UNIVERZITET SINGIDUNUM
DEPARTMAN ZA POSLEDIPLOMSKE STUDIJE I MEĐUNARODNU SARADNJU

MASTER STUDIJE
Studijski program: POSLOVNA EKONOMIJA

MASTER RAD

Optimizacija portfolija hartija od vrednosti na Beogradskoj berzi na osnovu teorije Harija Markovica

Mentor: doc. dr Lidija Barjaktarović

Student: Tomo Simović
Broj indeksa:402132/2011

Beograd, jun 2012.

Sadržaj

Uvod 4

1. Pojam optimizacionog modela u statičkoj ekonomskoj analizi.....6

2. Linearno programiranje.....7
2.1 Primarni problem.....9
2.2 Simpleks metod.....10
2.3 Dualni problem.....13

3. Razmena 15
3.1 Pojam razmene 15
3.2 Razmena i Paretova efikasna alokacija 16

4. Međuzavisnost i dobici od trgovine 18
4.1 Primer trgovine dva proizvođača 18
4.2 Teorija komparativnih prednosti 19

5. Primena linearnog programiranja u teoriji komparativnih prednosti.....21
5.1 Primer trgovine dve zemlje.....21
5.2 Granica efikasnosti.....22
5.3 Dual primera međunarodne trgovine 24

6. Finansijska tržišta i Beogradska berza 25
6.1 Finansijsko tržište u Srbiji 25
6.2 Berza 25
6.3 Beogradska berza 26

7. Moderna portfolio analiza-Markovicev model 27
7.1 Osnovna ideja 27
7.2 Očekivani prinos i standardna devijacija portfolija 28
7.3 Korisnost i krive indiferentnosti 30
7.4 Teorema o efikasnom skupu 31
7.5 Selekcija optimalnog portfolija 33

8. Efikasni skup na Beogradskoj berzi.....34
8.1 Izbor hartija od vrednosti i perioda posmatranja 34
8.2 Izračunavanje efikasnog skupa 36

Zaključak 41

Literatura 42
Prilog 1 43
Prilog 2 44

Uvod

U ekonomskoj nauci se sve češće koriste matematičke metode u rešavanju ekonomskih problema i objašnjavanju ekonomskih pojava. Ekonomska teorija se može videti kao teorija optimalnog odlučivanja prilikom alokacije ograničenih resursa. Veliku pomoć prilikom rešavanja ovih problema mogu da pruže matematičke metode i inženjerska rešenja iz različitih oblasti. Naravno, uz upotrebu računara i prilagođenih programa.

Cilj ovoga rada je da testira i pokaže primenu originalnog algoritma (i EXCEL-modela) za izračunavanje koordinata tačaka na granici efikasnosti u skupu mogućih portfolija, u modelu Markovica. U radu su istraženi uslovi pod kojima je model i algoritam moguće efikasno primeniti. Ti se uslovi odnose na izbor hartija od vrednosti koje mogu da se uključe u portfolio, kao i na izbor perioda posmatranja vremenskih serija dnevnih prinosa pojedinih vrsta hartija od vrednosti, koje se koriste kao inputi u modelu.

Pokazaće se da se predloženi algoritam (i EXCEL-model) može praktično koristiti za utvrđivanje strukture optimalnog portfolija investitora, pod uslovom da je poznat prihvatljiv nivo rizika (investitora), meren standardnom devijacijom portfolija.

Istraživanje metoda za izračunavanje optimalne strukture portfolija posebno je interesantno u periodima većih finansijskih lomova, povećanih rizika i značajnih fluktuacija cena hartija od vrednosti na berzi.

Velika ekonomska kriza je izvršila snažan uticaj na finansijsko tržite Srbije. Došlo je do problema likvidnosti, odlivanja kapitala, nemogućnosti vraćanja kredita, nesigurnosti i nepoverenja između učesnika na tržištu. Sve je to uslovilo pad vrednosti akcija i smanjenje obima trgovanja.

Sa razvojem tržišnih uslova u našoj privredi, finansijska sredstva mogu se uložiti u veći broj oblasti. Jedna od omogućih je finansijsko tržište, a još uži deo bi bila finansijska berza. Problem našeg istraživanja bio je mogućnost ulaganja na finansijskom tržištu Srbije, posebno na Beogradskoj berzi.

Predmet ovog rada je primena metode Harija Markovica (Harry Markowitz) pri određivanju portfolija ulagača na Beogradskoj berzi, i tu će se videti kako individualni investitori i finansijski fondovi mogu investirati.

Društveni cilj je pokazati mogućnosti i način ulaganja primenjiv za investitore, koji mogu biti individualni, ali i fondovi, na Beogradskoj berzi. Investitori treba da na osnovu spremnosti na rizik i na osnovu očekivanih prinosa, ulože svoja sredstva u finansijske instrumente.

Metode koje će se primeniti u naučno istraživačkom radu su:

- Osnovne metode analize i sinteze, kao i uobičajeni postupci dedukcije i indukcije,
- Metod nelinearne optimizacije (matematički model)
- Statistički metodi prikupljanja, selekcije i obrade vremenskih serija dnevnih prinosa hartija od vrednosti na Beogradskoj berzi.

U radu se pošlo od generalne hipoteze da je moguće, uz odgovarajuće modifikacije, prilagoditi model Markovica našim uslovima, bez obzira na to što je tržište relativno plitko, a istorija modernog funkcionisanja Beogradske berze relativno kratka.

Ispitaće se i posebna hipoteza da proširenje izabranog skupa hartija od vrednosti, koje čine potencijalni portfolio, ne utiče značajno na strukturu optimalnog portfolija investitora (tržišni portfolio).

U prvom poglavlju rada biće objašnjeni osnovni pojmovi optimizacije .

U drugom će biti predstavljene teorijske osnove metode linearnog programiranja .

U sledećem će biti prikazana teorija razmene.

Četvrto poglavlje će dati klasični pristup teoriji komparativnih prednosti, zasnovan na pojmu oportunitetnog troška.

Posle njega će biti prikazana primena metoda linearnog programiranja u primeru koji potvrđuje teoriju komparativnih prednosti. Biće objašnjen i pojam „granice efikasnosti", i dat primer dualnog problema međunarodne trgovine.

U šestom delu rada biće objašnjeni osnovni pojmovi o finansijskim tržištima i dat kratak prikaz Beogradske berze.

U sedmom će biti objašnjena moderna portfolio analiza, zasnovana na principima Markovica.

U sledećem će se primeniti njegova teorija i proračuni na osnovu podataka sa Beogradske berze.

Na kraju će biti dati i zaključci.

1. Pojam optimizacionog modela u statičkoj ekonomskoj analizi

Optimizacioni model u statičkoj ekonomskoj analizi se može prikazati na primeru izbora potrošača. U tom modelu, maksimizira se korist potrošača tj. njegova funkcija korisnosti koja zavisi od n promenljivih,

$$\max U = f(q_1, q_2, ..., q_n),$$

uz zadati budžet potrošaša, koji ograničava njegove mogućnosti za potrošnju,

$$\sum_{i=1}^{n} p_i q_i = Y,$$

i uslov nenegativnosti $q_1, q_2, ..., q_n \geq 0$

gde su q_i količine proizvoda ili usluga, p_i je njihova cena a Y je budžet.

Korisnost, direktno, zavisi od količine dobara koje potrošač ima. Potrošač oseća različito zadovoljsto za različite skupove dobara koje može da poseduje. Postoje skupovi sa različitim količinama dobara ali potrošač može da oseća, kao da ima istu korisnost, kada ih poseduje. Tada za te skupove kažemo da se nalaze na istoj krivoj indiferentnosti. Ako se potrošaču poveća budžet, on može preći na višu krivu indiferentnosti. Korisnost je teško odrediti precizno, tako da se pre može govoriti o odnosu između skupova dobara. Za potrošača, kakav je odnos korisnosti, kada ga potrošač poseduje jedan skup, u odnosu, kada bi posedovao neki drugi skup.

Ovaj problem se može rešti pomoću Langranžeove funkcije,

$$L = U - \lambda(\sum_{i=1}^{n} p_i q_i - Y)$$

gde je λ Lagranžeov multiplikator. Funkcija ima maksimum ako su joj parcijalni izvodi jednaki nuli,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = (1, ..., n)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

Odatle sledi da je

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} - \lambda p_i = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i - Y = 0$$

Ako uzmemo neko *i*-to i *j*-to dobro, iz prethodnih jednakosti dobijamo sledeću

$$\frac{\partial U / \partial q_i}{\partial U / \partial q_j} = \frac{\lambda p_i}{\lambda p_j} = \frac{p_i}{p_j}$$

Ona kaže da su marginalne korisnosti *i*-to i *j*-to dobra proporcionalne njihovim cenama , u optimalnom slučaju tj. prilikom optimalnog ponašanja potrošača. Ta jednačina kaže da je, u optimalnoj situaciji, marginalna korisnost jedinice novca potrošene na *i*-to dobro jednaka marginalnoj korisnosti jedinice novca potrošene *j*-to dobro. U narednim

poglavljima prikazana je primena još jednog načina optimizacije pomoću metoda linearnog programiranja.

2. Linearno programiranje

Privredne aktivnosti se, u najvećem broju slučajeva, odvijaju u uslovima ograničenih resursa. Svako ko učestvuje u toj aktivnosti želi da za sebe dođe do najboljeg mogućeg ishoda, da na što bolji način, za sebe, iskoristi te ograničene resurse. To se postiže optimizacijom, gde se može iskoristiti metod zasnovan na matematičkom modeliranju ekonomskih pojava. Jedan od takvih metoda je metod linearnog programiranja.

Linearno programiranje je metod, čiji razvoj počinje malo pre početka II svetskog rata. Korišćen je u vojne svrhe i to je uticalo na njegov brz razvoj. Međutim , čitav niz problema koji se odnose na optimizaciju ljudskih aktivnosti se može rešavati ovim metodom. To su:

- **Planiranje proizvodnje**. Osnovna mogućnost njegove primene u proizvodnji je određivanje optimalnog programa proizvodnje. U nameri da maksimizira ukupan rezultat svoga poslovanja, koji je najčešće izražen visinom ostvarenog profita, preduzeće je zainteresovano iskoristi resurse sa kojima raspolaže na najbolji mogući način.

- **Planiranje investicija**. I resursi određeni za investiranje su, takođe, ograničeni. Metodom linearnog programiranja se može odrediti optimalani nivo ulaganja u pojedine vrste hartija od vrednosti. Tada govorimo o optimizaciji portfolija, što je problem koji se postavlja pred menadžere investicionih fondova, banaka, osiguravajućih društava ali i individualnih investitora. Funkcija cilja modela linearnog programiranja za optimizaciju portfolija može izražavati zahtev za maksimizacijom ukupnog očekivanog prinosa na investirana sredstva, uz ograničeni rizik.

- **Transportni problem**. Zbog udaljenosti između proizvođača i potrošača, nastaju troškovi prilikom transporta robe. Minimizacija ovih troškova može izuzetno da utiče na rezultate poslovanja preduzeća. U tom slučaju model linearnog programiranja može da predstavlja minimizaciju ukupnih troškova prevoza, uz ispunjenje zahteva potrošnje.

- **Optimalno raspoređivanje kadrova**. U preduzećima se može postaviti problem optimalnog rasporeda radnika za obavljanje različitih poslova. Potrebno je napraviti takav raspored prilikom obavljanja poslova, da se pritom ostvari maksimalna efikasnost u radu. Efikasnost se izražava kroz zahtev za minimizaciju ukupnih vremena rada, troškova, maksimizaciju profita.

2.1 Primarni problem

Problem lineanog programiranja može biti maksimizacija ili minimizacija određene funkcije, tj. nalaženje optimalne vrednosti linearne funkcije, pod uslovima koji su predstavljeni sistemom nejednačina. Mi ćemo prilikom predstavljanja modela za rešavanje problema, koji nazivamo primarni problem, govoriti o problemu maksimiziranja te funkcije. Osnovi elementi modela linearnog programiranja su:

- funkcija cilja
- sistem ograničenja
- uslov nenegativnosti

Zadatak problema maksimuma se može predstaviti na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
&(\max)\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_px_p \\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p \le b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p \le b_2 \\
&..... \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mp}x_p \le b_m \\
&x_1, x_2, ..., x_p \ge 0
\end{aligned}
$$

Funkcija cilja je predstavljena prvom jednačinom. Ona izražava osnovi cilj zbog koga se formuliše i rešava odgovarajući model linearnog programiranja. U našem primeru to može biti maksimizacija profita preduzeća. Radi ostvarenja cilja postoji *p* aktivnosti, koje su predstavljene svojim nivoima, promenljivim $x_1, x_2, ..., x_p$ (proizvodnja određenih dobara, izvoz roba) čiji su pojedinačni efekti izraženi parametrima $c_1, c_2, ..., c_p$.

Sistem ograničenja pokazuje kako se ograničena sredstva koriste. Njihov iznos izražen je slobodnim članovima $b_1, b_2, ..., b_m$. Korišćenje raspoloživih resursa predstavljeno je parametrima a_{ij} (i=1,..., m; j=1,..., p), pri čemu koeficijent a_{ij} pokazuje korišćenje i-tog resursa pri jediničnom ostvrarivanju j-te delatnosti.

Uslovi nenegativnosti su neophodan deo modela linearnog programiranja. Oni imaju i metodološki i ekonomski značaj. Matematička postavka modela zahteva da promenjive $x_1, x_2, ..., x_p$ budu nenegativne. Veličine o kojima mi govorimo su stvarne, prirodne i kao takve, po svojoj suštini, ne mogu biti negativne.

