad (25)$$

Množenjem druge jednačine sistema (25) sa -9 i dodavanjem trećoj jednačini istog sistema dobijamo sledeći (ekvivalentan) sistem:

$$\begin{array}{rcl} x + 2y - 3z & = & 5 \\ -y + z & = & -2 \\ -2z & = & 0 \end{array} \quad (26)$$

Iz poslednje jednačine sistema (26) sledi da je $z=0$. Iz preposlednje jednačine istog sistema sledi da je $y=2$. Na kraju, iz prve jednačine istog sistema sledi da je $x=1$.

Dakle, rešenje sistema (26), a time i njemu ekvivalentnog sistema (24), je uređena trojka $(x, y, z) = (1, 2, 0)$ tj. sistem (24) ima jedinstveno rešenje – *određen* sistem.

4. a) Izračunati graničnu vrednost:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - 3x + 2}.$$

Rešenje:

Rešenja kvadratne jednačine $x^2 - 4x + 3 = 0$ su:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \quad \text{tj.} \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 1.$$

Rešenja kvadratne jednačine $x^2 - 3x + 2 = 0$ su:

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \quad \text{tj.} \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 1.$$

Dakle,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x^2 - 4x + 3)}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-3)(x-1)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-3)}{x-2} = 2,$$

4. b) Izračunati graničnu vrednost:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{5x}}{\sin x}.$$

Rešenje:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{5x}}{\sin x} \stackrel{Lopital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^{2x} - 5e^{5x}}{\cos x} = -3.$$

5. a) Odrediti prvi izvod funkcije $y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^4$.

Rešenje:

$$\begin{aligned} y' &= 4\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3 \left(\frac{1+x}{1-x}\right)' = 4\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3 \frac{(1+x)'(1-x) - (1+x)(1-x)'}{(1-x)^2} \\ &= 4\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^3 \frac{(1-x) + (1+x)}{(1-x)^2} = 8\frac{(1+x)^3}{(1-x)^5}, \end{aligned}$$

5. b) Odrediti drugi izvod funkcije $y = (2 - 3x)x^2$.

Rešenje:

$$\begin{aligned} y' &= (2 - 3x)'x^2 + (2 - 3x)(x^2)' = -3x^2 + (2 - 3x)2x = 4x - 9x^2, \\ y'' &= (4x)' - (9x^2)' = 4 - 18x. \end{aligned}$$

6.2. Rešeni model zadatka – II deo

Zadaci:

1. Ispitati funkciju $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 1}$ i nacrtati njen grafik.
2. Neka je $y = \frac{3 - 2x}{e^x}$. Odrediti (ako postoje) ekstremne vrednosti i prevojne tačke date funkcije.
3. Odrediti znak i asimptote funkcije $y = \frac{1 + \ln x}{x^2}$.
4. Odrediti sledeći integral: $\int (\sqrt{x} + 2)(x - 2\sqrt{x} + 1) dx$.
5. Odrediti sledeći integral: $\int \frac{x+6}{x^3-9x} dx$.
6. Izračunati sledeći integral: $\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x^2} dx$.

Rešenja:

1. Ispitati funkciju $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 1}$ i nacrtati njen grafik.

Rešenje:

1. Domen funkcije

$$D_y = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

2. Nule funkcije i znak funkcije

✱ Nule funkcije

$$y = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 1} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Iz činjenice da $x = 2 \in D_y$ zaključujemo da data funkcija ima nulu za $x = 2$ tj. data funkcija seče x -osu u tački $A(2, 0)$.

✱ Znak funkcije

	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$(x - 2)^2$	+	+	+	
$x - 1$	-	+	+	
y	-	+	+	

3. Parnost i neparnost funkcije

Data funkcija nije ni parna ni neparna jer domen funkcije nije simetričan u odnosu na 0.

4. Asimptote funkcije

✱ Vertikalne asimptote funkcije

$$\lim_{x \rightarrow 1 \pm} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 1} = \frac{1}{0} = \pm\infty$$

Dakle, prava $x = 1$ je vertikalna asimptota date funkcije (i sa leve i sa desne strane).

Napomena. U prvom slučaju tj. kada $x \rightarrow 1^+$ rešenje je $+\infty$ jer je funkcija $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 1} > 0$ za $x > 1$. Analogno, kada $x \rightarrow 1^-$ rešenje je $-\infty$ jer je funkcija $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 1} < 0$ za $x < 1$.

