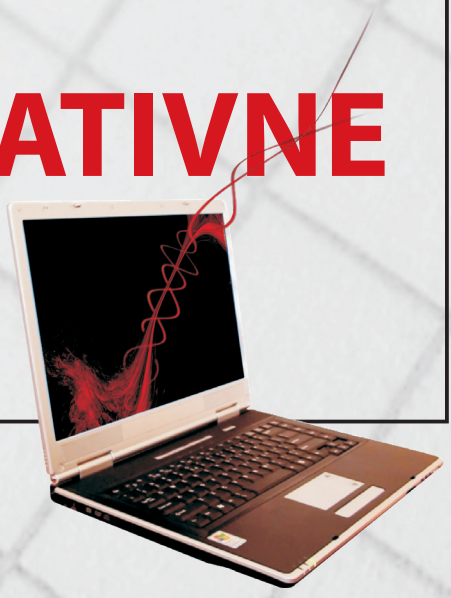
Univerzitet Singidunum

Mališa Žižović
Olivera Nikolić
Ivana Kovačević

KVANTITATIVNE METODE

SA ZBIRKOM ZADATAKA



Beograd, 2020.

UNIVERZITET SINGIDUNUM

Mališa Žižović
Olivera Nikolić
Ivana Kovačević

KVANTITATIVNE METODE SA ZBIRKOM ZADATAKA

Osmo izdanje

Beograd, 2020.

KVANTITATIVNE METODE SA ZBIRKOM ZADATAKA

Autori:
dr Mališa Žižović
dr Olivera Nikolić
dr Ivana Kovačević

Recenzent:
dr Dušan Adnađević

Izdavač:
UNIVERZITET SINGIDUNUM
Beograd, Danijelova 32

Za izdavača:
Prof. dr Milovan Stanišić

Priprema za štampu:
Jelena Petrović

Dizajn korica:
Aleksandar Mihajlović

Godina izdanja:
2020.

Tiraž:
1700 primeraka

Štampa:
Birograf, Beograd

ISBN: 978-86-7912-647-4

Copyright:
© 2020. Univerzitet Singidunum
Izdavač zadržava sva prava.
Reprodukcija pojedinih delova ili celine ove publikacije nije dozvoljena.

PREDGOVOR

Ovaj udžbenik predstavlja celinu predmeta Kvantitativne metode i integriše udžbenik, zbirku zadataka i praktikum iz ovog predmeta iz prethodnih izdanja.

Nadamo se da će pomoći studentima da usvoje metode i postupke iz ovog predmeta, a koji će im omogućiti da lakše i uspešnije ovladaju uže stručnim predmetima u kojima se ova materija koristi za objašnjenje izučavanih pojmova u tim oblastima.

Obzirom da je ovaj koncept novi bićemo zahvalni svim čitaocima koji budu imali neke sugestije da sledeća izdanja budu bolja, odnosno razumljivija.

Koristimo priliku da se zahvalimo recenzentu na korisnim sugestijama, isto tako se zahvaljujemo i saradniku u nastavi Marku Markoviću na velikoj pomoći da ovaj relativno kompilikovan materijal u grafičkom smislu bude kvalitetan i asistentu Ani Simićević na korisnim sugestijama.

Ovo izmenjeno i dopunjeno izdanje sadrži veći broj zadataka koji će omogućiti studentima da uspešno savladaju predviđeno gradivo.

Za eventualne greške ako ih bude (a uvek ih ima) krivicu prihvataju autori.

Autori

SADRŽAJ

Predgovor III

I - GLAVA ♦ LINEARNA ALGEBRA

1. DETERMINANTE 2
1.1. DEFINICIJA DETERMINANTE DRUGOG I TREĆEG REDA 2
1.2. O PARNIM I NEPARNIM PERMUTACIJAMA 3
1.3. DETERMINANTE PROIZVOLJNOG REDA 4
1.4. OSOBINE DETERMINANATA 4
1.5. IZRAČUNAVANJE VREDNOSTI DETERMINANATA 5
1.5.1. Izračunavanje vrednosti determinanata drugog reda 5
1.5.2. Izračunavanje vrednosti determinanata trećeg reda - Sarusovo pravilo 5
1.5.3. Razlaganje determinante po elementima proizvoljne vrste (kolone) - Laplasovo pravilo 7

2. MATRICE 10
2.1. DEFINICIJA MATRICE 10
2.2. NEKI POSEBNI OBLICI MATRICA 11
2.3. OSNOVNE OPERACIJE SA MATRICAMA 13
2.3.1 Jednakost matrica 13
2.3.2. Transponovana matrica 13
2.3.3. Sabiranje i oduzimanje matrica 14
2.3.4. Množenje matrice brojem 15
2.3.5 Množenje matrica 16
2.4. INVERZNE MATRICE 19
2.5. RANG MATRICE 21
Zadaci 25

3. SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA 30
3.1. OSNOVNI POJMOVI 30
3.2. MATRIČNI OBLIK SISTEMA LINEARNIH JEDNAČINA 31
3.3. REŠAVANJE SISTEMA LINEARNIH JEDNAČINA 32
3.3.1. Matrično rešenje 32
3.3.2. Kramerove formule 34
3.3.3. Gausova metoda - Gausov algoritam 35
3.3.4. Koneker - Kapelijeva teorema 37
3.3.5. Homogeni sistem jednačina 40
Zadaci 42

II - GLAVA ♦ FUNKCIJE

4. ELEMENTI MATEMATIČKE ANALIZE **54**
4.1. MODUL REALNOG BROJA 54
4.2. NEKI PODSKUPOVI SKUPA REALNIH BROJEVA I NJIHOVE OSOBINE 54
4.3. POJAM FUNKCIJE 57
4.3.1. Pojam funkcije jedne nezavisne promenljive 57
4.3.2. Grafik funkcije 59
4.3.3. Slaganje ili proizvod preslikavanja 61
4.3.4. Inverzna funkcija 62
4.3.5. Neke važnije osobine funkcija 63
Zadaci 67

5. NIZOVI **72**
5.1. OSNOVNI POJMOVI 72
5.2. TAČKA NAGOMILAVANJA NIZA 73
5.3. GRANIČNA VREDNOST NIZA 74
5.4. KOŠIJEV OPŠTI KRITERIJUM KONVERGENCIJE 76
5.5. ARITIMETIČKE OPERACIJE SA NIZOVIMA 77
5.6. BESKONAČNO MALI I BESKONAČNO VELIKI NIZOVI 77
5.7. NEKI VAŽNIJI NIZOVI 78
Zadaci 81

6. REDOVI **85**
6.1. REDOVI SA POZITIVNIM ČLANOVIMA 86
6.1.1. Kriterijumi za ispitivanje konvergencije redova 87
6.2. NEIZMENIČNI ILI ALTERNATIVNI REDOVI 88
6.3. APSOLUTNA I USLOVNA KONVERGENCIJA REDA 90

7. GRANIČNA VREDNOST FUNKCIJE **92**
7.1. ARITMETIČKE OPERACIJE SA GRANIČNIM VREDNOSTIMA FUNKCIJA 95
7.2. BESKONAČNO MALE I BESKONAČNO VELIKE FUNKCIJE 96
7.3. NEPREKIDNOST FUNKCIJA 97
7.3.1. Neprekidnost funkcije u tački 97
7.3.2. Tačke prekida funkcije 98
7.3.3. Neprekidnost funkcije na intervalu 100
7.4. ASIMTOTE FUNKCIJA 102
Zadaci 104
7.5. FUNKCIJA VIŠE PROMENLJIVIH 109

III - GLAVA ♦ DIFERENCIJALNI RAČUN

8. DIFERENCIJALNI RAČUN **114**
8.1. IZVOD FUNKCIJE 114
8.1.1. Geometrijska interpretacija izvoda funkcije 115
8.1.2.Levi i desni izvod funkcije 116