Svi elementi u modelu sem $x_1, x_2, ..., x_p$ su unapred poznati i predstavljaju parametre modela.

U cilju dolaska do rešenja potrebno je transformisati sistem nejednačina u sistem jednačina. Uvode se dodatne promenjive, koje takođe treba da budu nenegativne. Te se promenjive dodaju svakoj levoj strani iz sistema ograničenja i jednake su razlici vrednosti desne i leve strane nejednačine. Takodje, te dodatne promenljive se moraju naći i u funkciji cilja, s tim sto su parametri uz njih jednaki nuli. Sistem ograničenja, tada dobija sledeći oblik:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1p}x_p + x_{p+1} \qquad = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2p}x_p \quad + x_{p+2} \quad = b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mp}x_p \quad + x_{p+m} = b_m$$
$$x_1, x_2, ..., x_{p+m} \geq 0$$

Te nove promenljive, sem metodološkog (radi pronalaska rešenja), imaju i ekonomski značaj. Vrednosti pokazuju iznos neiskorišćenih resursa u rešenju. Dakle, vrenosti tih promenjivih pokazuju koliko resursa ostaje neiskorišćeno kada imamo optimalno rešenje tj. kada smo maksimizirali funkciju cilja. Ako uzmemo da je $p+m=n$, problem se može prikazati na sledeći način:

$$(\max)\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i=1,..., m)$$
$$x_j \geq 0 \qquad (j=1,..., n)$$

kao i u matričnom obliku

$$(\max)\ z = cx$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

gde je c vektor vrsta koeficijenata funkcije cilja n-tog reda, x vektor kolona promenjivih n-tog reda, A matrica koeficijenatareda (m, n) i b vektor kolona kolona slobodnih članova sistema ograničenja m-tog reda.

2.2 Simpleks metod

Simpleks metod je opšti algoritam koji se može koristiti pri rešavanju bilo kog problema linearnog programiranja. Pomoću ove metode, se nizom koraka dolazi do optimalnog rešenja. U svakom koraku se se utvrđuju vrednosti promenjivih koje odgovaraju ekstremnim tačkama skupa mogućih rešenja i proverava njihova optimalnost. Za potrebe ovog metoda, model (prethodni) se iskazuje nizom matrica:

funkcija cilja

$$\max z = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{p+m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{p+m} \end{bmatrix}$$

sistem ograničenja

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{p+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$x_1, x_2, ..., x_{p+m} \geq 0$$

Pojedine kolone matrice A predstavljaju vektore aktivnosti A_j (j=1,..., n=p+m)

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \; A_{p+m} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \; A_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

Tada možemo koristiti i sledeći vid zapisa

$$(\max) \; z = \sum_{j=1}^{p+m} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{p+m} A_j x_j = b$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j=1,...,p+m)$$

Postupak počinje određivanjem početnog bazičnog rešenja. Ono se određuje na način da se prvo pretpostavi da su sve realne promenljive jednake nuli, a dodatne promenljive jednake slobodnim članovima sistema ograničenja

$$x_j = 0 \;\; \text{za} \qquad j=1,..., p$$

$$x_{p+i} = b_i \;\; \text{za} \qquad i=1,..., m$$

Funkcija cilja, za ovo početno rešenje, je jednaka nuli. Vektorsku bazu na osnovu koje se utvrđuje početno bazično rešenje čine vektori koeficijenata uz dodatne promenljive, dok su vektori koeficijenata uz realne promenljive nebazični. Da bi se došlo do optimalnog rešenja potrebno je menjati vektorsku bazu. Dancigovi kriterijumi određuju kriterijume za promenu vektorske baze.

Za pretpostavljeno bazično rešenje možemo napisati, za vektore koji čine bazu

$$\sum_{i=p+1}^{p+m} A_i x_i = b,$$

a za nebazične vektore

$$\sum_{j=1}^{p} A_j x_j = 0$$

a funkcija cilja

$$z = \sum_{i=p+1}^{p+m} c_i x_i = 0$$

Svaki od nebazičnih vektora se može izraziti linearnom kombinacijom vektora baze, tj.

$$A_j = \sum_{i=p+1}^{p+m} x_{ij} A_i$$

gde su x_{ij}, za početno rešenje $x_{ij} = a_{ij}$, a u sledećim koracima se izračunavaju po promeni baze. Za svaki nebazični vektor se može odrediti vrednost z_j tako da je

$$z_j = \sum_{i=p+1}^{p+m} x_{ij} c_i$$

i služi za ispitivanje optimalnosti rešenja.

I simpleks kriterijum za izmenu vektorske baze kaže da je uključuvanje nebazičnog vektora u bazu moguće kod onog vektora A_l (l-tog) koji zadovoljava uslov

$$c_l - z_l = \max_j (c_j - z_j) > 0$$

Ukoliko su za neko od rešenja, ove razlike za sve nebazične vektore negativne, takvo rešenje predstavlja optimalno rešenje problema maksimuma. Drugim rečima, nije ispunjen uslov da se bilo koji preostali nebazični vektor uključi u bazu.

Da bi neki vektor bio uključen u bazu, drugi mora biti isključen jer postoji m linearno nezavisnih vektora problema. II simpleks kriterijum govori o isključivanju vektora iz baze. On kaže da je potrebno isključiti vektor A_k za koji je važi

$$\rho = \frac{x_k}{x_{kl}} = \min \frac{x_i}{x_{il}}, \text{ za } x_{il} > 0$$

Prethodni izraz predsatlja II Dantzigov simpleks kriterijum.On kaže da se posle određivanja vektora A_l, koji ulazi u bazu, vektor A_k, koji izlazi iz baze, određuje na osnovu ovog količnika. Izlazi vektor za koga je količnik minimalan.

Posle smene vektora u bazi, izračunava se novo poboljšano rešenje. To je moguće na dva načina:

1) na osnovu vrednosti ρ koju se izračunava na osnovu drugog simpleks kriterijuma, tako da su promenljive:

- novouvedena promenljiva, tj. ona koja odgovara vektoru A_l koji je uveden u bazu $x_l = \rho$
- ostale promenjive koje su i pre bile bazične $x_i' = x_i - \rho x_{il}$

2) posle određivanja vektora nove baze, vrednosti bazičnih promenljivih se mogu odrediti iz

$$x_B = \alpha^{-1} b$$

Gde je x_B vektor kolona bazičnih promenljivih, a α^{-1} inverzna matrica bazne matrice.

Po određivanju vrednosti za novo rešenje, određuje se vrednost funkcije cilja na osnovu $z_j = \sum_{i=p+1}^{p+m} x_{ij} c_i$, kao i vrednost funkcije z_j za nebazične vektore na osnovu $z_j = \sum_{i=p+1}^{p+m} x_{ij} c_i$. Za određivanje z_j potrebno je znati koeficijente linearne kombinacije x_{il}. Možemo ih smestiti u vektor kolonu x_j i izračunati iz izraza

$$x_j = \alpha^{-1} A_j$$

Posle određenog broja iteracija dolazi se do optimalnog rešenja.

2.3 Dualni problem

Za svaki primarni problem linearnog programiranja postoji njegov dualni problem, koji je, takođe, problem linearnog programiranja. Između primarnog i dualnog problema postoji inverzan odnos u pogledu osnovnog zahteva. Ako se kod jednog traži maksimizacija funkcije cilja, kod drugog se traži minimizacija. Dualni problem se uvodi u razmatranje i rešavanje jer on može da ima značajne analitičke i metodološke prednosti. Analitičke, jer se njegovim rešavanje dolazi do nekih značajnih saznanja.

Nekada je primarni problem težak za rešavanje a rešavanjem dualnog se brže i lakse dolazi do rešenja. Tu mogu da budu metodološke koristi jer pruža alternativni način dolaska do rešenja. Dualni problem linearnog programiranja se formira na sledeći način:

1.Ukoliko se primarnom problemu traži maksimizacija funkcije cilja, u dualnom je minimizacija, i obrnuto.

2.Smer znakova nejednakosti se menja, tako da bude suprotnog smera od primarnog problema

3.Transponuje se matrica koeficijenata sistema ograničenja primarnog problema. Ako u primarnom problemu postoji *m* nejednačina sa *p* promenjivih, u dualnom će biti *p* nejednačina sa *m* promenljivih

4.Koeficijenti uz promenjive u funkciji cilja dualnog problema jednaki su slobodnim članovima sistema ograničenja primarnog problema

5.Slobodni članovi sistema nejednačina dualnog problema jednaki su koficijentima iz funkcije cilja

6.Kao i u primarnom problemu, promenljive u dualnom problemu moraju biti nenegativne.

Na osnovu ovih pravila i u prethodnim delovima definisanog primarnog problema, dualni problem se predstavlja u sledećem obliku:

$$(\min)\, v = b_1 y_1 + b_2 x_2 + ... + b_m x_m$$

$$a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + ... + a_{m1} y_m \geq c_1$$

$$a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + ... + a_{m2} y_m \geq c_2$$

.....

$$a_{1p} y_1 + a_{2p} y_2 + ... + a_{mp} y_m \geq c_p$$

$$y_1, y_2, ..., y_m \geq 0$$

Ili u sledećem obliku

$$(\min)\, v = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \leq c_j \qquad (j=1,...,p)$$

$$y_i \geq 0 \qquad (i=1,..., m)$$

U primarnom problemu smo uveli dodatne promenljive $x_{p+1},...,x_{p+m}$. Na sličan način se to može uraditi i u dualnom problemu. Tada su dodatne promenljive $y_{m+1},...,y_{m+p}$. U tom slučaju je jednak broj promenjivih primarnog i dualnog problema. Može se uspostaviti veza između promenljivih primarnog i dualnog problema, tako da

svakoj dodatnoj promenljivoj primarnog problema odgovara jedna glavna promenljiva dualnog problema, i svakoj glavnoj promenljivoj primarnog problema odgovara jedna dodatna promenljiva dualnog problema. Ove veze ne podrazumevaju numeričku jednakost ali imaju veliki značaj, jer rešavanjem jednog problema, tj. određivanjem optimalnog rešenja, dobija se i optimalno rešenje njemu dualnog problema. Ako znamo rešenje primarnog problema, rešenje dualnog problema se može dobiti na dva načina:

a) Optimalne vrednosti glavnih promenljive dualnog rešenja y_i (i=1,..., m) se određuju kao negativna vrednost razlike prvog simpleks kriterijuma, za dodatne promenljive optimalnog rešenja primarnog problema

$$y_i = -(c_{p+i} - z_{p+i})$$

b) Na osnovu optimalnog rešenja primarnog problema, optimalne vrednosti glavnih promenjivih dualnog problema y_i (i=1,..., m) određuju se iz relacije

$$y = \bar{c}\,\alpha^{-1}$$

gde je y =(y_1,..., y_m) a $\bar{c}$ vektor vrsta koeficijenata iy funkcije cilja.

Pošto dualni problem dualnog problema predstavlja primarni problem, zadaci linearnog problema se mogu rešavati preko odgovarajućeč dualnog problema. Ova činjenica se često koristi kada je rešavanje primarnog problema komplikovano zbog velikog broja promenljivih.

Kao što je rečeno pored metodoloških prednosti koje može da pruži, rešavanje dualnog problema pruža i neka analitička objašnjenja. Neka je $z(x^*)$ optimalno rešenje primarnog problema, a y^* optimalno rešenje odgovarajućeg dualnog problema. Može se pokazati y da je

$y_i^* = \dfrac{\Delta z(x^*)}{\Delta b_i}$, gde je Δb_i povećanje resursa b_i (i=1,...,m), Δz povećanje funkcije cilja izazvano promenom vektora b (tj. resursa b_i) a y_i* optimalna vrednost dualne promenljive y_i. Ova relacija pokazuje da je optimalna vrednost dualne promenljive y_i pokazuje marginalnu vrednost funkcije cilja primarnog problema u odnosu na resurs b_i. Dakle, optimalna vrednost dualne promenljive y_i (y_i*) pokazuje za koliko jedinica će se promeniti funkcija cilja primarnog problema, ukoliko se resursa i za jedinicu. Dualne promenljive predstavljaju cene u senci korišćenih resursa.

3. Razmena

Da bi potrošači zadovoljili svoje potrebe moraju da vrše razmenu. U ovom delu razmatra se problem tzv. čiste razmene i objašnjava pojam Paretove efikasne alokacije.

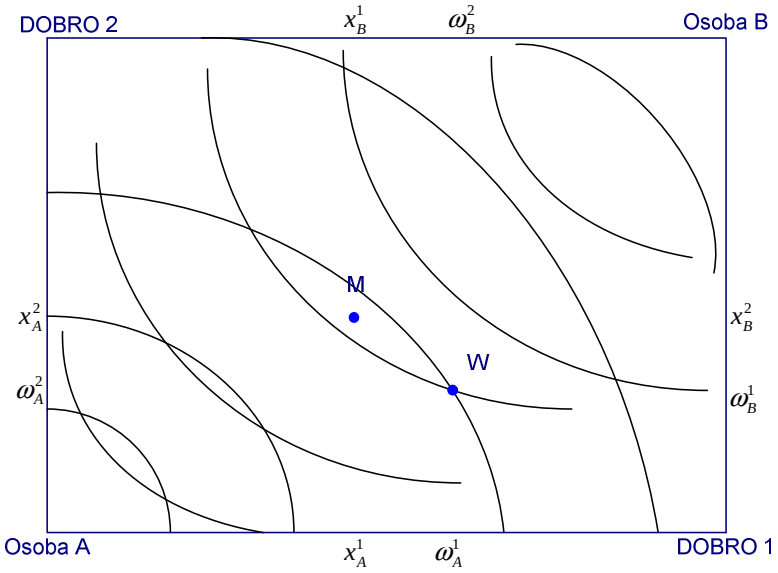
3.1 Pojam razmene

Razmena se događa na konkurentskom tržuštu sa dva potrošača i dva dobra(proizvoda). Na konkurentskom tržištu, svaki proizvođač i svaki potrošač uzimaju cenu kao datu. Još jedna pretpostavka je da potrošači imaju fiksna raspoloživa početna sredstva.