✱ Horizontalne asimptote funkcije

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(x - 4 + \frac{4}{x} \right) \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{x}} \right) = (\pm\infty) \cdot 1 = \pm\infty$$

Dakle, data funkcija nema horizontalnu asimptotu ni kada $x \rightarrow +\infty$ ni kada $x \rightarrow -\infty$.

✱ Kose asimptote funkcije

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 - 4x + 4}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3x + 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-3 + \frac{4}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = -3$$

Dakle, prava $y = x - 3$ je kosa asimptota date funkcije kada $x \rightarrow \pm\infty$.

5. Monotonost funkcije

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^2 - 4x + 4)'(x - 1) - (x^2 - 4x + 4)(x - 1)'}{(x - 1)^2} = \frac{(2x - 4)(x - 1) - (x^2 - 4x + 4)}{(x - 1)^2} \\ &= \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} = \frac{x(x - 2)}{(x - 1)^2} \end{aligned}$$

Iz

	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
x	—	+	+	+	
$x - 2$	—	—	—	+	
$(x - 1)^2$	+	+	+	+	
y'	+	—	—	+	
y	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

sledi da su ekstremne tačke date funkcije: $M_{\max}(0, -4)$ i $N_{\min}(2, 0)$.

6. Konveksnost i konkavnost funkcije

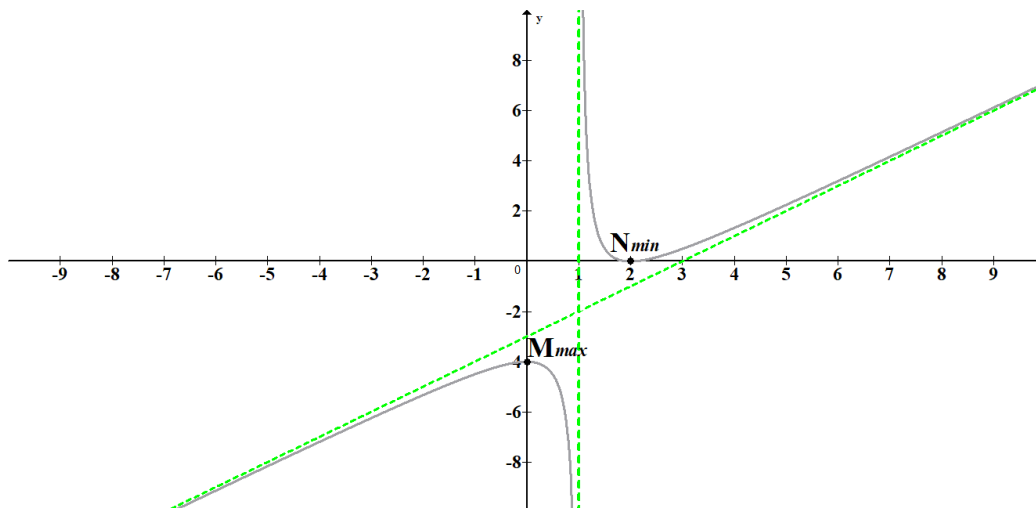
$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(x^2 - 2x)'(x - 1)^2 - (x^2 - 2x)((x - 1)^2)'}{(x - 1)^4} = \frac{(2x - 2)(x - 1)^2 - 2(x^2 - 2x)(x - 1)}{(x - 1)^4} \\ &= \frac{2(x - 1)((x - 1)^2 - (x^2 - 2x))}{(x - 1)^4} = \frac{2}{(x - 1)^3} \end{aligned}$$

Iz

	$-\infty$	1	$+\infty$
2	+	+	
$x - 1$	—	+	
$(x - 1)^2$	+	+	
y''	—	+	
y	$\cap$	$\cup$	

sledi da data funkcija nema prevojnih tačaka ($x = 1 \notin D_y$).

7. Grafik funkcije



2. Neka je $y = \frac{3-2x}{e^x}$. Odrediti (ako postoje) ekstremne vrednosti i prevojne tačke date funkcije.

Rešenje:

$$y' = \frac{(3-2x)'e^x - (3-2x)(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{-2e^x - (3-2x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(-2-3+2x)}{(e^x)^2} = \frac{2x-5}{e^x}.$$

$$y'' = \frac{(2x-5)'e^x - (2x-5)(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{2e^x - (2x-5)e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(2-2x+5)}{(e^x)^2} = \frac{7-2x}{e^x}.$$

Iz

$-\infty \quad \frac{5}{2} \quad +\infty$			$-\infty \quad \frac{7}{2} \quad +\infty$		
$2x-5$	$-$	$+$	$7-2x$	$+$	$-$
e^x	$+$	$+$	e^x	$+$	$+$
y'	$-$	$+$	y''	$+$	$-$
y	$\searrow$	$\nearrow$	y	$\cup$	$\cap$

sledi da je ekstremna tačka date funkcije: $N_{min}(\frac{5}{2}, -\frac{2}{\sqrt{e^5}})$, a prevojna tačka date funkcije: $P(\frac{7}{2}, -\frac{4}{\sqrt{e^7}})$.