8.2. DIFERENCIJABILNOST I NEPREKIDNOST FUNKCIJE U TAČKI 118
8.2.1.Pravila za diferenciranje 119
8.2.2. Tablica izvoda osnovnih funkcija 119
8.2.3.Izvod složene funkcije 121
8.2.4. Izvod funkcije višeg reda 122
8.3. DIFERENCIJAL FUNKCIJE 122
8.3.1. Geometrijska interpretacija diferencijala funkcije 124
8.3.2.Pravila za izračunavanje diferencijala funkcija 124
8.3.3.Definicija diferencijala funkcije drugog reda 125
Zadaci 126
8.4. NAJVAŽNIJE TEOREME DIFERENCIJALNOG RAČUNA 132
Zadaci 142
8.5. PRIMENA DIFERENCIJALNOG RAČUNA 147
8.5.1. Monotonost funkcije 147
8.5.2. Ekstremne vrednosti funkcije 148
8.5.3 Konveksnost i konkavnost funkcije 150
8.5.4.Prevojne tačke funkcije 152
8.6. ISPITIVANJE TOKA FUNKCIJA 153
8.7. IZVODI I DIFERENCIJALI FUNKCIJA DVE NEZAVISNO PROMENLJIVE 157
8.7.1 Parcijalni izvodi i totalni diferencijali višeg reda 159
8.7.2.Ekstremne vrednosti 161
8.7.3.Uslovni ekstrem 161
Zadaci 164

IV - GLAVA ♦ INTEGRALNI RAČUN

9. NEODREĐENI INTEGRAL 194
9.1. OSNOVNI POJMOVI VEZANI ZA NEODREĐENI INTEGRAL 194
9.2. OSOBINE NEODREĐENOG INTEGRALA 196
9.3. TABLICA NEODREĐENIH INTEGRALA OSNOVNIH FUNKCIJA 197
9.4. OSNOVNA PRAVILA INTEGRACIJE 199
9.5. METODE INTEGRACIJE 200
9.5.1.Metod zamene ili metod smene promenljivih 200
9.5.2.Metod parcijalne integracije 200
9.5.3. Integracija racionalnih funkcija 202
9.5.4. Integracija trigonometrijskih funkcija 204
9.5.5. Integracija iracionalnih funkcija 205
Zadaci 207

10. ODREĐENI INTEGRAL 224
10.1. POVRŠINA KRIVOLINISKOG TRAPEZA 224
10.2. DEFINICIJA ODREĐENOG INTEGRALA 225
10.3. OSOBINE ODREĐENOG INTEGRALA 227
10.4. VEZA ODREĐENOG I NEODREĐENOG INTEGRALA 229
10.5. TEOREME O IZRAČUNAVANJU ODREĐENIH INTEGRALA 230
10.5.1. Teorema o smeni promenljivih kod određenog integrala 230

10.5.2. Teorema o parcijalnoj integraciji kod određenog integrala 231
10.6. NESVOJSTVENI INTEGRAL 231
10.6.1. Definicija nesvojstvenog integrala prve vrste 232
10.6.2. Definicija nesvojstvenog integrala druge vrste 233
10.7. PRIMENA ODREĐENOG INTEGRALA 234
10.7.1. Izračunavanje površina ravnih figura 234
Zadaci 237

V - GLAVA ♦ EKONOMSKE FUNKCIJE

11.1. FUNKCIJA TRAŽNJE 246
11.2. FUNKCIJA PONUDE 247
11.3. MODELI TRŽIŠTA 248
11.4. FUNKCIJA TROŠKOVA 249
11.5. FUNKCIJA PRIHODA 252
11.6. FUNKCIJA DOBITI 255
11.7. ELASTIČNOST EKONOMSKIH FUNKCIJA 257
11.7.1. Elastičnost tražnje 257
11.7.2.Elastičnost ukupnih troškova 258
11.7.3.Elastičnost prosečnih troškova 258
11.7.4.Elastičnost funkcije prihoda 259
Zadaci 262

VI - GLAVA ♦ FINANSIJSKA MATEMATIKA

12. FINANSIJSKA MATEMATIKA 296
12.1. PROCENTNI RAČUN 296
12.1.1. Procentni račun od sto 296
12.1.2. Procentni račun više sto i niže sto 297
12.2. PROMILNI RAČUN 298
12.3 PROST INTERESNI RAČUN 299
12.3.1. Interesni račun od sto 299
12.3.2. Interesni račun više sto i niže sto 302
12.3.3. Izračunavanje interesa na više suma 304
12.4. SREDNJI ROK PLAĆANJA 305
12.5. ESKONTOVANJE 306
12.5.1.Komercijalni eskont 306
12.5.2. Racionalni eskont 307
12.6. JEDNAKOST EFEKATA 307
12.7. SLOŽENI INTERESNI RAČUN 308
12.7.1. Faktor akumulacije 308
12.7.2. Generalizacija faktora akumulacije 310
12.7.3. Konformna (ekvivalentna) stopa 311
12.7.4. Eskontni faktor 312
12.7.5. Faktor dodajnih uloga 313

VII - GLAVA ♦ ELEMENTI TEORIJE VEROVATNOĆE

13. ELEMENTI TEORIJE VEROVATNOĆE **322**

13.1. EKSPERIMENTI SA SLUČAJNIM ISHODIMA - SLUČAJNI DOGAĐAJI 322

13.2. POJAM VEROVATNOĆE 323

13.3. USLOVNE VEROVATNOĆE - NEZAVISNOST 327

13.4. FORMULA TOTALNE VEROVATNOĆE I BAJESOVA FORMULA 331

13.5. SLUČAJNE PROMENLJIVE 334

13.5.1. Jednodimenzionalne slučajne promenljive 334

13.5.2. Višedimenzionalne slučajne promenljive 336

13.5.3. Marginalne i uslovne raspodele 337

13.5.4. Nezavisnost slučajnih promenljivih 338

13.5.5. Numeričke karakteristike slučajnih promenljivih 341

13.5.6. Disperzija slučajne promenljive 343

13.5.7. Funkcija raspodele slučajne promenljive 345

13.5.8. Slučajne promenljive koje se najčešće koriste 347

13.5.9. Korelacija dve slučajne promenljive 355

13.5.10. Zakoni velikih brojeva. Centralna granična teorema 356

13.5.11. Regresija 357

Zadaci 359

VIII - GLAVA ♦ ELEMENTI STATISTIKE

14. UVOD U STATISTIKU **368**

14.1. STATISTIČKO POSMATRANJE, PRIKUPLJANJE I PRIKAZIVANJE PODATAKA 369

14.2. O STATISTIČKIM SERIJAMA 370

14.3. STATISTIČKE TABELE, POLIGONI I HISTOGRAMI 372

14.4. MERE 374

14.4.1. Srednje vrednosti 374

14.4.2. Mere odstupanja i centralni momenti 382

14.4.3. Mere oblika 384

14.5. IZBOR SLUČAJNOG PROSTOG UZORKA 384

14.6. OCENE PARAMETARA 385

14.7. INTERVALI POVERENJA 386

14.8. TESTIRANJE STATISTIČKIH HIPOTEZA 391

14.9. PIRSONOV χ^2 TEST 391

Zadaci 395

IX - GLAVA ♦ LABORATORIJSKE VEŽBE MAT LAB

Vežba 1 Alati i osnovne funkcije 414

Vežba 2 Matrice i determinante 423

Vežba 3 M – fajlovi (datoteke) 431

Vežba 4 Sistemi linearnih algebarskih jednačina 436

Vežba 5 Grafika 440
Vežba 6 Simbolička matematika 448
Vežba 7 Granična vrednost i izvod funkcije 453
Vežba 8 Integrali 458
Vežba 9 Primena integrala 463
Vežba 10 Formiranje distribucije frekvencija 469
Zadaci 476

TABLICE 486
LITERATURA 498

I - GLAVA

LINEARNA ALGEBRA

SADŽAJ OVOG POGLAVLJA JE:

- **DETERMINANTE**
- **POJAM MATRICE I OPERACIJE SA MATRICAMA**
- **RANG MATRICE**
- **INVERZNA MATRICA**
- **SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA**
- **KRAMEROVA METODA**
- **GAUSOVA METODA**
- **HOMOGENI SISTEM LINEARNIH JEDNAČINA**
- **MATRIČNA METODA**

C I L J E V I U Č E N J A

Kada ovo poglavlje proučite znaćete:

1. šta su matrice,
2. definišete matrične operacije,
3. šta su determinante i kako se one izračunavaju,
4. da definišete i koristite inverzne matrice,
5. kako izgledaje sistemi linearnih jednačina,
6. rešavate sisteme lineanih jednačina različitim metodama.