Neka su ta dva potrošača označena kako potoršači A i B, a dva dobra kao 1 i 2. Potrošačka korpa osobe A je $X_A = (x_A^1, x_A^2)$, pri čemu x_A^1 predstavlja potrošnju osobe A dobra 1, a x_A^2 je potrošnja osobe A dobra 2. Analogna potrošačka korpa osobe B je $X_B = (x_B^1, x_B^2)$. Par , X_A i X_B, naziva se alokacija. Alokacija je izvodljiva ako je potrošnja svakog dobra jednaka njegovoj početnoj količini.

$$x_A^1 + x_B^1 = \omega_A^1 + \omega_B^1$$
$$x_A^2 + x_B^2 = \omega_A^2 + \omega_B^2$$

Ovako definisana alokaciju, koja je izvodljiva, naziva se alokacija početno raspoloživih sredstava, (ω_A^1, ω_A^2) i (ω_B^1, ω_B^2) . Potrošači počinju sa tom alokacijom, a posle razmene, zavrsavaju sa konačnom alokacijom. Sredstvo koje pomaže, prilikom prikaza razmene, naziva se Edžvortova kutija. Ona pomaže da se grafički prikaže postupak razmene. Ona predstavlja, kao dva koordinatna sistema, koji su jedan naspram drugog. Na osama jednog označena su početne količine dobara potrošača A, a na drugoj potrošača B.



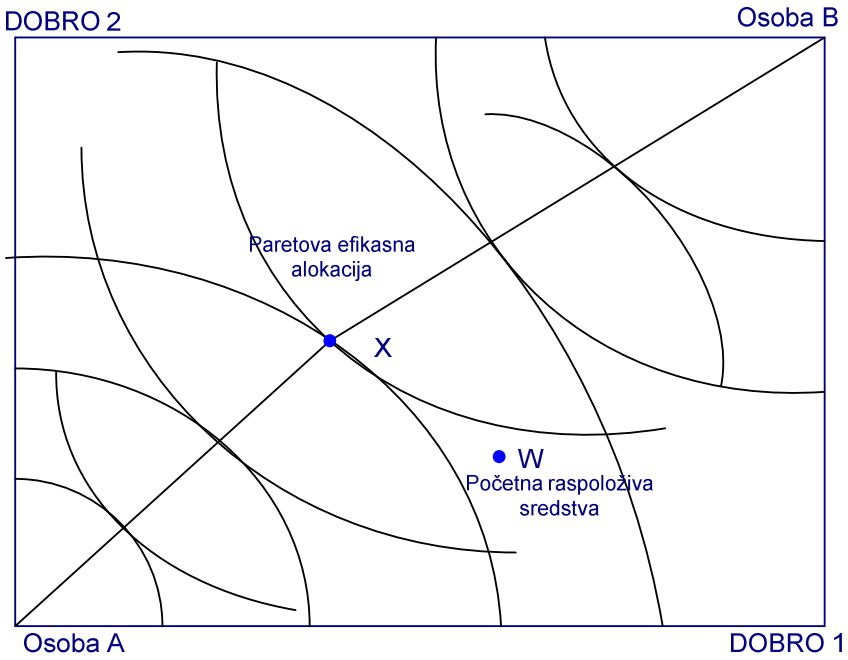
Slika 1.

Na osama je ukupna količina dobara. Na svakoj osi je predstavljeno po jedno dobro. Količine koje imaju potrošač A i potrošač B se dopunjuju, tako da je na jednoj osi, ukupna količina jednog dobra, koja postoji u ovoj zamišljenoj ekonomiji. Ako se krene od donjeg, levog ugla, po horizontalnoj osi, dolazi se do količine dobra 1, koje poseduje potrošač A, u konačnoj alokaciji. Ostatak, do kraja te ose predstavlja količinu dobra 1, koje ima potrošač B, u takođe, konačnoj alokaciji. U kutiji su nacrtane krive indiferentnosti potrošača, s tim, što se za potrošača A crtaju, kao da je koordinatni početak u domnjem levom uglu, a za potrošača B, koordinatni početak je u gornjem desnom uglu. Crtanje krivih, za potrošača A kreće od donjeg levog ugla, i kako se ide naviše, krećemo se ka alokacijama koje više preferira osoba A. Za potrošača B, crtanje kreće od gornjeg desnog, i kako se krećemo naniže, idemo u oblast alokacija, koje više preferira osoba B. Edžvortova kutija daje mogućnost da se predstave moguće korpe potrošnje za oba potrošača tj. izvodljive alokacije, kao i preferencije oba potrošača. Time se dobija potpuni opis potrebnih ekonomski značajnih osobina potrošača.

3.2 Razmena i Paretova efikasna alokacija

Početna raspoloživa dobra su data u tački W i razmena kreće iz te tačke. Takođe, kroz tačku W prolaze krive indiferentnosti potrošača A i B. Područje, na kojem je osoba A u boljem položaju nego što je sa početnim sredstvima, se nalazi iznad njene krive indiferentnosti koja prolazi kroz tačku W. Područje u kojem je osoba B u boljem položaju, od početnog položaja, se nalazi ispod krive indiferentnosti koja prolazi kroz tačku W. Područje, u kojem su obe osobe u boljem položaju, u odnosu na početni položaj, je u preseku ova dva područja. To područje izgleda kao projekcija sočiva na ravan. Jedna od alokacija u kojem i se obe osobe nalazile u boljem položaju, je u tački M, jer svaka alokacija u ovom području je bolja od početne alokacije. Da bi se našlo područje gde su obe osobe u boljem položaju i od tačke M, potrebno je nacrtati krive indiferentnosti koje prolaze kroz tu tačku. Potom je, opet, potrebno odrediti jednu tačku, u ovom novom području, i opet krive indiferentnosti. Ponavljajući taj postupak, došlo bi se do pozicije, u kojoj nijedna strana ne bi više bila zainteresovana za razmenu.

Na slici 2. prikazana je tačka X, u kojoj je razmena završena.



Slika 2.

U ovoj tački, skup tačaka iznad krive indiferentnosti potrošača A se ne seče sa skupom tačaka iznad krive indiferentnosti potrošača B. Od te tačke ne postoji razmena, u kojoj bi se obe osobe bolje osećale. Ovakva alokacija se naziva Paretova efikasna alokacija. To je beoma bitan pojam u ekonomiji. Neka alokacija je Paretova efikasna alokacija ako:

1. ne postoji način da svi učesnici u razmeni poboljšaju položaj, ili
2. ne postoji način da neki pojedinac poboljša položaj a da pritom neki drugi ne pogorša svoj.

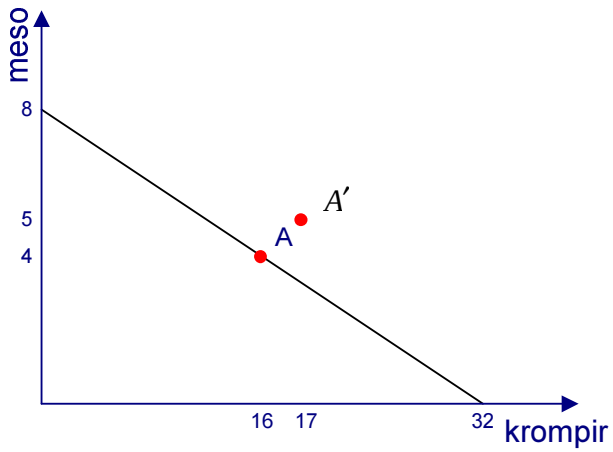
Geometrijski prikaz Paretove efikasne alokacije je da krive indiferentnosti učesnika u razmeni moraju biti tangentne. To je jasno, jer ako nisu tangentne, onda se ukrštaju, i postoji oblast u kojoj bi se mogao naći bolji položaj za obe strane. Odatle sledi da postoji mnogo Paretovih efikasnih alokacija. U stvari, za svaku krivu indiferentnosti postoji jedna. Skup svih Paretovih efikasnih alokacija u Edžvortovoj kutiji se naziva Paretov skup ili ugovorna kriva. U tipičnom slučaju, ugovorna kriva se kreće od koordinatnog početka osobe A, preko tačke X, do koordinatnog početka osobe B. Paretov skup opisuje sve moguće ishode razmene, koji donose prednost za obe strane, ukoliko se krene iz bilo koje tačke u kutiji. Paretov skup ne zavisi od količine početnih dobara , sem što određuje dimenzije kutije.

4. Međuzavisnost i dobici od trgovine

U ovom delu prikazana je trgovina između dva učesnika i objašnjena teorija komparativnih prednosti.

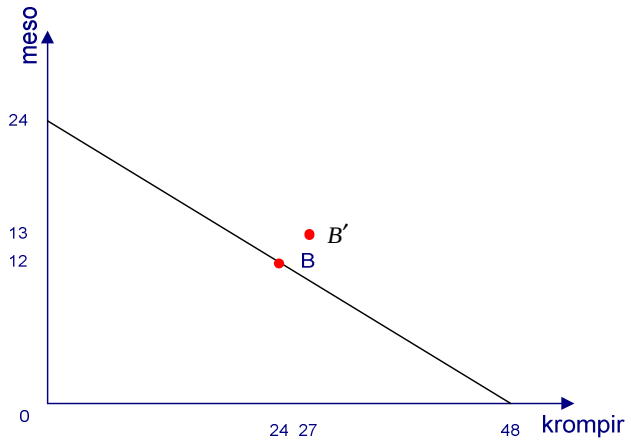
4.1 Primer trgovine dva proizvođača

Od trgovine, svi učesnici koji u njoj učestvuju, imaju dobitke. To se može pokazati na primeru jedne jednostavne privrede. U toj privredi postoje dva dobra, meso i krompir, i dva učesnika, stočar i zemljoradnik. Kada se stočar bavi samo proizvodnjom mesa a zemljoradnik proizvodnjom krompira, dobit od trgovine je najočiglednija. Trgovina pruža mogućnost stočaru da u zamenu za meso dobije krompir i tako obogati svoju trpezu. Zemljoradnik, za svoj krompir dobija meso, i na taj način i on dolazi bolji položaj. Međutim, situacija nije najjasnija, kada i stočar može, pored mesa da proizvodi krompir, i zemljoradnik uz krompir proizvodi meso. Ako stočar nije veštiji od zemljoradnika u proizvodnji krompira, i zemljoradnik od stočara u proizvodnji mesa, opet bi oni imali koristi od trgovine. Stočar bi menjao meso za krompir a zemljoradnik obrnuto. Postavlja se pitanje, šta se dešava, ako je jedan učesnik, ove zamišljene privrede, bolji od drugog u proizvodnji oba dobra, ako je stočar bolji i u proizvodnji mesa i u proizvodnji krompira. Odgovor na ovo pitanje nije lak. Potrebno je da se prvo razmotre proizvodne mogućnosti oba proizvođača. Neka je zemljoradnik u stanju da za 15 minuta proizvede jedan kilogram krompira a za 60 minuta kilogram mesa. Stočar je produktivniji u proizvodnji oba dobra, i u stanju je da za 10 minuta proizvede kilogram krompira i za 20 minuta kilogram mesa. Neka je njihov radni dan traje 8 sati i mogu da biraju kojom će proizvodnjom da se bave. Na slikama 3. i 4. su prikazane njihove proizvodne mogućnosti a kosa linija, na obe slike, predstavlja granicu poizvodnih mogućnosti. Ako zemljoradnik proizvodi samo meso, tad može da stvori 8 kilograma mesa, a ako se bavi samo krompirom, dostiže proizvodnju od 32 kilograma mesa.



Slika 3.

Ako proizvodi samo meso, stočar može, za jedan dan, da stvori 24 kilograma mesa, a ako proizvodi samo krompir, stvara 48 kilograma krompira.



Slika 4.

Ako ne sarađuju, onda granice njihovih proizvodnih mogućnosti predstavljaju i granice njihovih potrotrošačkih mogućnosti. Da bi se proverilo, da li razmenom mogu da dođu u bolji položaj, potrebno je znati njihove ukuse tj. njihove preferencije.

4.2 Teorija komparativnih prednosti

Pretpostavimo da su oni izabrali tačke A i B. Stočar proizvodi i troši 12 kilograma mesa i 24 kilograma krompira. Zemljoradnik proizvodi i troši 4 kilograma mesa i 16 kilograma krompira. Jedna od mogućih alokacija , u kojoj bi se i stočar i zemljoradnik našli u boljem položaju, je da zemljoradnik sve svoje vreme utoši na prozvodnju krompira. Tada bi on proizvodio 32 kilograma krompira na dan. Ako bi stočar 6 sati proizvodio meso a 2 sata krompir, imao bi 18 kilograma mesa i 12 kilograma krompira. Ako oni uđu u trgovinu, i stočar razmeni 5 kilograma mesa za 15 kilograma krompira, obojica će biti u boljem položaju. Stočar će imati 13 kilograma mesa i 27 kilograma krompira, što je za 1 kilogram mesa i 3 kilograma krompira više nego pre razmene. Zemljoradnik će imati 5 kilograma mesa i 17 kilograma krompira, 1 kilogram mesa i 1 kilogram krompira više nego na početku. Na slikama 3. i 4.je predstavljeno tačkama A' i B'. Pored razmene desio se još jedan veoma značajan događaj, zemljoradnik se specijalizirao u proizvodnji jednog dobra. On proizvodi samo krompir. Trgovina i specijalizacija ih, obojicu, dovode u bolji položaj. Ovaj događaj se opisuje pojmom komparativnih prednosti.