3. Odrediti znak i asimptote funkcije $y = \frac{1+\ln x}{x^2}$.

Rešenje:

$$D_y = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0 \wedge x \neq 0\} = (0, +\infty)$$

Znak funkcije

	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$1 + \ln x$	-	+	
x^2	+	+	
y	-	+	

Asimptote funkcije

✱ Vertikalna asimptota funkcije

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \ln x) \frac{1}{x^2} = (-\infty)(+\infty) = -\infty$$

Dakle, prava $x=0$ je vertikalna asimptota date funkcije (sa desne strane).

✱ Horizontalna asimptota funkcije

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{x^2} \stackrel{\text{Lopital}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

Dakle, prava $y=0$ je horizontalna asimptota date funkcije kada $x \rightarrow +\infty$.

Napomena. Pošto je funkcija $y = \frac{1+\ln x}{x^2} > 0$ za $x \in (\frac{1}{e}, +\infty)$ grafik ove funkcije se približava pravoj $y=0$, kada $x \rightarrow +\infty$, sa pozitivne tj. gornje strane.

✱ Kose asimptote funkcije

Data funkcija nema kosu asimptotu kada $x \rightarrow +\infty$ jer ima horizontalnu asimptotu ($y=0$) kada $x \rightarrow +\infty$.

4. Odrediti sledeći integral: $\int (\sqrt{x} + 2)(x - 2\sqrt{x} + 1) dx$.

Rešenje:

$$\begin{aligned} \int (\sqrt{x} + 2)(x - 2\sqrt{x} + 1) dx &= \int (x\sqrt{x} - 2x + \sqrt{x} + 2x - 4\sqrt{x} + 2) dx \\ &= \int x\sqrt{x} dx - 3 \int \sqrt{x} dx + 2 \int dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 3 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 2x + C = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} + 2x + C. \end{aligned}$$

5. Odrediti sledeći integral: $\int \frac{x+6}{x^3-9x} dx$.

Rešenje:

$$\int \frac{x+6}{x^3-9x} dx = \int \frac{x+6}{x(x^2-9)} dx = \int \frac{x+6}{x(x-3)(x+3)} dx$$

Iz

$$\begin{aligned} \frac{x+6}{x(x-3)(x+3)} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x+3} = \frac{A(x-3)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-3)}{x(x-3)(x+3)} \\ &= \frac{A(x^2-9) + B(x^2+3x) + C(x^2-3x)}{x(x-3)(x+3)} = \frac{(A+B+C)x^2 + (3B-3C)x - 9A}{x(x-3)(x+3)} \end{aligned}$$

sledi

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0 \\ 3B - 3C &= 1 \\ -9A &= 6 \end{aligned}$$

Iz prethodnog sistema dobijamo da je $A = -\frac{2}{3}$, $B = \frac{1}{2}$ i $C = \frac{1}{6}$.

Prema tome,

$$\frac{x+6}{x(x-3)(x+3)} = -\frac{2}{3x} + \frac{1}{2(x-3)} + \frac{1}{6(x+3)}.$$

To znači da je,

$$\begin{aligned} \int \frac{x+6}{x^3-9x} dx &= -\int \frac{2}{3x} dx + \int \frac{1}{2(x-3)} dx + \int \frac{1}{6(x+3)} dx \\ &= -\frac{2}{3} \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-3} dx + \frac{1}{6} \int \frac{1}{x+3} dx \\ &= -\frac{2}{3} \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x-3| + \frac{1}{6} \ln|x+3| + C. \end{aligned}$$

6. Izračunati sledeći integral: $\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x^2} dx$.

Rešenje:

Primenimo parcijalnu integraciju.

$$\begin{aligned} u &= \ln x & \text{tj.} & \quad du = \frac{1}{x} dx \\ dv &= \frac{dx}{x^2} & & \quad v = -\frac{1}{x} \end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned} \int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x^2} dx &= -\frac{1}{x} \ln x \Big|_e^{e^2} + \int_e^{e^2} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \ln x \Big|_e^{e^2} - \frac{1}{x} \Big|_e^{e^2} = -\frac{1}{x} (\ln x + 1) \Big|_e^{e^2} \\ &= -\frac{1}{e^2} (\ln e^2 + 1) + \frac{1}{e} (\ln e + 1) = -\frac{3}{e^2} + \frac{2}{e} = \frac{2e-3}{e^2}. \end{aligned}$$