1. DETERMINANTE

1.1. DEFINICIJA DETERMINANTE DRUGOG I TREĆEG REDA

Rešavajući sistem od dve linearne jednačine sa dve nepoznate

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \qquad (1)$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2$$

nekom od poznatih metoda (recimo, metodom jednakih koeficijenata) dolazimo do sledećeg rešenja

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\ x_2 = \frac{a_{11}b_1 - a_{21}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

Lako se uočava da su imenioci u ovim razlomcima isti i da egzistenciju jedinstvenog rešenja određuje činjenica da li je $a_{11}a_{22}$-$a_{12}a_{21}\neq 0$ ili ne. Ovaj broj se zove determinanta. Dakle, možemo dati sledeću definiciju:

Definicija 1.
Broj $D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ se zapisuje u obliku sledeće šeme

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

i naziva se ***determinanta drugog*** *reda*.

Brojevi a_{ij} (i=1,2; j=1,2) se nazivaju elementima determinante. Poređani su u dve vrste i dve kolone. Elementi se obeležavaju sa dva indeksa, gde prvi indeks označava vrstu, a drugi indeks označava kolonu u kojoj se element nalazi, dok slobodan član ima jedan indeks - oznaku jednačine u kojoj je.

Do analognog zaključka se dolazi i kod rešavanja sistema tri jednačine

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,$$
$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3.$$

i dajemo definiciju determinante trećeg reda.

Definicija 2.
Broj

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

zovemo ***determinantom trećeg reda*** i zapisujemo u sledećem obliku:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

1.2. O PARNIM I NEPARNIM PERMUTACIJAMA

Posmatrajmo prvih n prirodnih brojeva 1,2,3,...,n. Njih možemo raspoređivati na razne načine.

Definicija 3.
Svi moguci rasporedi ovih brojeva nazovaju se ***permutacijam****a*.

Permutaciju (1,2,3,...,n) u kojoj su brojevi poređani po veličini zovemo prirodnom ili osnovnom permutacijom.

Teotema 1. *Broj permutacija od n različitih elemenata je n!=1.2.3…..n*

Skup svih permutacija brojeva (1,2,3,...,n) dobija se dakle posle konačno mnogo uzastopnih zamena mesta susednih elemenata niza. Ako je broj takvih zamena paran, onda se dobijena permutacija naziva ***parnom***, u suprotnom slučaju je ***neparna permutacija***.
Tako su (1,2,3), (2,3,1) i (3,1,2) parne permutacije, a (1,3,2), (2,1,3) i (3,2,1) neparne permutacije.

1.3. DETERMINANTE PROIZVOLJNOG REDA

Definicija 4.
Determinanta n-tog reda je broj koji je predstavljen kvadratnom šemom od n-vrsta i n-kolona i predstavlja zbir od n sabiraka koji su proizvodi od po n elemenata uzetih po jedan iz svake vrste i svake kolone. Sabirci čiji drugi indeksi čine parnu permutaciju ulaze u zbir sa znakom +, a ako čine neparnu permutaciju, sa znakom -, pri čemu prvi indeksi čine osnovnu permutaciju.

Determinantu reda n zapisujemo u obliku sledeće šeme:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

i to je broj koji se može zapisati i kao

$$D = \sum_{(k_1,\dots,k_n)} (-1)^{p(k_1,\dots,k_n)} a_{1k_1} a_{2k_2},\dots, a_{nk_n},$$

gde je

$$p\big((k_1,k_2,\dots,k_n)\big) = \begin{cases} 1 \text{ ako je } (k_1,k_2,\dots,k_n) \text{ neparna permutacija} \\ 2 \text{ ako je } (k_1,k_2,\dots,k_n) \text{ parna permutacija} \end{cases}$$

1.4. OSOBINE DETERMINANTI

Determinante imaju čitav niz zajedničkih osobina. Najvažnije su:

1) Vrednost determinante se ne menja kada vrste pređu u kolone, odnosno kolone u vrste.
2) Ako u determinanti promene mesta dve vrste (kolone), determinanta menja samo znak.
3) Vrednost determinante sa dvema jednakim vrstama (kolonama) je jednaka nuli.

4) Ako svi elementi jedne vrste (kolone) sadrže zajednički množitelj, onda je on činilac determinante.
5) Vrednost determinante sa dvema proporcionalnim vrstama (kolonama) jednaka je nuli.
6) Ako su svi elementi neke vrste (kolone) zbirovi od po n sabiraka, onda je determinanta jednaka zbiru n determinanata u kojima su elementi odgovarajućih vrsta (kolona) prvi, odnosno drugi, odno-sno n-ti sabirci, dok su elementi u ostalim vrstama (kolonama) isti kao u polaznoj determinanti.
7) Vrednost determinante se ne menja ako jednoj vrsti (koloni) dodamo odgovarajuće elemente neke druge vrste (kolone) pomnožene jednim istim brojem.

1.5. IZRAČUNAVANJE VREDNOSTI DETERMINANTI

1.5.1. Izračunavanje vrednosti determinante drugog reda

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} \\ \mathbf{a_{21}} & \mathbf{a_{22}} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\,.$$

Vrednost determinante drugog reda dobija se ako se od proizvoda elemenata sa glavne dijagonale oduzme proizvod elemenata sa sporedne dijagonale.

Primer:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 5 - 3\cdot 1 = 2 \qquad \begin{vmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \text{-b} & \mathrm{a} \end{vmatrix} = a^2 - \left(-b^2\right) = a^2 + b^2$$

1.5.2. Izračunavanje vrednosti determinanti trećeg reda-Sarusovo pravilo

Vrednost determinante trećeg reda može se izračunati pomoću Sarusovog pravila. To se pravilo sastoji u tome što se kvadratnoj šemi dopišu s desne strane prva i druga

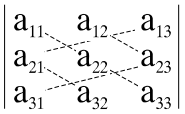
kolona, zatim se pomnože po tri elementa koji leže na istoj dijagonali. Proizvod elemenata sa glavne (sporedne) dijagonale i njoj paralelnih biće pozitivan (negativan). Algebarski zbir ovako dobijenih članova daje vrednost determinante trećeg reda.

Primer:

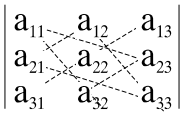
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{matrix} =$$

$$= 1\cdot 4\cdot 8+2\cdot 5\cdot 3+3\cdot 1\cdot 6-3\cdot 4\cdot 3-6\cdot 5\cdot 1-8\cdot 1\cdot 2=-2.$$

Često se vrednost determinante trećeg reda izračunava kao algebarski zbir proizvoda od po tri elementa uzeta po sledećoj šemi:



Znak +



Znak -

Sa znakom + uzimaju se elementi koji leže na glavnoj dijagonali ($a_{11}a_{22}a_{33}$) i u temenima dva jednakokraka trougla čije su osnovice paralelne sa glavnom dijagonalom. Sa znakom - uzimaju se elementi koji leže na sporednoj dijagonali ($a_{13}a_{22}a_{31}$) i u temenima dva jednakokraka trougla čije su osnovice paralelne sporednoj dijagonali.

Primer:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 6+3\cdot 4\cdot 3+1\cdot 1\cdot 5-5\cdot 2\cdot 3-1\cdot 4\cdot 1-1\cdot 3\cdot 6=1.$$

1.5.3. Razlaganje determinante po elementima proizvoljne vrste (kolone)-Laplasovo pravilo

Da bismo objasnili ovu metodu potrebno je da definišemo pojam minora i pojam kofaktora.

Neka je D determinanta n-tog reda

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Determinanta koja se dobija iz determinante D odbacivanjem i-te vrste I j-te kolone naziva se ***minor*** elementa a_{ij} i obeležava se sa M_{ij}.

Kofaktor elementa a_{ij} je broj $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Primer:

Detreminanta trećeg reda ima onoliko minora koliko i elemenata, tj. 9. Na primer, elementima a_{11}, a_{12} i a_{13} odgovaraju minori

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

a kofaktori su:

$$A_{11}=+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, A_{13}=+\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Teorema 2. – Laplasova teorema
Determinanta n-tog reda je jednaka zbiru proizvoda elemenata proizvoljne vrste (kolone) i njima odgovarajućih kofaktora.