Kada je neka država, preduzeće ili poredinac bolji od drugih u proizvodnji nekog dobra ili usluge, kaže se da ima apsolutnu prednost. U prethodnom primeru, stočar ima apsolutnu prednost i u proizvodnji mesa i u proizvodnji krompira. Njemu je za jedan

kilogram mesa potrebno 20 minuta a zemljoradniku 60 minuta. U proizvodnju jednog kilograma krompira ulaže 10 minuta a zemljoradnik 15. Merenom količinom inputa, ovde je to vreme, stočar ima manje troškove proizvodnje od zemljoradnika, i za meso i za krompir.

Međutim, o trošku se sem na osnovu inputa može razmišljati na osnovu oportunitetnih troškova. Oportunitetni trošak neke stvari je ono čeka se odričemo da bismo dobili tu stvar. Stočar i zemljoradnik raspoređuju vreme na proizvodnju krompira i mesa. Vreme provedeno u proizvodnji mesa im smanjuje vreme raspoloživo za proizvodnju krompira. Oni se, u stvari, kreću duž granice njihovih proizvodnih mogućnosti, naravno, ako sve vreme koriste za rad bez dokolice. Odriču se jedinica jednog dobra da bi proizveli jedinicu drugog dobra. Oportunitetni trošak stočara za jedan kilogram mesa je 2 kilograma krompira, ili drugačije, njegov oportunitetni trošak kilograma krompira je pola kilograma mesa. Za zemljoradnika, oportunitetni trošak kilograma mesa je 4 kilograma krompira, i oportunitetni trošak kilograma krompira je četvrtina kilograma mesa.

Kada se opisuje oportunitetni trošak dva proizvođača koristi se pojam komparativne prednosti. Proizvođač koji se prilikom proizvodnje jednog dobra odriče manje drugih dobara, ima manji oportunitetni trošak i za njega se kaže da komparativnu prednost u toj proizvodnji. U ovom slučaju zemljoradnik ima komparativnu prednost u proizvodnji krompira a stočar u proizvodnji mesa. Iako stočar ima apsolutnu prednost u proizvodnji oba dobra, samo u proizvodnji jednog ima komparativnu prednost.

Kada se svaka osoba specijalizuje u proizvodnji dobra u kojem ima komparativnu prednost, ukupna proizvodnja raste i svakoj osobi je bolje. Da bi se to ostvarilo , potrebna je i trgovina, koja je korisna jer omogućava ljudima da se specijalizuju za aktivnosti u kojima imaju komparativnu prednost.

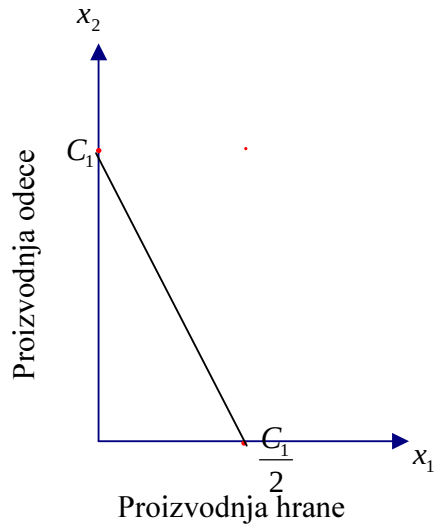
5. Primena linearnog programiranja u teoriji komparativnih prednosti

Linearno programiranje se može iskoristiti za prikaz teorije komparativnih prednosti. U ovom delu se koristi na primeru dve zemlje. Moguće je i izračunati ukupnu optimalnu proizvodnju tih zemalja. Prikazan je i dual primera međunarodne trgovine.

5.1 Primer trgovine dve zemlje

Pretpostavimo da postoje dve zemlje (A i B), koje proizvode hranu i odeću (1 i 2). Prva može da svoje resurse prebacuje iz proizvodnje jednog proizvoda u drugi, tako da jednu jedinicu hrane može da zameni sa dve jedinice odeće. Druga je u stanju da jednu jedinicu hrane pretvori u jednu jedinice odeće. Prema klasičnoj teoriji međunarodne trgovine obe zemlje će imati koristi ukoliko razmenjuju proizvode, pri odgovarajućem odnosu cena. Prva zemlja bi se, skoro uvek, specijalizovala u proizvodnji odeće a druga hrane. Razmena će se obavljati ukoliko prva zemlja za jedinicu hrane treba da da između jedne i dve jedinice odeće. Obe zemlje će imati koristi od trgovine i svetska proizvodnja će biti optimalna.

Mi ćemo do ovih zaključaka doći metodom linearnog programiranja. Pretpostavimo da prva zemlja ima linearnu proizvodnu krivu, prikazano na slici 5.,



Slika 5.

i može da vrši razmenu sa drugom, pri odnosu cena hrane i odeće p_1 / p_2 (hrana /odeća) između 1 i 2 . Realni nacionalni proizvod prve zemlje, izražen u proizvodu 2, može da se napiše u obliku

$$Z = \frac{p_1}{p_2} x_1 + x_2$$

Ili ako je p1/p2=1.5 kao $Z = 1{,}5x_1 + x_2$

Naš problem je da maksimiziramo njen nacionalni proizvod imajući u vidu krivu proizvodnih mogućnosti. Postavka problema metodom linearnog programiranja bi bila da se nađe maksimum prethodne jednačine pod uslovom

$$2x_1 + x_2 \le C_1$$

i da su x_1, x_2 nenegativne vrednosti (što je i logično jer predstavljaju broj proizvoda koji nikad ne može biti manji od nule). Maksimalne proizvodne mogućnosti su date jednačinom, i maksimalna moguća proizvodnja odeće, kada se proizvodi x_1 hrane, je data sa $x_2 = C_1 - 2x_1$, ali smo je modifikovana u nejednačinu da bi bio zadovoljen model linearnog programiranja. C_1 je broj koji predstavlja proizvodnju odeće kada ne postoji proizvodnja hrane. Zadatak se može rešiti i grafički i numerički.

Numerički se lako dolazi do rešenja. Maksimalni nacionalni proizvod je kada je $x_1 = 0$, $x_2 = C_1$ i tada je upravo max(*Z*)= C_1. Dakle, država A treba da se specijalizira u proizvodnji odeće.

Maksimizirajmo sada nacionalni proizvod druge zemlje. Postavka modela linearnog programiranja je sledeća:

$\max(Z') = 1{,}5x_3 + x_4$

$x_3 + x_4 \le C_2$

C_2 predstavlja proizvodnju jednog proizvoda kada je proizvodnja drugog jednaka nuli. x_3 i x_4 predstavljaju proizvodnju proizvoda 1 i 2.U ovom slučaju je to svejedno jer se jedna jedinica hrane menja za jednu jedinicu odeće. Rešenje kaže da prva zemlja ima maksimalni nacionalni proizvod kada proizvodi samo hranu i tada je $\max(Z') = 1{,}5C_2$.

Ovim je dokazano da bi zaista obe zemlje imale koristi od specijalizacije proizvodnje. Prva zemlja bi proizvodila odeću a druga hranu.

5.2 Granica efikasnosti

Neka postoje dve zemlje sa istim proizvodnim mogućnostima kao u prethodnom poglavlju. Zadatak nam je da odredimo kolika je optimalna svetska proizvodnja. Pretpostavimo da znamo kolika je proizvodnja hrane u obe zemlje. Tada je potrebno odrediti kolika je optimalna svetska proizvodnja odeće. Neka je, kao i u prethodnom delu, proizvodnja zemlje A data sa x_{11} (hrana) i x_{12} (odeća) i neka C_1 predstavlja resurse raspoložive za proizvodnju. Zemlja B, takođe, ima proizvodnju hrane označenu sa x_{21} i proizvodnju odeće datu sa x_{22}. Ukupni resursi raspoloživi za proizvodnju su C_2. Za obe zemlje proizvodne krive su linearne funkcije. Ukupnu svetsku količinu proizvedene hrane označavamo sa X_1 a odeće sa X_2. Ovaj problem predstavlja tipičan problem linearnog programiranja i to problem maksimuma. Dakle, traži se maksimalni X_2, $X_2 = x_{12} + x_{22}$ pri

$X_1 = x_{11} + x_{21}$

$2x_{11} + x_{12} \le C_1$

$x_{21} + x_{22} \le C_2$

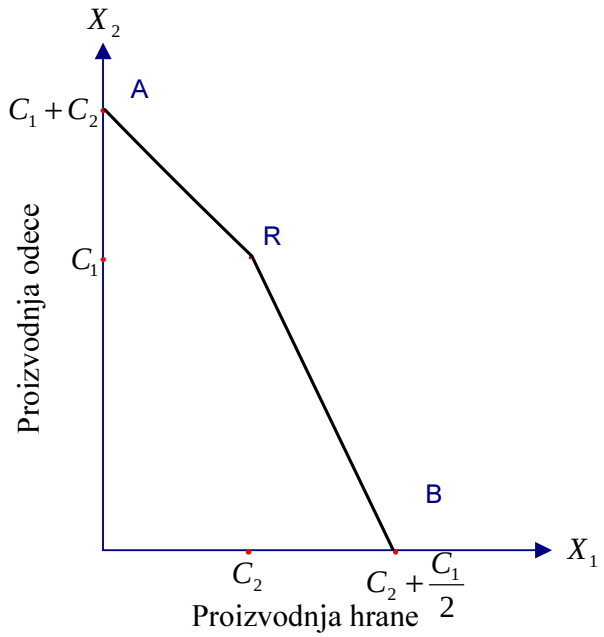
i $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \ge 0$

Sistem se može preurediti i druga jednačina zameniti nejednačinom, ali na način da ne utiče na rezultat, da bi se dobio model linearnog programiranja.

$\max X_2 = x_{12} + x_{22}$

$$2x_{11} + x_{12} \le C_1$$
$$x_{21} + x_{22} \le C_2$$
$$-x_{11} - x_{21} \le 0$$
$$x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} \ge 0 .$$

Kada bi se znali numerički podaci, brzo i jednostavno bi se došlo do rešenja. U opštem slučaju za različite X_1 se dobijaju različiti X_2. Svetska kriva proizvodnih mogućnosti *ARB*, takodje se naziva i „ granica efikasnosti" se može prikazati na sledećoj Slici 6..



Slika 6.

Ova kriva prikazuje koliki je moguća maksimalna svetska proizvodnja odeće za datu svetsku proizvodnju hrane, i obrnuto. U delu krive AR, nagib je -1 i predstavlja odnos mogućih proizvodnji hrane i odeće u drugoj zemlji.U drugom delu krive RB, nagib je -2 i predstavlja odnos proizvodnji hrane i odeće u prvoj zemlji. Reč je o maksimalnim mogući proizvodnjama., mada se proizvodnja može naći bilo gde između krive ARB i koordinatnih osa, ali tada ne bi bila maksimalna proizvodnja. Kritična tačka je R, nazvana Rikardo tačka, i u toj tački, prema teoriji komparativnih vrednosti treba da se nalazi svetska proizvodnja. U toj tački prva zemlja se specijalizovala u proizvodnji odeće a druga u proizvodnji hrane.

Marginalni trošak, prelaska sa proizvodnje jednog dobra na drugo, dat je, u opštem slučaju odnosom $-\frac{\partial X_2}{\partial X_1}$, apsolutnom vrednošću nagiba krive. U tački R je, strogo govoreći nedefinisan, ali se može usvojiti da je, u rasponu marginalnih troškova sa leve i desne strane te tačke.

5.3 Dual primera međunarodne trgovine

Posmatrajmo opet zemlje iz prethodna dva poglavlja. Neka su date cene hrane. Jedinica hrane vredi p_1 a jedinica odeće p_2, pri čemu je $p_2 < p_1 < 2\,p_2$. Za svaku zemlju se definišu jedinice resursa dovoljne za proizvodnju jedinice odeće. Tada, sa jednom jedinicom resursa zemlje A može da se proizvede pola jedinice hrane ili jedna jedinica odeće. Sa jednom jedinicom resursa zemlje B može da se proizvede jednu jedinicu hrane ili jednu jedinicu odeće. Za razliku od ranije, kod primarnog problema, sada ne govorimo o proizvodima nego o jedinicama resursa. Neka su broj jedinaca resursa prve zemlje, određene za proizvodnju hrane i odeće x_{11} i x_{12}, respektivno. Ukupan broj jedinica resursa druge zemlje su x_{21} i x_{22}. Broj jedinica resursa u zemljama je Q_1 i Q_2. U primarnom problemu maksimizira se vrednost proizvodnje (autputa). Funkcija cilja glasi

$$\max(z) = p_1(\frac{1}{2}x_{11} + x_{21}) + p_2(x_{12} + x_{22})$$

Ograničenja su data sa

$$x_{11} + x_{12} \le Q_1$$

$$x_{21} + x_{22} \le Q_2$$

Naravno, potpuno je jasno da promenljive imaju nenegativnu vrednost.