Literatura

- [1] Zora Aleksić, Vule Aleksić, *Matematika 1*, VIII izdanje, Visoka Građevinsko-geodetska škola, Beograd 2016.
- [2] Ljiljana Gajić, *Predavanja iz Analize I*, Univerzitet u Novom Sadu, PMF, Novi Sad 2006.
- [3] Ljubiša Kočinac, *Linearna algebra i analitička geometrija*, II prerađeno i prošireno izdanje, Prosveta, Niš 1997.
- [4] Ivana Kostić Kovačević, *Matematika sa zbirkom zadataka*, V izdanje, Univerzitet Singidunum, Beograd 2017.
- [5] Gradimir V. Milovanović, Radosav Ž. Đorđević, *Matematička analiza I*, Univerzitet u Nišu, Elektronski fakultet, Niš 2005.
- [6] Slobodanka Mitrović, *Matematika: za studente biotehničkih fakulteta*, II ispravljeno izdanje, Mrlješ, Beograd 2004.
- [7] Zoran Stojaković, Ivica Bošnjak, *Elementi linearne algebre*, PMF Novi Sad, Symbol, Novi Sad 2010.
- [8] Zoran Stojaković, Dragoslav Herceg, *Linearna algebra i analitička geometrija*, PMF Novi Sad, Symbol, Novi Sad 2004.
- [9] Dragan Vugdelija i dr., *Matematika za ekonomiste*, IX izdanje, Univerzitet u Novom Sadu, Ekonomski fakultet Subotica, Subotica 2012.

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

51(075.8)(076)(0.034.2)

РАДИЧИЋ, Биљана, 1979-

Praktikum iz matematike [Elektronski izvor] / Biljana Radičić. -
Beograd : Univerzitet Singidunum, 2021 (Beograd : Caligraf). - 1
elektronski optički disk (CD-ROM) ; 12 cm

Sistemski zahtevi: Nisu navedeni. - Nasl. sa naslovne strane dokumenta. -
Tiraž 10. - Sadrži bibliografiju.

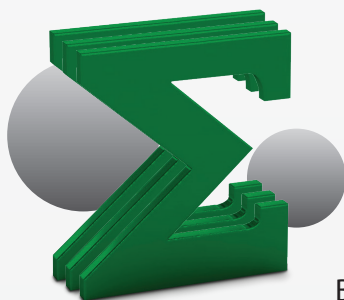
ISBN 978-86-7912-750-1

а) Математика - Задаци

COBISS.SR-ID 34765577

© 2021.

Sva prava zadržana. Nijedan deo ove publikacije ne može biti reprodukovан u bilo kom vidu i putem bilo kog medija, u delovima ili celini bez prethodne pismene saglasnosti izdavača.



Biljana Radičić

PRAKTIKUM IZ MATEMATIKE

Ovaj Praktikum je namenjen, pre svega, studentima prve godine osnovnih akademskih studija Tehničkog fakulteta i Fakulteta za informatiku i računarstvo Univerziteta Singidunum i napisan je prema planu i programu jednosemestralnog predmeta pod nazivom Matematika koji studenti navedenih fakulteta imaju na prvoj godini osnovnih akademskih studija. Međutim, osim njih, Praktikum mogu koristiti i studenti drugih fakulteta čiji plan i program sadrži gradivo ili deo gradiva obuhvaćeno ovim Praktikumom.

Praktikum je podeljen u 6 poglavlja, pri čemu je svako od tih poglavlja podeljeno na više delova koji objedinjuju zadatke sličnog tipa. Prva četiri poglavlja sadrže zadatke za vežbu odnosno pripremu pismenog dela ispita. Svaki tip zadataka sadrži više primera, od najjednostavnijih prema složenijim, koji imaju za cilj da se studenti što bolje pripreme za pismeni deo ispita kako po pitanju znanja tako i po pitanju veštine pri njihovoj izradi. U petom poglavlju su dati modeli zadataka za proveru znanja kako bi studenti imali uvid koliko zadataka dolazi u obzir na proveru znanja, iz kojih oblasti i koje težine su zadaci. U poslednjem, šestom poglavlju, data su rešenja za jedan model zadataka iz prvog dela gradiva i za jedan model zadataka iz drugog dela gradiva.