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \ , i = 1,2,\ldots,n$$

(razvoj po elementima i -te vrste).

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} \ , \ j = 1,2,\ldots,n \, .$$

(razvoj po elementima j -te kolone).

Ova teorema,omogućava izračunavanje vrednosti determinante n-tog reda preko determinanata (n-1)-reda, a ova izračunavanjem determinante n-1 -tog reda, I tako dalje.

Primer:

Razvijajući prema Laplasovoj teoremi po elementima prve kolone dobijamo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \, .$$

Primer :

Izračunati vrednost determinante $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Razvijajući prema Laplasovoj teoremi po elementima prve vrste dobijamo:

$$D = 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$ i

računanje ove determinante smo sveli na računanje četiri determinante trećeg reda. Vrednost deteminante je D=-1.

Iz predhodnog primera može se videti da je izračunavanje determinanti viših redova dugotrajan proces. Primenom osobina determinate možemo ih svesti na jednostavniji oblik, pravljenjem nula, i i tek tada računati polazne determinante.

Ako pomnožimo prvu kolonu sa -1, pa dodajmo drugoj i dobijamo:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

U ovoj determinanti pomnožimo prvu vrstu sa -1 pa dodajmo drugoj vrsti, tada je

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

i razvijanjem po elementima druge kolone dobijamo

$$D = 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 .$$

2. MATRICE

2.1. POJAM MATRICE

Matrica tipa mxn je skup od m·n brojeva a_{ij} (i=1,2,3,...,m; j=1,2,3,...,n) ili nekih drugih matematičkih veličina, raspoređenih u m vrsta i n kolona u obliku pravougaone šeme (tablice) koju stavljamo u uglastu zagradu:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Brojevi a_{ij} (i=1,2,3,...,m; j=1,2,3,...,n) su ***njeni elementi***. Prvi indeks (i) obeležava vrstu, a drugi (j) kolonu u kojoj se element nalazi.

U opštem slučaju elementi matrice mogu biti bilo koji matematički objekti: realni brojevi, kompleksni brojevi, funkcije, vektori itd.

Matrice označavamo velikim slovima A, B, C,... Često ćemo, da bi uprostili pisanje matrica, matricu (1) označavati kratko i na sledeći način

$$\left[a_{ij} \right]_{m,n}$$

Horizontalni redovi se nazivaju ***vrste***, a vertikalni ***kolone***.

Tako, na primer, elementi

$$a_{i1}\ a_{i2}\ a_{i3} \dots\ a_{in}$$

matrice (1) čine njenu i-tu vrstu, a elementi

$$\begin{matrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mj} \end{matrix}$$

njenu j-tu kolonu.

2.2. NEKI POSEBNI OBLICI MATRICA

Posebno važnu ulogu imaju kvadratna matrica, zatim matrica-vrsta, matrica-kolona, dijagonalna i jedinična matrica.

Definicija 1.
Ako je u matrici (1) broj vrsta jednak broju kolona (m=n), matrica je ***kvadratna*** i to, reda n. U kvadratnoj matrici

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{bmatrix}$$

elementi $a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \dots a_{nn}$ čine glavnu dijagonalu matrice, a elementi $a_{1n}\, a_{2(n-1)} \dots a_{n1}$ sporednu dijagonalu matrice.

Datoj kvadratnoj matrici može se pridružiti determinanta čiji su elementi, elementi kvadratne matrice A. Naziva se determinanta kvadratne matrice i označava se detA, tj.

$$\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ako je determinanta kvadratne matrice A različita od nule ($\det A \neq 0$) matrica A je ***regularn****a*, a ako je jednaka nuli, ona je ***singularna*****.**

Definicija 2.
Matrica-vrsta je matrica koja ima jednu vrstu (m=1), a proizvoljno kolona (n-proizvoljno), tj. matrica oblika

$$[a_1\, a_2\, a_3 \dots a_n].$$

Definicija 3.
Matrica-kolona je matrica koja ima jednu kolonu (n=1),
a proizvoljno vrsta (m-proizvoljno), tj. matrica oblika

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ . \\ . \\ \\ a_m \end{bmatrix}$$

Definicija 4.
Matrica sa proizvoljnim brojem vrsta i kolona čiji su svi elementi nule naziva se ***nula matrica*.**

U algebri matrica takva matrica ima ulogu nule i označava se sa 0.

Definicija 5.
Kvadratna matrica, čiji su svi elementi van glavne dijagonale nule, zove se ***dijagonalna matrica*.** Zapisuje se u obliku

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definicija 6.
Dijagonalna matrica čiji su svi elementi na glavnoj dijagonali jedinice, tj. matrica

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

naziva se ***jedinična matrica*** i obeležava se I ili E.

Jedinična matrica pri množenju matrica ima u algebri matrica istu ulogu kao i obična jedinica u algebri brojeva.

2.3 OSNOVNE RELACIJE I OPERACIJE SA MATRICAMA

2.3.1 Jednakost matrica

Definicija 7.
Za dve matrice $A=\left[a_{ij}\right]_{\text{m,n}}$ i $B=\left[b_{ij}\right]_{\text{p,q}}$ kažemo da su ***jednake*** kada su one istog tipa (m=p, n=q) i kada imaju jednake odgovarajuće elemente.

Drugim rečima, ako su matrice $A=\left[a_{ij}\right]$ i $B=\left[b_{ij}\right]$ tipa mxn, one su jednake ako i samo ako je:

$$a_{ij}=b_{ij} \ (i=1,2,...m;\ j=1,2,...n).$$

2.3.2. Transponovana matrica

Ako u matrici A vrste pređu u kolone, odnosno kolone u vrste, ne menjajući pri tome redosled, dobija se *transponovana matrica* matrice *A*, koja se označava A^T.

Prema tome, ako je

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ onda je } A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & .... & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & .... & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

2.3.3. Sabiranje i oduzimanje matrica

Definicija 8.
Pod zbirom dve matrice istog tipa mxn podrazumevamo matricu istog tipa mxn čiji su elementi jednaki zbiru odgovarajućih elemenata matrica koje se sabiraju.

Drugim rečima, ako su matrice $A=\left[a_{ij}\right]$ i $B=\left[b_{ij}\right]$ tipa mxn, onda je $A+B=C=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]_{\text{m,n}}$.

Analogno definišemo zbir konačnog broja matrica istog tipa mxn.

Za sabiranje matrica važi sledeća teorema:

Teorema 1.
Sabiranje matrica ima osobine:

A+B=B+A (komutativnost),
(A+B)+C=A+(B+C) (asocijativnost),
A+0=0+A=A.

Razlika dve matrice definiše se analogno: $A-B=[a_{ij}-b_{ij}]_{\text{m,n}}$ gde su A i B matrice tipa mxn.

Primer:

Izračunati zbir matrica A i B:

$$A=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 3 & 2\\ 2 & 6\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 2 & 0\\ 3 & 2\end{bmatrix} \quad A+B=\begin{bmatrix}4+0 & -1+(-1)\\ 3+2 & 2+0\\ 2+3 & 6+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -2\\ 5 & 2\\ 5 & 8\end{bmatrix}$$

Definicija 9.

Dve matrice A i B su istog tipa mxn čiji je zbir nula matrica, tj. kada je A+B=0 zovu se suprotne. Iz A+B=0 sledi da je $a_{ij}+b_{ij}=0$, tj. $b_{ij}=-a_{ij}$, što znači da su elementi suprotnih matrica suprotni brojevi. Za matricu B čiji su svi elementi suprotni elementima matrice A, pišemo

$$B=\left[b_{ij}\right]_{nn}=\left[-a_{ij}\right]_{nn}=-A.$$

2.3.4. Množenje matrice brojem

Definicija 10.

Proizvod matrice $A=\left[a_{ij}\right]_{\mathrm{m,n}}$ ***i broja k*** je matrica tipa mxn čiji su elementi jednaki proizvodu odgovarajućih elemenata matrice A i broja k, tj.

$$A\cdot k=k\cdot A=\left[ka_{ij}\right]_{\mathrm{m,n}}.$$

Za operaciju množenja matrice brojem važe sledeć zakoni:

Teorema 2.