Sada se može formulisati dualni problem. Pošto u primarnom problemu postoje dve nejednačine ograničenja, dualni problem ima dve promenljive y_1 i y_2. Funkcija cilja koja treba da se minimizira je

$$\min(v) = Q_1 y_1 + Q_2 y_2$$

Dualni problem ima četiri ograničenja, jer je primarni ima četiri promenljive. Sistem ograničenja glasi

$$y_1 \ge \frac{1}{2}p_1$$

$$y_1 \ge p_2$$

$$y_2 \ge p_1$$

$$y_2 \ge p_2$$

Promenjive treda da budu nenegativne, a od tog zahteva, strožiji su zahtevi iz sistema ograničenja. Postavlja se pitanje, šta predstavljaju promenljive u ovom dualnom problemu. Iz sistema ograničenja je jasno da su, fizički, cene jer se porede sa cenama p_1 i p_2. y_1 je cena resursa prve zemlje jer se množi sa Q_1 (vidi se iz funkcije cilja duala). Slično tome, i y_2 predstavlja cenu resursa druge zemlje. *v* je ukupna vrednost resursa. Interpretacija jednačina sistema ograničenja problema duala je, da one kažu da resursi treba da imaju dovoljno visoku vrednost, bez obzira da li se koriste za proizvodnju hrane ili odeće. Vrednost resursa treba da bude barem jednaka vrednosti proizvoda.

Rešenje dualnog problema je trivijalno i očigledno, $y_1 = p_2$, $y_2 = p_1$. y_1 i y_2 predstavljaju vrednost resursa kada se najprofitabilnije koriste.

6. Finansijska tržišta i Beogradska berza

U ovom delu dat je prikaz stanja finansijskog tržišta u Srbiji i Beogradske berze.

6.1 Finansijsko tržište u Srbiji

Finansijska tržista su danas od najvećeg značaja za funkcionisanje celokupne svetske ekonomije. Finansijsko tržiste predstavlja transmisioni mehanizam za transfer sredstava privrednih subjekata koji imaju viškove, onima kojima ta sredstva nedostaju za određene poslovne aktivnosti[1]. Prenos sredstava se može vršiti kroz bankarski sistem ili emitovanjem hartija od vrednosti. Uža definicija finansijskog tržista vezana je za tržista hartija od vrednosti.

Da bi finansijska tržista funkcionisala postoje finansijski instrumenti. Oni mogu biti dužnički i vlasnički. Najpoznatiji, a i nama u ovom radu najinteresantniji, vlasnički instrumenti su akcije. Kada govorimo o dužničkim, najčesce pomislimo na obaveznice.

Najšira podela finansijskih tržišta je na na tržište kapitala i novčano tržište. Tržište kapitala čine dužnički finansijski instrumenti sa rokom dospeća dužim od godine dana . Tržište novca čine dužnički finansijski instrumenti sa rokom dospeća do godine dana. Instrumenti tržišta novca su: trezorski zapisi, repo transakcije, međubankarske pozajmice, komercijalni zapisi, certifikati o depozitu.

Instrumenti tržista kapitala su akcije i obaveznice (državne, municipalne i korporativne).

Posle 2000-te godina došlo je do značajnog razvoja finansijskog tržišta u Srbiji. Najznačajniji učesnici su banke, gde najveće učešće ima strani kapital. Veliki broj domaćih banaka je ugašen a na njihovo mesto su došle banke sa stranim kapitalom, ostale su uglavnom privatizovane. Proces privatizacije je omogućio i intenzivirao tržište akcija a pojavile su se i obaveznice emitovane na osnovu stare devizne štednje. Sektor osiguranja je uređen i takođe je beležio rast. Na Beogradskoj berzi bilo je veliko učešce stranih ulagača. Međutim, nagli i veliki rast finansijskog tržišta prekinula je svetska kriza. Domaći ulagači nemaju potreban kapital a strani se povlače. Na bankarskom tržištu za sada nema velikih promena i situacija se trenutno stabilizovala, ali Beogradska berza je doživela veliki pad.

Usvojen je veliki broj zakona koji je omogućio rad finansijskog tržišta Srbije.

6.2 Berza

Kada govorimo o finansijskim tržištima, obično prvo pomislimo na berzu. Berza je nekad bila fizičko mesto na kojem se trgovalo različitom robom (na pr. Njujorkška berza), a danas sa razvojem moderne tehnologije to više nije tako (NASDAQ). Na berzama se trguje različitim hartijama od vrednosti. Predmet analize u ovom radu su akcije i obaveznice. Rad berzi određuje država zakonima i ostalom pravnom regulativom,

[1] Jeremic, Z. *Finansijska tržišta*, Univerzitet Singidunum, Beograd, 2009

i sama berza svojim statutom, organizacijom i infrastrukturom. Berza je mesto, gde se na organizovan način spajaju nalozi o prodaji i kupovini hartija od vrednosti. Da bi se trgovalo hartijama od vrednosti, one moraju biti listirane tj. moraju zadovoljavati uslove koje zahteva berza. Trgovinu obavljaju brokeri i dileri. Brokeri trguju samo u ime i za račun drugih , dok dileri to mogu da rade i u svoje ime. Današnje berze su tržišta na kojem se trguje samo sa listiranim hartijama od vrednosti a mogu imati delove koji su manje formalizovani i gde su mogući razni načini trgovanaja i sa nelistiranim hartijama.

6.3 Beogradska berza

Beogradska berza ima je osnovana 1894. godine na osnovu Zakona o javnim berzama donetog 1886. godine. Radila je sa prekidima, za vreme I i II svetskog rata, da bi bila ugašena 1953. godine. Berza povono počine sa radom 1989. godine kada su na osnovu Zakona o tržištu novca i kapitala formirane dve institucije-Tržište novca i Tržište kapitala. 1992. godine, Tržište kapitala se preimenuje u Beogradsku berzu, ali tek su reforme posle 2000. godine omogućile njen puni rad. Beogradska berza je zatvoreno akcionarsko društvo, ima dobru saradnju sa regionalnim berzama i član je više federacija berza.

Zakon o tržištu hartija od vrednosti i drugih finansijskih instrumenata kaže ''Berza je pravno lice organizovano kao akcionarsko društvo koje, u skladu sa zakonom, obavlja delatnost trgovine hartijama od vrednosti i drugim finansijskim instrumentima na berzanskom tržištu, odnosno na berzanskom i vanberzanskom tržištu''. Berza obavlja sledeće poslove : listing (prijem hartija od vrednosti na listing berze), trgovanje (organizovano trgovanje hartijama od vrednosti kroz povezivanje ponude i tražnje), informisanje (informisanje javnosti o podacima značajnim za trgovinu hartijama od vrednosti i objavljivanje kursnih lista hartija od vrednosti).

Na Beogradskoj berzi hartije od vrednosti se mogu listirati na Listingu A (Prime market) i Listingu B (Standard market) u zavisnosti od ispunjenosti kriterijuma za listing. Na Listingu A se nalaze: Energoprojekt holding, Soja protejin i Tigar. Obaveznice stare devizne štednje se nalaze na Prime marketu. Na listingu B su: Alfa plam, Komercijalna banka i Metalac. Ostale kompanije su na vanberzanskom tržištu. Ovako mali broj akcija na berzanskom tržištu i njihova mala aktivnost ukazuju na nerazvijenost finansijskog tržišta u Srbiji. Ako se ispune uslovi dolazi i do delistiranja hartije od vrednosti. Trgovanje može biti organizovano na jedan od sledećih načina: metod preovlađujuće cene, metod kontinuiranog trgovanja i metod minimalne cena. Likvidnijim akcijama se trguje metodom kontinuiranog trgovanja a manje likvidnim akcijama metodom preovlađujuće cene.

Na beogradskoj berzi se računaju dva indeksa: BELEX15 i BELEXline. BELEX15 sačinjavaju 15 relativno likvidnih akcija koje se ne nalaze sve na berzanskom tržištu. On je ponderisan tržišnom kapitalizacijom koja se nalazi u slobodnom prometu. BELEXline je ponderisan tržišnom kapitalizaciju i u svom sastavu ima 100 kompanija.
Posle prethodnog velikog rasta, Beogradska berza je nastankom svetske ekonomske krize doživela veliki pad vrednosti akcija i indeksa i završila 2008.godinu na najnižim vrednostima. Razlog tome je i prodaja akcija od strane stranih investitora. Međutim, od proleća 2009. dolazi do stabilizacije i postepenog rasta.

7. Moderna portfolio analiza-Markovicev model

Revoluciju u pristupu investiranja i sagledavanja rizika i očekivanih prinosa načinio je Hari Markovic. U ovom delu objašnjeni su osnovi pojmovi njegove teorije: očekivani prinos, standardna devijacija, korisnost i teorema o efikasnom skupu.

7.1 Osnovna ideja

Investitori treba da prilikom ulaganja odrede u koje hartije od vrednosti da ulože. Cena hartija u budućnosti nije sigurna, pa tako i vrednost portfolija koji je skup hartija od vrednosti, nije smoguće sa sigurnošću predvideti. Potrebno je od ogromnog broja mogućih pronaći optimalni portfolio. Hari Markovic je u svom članku 'Portfolio selection', obavljenom 1952. godine u 'The Journal of Finance', postavio temelje za Modernu teoriju portfolija.

Markovic polazi od pretpostavke da investitor ima određenu količini novca, koju hoće da uloži, tj. kupi hartije od vrednosti, u početnom trenutku t=0 i da zadrži do trenutka prodaje t=1, kada ponovo može da investira ili da potroši. On želi da bude nagrađen za tu odloženu potrošnju ali ta nagrada nije sigurna, jer ne možemo sa sigurnošcu znati vrednost portfolija. Zato govorimo o očekivanom prinosu i to je prvi bitan pojam Markoviceve teorije. Dakle, prinos nije siguran i postoji rizik, koji može da ugrozi prinos i zadovoljstvo investitora. Rizik je drugi bitan pojam.

Želja svakog investitora je da maksimizira očekivanu dobiti i da minimizira rizik, a oni si u večini slučajeva međusobno suprostavljeni. Međutim, to se može postići diversifikacijom, ulaganjem u više odabranih hartija od vrednosti, tj. formiranjem i optimizacijom portfolija.

Prinos (precizno bi se reklo stopa prinosa ali je termin prinos ustaljen) portfolija r_p se definiše relacijom

$$r_p = \frac{W_1 - W_0}{W_1}\ ^{2},$$

gde je W_0 (vrednost portfolija na početku perioda ulaganja) a W_1(vrednost portfolija na kraju perioda ulaganja plus svi prihodi koji je doneo portfolio od početnog do krajnjeg trenutka). Investitor ne zna u trenutku t=0 koja će biti vrednost W_1, stoga je W_1 slučajna vrednost, a odatle sledi i da je r_p slučajna vrednost. Zato se uvodi u posmatranje očekivani prinos $\overline{r_p}$. Markovic pretpostavlja da je ovu slučajnu veličinu opisuju, očekivani (srednji) prinos i standardna devijacija. Standardna devijacija predstavlja meru rizika. On smatra da investitor odluku o sastavu portfolija treba da zasnuje na osnovu očekivane vrednosti i standardne devijacije portfolija, i naravno sopstvene spremnosti na rizik.

[2] Sharpe W., Gordon A., Bailey J. *Investments*, Prentice Hall, 2009

Vrednosti očekivanih prinosa i standardne devijacije možemo dobiti iz istorijskih cena hartija od vrednosti koje sačinjavaju portfolio. Iz istorijskih serija podataka o prinosu i standardnim devijacijama hartija od vrednosti, vrši se optimizacija portfolija.

7.2 Očekivani prinos i standardna devijacija portfolija

Postoji pravilo kaže da ne treba 'stavljati sva jaja u istu korpu', zato je i pre nastanka moderne portfolio teorije vršena diversifikacija portfolija. Diversifikacija je način da se smanji rizik.

Pretpostavka je da se portfolio sastoji od N hartija od vrednosti. Očekivana vrednost portfolija jednaka je zbiru ponderisanih vrednosti hartija koje sačinjavaju portfolio. Ponderi predstavljaju procentualno učešće hartija u portfoliju. Očekivana vrednost portfolija $\overline{r_p}$ je data izrazom

$$\overline{r_p} = \sum_{i=1}^{N} x_i \overline{r_i} = x_1 \overline{r_1} + x_2 \overline{r_2} + ... + x_N \overline{r_N} ,$$

gde je očekivana vrednost prinosa i-te hartije je $\overline{r_i}$ a njen ponder x_i.

Za izračunavanje očekivanih prinosa koriste se istorijski podaci. Ako postoji M prethodnih perioda, koje se posmatraju , i naravno, M vrednosti ostvarenih prinosa u tim periodima, onda se očekivani prinos pojedinačnih hartija određuje na sledeći način:

$$\overline{r_i} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} r_{ik} ,$$

gde su istorijske vrednosti za i-tu hartiju date kao $r_{i1} ... r_{ik} ... r_{iM}$.

Za meru rizika portfolija koristi se standardne devijacija. Standardna devijacija portfolija σ_p data je izrazom:

$$\sigma_p = \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij} \right]^{\frac{1}{2}} ,$$

gde je σ_{ij} kovarijansa prinosa između hartija *i* i *j*, a x_i i x_j ponderi hartija od vrednosti.
Kovarijansa je apsolutna statistička mera koja govori kako se kreću prinosi hartija od vrednosti *i* i *j*. Izračunava se kao:

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{M-1} \sum_{k=1}^{M} \left(r_{ik} - \bar{r}_i\right)\left(r_{jk} - \bar{r}_j\right)$$

Zbir se deli sa M-1 zato da bi se dobila nepristrasna ocena kovarijanse, mada to, ako postoji veliki broj uzoraka ne utiče značajno na rezultat.