Operacija množenja matrice brojem ima osobine

s (kA)=(sk)A=k(sA),
k(A+B)=kA+kB,
(k+s)A=kA+sA

gde su k,s brojevi i A, B matrice istog tipa.

Takođe je očigledno da je

$1 \cdot A = A$,

$A \cdot 0 = 0$ (nula matrica).

Primer :

Matricu A pomnožimo brojem 3.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad 3 \cdot A = \begin{bmatrix} -6 & 9 & 6 \\ 0 & -3 & 0 \\ 3 & 15 & 3 \end{bmatrix}$$

2.3.5 Množenje matrica

Dve matrice $A = \left[a_{ij} \right]_{\mathrm{m,n}}$ i $B = \left[b_{ij} \right]_{\mathrm{p,q}}$ se mogu pomnožiti jedna sa drugom samo u slučaju kada je broj kolona prve matrice u proizvodu jednak broju vrsta druge matrice u proizvodu.

Na taj način, za gore napisane matrice *A,B* proizvod *AB* možemo izračunati samo u slučaju kada je *n=p,* a proizvod *BA* samo kada je *q=m* .

Definicija 11.

Proizvod AB matrica $A = \left[a_{ik} \right]_{\mathrm{m,n}}$ ***i*** $B = \left[b_{kj} \right]_{\mathrm{n,p}}$ ***je matrica*** $C = \left[c_{ij} \right]_{\mathrm{m,p}}$, čiji su elementi c_{ij} određeni sledećom formulom

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj}$$

$$\left(i = 1,2,\ldots,m;\ \mathrm{j}=1,2,\ldots,\mathrm{p} \right).$$

Prema tome, određivanje elementa c_{ij} (element iz *i*-te vrste i *j*-te kolone matrice *C=AB*) je dosta jednostavno: uočavaju se *i*-ta vrsta matrice *A* i *j*-ta kolona matrice *B*:

$$\begin{bmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}\ \mathrm{a}_{i2}\ \ \mathrm{a}_{i3}\ldots a_{in} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ldots b_{1j}\ldots \\ \ldots b_{2j}\ldots \\ \ldots b_{3j}\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots b_{nj}\ldots \end{bmatrix}$$

zatim se svaki element *i*-te vrste množi sa odgovarajućim elementom *j*-te kolone i dobijeni proizvodi saberu. Pri tome su odgovarajući elementi

$$a_{i1} \text{ i } b_{1j},\ a_{i2} \text{ i } b_{2j},\ldots,\text{i } a_{in} \text{ i } b_{nj}\ .$$

Primetimo da matrica $C=AB$ ima toliko vrsta koliko ih ima u prvom faktoru (matrici A) i toliko kolona koliko ih ima u drugom faktoru (matrici B) proizvoda AB:

$$A_{mxn} \cdot B_{nxp} = C_{mxp}$$

Primer:

Naći proizvod AB ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 2+1\cdot 1+0\cdot 3 & 1\cdot 2+2\cdot 1+1\cdot 1+0\cdot 3 \\ 2\cdot 1+1\cdot 2+2\cdot 1+3\cdot 3 & 2\cdot 2+1\cdot 1+2\cdot 1+3\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 15 & 16 \end{bmatrix}.$$

Iz definicije proizvoda dve matrice proizilazi da za proizvod dve matrice uopšte uzevši ne važi zakon komutativnosti, tj.

$$AB \neq BA.$$

Definicija 12.
Za dve kvadratne matrice jednog te istog tipa čiji proizvod ne zavisi od poretka činioca (AB=BA) kažemo da su ***komutativne***.

Ostale osobine množenja matrica iskazane su sledećom teoremom.

Teorema 3.
Množenje matrica ima sledeće osobine:

(1) (AB)C=A(BC)=ABC
(2) A(B+C)=AB+AC
(3) (A+B)C=AC+BC
(4) AI=IA=A.

Primer:

Za matrice

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix} \text{ i } B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

proizvod *AB* nema smisla; međutim proizvod *BA* možemo naći:

$$BA=\begin{bmatrix}2\cdot 1+1\cdot 0 & 2\cdot 2+1\cdot 1\\ 0\cdot 1+1\cdot 0 & 0\cdot 2+1\cdot 1\\ 1\cdot 1+0\cdot 0 & 1\cdot 2+0\cdot 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 0 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}.$$

Primer:

Za matrice $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$,

moguća su oba proizvoda:

$$AB=\begin{bmatrix}1\cdot 2+2\cdot 1+1\cdot 0 & 1(-1)+2\cdot 3+1\cdot 1\\ 3\cdot 2+1\cdot 1+2\cdot 0 & 3(-1)+1\cdot 3+2\cdot 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 6\\ 7 & 2\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}2\cdot 1-1\cdot 3 & 2\cdot 2\text{-}1\cdot 1 & 2\cdot 1\text{-}1\cdot 2\\ 1\cdot 1+3\cdot 3 & 1\cdot 2+3\cdot 1 & 1\cdot 1+3\cdot 2\\ 0\cdot 1+1\cdot 3 & 0\cdot 2+1\cdot 1 & 0\cdot 1+1\cdot 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 0\\ 10 & 5 & 7\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}.$$

Matrice *AB* i *BA* ne samo da nisu međusobno jednake, već su i različitih tipova.

Primer :

Matrice

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}\quad \mathrm{B}=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 2 & 7\end{bmatrix}$$

su komutativne, jer je *AB=BA.*

$$AB=\begin{bmatrix}12 & 33\\ 11 & 34\end{bmatrix},\quad BA=\begin{bmatrix}12 & 33\\ 11 & 34\end{bmatrix}$$

2.4. INVERZNE MATRICE

Definicija 13.

Inverzna matrica A^{-1} kvadratne matrice A je matrica koja pomnožena sa A bilo sleva bilo zdesna daje jediničnu matricu I, tj.

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I.$$

Iz definicije 13 sledi da je svaka kvadratna matrica komutativna sa svojom inverznom matricom.

Sledeća teorema daje nam odgovor na pitanje koje matrice imaju inverznu matricu i jedan od načina formiranja inverzne matrice.

Teorema 4.

Svaka regularna matrica A ima jednoznačno određenu inverznu matricu A^{-1} čiji su elementi a'_{ik} određeni formulom

$$a'_{ik} = \frac{A_{ki}}{\det A} \quad (\text{i}=1,2,...,\text{n};\ \text{k}=1,2,...,\text{n}),$$

gde je A_{ki} kofaktor elementa a'_{ik} determinante det A.

Prema tome, inverzna matrica kvadratne matrice *A* reda *n* je

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & \text{A}_{21} & \text{A}_{31}...A_{n1} \\ A_{12} & \text{A}_{22} & \text{A}_{32}...A_{n2} \\ ..... & & \\ A_{1n} & \text{A}_{2\text{n}} & \text{A}_{3\text{n}}...A_{nn} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} A^*$$

gde matricu A^* nazivamo ***adjungovanom*** matricom matrice *A*.

Primer :

Naći inverznu matricu matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 6 \end{bmatrix}$, ako postoji.

Determinanta matrice A je jednaka -10. Prema tome, data matrica A je regularna i ima inverznu matricu A^{-1}.

Kofaktori A_{ij} su:

A_{11}=18 A_{21}=-10 A_{31}=-16

A_{12}=-10 A_{22}=-10 A_{32}=-10

A_{13}=-2 A_{23}=2 A_{33}=-1

Pa na osnovu teoreme imamo

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} -18 & 10 & 16 \\ 10 & 10 & 10 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

2.5. RANG MATRICE

Definicija 14.
Matrica A ima ***rang r,*** ako ima bar jedan minor reda r različit od nule, a svi minori reda $r+1$, i višeg, su jednaki nuli , u oznaci $rang\left(A\right)=r$

Rang nula-matrice je 0.

Primer :

Odrediti rang matrice

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & -4 & 4 & 12 & -8 \end{bmatrix}.$$

Prvo, izračunajmo sve minore četvrtog reda date matrice *A* (u ovom slučaju najvišeg reda), koji će se jedan od drugog razlikovati samo kolonama:

$$D_1=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & -4 & 4 & 12 \end{vmatrix}= D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 4 & -4 & 4 & -8 \end{vmatrix}= D_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ 4 & -4 & 12 & -8 \end{vmatrix}=$$

$$D_4=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & 12 & -8 \end{vmatrix}= D_5=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -2 \\ -4 & 4 & 12 & -8 \end{vmatrix}=0.$$

Sve ove determinante jednake su nuli jer je u svakoj od njih četvrta vrsta proporcionalna trećoj. Prema tome, rang matrice A nije četiri.