Ako je kovarijansa pozitivna vrednost onda se prinosi na hartije kreću u istom smeru, ako je jedna ostvarila dobre rezultate onda je i druga. Ako je jedna ostvarila prinos manji od očekivanog, onda i i druga ostvaruje lošiji prinos. Ako je kovarijansa bliska ili

jednaka nuli onda, onda je veza između dve hartije od vrednosti mala ili ne postoji. Ako je negativna, jedna hartija je ostvarila dobre rezultate a druga loše.

Slična kovarijansi je i statistička mera, korelacija. Veza između kovarijanse i korelacije je data relacijom:

$$\sigma_p = \rho \sigma_i \sigma_j$$

gde je ρ korelacioni koeficijent (korelacija) između hartija *i* i *j*. Njegove vrednosti su između -1 i +1, između savršeno negativne i savršeno pozitivne veze. Ako je korelacija pozitivna, prinosi hartija od vrednosti se kreću u istom smeru, a ako je negativna, jedna ima prinos bolji od očekivanog a druga lošiji.

Ove relacije se mogu prikazati i matrično jer to olakšava rad prilikom određivanja portfolija.

Neka je **R** matrica tipa 1*N, koja predstavlja očekivane prinose hartija od vrednosti i data je kao

$$R = \left[\overline{r_1} \quad \overline{r_2} \ldots \overline{r_i} \ldots \overline{r_N} \right]$$

Matrica pondera **X** je tipa 1*N i predstavlja procentualne vrednosti učešća pojedinačnih hartija u portfoliju

$$X = \left[x_1 \quad x_2 \ldots x_i \ldots x_N \right]$$

Korelaciona matrica **C** je tipa N*N, i njeni elementi su kovarijanse između pojedinih hartija

$$C = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1k} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{24} & \cdots & \sigma_{2N} \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \sigma_{k1} & \sigma_{k2} & \cdots & \sigma_{kk} & \cdots & \sigma_{kN} \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \cdots & \sigma_{Nk} & \cdots & \sigma_{NN} \end{bmatrix}$$

Očekivani prinos može da se izračuna množenjem matrica kao

$$\overline{r_p} = R * X^T \ ,$$

gde je X^T transponovana matrica X.

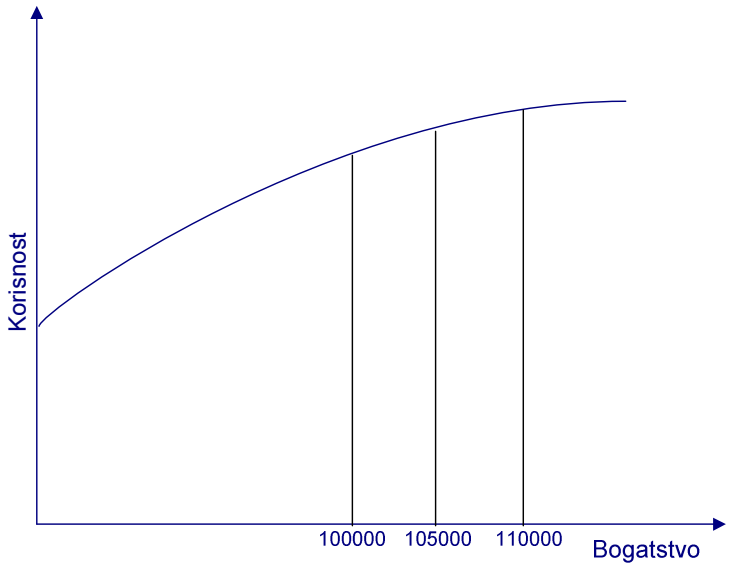
Standardna devijacija portfolija se može izračunati kao

$$\sigma_p = \left(X * C * X^T\right)^{\frac{1}{2}}$$

7.3 Korisnost i krive indiferentnosti

Prilikom ulaganja investitor se rukovodi korisnošću koje za njega ima ulaganje. Korisnost je pojam koji se koristi da bi se kvantifikovalo relativno zadovoljstvo koje ljudi osećaju prilikom ekonomskih aktivnosti kao sto su potrošnja ili investiranje. Svaka osoba ima drugačiji osećaj korisnosti, ali pretpostavljamo da su ljudi racionalni i alociraju svoje resurse tako da povećavaju svoj osećaj korisnosti. Markovicev pristup problemu selekcije portfolija se može videti kao pokušaj da se maksimizira očekivana korisnost povezanu sa investitorovim konačnim blagostanjem.

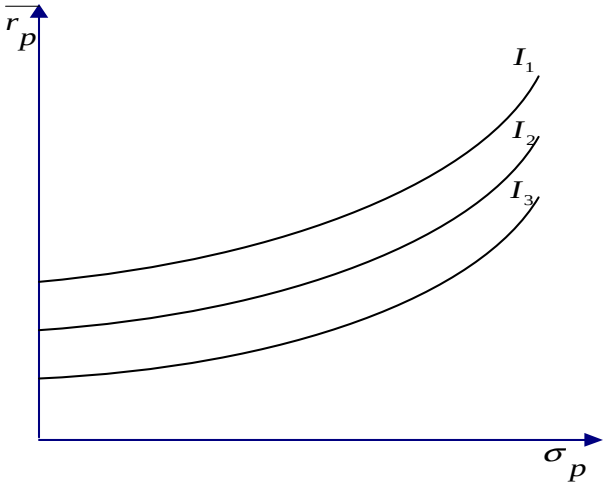
Svaki investitor ima jedinstvenu funkciju korisnosti. Svaki dodatni dinar koji neko primi predstavlja različito zadovoljstvo. Reč je o marginalnoj korisnosti. Bogati investitor, na svaki dodatni dinar prihoda , oseća manje zadovoljstvo od siromašnog investitora. Na slici 7. je prikazano kako izgleda kriva korisnosti.



Slika 7. Korisnost od blagostanja

Može se primetiti da, što je veće bogatstvo investitora, svaki naredni dodatni dinar donosi manje zadovoljstvo od prethodnog. Osoba koji poseduje 100000 dinara i dobije dodatnih 5000 dinara oseća veću korisnost od osobe koja poseduje 105000 dinara i dobije istu sumu. Na primer, osoba koja ima 1000 dinara i izgubi 500, to mnogo teže prihvata nego osoba koja ima 10000 dinara i takođe izgubi 500. Investitor kome se više umanjuje korisnost ima veću odbojnost prema riziku. To, naravno utiče na smanjenje njegove želje da investira u rizičnije portfolije.

Različite kombinacije očekivanog prinosa i rizika mogu da proizvodu iste stepen korisnosti za investitora. Kriva indiferentnosti predstavlja skup kombinacija rizika i očekivanog prinosa koje investitoru pružaju istu korisnost. Investitor podjednako prihvata kombinacije na jednoj krivoj. Krive indiferentnosti jednog investitora su date na slici 8. i one se nikada ne seku.



Slika 8. Krive indiferentnosti investitora

7.4 Teorema o efikasnom skupu

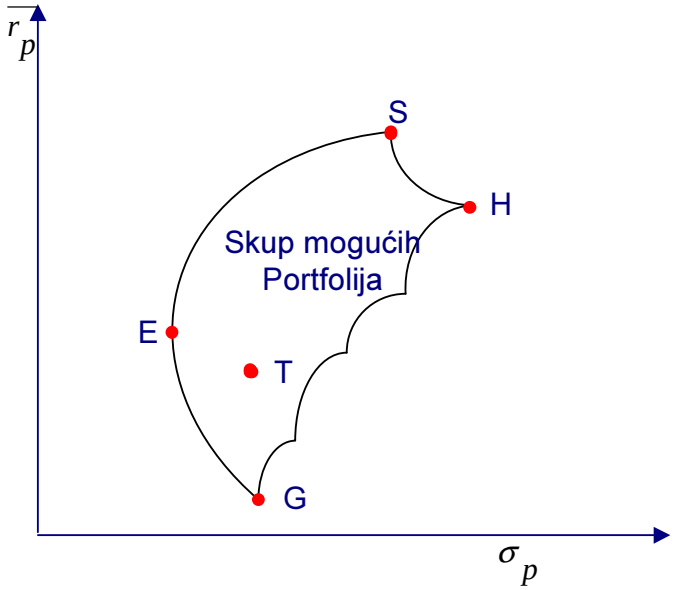
Od skupa N hartija vrednosti moguće je formirati beskonačan broj portfolija. Čak i ako imamo samo dve hartije od vrednosti, takođe je moguće formirati beskonačno mnogo portfolija. Nemoguće je proceniti sve portfolije a nama je potrebno da znamo koje da uzmemo u obzir. Teorema o efikasnom skupu kaže:

Investitor bira optimalni portfolio iz skupa portfolija koji:

1. nudi maksimalnu očekivanu dobit za različite vrednosti rizika, i
2. nudi minimalni rizik za različite vrednosti očekivane dobiti.

Skup portfolija koji zadovoljava ove uslove naziva se efikasni skup ili efikasna granica.

Na slici 9. su prikazani svi mogući portfoliji (skup mogućih portfolija) i efikasni skup.



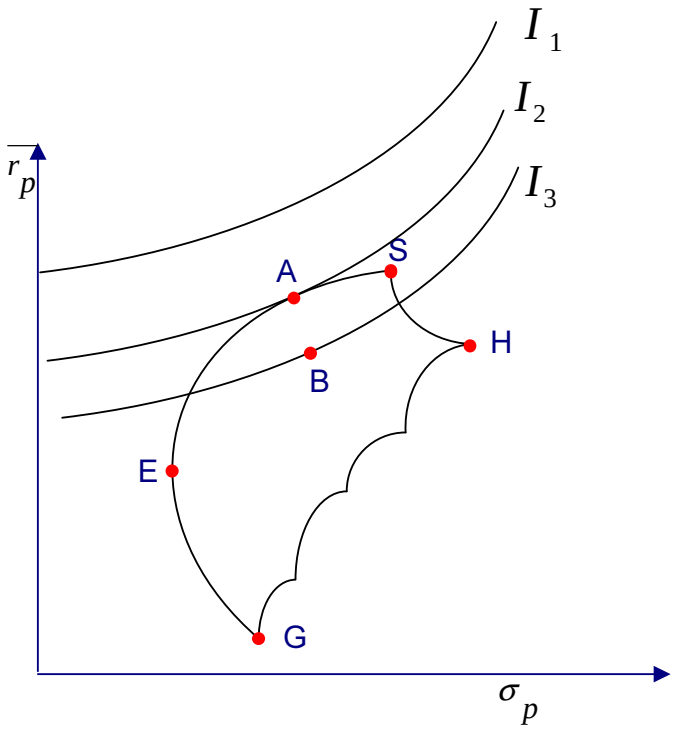
Slika 9. Skup mogućih portfolija

Mogući skup formiraju svi portfoliji i oni mogu biti ili na granici ili unutar prikazane figure. Tačke G, E, S, H i T predstavljaju moguće portfolije. Da bi se odredilo koji je optimalni skup portfolija (efikasni skup) raspoloživ za investitora, primenjuje se teorema o efikasnom skupu na skup svih mogućih portfolija.

Ako se pogleda slika može se primetiti da portfolio E nudi najmanji mogući rizik jer levo od te tačke ne postoji ni jedna druga. Takodje, portfolio H je portfolio sa najvećim rizikom jer desno od te tačke nema drugih. Zato skup portfolija koji nude maksimalni očekivani prinos za različite vredenosti rizika leži na gornjoj granici mogućeg skupa izmedju tačaka E i H.

Ako se obrati pažnja na drugi uslov, primećuje se da portfolio S nudi najveći mogući očekivani prinos jer iznad te tačke ne postoji druga i portfolio G nudi najmanji očekivani prinos jer ispod te tačke ne postoji nijedna druga. Zato skup portfolija koji nude najmanji rizik za različite moguće vrednosti očekivanog prinosa leži na gornjoj granici između tačaka G i S. Odavde se zaključuje da oba uslova iz teoreme o efikasnom skupu zadovoljavaju portfoliji, na granici figure, između tačaka E i S. Oni predstavljaju efikasan skup ili efikasnu granicu. Ostali portfoliji su neefikasni i njih ne treba uzimati u razmatranje prilikom odabira investitorovog optimalnog portfolija. Za tačke E i S ne postoje druge kombinacije, koje bi imale veći očekivani prinos (za isti dati rizik), ili manji rizik za isti dati očekivani prinos. Na primer, za tačku T postoji portfolio koji ima veći očekivani prinos (ako se povuče vertikalna linija) i nalazi se između tačaka E i S, i pripada efikasnom skupu.

7.5 Selekcija optimalnih portfolija



Slika 10. Određivanje optimalnog portfolija

Pošto je definisan efikasni skup, potrebno je odrediti optimalni portfolio investitora. To se radi tako što se na istu sliku gde je određen efikasni skup dodaju investitorove krive indiferentnosti. Efikasni portfolio će se nalaziti na najvišoj krivoj indiferencije, tj. onoj krivoj indiferencije koja ima najvišu korisnost. Očigledno je da je to kriva indiferencije, koja dodiruje efikasni skup u tački A. Ona pripada i krivoj indiferentnosti I_2 i efikasnoj granici. Investitor bi želeo više portfolio na krivoj I_3 ali takav portfolio ne postoji. Investitor ne želi da uzme portfolio B zato što on ne pripada efikasnom skupu.

Sa slike 10. se jasno vidi da što investitor ima veću odbojnost prema riziku to se izbor njegovog optimalnog portfolija nalazi bliže portfoliju E. Što je njegova odbojnost prema riziku manja, to se njegov izbor optimalnog portfolija više približava portfoliju S.

Efikasni skup, odnosno parovi $(\overline{r}_p, \sigma_p)$ na efikasnoj granici i odgovarajući portfoliji, mogu se definisati rešavanjem zadatka za različite vrednosti A,

$\max((\overline{r}_p - A)/\ \sigma_p)$,

uz uslov: $\sum_{i=1}^{N} x_i = 1,\ x_i \geq 0$,

gde su x_i učešća hartija od vrednosti u portfoliju.

$$\overline{r}_p = \sum_{i=1}^{N} x_i \overline{r}_i \quad \text{i} \quad \sigma_p = \left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij} \right]^{\frac{1}{2}}$$

8. Efikasni skup na Beogradskoj berzi

U ovom delu primenjena je Markoviceva teorija na na Beogradskoj berzi. Izabrane su hartije od vrednosti i period posmatranja za dve grupe hartija od vrednosti.

8.1 Izbor hartija od vrednosti i perioda posmatranja

Za Beogradsku berzu se može reći da je relativno mlado i nerazvijeno tržište. U trenutku njenog intenzivnog razvoja došlo je do svetske ali i domaće ekonomske krize, tako da je njen razvoj usporen. Na berzanskom tržištu, kao što smo videli u delu 6.3, ne postoji veći broj listiranih hartija od vrednosti. Na vanberzanskom tržištu postoji veći broj hartija ali se njima relativno retko i malo trguje, tako da je uzak skup hartija od vrednosti koje dolaze u obzir da budu uzete u razmatranje prilikom optimizacije portfolija. Ako se nekom hartijom ne trguje, znači da nije likvidna, ne može se uzeti u razmatranje, pošto trenutna cena ne pokazuje njenu stvarnu vrednost, ili je nema u ponudi, pa se ni praktično ne može uvrstiti u portfolio. U prvom slučaju nisu poželjne hartije za čiju cenu ne postoji verodostojnost (zato što se retko promeću), a u drugom je to praktično neizvodljivo jer ne postoji ponuda. U obzir dolaze hartije sa kojima se trguje. Međutim, i hartije kojima se trguje ne odlikuju se velikom likvidnošću. Hartije koje dolaze u obzir su one sa berzanskog tržista (Listing A i B) kao i akcije koje čine indeks Belex 15.

Prilikom analize pošlo se od dve grupe hartija od vrednosti. Za obe grupe izračunat je efikasni skup i učešća hartija od vrednosti.U prvoj grupi nalaze se hartije koje su na berzanskom tržištu. Berzansko tržište čine hartije od vrednosti listirane na Listingu A i Listingu B.

U prvoj grupi se nalaze:

- sa Listinga A
    1. Energoprojekt holding a.d Beograd (ENHL)
    2. Soja protejin a.d. Bečej (SJPT)
    3. Tigar a.d. Pirot (TIGR);

  Obaveznice stare devizne štednje:
    4. A2011
    5. A2012
    6. A2013
    7. A2014
    8. A2015
    9. A2016;

- sa Listinga B
    10. Alfa plam a.d. Vranje (ALFA)
    11. Komercijalna banka a.d. Beograd (KMBN)
    12. Metalac a.d , Gornji Milanovac (MTLC).

Drugu analiziranu grupu hartija od vrednosti čine obaveznice stare devizne štednje i akcije iz indeksa Belex15..

Drugu grupu čine:

Obaveznice stare devizne štednje:

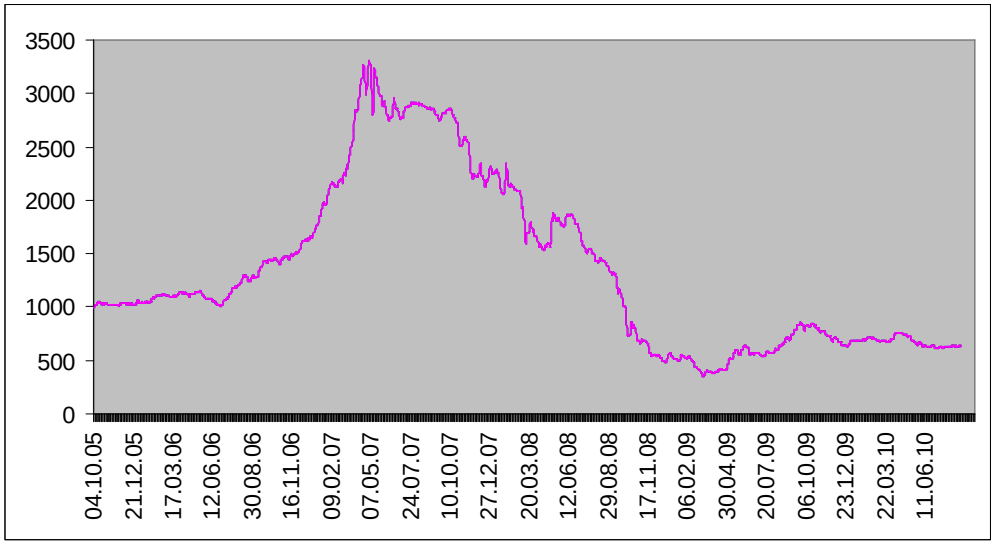
1. A2011
2. A2012
3. A2013
4. A2014
5. A2015
6. A2016;

Akcije:

7. Energoprojekt holding a.d. , Beograd (ENHL)
8. Soja protein a.d. ,Bečej (SJPT)
9. Tigar a.d , Pirot (TIGR)
10. Alfa plam a.d. , Vranje (ALFA)
11. Komercijalna banka a.d. , Beograd (KMBN)
12. Metalac a.d. Gornji Milanovac (MTLC)
13. Agrobanka a.d. Beograd (AGBN)
14. AIK banka a.d. , Niš (AIKB)
15. Imlek a.d. , Beograd (IMLK)
16. Razvojna banka Vojvodine a.d. , Novi Sad (MTBN)
17. Privredna banka a.d. , Beograd (PRBN)
18. Messer Tehnogas a.d. , Beograd (TGAS)
19. Telefonija a.d. , Beograd (TLFN)
20. Univerzal banka a.d. , Beograd (UNBN)
21. Veterinarski zavod Subotica a.d. , Subotica (VZAS).

Zatim je određen period posmatranja. Posle znatnog rasta cena akcija do proleća 2007. godine usledio je veliki pad, koji je trajao do aprila 2009 godine. Od tada dolazi do malog rasta u narednih par mesece ali potom do, može se reći, stagnacije. Neke akcije miruju, druge padaju, treće rastu. Zbog toga je uzet period posmatranja, godina dana od 25.08.2010 do 23.08.2010 (250 radnih dana). Promena vrednosti hartija je posmatrana na dnevnom nivou.

Na slici 11. prikazane su istorijske vrednosti indeksa Belex15 (u dinarima).



Slika 11. Vrednosti indeksa Belex15

8.2 Izračunavanje koordinata tačaka efikasnog skupa

Kao što se vidi na slici 10, svakom portfoliju X_p (x_1, x_2, ... x_n) odgovara par ($\overline{r_p}$, σ_p) koji pripada skupu mogućih portfolija u dvodimenzionalnom vektorskom prostoru. Tačke, koje predstavljaju portfolija na granici efikasnosti su one tačke koje leže na krivoj ES. Za svaku tačku, tj portfolio ($\overline{r_p}$, σ_p), koji leži na ovoj krivoj, ne postoje druge tačke u skupu mogućih portfolija koje bi imale, za zadato σ_p veće $\overline{r_p}$, odnosno za zadato $\overline{r_p}$ manje σ_p.

Postavlja se zadatak da se izračunaju koordinate tačaka ($\overline{r_p}$, σ_p) na granici efikasnosti i njima odgovarajući portfoliji. Ovaj zadatak je rešen na taj način što su izračunate koordinate deset tačaka na granici efikasnosti. Spajanjem ovih tačaka dobijena je linija efikasnosti (u celini). Rešenje će biti utoliko preciznije ukoliko se izračunaju koordinate većeg broja tačaka, ali se, u našem slučaju, pokazalo da n = 10 zadovoljava zahteve, pošto kriva za određene tačke, degeneriše u pravu. Poznato je da je za određivanje prave dovoljno znati koordinate samo dve njene tačke.

Metod se sastoji od sledeća dva koraka:

1. Na osnovu vremenskih serija dnevnih prinosa izabrane grupe hartija od vrednosti izračunati su

   vektor $R = [\overline{r_1} \quad \overline{r_2} \ldots \overline{r_i} \ldots \overline{r_N}]$ očekivanih prihoda HoV

   i kovarijaciona matrica

$$C=\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1k} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{24} & \cdots & \sigma_{2N} \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \sigma_{k1} & \sigma_{k2} & \cdots & \sigma_{kk} & \cdots & \sigma_{kN} \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \cdots & \sigma_{Nk} & \cdots & \sigma_{NN} \end{bmatrix}$$

2. Za deset vrednosti konstante A iz tabele 2. rešeni su zadaci nelinearne optimizacije

$$\max\ (\overline{r_p} - A)/\ \sigma_p = \max\ (R * X^T\ - A) / (X * C * X^T\ )^{1/2}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0\ .$$

Tabela 2 Vrednosti promenjive A

redni br.	A
1	-5
2	0
3	0.01
4	0.02
5	0.03
6	0.04
7	0.05
8	0.06
9	0.07
10	0.08

Primetićemo da je nemoguća prodaja na kratko, tj da je svaki ponder ima nenegativnu vrednost.

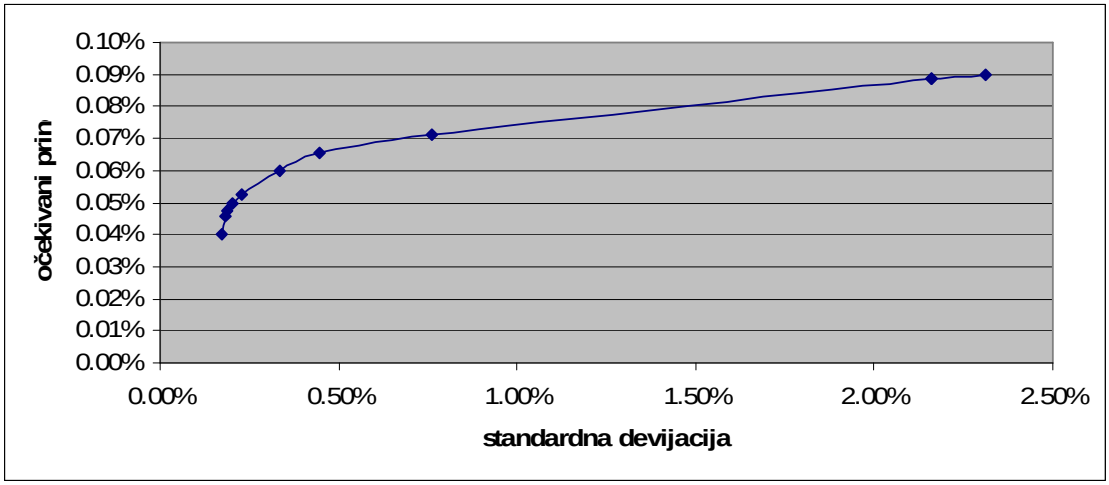
Tako su dobijena učešca pojedinih hartija od vrednosti u portfoliju, koji su dati u prilozima. Na osnovu dobijenih očekivanih prinosa i standardnih devijacija formiran je grafik, koji predstavlja efikasnu granicu.

U tabeli 3 su prikazane izračunati parovi vrednosti očekivanog prinosa i standardne devijacije prve grupe.

Tabela 3 Parovi očekivani prinos i standardna devijacija portfolija prve grupe

prinos	stdev
0.0401%	0.1725%
0.0458%	0.1826%
0.0472%	0.1886%
0.0495%	0.2023%
0.0526%	0.2291%
0.0600%	0.3322%
0.0653%	0.4477%
0.0714%	0.7622%
0.0887%	2.1580%
0.0887%	2.1580%

Za prvu grupu efikasna granica je prikazana na slici 12.



Slika 12.
Efikasna granica prve grupe

Struktura portfolija, odnosno učešća hartija od vrednosti u portfoliju izabranom na osnovu prve grupe su data u Prilogu 1.

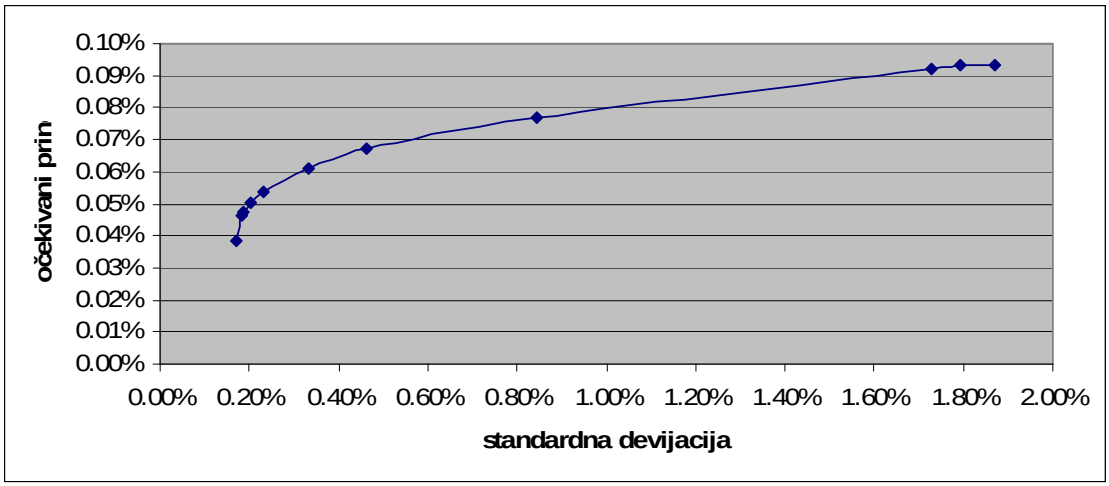
U narednoj tabeli su prikazane izračunati parovi vrednosti očekivanog prinosa i standardne devijacije druge grupe grupe.