Ispitajmo sada, minore trećeg reda. Kako je:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0,$$

dobija se *rang A=3*.

Određivanje ranga matrice oslanjajući se neposredno na izračunavanje minora date matrice obično zahteva dosta računanja, pa se za određivanje ranga matrice koriste i drugi metodi. Jedan od njih se bazira na sledećoj teoremi koji bez dokaza navodimo.

Teorema 5.
Rang matrice se ne menja ako se izvrše sledeće operacije:

(1) Razmena mesta dve vrste (kolone);
(2) Dodavanje elementima jedne vrste (kolone) elemenata neke druge vrste (kolone), pošto su prethodno pomnoženi jednim brojem;
(3) Množenje elemenata jedne vrste (kolone) brojem različitim od nule;
(4) Sve vrste zamene kolonama.

Operacije pod 1-4 zovemo ***elementarnim transformacijama matrice***.

Definicija 15.
Za dve matrice koje se mogu transformisati jedna u drugu konačnim brojem elementarnih transformacija kaže se da su ***ekvivalentne***.

Ako su dve matrice A i B ekvivalentne, to se označava *A~B*.

Teorema 6.
Pri izostavljanju jedne vrste (kolone) neke matrice rang matrice se ne menja ako i samo ako je dotična vrsta (kolona) linearna kombinacija nekih (ili svih) preostalih vrsta (kolona). U protivnom slučaju rang matrice se smanjuje za jedan.

Određivanje ranga matrice

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{m1} & a_{m2}\ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

pomoću elementarnih transformacija matrice se sastoji u tome da se pomoću elementarnih transformacija data matrica svede na ekvivalentnu matricu – specijalnog oblika:

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & \mathrm{b}_{12}\ldots b_{1r}\ldots b_{1n} \\ 0 & \mathrm{b}_{22}\ldots b_{2r}\ldots b_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ 0 & 0\ \ldots\ \mathrm{b}_{rr}\ldots b_{rn} \end{bmatrix} \quad (r\leq n)$$

u kojoj su svi "dijagonalni" elementi $a_{11},a_{22},\ldots,a_{rr}$ različiti od nule, a elementi ispod "dijagonale" jednaki nuli. Dakle, rang matrice *B* je jednak broju *r*, a kako je matrica *B* ekvivalentna sa matricom *A*, imamo da je *rang A=rangB=r*.

Primer:

Odrediti rang matrice

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 1 & -5 & 0 & -7 \\ -5 & 7 & 1 & 4 & \alpha \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11 \\ 0 & -8 & -14 & -6 & -22 \\ 0 & -8 & -14 & -6 & \alpha-25 \end{bmatrix}$$

(Elementima druge vrste dodati su elementi prve vrste pomnoženi sa -3; elementima treće vrste dodati su elementi prve vrste pomnoženi sa -3; elementima četvrte vrste dodati su elementi prve vrste pomnoženi sa -5).

U zadnjoj matrici treća vrsta je linearna kombinacija druge vrste te se može izostaviti, pa dobijamo

$$A\sim\begin{bmatrix}1 & 3 & 3 & 2 & 5\\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11\\ 0 & -8 & -14 & -6 & \alpha-24\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 3 & 3 & 2 & 5\\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11\\ 0 & -8 & -14 & -6 & \alpha-24\end{bmatrix}$$

(Elementima treće vrste dodati su elementi druge vrste pomnoženi sa -2). Ako u zadnjoj matrici peta i treća kolona razmene mesta dobijamo:

$$A\sim\begin{bmatrix}1 & 3 & 3 & 2 & 5\\ 0 & -4 & -7 & -3 & -11\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-3\end{bmatrix}$$

Rang poslednje matrice, a samim tim i date je 3, za $\alpha \neq 3$, odnosno njen rang je 2 za $\alpha = 3$.

ZADACI

1. Izračunati vrednosti sledećih determinanti

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$; **b)** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; **c)** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; **d)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$;

Rešenje:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 3 \cdot 4 = 1 - 12 = -11$.

b) Koristeći Sarusovo pravilo dobijamo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{matrix} = 2 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 \cdot 4 - 3 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 4 - 1 \cdot 5 \cdot 3 = 40 .$$

c) Koristeći Laplasovo pravilo, razvijanjem po prvoj vrsti dobijamo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (9-8) - (15-2) + 3 \cdot (20-3) = 40$$

d) Koristeći jednu od osobina determinanti, možemo prvu kolonu da pomnožimo sa -3 i dodamo trećoj koloni. Determinantu sada razvijamo po prvoj vrsti koja sadrži dve nule.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 10 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 10 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -34 .$$

2. Izračunati determinantu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Rešenje:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -13$$

3. Izračunati determinante:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 7 & 6 & 9 \end{bmatrix}$, **b)** $\begin{vmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, **c)** $\begin{vmatrix} a & b+c & 1 \\ b & c+a & 1 \\ c & a+b & 1 \end{vmatrix}$, **d)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$

Rešenje:

a) 27; **b)** 20; **c)** 0 **d)** $(a-1)^3$.

4. Naći zbir i razliku matrica $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Rešenje:

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 & 1+(-2) \\ 3+1 & 2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1 & 1-(-2) \\ 3-1 & 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Ako su date matrice $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 2\end{bmatrix}$, naći matricu $C=2A-B$,

Rešenje:

$$C=2\cdot A-B=2\cdot\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 6 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 5 & 2\end{bmatrix}.$$

6. Izračunati $(2A-3B)\cdot C$**,** ako je

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 0 & -1\\ 1 & 3 & 0 & 2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 1 & 0\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\\ -1 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}.$$

Rešenje:

$$\left(\begin{bmatrix}0 & 2 & 2 & 0\\ 4 & 4 & 0 & -2\\ 2 & 6 & 0 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & 0 & 0 & 3\\ 0 & -3 & 6 & 6\\ 6 & 9 & 3 & 0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\\ -1 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 2 & 2 & -3\\ 4 & 7 & -6 & -8\\ -4 & -3 & -3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\\ -1 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}0 & -3\\ 1 & -16\\ 8 & 3\end{bmatrix}$$

7. Naći proizvode $A\cdot B$ i $B\cdot A$ matrica, $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

Rešenje:

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot1+1\cdot1 & 2\cdot(-2)+1\cdot1 & 2\cdot3+1\cdot2\\ 3\cdot1+2\cdot1 & 3\cdot(-2)+2\cdot1 & 3\cdot3+2\cdot2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -3 & 8\\ 5 & -4 & 13\end{bmatrix}.$$

Proizvod $B\cdot A$ ne postoji jer dimenzije matrica A i B nisu odgovarajuće.

8. Dokazati da za matrice $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{bmatrix}$ važi $\left(A+B\right)^2=A^2+B^2$.

Rešenje:

$$A+B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 6 & -2\end{bmatrix};\left(A+B\right)^2=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 6 & -2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 0\\ 6 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}.$$

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix};B^2=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}.$$

$$\left(A+B\right)^2=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}=A^2+B^2.$$

9. Ako je $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$, izračunati $A^2-\left(a+d\right)A+\left(ad-bc\right)I$.

Rešenje:

$$A^2-\left(a+d\right)A+\left(ad-bc\right)I=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}-\left(a+d\right)\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}+\left(ad-bc\right)\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ac+cd & bc+d^2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-a^2-ad & -ab-bd\\ -ac-cd & -ad-d^2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}ad-bc & 0\\ 0 & ad-bc\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Rezultat je nula matrica.

10. Ako je $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & -4\\ 5 & 6 & -5\end{bmatrix}$, naći njenu transponovanu matricu A^T.

Rešenje: $A^T=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 2 & 6\\ -4 & -5\end{bmatrix}$.

11. Ako je $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, naći sve matrice koje su komutativne sa matricom A.

Rešenje:

Neka je X tražena matrica, takva da je $AX=XA$.