Tabela 4 Parovi očekivani prinos i standardna devijacija portfolija druge grupe

prinos	stdev
0.0386%	0.1692%
0.0462%	0.1816%
0.0477%	0.1881%
0.0503%	0.2037%
0.0535%	0.2295%
0.0612%	0.3322%

0.0675%	0.4607%
0.0767%	0.8440%
0.0923%	1.7300%
0.0930%	1.7929%

Za drugu grupu efikasna granica je prikazana na slici 13.



Slika 13.
Efikasna granica druge grupe

Struktura portfolija, odnosno učešća hartija od vrednosti u portfoliju izabranom na osnovu druge grupe su data u Prilogu 2.

Zaključak

U prvom delu rada prikazane su teorije linearnog programiranja, razmene i komparativnih prednosti. Dat je i primer optimizacije u ekonomiji, gde se traži optimalno ponašanje potrošaša. Za metod i model linearnog programiranja su date teorijske osnove, sa posebnim naglaskom na problem maksimuma. Osim primarnog razmatran i dualni model, a kao način za rešavanje problema linearnog programiranja prikazan je simpleks metod. Pored toga, bilo je i reči o teoriji razmene koja čini osnovu ponašanja potrošača. Teorija komparativnih prednosti je objašnjenja na osnovu razmatranja oportunitetnih troškova. To je klasičan pristup teoriji komparativnih prednosti i ne zahteva korišćenje složenijih matematičkih modela.

Teorija komparativnih prednosti je dobila svoju potvrdu korišćenjem metode linearnog programiranja. Na primeru dve zamišljene države (A i B), dokazano je da se specijalizacijom proizvodnje i trgovinom između tih zemalja maksimizira njihov nacionalni proizvod. Trgovina i međuzavisnost su osnov za uživanje u više dobara i usluga. Princip komparativne prednosti se može primeniti i na ljude i na države. On je osnov na za zastupanje slobodne trgovine između država.

Za ove dve zamišljene zemlje razmatrana je njihovo ukupna (svetska proizvodnja). Na osnovu poznate proizvodnje jednog dobra u obe zemlje, metodom linearnog programiranja se može maksimizirati ukupna proizvodnja, i odatle odrediti kolika je proizvodnja drugog dobra. Sve moguće kombinacije proizvodnje, dva dobra, su date na krivoj koja se naziva „ granica efikasnosti".

Za te zemlje postavljen je i primer dualnog problema linernog problema. Rešenje dualnog problema kaže da bi se resursi najbolje koristili kada bi im cena resursa bila jednaka ceni proizvoda.

U drugom delu radu prikazane su mogućnosti primene teorije Harija Markovica na određivanje optimalnog portfolija hartija od vrednosti na Beogradskoj berzi.

Primenjen je specifičan (i originalan) metod izračunavanja koordinata tačaka na granici efikasnosti, a takođe su izračunate strukture odgovarajućih portfolija. Za ovaj metod razvijen je poseban, pojednostavljen, model u Excel-u.

Pokazano je da Markoviceva teorema, kao i predloženi metod i model mogu biti primenjeni u određivanju strukture optimalnih portfolija.

Može se zaključiti da je za korektnu (i konkretnu) primenu Markovicevog modela na „mladim" (i plitkim) tržištima, neophodno izabrati užu grupu hartija od vrednosti, kao i period posmatranja vremenskih serija njihovih dnevnih prinosa, vodeći računa o dva uslova:

- Hartije od vrednosti moraju biti likvidne, tj. moraju biti predmet česte (svakodnevne?) prodaje i kupovine na berzi;
- U modelu se ne smeju posmatrati zajedno (integrisati) periodi sa dugoročnim tendencijama rasta i periodi sa dugoročnim tendencijama pada cena hartija. U tom bi slučaju „uprosečavanje" odgovarajućih stopa prinosa pogrešno prikazalo stvarnu sliku stanja, a kovarijaciona matrica (C) sadržala bi na glavnoj dijagonali neopravdano visoke varijanse. Kovarijanse (van glavne dijagonale kovarijacione matrice C) ne bi

odražavale na pravi način zavisnost između dnevnih prinosa hartija od vrednosti.

Izračunavanje optimalnih struktura portfolija u izabranom (posmatranom) periodu pokazalo je da se, proširivanjem skupa hartija od vrednosti, nisu značajnije promenili očekivane vrednosti optimalnih portfolija i rizici ulaganja. Ovaj rezultat može da ohrabri investitore u uverenju da i na tržištima sa manjim brojem hartija od vrednosti može da se primeni efikasna diversifikacija portfolija.

Izloženi metod (i model) optimizacije može da se primeni i u uzračunavanju strukture optimalnog portfolija konkretnog investitora, ako je poznat stav investitora prema riziku. Međutim, važno je primetiti da izračunati rezultati pokazuju da je struktura optimalnog portfolija izuzetno osetljiva na investitorov stav prema riziku. Tabele 1 i 2 u Prilogu pokazuju da i male promene u nivou prihvatljivog rizika (za investitora), koje čak i ne dovode do ozbiljnijih promena u očekivanim prinosima, značajno utiču na strukturu optimalnog portfolija.

Može se primetiti da je sveobuhvatna kriza (i svetska i domaća) uticala na očekivane prinose akcija, koji su za mnoge i negativni. Zato je u prvoj grupi (listirane hartije od vrednosti), sem u obaveznice, moguće ulagati još u akcije Energoprojekt holdinga i Alfa plama. U drugoj grupi im se priključuje i AIK banka. Vrednosti mogućih portfolija su slične za obe grupe, što se može videti i upoređivanjem grafika. Jedina razlika je što u drugoj grupi ulaskom AIK banke, koja ima najveći očekivani prinos, pružaju se bolje mogućnosti za rizičnije investitore.

Veoma važan faktor prilikom odlučivanja i izbora portfolija mora da bude i vreme. Kada se pogleda period, koji ide posle posmatranog perioda, primećuje se da je vrednost indeksa Belex15 rasla narednih godinu dana, 31.05.2011 do vrednosti od 825.08. Ako je investitor do tog trenutka, ili malo kasnije, napustio berzu, verovatno je ostvario zaradu . Ako je duže vreme zadržao portfolio verovatno je na gubitku jer 28.05.2012 Belex indeks iznosi 449,63.

Najbolje bi prosli investitori sa srednjom osetljivost na rizik. Cene obaveznica Republike Srbije su porasle, a one bi činile većinski deo portfolija ulagača sa srednjim nivoom prihvatljivog rizika.

Ovaj rad predstavlja samo deo analize ulaganja u hartije od vrednosti na Beogradskoj berzi. Da bi se donela konačna odluka, potrebno je uzeti u obzir i valutni rizik. Dinar je zabeležio dugi niz pada vrednosti u odnosu na sve valute. Potrebno je dakle uporediti pad njegove vrednosti na početku i na kraju perioda posmatranja koji smo odredili. Srpska privreda sasvim sigurno tone u recesiju, što će pojačati loša situacija u zemljama sa kojima najviše trgujemo, tako da nema izgleda da se ulaganjem na Beogradsku berzu, u ovom trenutku, može ostvariti profit.

Literatura

1. Sengupta J., Fox K., *Optimization techniques in quantitative economic models*, North-Holland publishing company, Amsterdam, 1969
2. Turki M., Backović M., Cvjetićanin D., *Matematički modeli i metodi u ekonomiji*, Ekonomski fakultet, Beograd, 1999
3. Stanojević R., *Linearno programiranje*, Institut za ekonomiku industrije, Beograd, 1966
4. Dorfman, R., Samuelson P., Solow R., *Linear programming & economic analysis*, McGraw-Hill, Kogakusha, 1958
5. Varijan, H., *Mikroekonomija: moderan pristup*, Ekonomski fakultet, Beograd, 2003
6. Mankju, N., *Principi ekonomije*, Centar za izdavačku delatnost Ekonomskog fakulteta, Beograd, 2008
7. Dobbins, R.,Witt S. *Portfolio theory & investment management*, Martin Robertson, Oxford, 1983
8. Jeremic, Z. *Finansijska tržišta*, Univerzitet Singidunum, Beograd,2009
9. Markowitz, H.,, Portfolio selection'', *Journal of Finance*, Vol.VII, 1952
10. Miljević, M. *Konceptualizacija i faze naučnog projektovanja i istraživanja*, Univerzitet Singidunum, Beograd,2010
11. Ritter, L., Silber, W., Udell, G. *Principi novca bankarstva i finansijskih tržišta*, Udruženje banaka Srbije, Beograd, 2009
12. Sharpe W., Gordon A., Bailey J. *Investments*, Prentice Hall, 2009
13. Šoškic, D. *Hartije od vrednosti: upravljanje portfoliom i investicioni fondovi*, Centar za izdavačku delatnost Ekonomskog fakulteta, Beograd, 2009
14. www.belex.rs Sajt Beogradske berze

Prilog 1

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
prinos	stdev	A2011	A2012	A2013	A2014	A2015	A2016	ENHL	SJPT	TIGR	ALFA	KMBN	MTLC
0.0401%	0.1725%	15.30%	25.74%	39.45%	11.17%	3.34%	3.17%	0.63%	0.00%	0.91%	0.00%	0.29%	0.00%
0.0458%	0.1826%	10.32%	11.47%	46.52%	14.67%	6.13%	9.33%	1.55%	0.00%	0.00%	0.02%	0.00%	0.00%
0.0472%	0.1886%	8.91%	6.86%	48.25%	15.90%	7.03%	11.29%	1.74%	0.00%	0.00%	0.03%	0.00%	0.00%
0.0495%	0.2023%	6.12%	0.00%	50.24%	17.99%	8.73%	14.79%	2.08%	0.00%	0.00%	0.05%	0.00%	0.00%
0.0526%	0.2291%	0.00%	0.00%	43.73%	20.23%	12.35%	20.76%	2.76%	0.00%	0.00%	0.17%	0.00%	0.00%
0.0600%	0.3322%	0.00%	3.90%	24.69%	23.50%	41.35%	5.45%	0.00%	0.00%	1.11%	0.00%	0.00%	0.00%
0.0653%	0.4477%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	27.72%	59.65%	10.35%	0.00%	0.00%	2.28%	0.00%	0.00%
0.0714%	0.7622%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	65.63%	27.41%	0.00%	0.00%	6.96%	0.00%	0.00%
0.0887%	2.1580%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	89.10%	0.00%	0.00%	10.90%	0.00%	0.00%
0.0899%	2.31%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	100.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%

Prilog 2

		1	2	3	4	5	6
prinos	stdev	A2011	A2012	A2013	A2014	A2015	A2016
0.0386%	0.1692%	15.07%	26.39%	38.09%	11.18%	3.20%	2.83%
0.0462%	0.1816%	9.66%	12.52%	45.03%	14.94%	6.39%	8.57%
0.0477%	0.1881%	8.13%	8.15%	46.84%	16.07%	7.29%	10.42%
0.0503%	0.2037%	5.18%	0.00%	49.62%	18.48%	8.99%	13.92%
0.0535%	0.2295%	0.00%	0.00%	42.56%	20.65%	12.29%	19.14%
0.0612%	0.3322%	0.00%	0.00%	3.15%	25.37%	23.01%	37.43%
0.0675%	0.4607%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	26.90%	53.16%
0.0767%	0.8440%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	50.11%
0.0923%	1.7300%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
0.0930%	1.7929%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
0.0934%	1.8696%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%

7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
ENHL	SJPT	TIGR	ALFA	KMBN	MTLC	AGBN	AIKB	IMLK	MTBN	PRBN	TGAS	TLFN	UNBN	VZAS
0.07%	0.00%	0.67%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.35%	0.00%	0.81%	0.47%	0.02%	0.00%	0.00%	0.85%
0.77%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	1.55%	0.00%	0.00%	0.00%	0.33%	0.00%	0.00%	0.24%
0.89%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	1.84%	0.00%	0.00%	0.00%	0.36%	0.00%	0.00%	0.02%
1.04%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	2.31%	0.10%	0.00%	0.00%	0.36%	0.00%	0.00%	0.00%
1.26%	0.00%	0.00%	0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	3.32%	0.36%	0.00%	0.00%	0.40%	0.00%	0.00%	0.00%
2.57%	0.00%	0.00%	0.74%	0.00%	0.00%	0.00%	5.75%	0.94%	0.00%	0.00%	1.05%	0.00%	0.00%	0.00%
5.10%	0.00%	0.00%	1.62%	0.00%	0.00%	0.00%	11.01%	1.13%	0.00%	0.00%	1.08%	0.00%	0.00%	0.00%
10.28%	0.00%	0.00%	4.54%	0.00%	0.00%	0.00%	32.99%	2.07%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
19.10%	0.00%	0.00%	2.96%	0.00%	0.00%	0.00%	77.94%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
12.10%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	87.90%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	100.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%