Uzmimo da je matrica $X=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$, i dobijamo

$$AX=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ a+c & b+d\end{bmatrix},\ XA=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+b & b\\ c+d & d\end{bmatrix}.$$

Iz uslova da je $AX=XA$, dobijamo sistem jednačina:

$a=a+b$, $b=b$, $a+c=c+d$, $a+d=d$, odnosno $b=0$, $a=d$ odakle nalazimo rešenje $X=\begin{bmatrix}a & 0\\ c & a\end{bmatrix}$.

12. Proveriti sledeće rezultate:

$$\begin{bmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 7 & 0\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\ 8\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1 & -2 & -4\\ -1 & -2 & -4\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

3. SISTEMI LINEARNIH JEDNAČINA

3.1. OSNOVNI POJMOVI

Definicija 1.
Sistem od m linearnih jednačina sa n nepoznatih $x_1,x_2,...,x_n$ čine jednačine

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n&=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n&=b_2,\\ \ldots\ldots\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n&=b_m, \end{aligned}$$

gde su a_{ij},b_i (i=1,2,...,m; j=1,2,...,n) dati brojevi, pri čemu se brojevi a_{ij} nazivaju koeficijentima uz nepoznate, a b_i slobodni članovi sistema jednačina.

Definicija 2.
Rešenjem sistema linearnih jednačina nazivamo vrednosti iz uređene n-torke (c_1, c_2,...c_n) za koje jednačine sistema prelaze u identitete, posle zamene nepoznatih x_i odgovarajućim vrednostima c_i, tj:

$$\begin{aligned} &a_{11}c_1+a_{12}c_2+...+a_{1n}c_n\equiv b_1,\\ &a_{21}c_1+a_{22}c_2+...+a_{2n}c_n\equiv b_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &a_{m1}c_1+a_{m2}c_2+...+a_{mn}c_n\equiv b_m. \end{aligned}$$

Definicija 3.
Za sistem jednačina kaže se da je ***saglasan*** ako ima bar jedno rešenje; u protivnom, sistem je ***nesaglasan***.

Saglasan sistem je određen ako ima samo jedno rešenje, a neodređen ako ima više od jednog rešenja.

Definicija 4.
Za dva sistema linearnih jednačina sa istim brojem nepoznatih kažemo da su ***ekvivalentna*** ako je svako rešenje jednog sistema istovremeno rešenje i drugog sistema i obratno (ili ako su istovremeno oba nesaglasna).

3.2. MATRIČNI OBLIK SISTEMA LINEARNIH JEDNAČINA

Sistem linearnih jednačina može se pomoću matrica predstaviti u obliku matrične jednačine

$$AX=H,$$

gde je A - ***matrica sistema***, tj. matrica čiji su elementi koeficijenti uz nepoznate x_1, x_2,..., x_n:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

X - matrica-kolona čiji su elementi nepoznate x_1 ,x_2,..., x_n;
H - matrica-kolona čiji su elementi slobodni članovi b_1, b_2,..., b_m;

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}, \quad H=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$

Zaista, kako je broj kolona matrice A jednak broju vrsta matrice X, to možemo naći proizvod AX:

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

Elementi dobijene matrice-kolone AX su leve strane jednačina sistema, te se na osnovu definicije jednakosti dve matrice, sistem može napisati u obliku matrične jednačine.

3.3. REŠAVANJE SISTEMA LINEARNIH JEDNAČINA

3.3.1. Matrično rešenje

Posmatrajmo sistem od n linearnih jednačina sa n nepoznatih

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ &a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n, \end{aligned}$$

ili u matričnom obliku

$$AX=H,$$

gde je matrica sistema A - kvadratna matrica reda n
X - matrica-kolona čiji su elementi nepoznate $x_1, x_2, \ldots, x_n$;
H - matrica-kolona čiji su elementi slobodni članovi $b_1, b_2, \ldots, b_n$;

Pod predpostavkom da je $\det(A) \neq 0,$ matrica A ima inverznu matricu A^{-1} i množenjem obe strane matrične jednačine (2) sleva sa A^{-1}, dobijamo $A^{-1}(AX)=A^{-1}H$.

Kako je

$$A^{-1}(AX)=(A^{-1}A)X=IX=X$$

to je

$$X=A^{-1}H$$

Primer:

Matričnom metodom rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} 2x-3y+z&=7\\ 3x-2y-z&=3\\ x-y+2z&=6 \end{aligned}$$

Kako je

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1\\ 3 & -2 & -1\\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 7\\ 3\\ 6 \end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix} x\\ y\\ z \end{bmatrix}.$$

$$AX=B \Leftrightarrow X=A^{-1}\cdot B,$$

$$\det A=10\neq 0,\ A^{-1}=\frac{1}{10}\cdot\begin{bmatrix} -5 & 5 & 5\\ -7 & 3 & 5\\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{10}\cdot\begin{bmatrix} -5 & 5 & 5\\ -7 & 3 & 5\\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 7\\ 3\\ 6 \end{bmatrix}=\frac{1}{10}\cdot\begin{bmatrix} 10\\ -10\\ 20 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1\\ -1\\ 2 \end{bmatrix}$$

Dobijamo rešenje $(x,y,z)=(1,-1,2)$.

3.3.2. Kramerove formule

Iz izraza

$$X=A^{-1}H,$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \ldots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \ldots A_{n2} \\ . & \\ . & \\ . & \\ A_{1n} & A_{2n} \ldots A_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix} = = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ni}b_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n \end{bmatrix}$$

dobijamo

$$x_i = \frac{1}{\det A}\left(A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ni}b_n\right)$$
$$= \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n} A_{ki}b_k = \frac{D_i}{D} \quad (i=1,2,\ldots,n),$$

gde je D - determinanta matrice sistema (naziva se i determinanta sistema), a D_i - determinanta dobijena iz determinante D kada se koeficijenti $a_{1i}, a_{2i},\ldots, a_{ni}$ uz nepoznatu x_i (tj, i-ta kolona u determinanti D) zamene slobodnim članovima $b_1, b_2,\ldots, b_n$.

Dobijene formule nazivaju se ***Kramerove formule*.**

(1) Ako je determinant sistema $D \neq 0$, sistem ima jedinstveno rešenje

$$x_i = \frac{D_i}{D}.$$

(2) Ako je D=0, tada nastupa jedan od sledećih slučajeva:

a) sistem je nesaglasan i nema rešenja, ako je $D_i \neq 0$ za svako $i = 1, \cdots, n$

b) sistem je saglasan, ali neodređen (ima više rešenja) ako je $D_i = 0$.

Primer:

Rešiti sistem jednačina Kramerovom metodom

$$\begin{aligned} x+3y-2z&=1\\ 2x-\ y+\ z&=3\\ x+\quad 2z&=7 \end{aligned}$$

Determinanta sistema je: $D=\begin{vmatrix}1 & 3 & -2\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=-13\neq 0$.

Determinante D_x, D_y, D_z dobijamo kada u determinanti D zamenimo redom prvu, drugu i treću kolonu, kolonom slobodnih članova.

$$D_x=\begin{vmatrix}1 & 3 & -2\\ 3 & -1 & 1\\ 7 & 0 & 2\end{vmatrix}=-13,\ D_y=\begin{vmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 7 & 2\end{vmatrix}=-26,\ D_z=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 7\end{vmatrix}=-39.$$

Rešenje sistema je:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-13}{-13}=1,\ y=\frac{D_y}{D}=\frac{-26}{-13}=2,\ z=\frac{D_z}{D}=\frac{-39}{-13}=3,$$
$$(x,y,z)=(1,2,3)$$

3.3.3. Gausova metoda - Gausov algoritam

Dat je sistem od m linearnih jednačina sa n nepoznatih.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1\ &+a_{12}x_2\ &+\ldots+a_{1n}x_n\ &=b_1\\ a_{21}x_1\ &+a_{22}x_2\ &+\ldots+a_{2n}x_n\ &=b_2\\ &\vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2\ &+\ldots+a_{mn}x_n\ &=b_m \end{aligned}$$

gde je $m>n$, $m=n$ ili $m<n$.

Gausova metoda se sastoji u sukcesivnom eliminisanju nepoznatih iz sistema i transformacijom u trougaoni ili trapezni ekvivalentni sistem iz koga se dobija rešenje ili se ustanovi da sistem nema rešenja.

Pretpostavimo da je koeficijent $a_{11} \neq 0$. Isključimo nepoznatu x_1 iz svih jednačina sistema osim prve.

Da bismo to realizovali potrebno je prvu jednačinu pomnožiti sa $-a_{21}/a_{11}$ i dodati je drugoj jednačini, zatim prvu jednačinu pomnožiti sa $-a_{31}/a_{11}$ i dodati je trećoj jednačini, itd. Na taj način se umesto polaznog sistema dobija ekvivalentan sistem:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &+ \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 &+ \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\ &\vdots & \\ a_{m2}^{(1)}x_2 &+ \ldots + a_{mn}^{(1)}x_n &= b_m^{(1)} \end{aligned}$$

Ako sada pretpostavimo da je $a_{22}^{(1)} \neq 0$, primenićemo isti postupak za isključivanje promenljive x_2 iz poslednjih $m-2$ jednačina sistema i dobićemo ekvivalentan sistem jednačina:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &+ a_{13}x_3 &+ \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 &+ a_{23}^{(1)}x_3 &+ \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\ &a_{33}^{(2)}x_3 &+ \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n &= b_3^{(2)} \\ &\vdots & & \\ &a_{m3}^{(2)}x_3 &+ \ldots + a_{mn}^{(2)}x_n &= b_m^{(2)} \end{aligned}$$

Ako bi produžili isti postupak $k-1$ puta dobili bi sistem:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &+ \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 &+ \cdots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\ &\vdots & \\ a_{kk}^{(k-1)}x_k &+ \cdots + a_{kn}^{(k-1)}x_n &= b_k^{(k-1)} \end{aligned}$$

Ako su svi koeficijenti dobijenog sistema jednaki nuli, a slobodni član nije nula, sistem je nesaglasan i nema rešenja.

Ako je $k = n$, sistem ima jedinstveno rešenje.

Ako je $k < n$ sistem ima beskonačno rešenja. Tada su $x_{k+1}, \ldots, x_n$ slobodne promenljive koje prenosimo na desnu stranu, a zatim se određuju vezane promenljive $x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k$.

Primer:

Rešiti sistem linearnih jednačina Gausovom metodom

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= -4 \\ 2x - y + z &= 3 \\ -2x + y + 2z &= 6 \end{aligned}$$

Nakon množenja prve jednačine redom sa -2 i 2 i dodavanjem redom drugoj i trećoj jednačini dobijamo sistem:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= -4 \\ -5y + 7z &= 11 \\ 5y - 4z &= -2 \end{aligned}$$

Dodavanjem druge jednačine trećoj dobijamo sistem:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= -4 \\ -5y + 7z &= 11 \\ 3z &= 9 \end{aligned}$$

Ovo je sistem trougaonog oblika iz kojeg se neposredno dobija jedinstveno rešenje $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

Primer:

Rešiti sistem linearnih jednačina Gausovom metodom

$$\begin{aligned} x+2y+\ z&=10\\ 2x+\ y+\ z&=6\\ 10x-\ y+3z&=2 \end{aligned}$$

Nakon množenja prve jednačine redom sa -2 i -10 i dodavanjem redom drugoj i trećoj jednačini dobijamo sistem:

$$\begin{aligned} x+2y+\ z&=10\\ -3y-\ z&=-14\\ -21y-7z&=-98 \end{aligned}$$

Množenjem druge jednačine sa -7 i dodavanjem trećoj dobijamo sistem:

$$\begin{aligned} x+2y+\ z&=10\\ -3y-\ z&=-14\\ 0\cdot z&=0 \end{aligned}$$

Ovo je neodređen sistem. Stavljajući $z=t\in R$ neposredno se dobija rešenje $(x,y,z)=\left(\frac{2-t}{3},\frac{14-t}{3},t\right)$.

3.3.4. Kroneker-Kapelijeva teorema

Neka je dat sistem

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\ &a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\ &\vdots\\ &a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{aligned}$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\ A_p=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

gde je A je ***matrica sistema***, a A_p je ***proširena matrica sistema***.

Teorema 1:

Ako je n je broj nepoznatih, tada:

1. Sistem je ***saglasan*** i ima ***jednoznačno rešenje*** ako je $\text{rang}(A)=\text{rang}(A_p)=n$.
2. Sistem je ***saglasan*** i ima ***beskonačno mnogo rešenja*** ako je $\text{rang}(A)=\text{rang}(A_p)<n$.
3. Sistem je ***protivrečan i nema rešenja*** ako je $\text{rang}(A)<\text{rang}(A_p)$.

Primer:

Rešiti sistem jednačina:

$$\begin{aligned} 3x-\ 2y-\ z&=2 \\ 2x+\ \ y+\ z&=3 \\ -5x+8y\ +5z&=1 \end{aligned}.$$

Kako je

$$\text{rang}(A)=\text{rang}\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -5 & 8 & 5 \end{bmatrix}=2,\ \text{rang}(A_p)=\text{rang}\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ -5 & 8 & 5 & 1 \end{bmatrix}=3$$

zaključujemo da je sistem protivrečan i nema rešenja.

Primer:

Rešiti sistem jednačina:

$$\begin{aligned} x-y+\ z&=6 \\ 2x+y+\ z&=3 \\ x+y+2z&=5 \end{aligned}$$

Kako je

$$\operatorname{rang}(A)=\operatorname{rang}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}=3\text{, a }\operatorname{rang}(A_p)=\operatorname{rang}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 6\\ 2 & 1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 2 & 5\end{bmatrix}=3,$$

zaključujemo da je sistem saglasan i ima jedinstveno rešenje koje možemo dobiti nekom od već izloženih metoda.

3.3.5.Homogeni sistem jednačina

Definicija 1.
Sistem linearnih jednačina je ***homogen,*** ako je slobodan član

$$b_1=b_2=\ldots=b_n=0$$

Dat je sistem od m homogenih jednačina sa n promenljivih:

$$\begin{aligned}&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0\\ &a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0\\ &\vdots\\ &a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0\end{aligned}$$

Teorema 2.
Kako je $b_1=b_2=\ldots=b_m=0$ homogeni sistem je uvek **saglasan** jer je $\operatorname{rang}(A)=\operatorname{rang}(A_p)$.

***Teorema* 3:**

a) Homogeni sistem ima samo ***trivijalno*** rešenje $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ ako i samo ako je $\text{rang}(A)$ jednak broju nepozantih n.

2) Homogeni sistem ima i ***netrivijalno*** rešenje ako i samo ako je $\text{rang}(A)$ manji od broja nepozantih n.

Prethoda teorema je posledica Kroneker-Kapelijeve teoreme.

Primer:

Homogeni sistem jednačina

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ x - y &= 0 \\ x + y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

ima samo trivijalno rešenje $(0,0,0)$, jer je, $\text{rang}(A) = 3$ i jednak je broju nepoznatih.

Primer :

Odrediti rešenja homogenog sistema jednačina

$$\begin{aligned} x + y - 4z &= 0 \\ x - y + 3z &= 0 \\ 5x - y + z &= 0 \end{aligned}.$$

Kako je $\text{rang}(A) = 2$, a $n = 3$ pa sistem jednačina ima i netrivijalnih rešenja i svodi se na sistem od dve jednačine sa dve nepoznate:

$$\begin{aligned} x + y - 4z &= 0 \\ x - y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

čije je rešenje $(x, y, z) = (t, 7t, 2t); t \in R$.

ZADACI

1. Gausovom metodom rešiti sisteme jednačina:

a) $\begin{aligned} x+y+z&=6\\ 2x+y+3z&=13\\ -x+5y-2z&=3 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} 2x-y+z&=8\\ x+3y-2z&=-7\\ 3x+2y-z&=1\\ x-4y+3z&=15 \end{aligned}$ **c)** $\begin{aligned} x+2y+2z&=1\\ 2x+3y+z&=0\\ ax+y-z&=1 \end{aligned}$

Rešenje:

a)

$$\begin{aligned} x+y+z&=6\\ 2x+y+3z&=13\\ -x+5y-2z&=3 \end{aligned}$$

Ako se prva jednačina pomnoži sa -2 i doda drugoj jednačini i prva jednačina doda trećoj dobićemo sistem:

$$\begin{aligned} x+y+z&=6\\ -y+z&=1\\ 6y-z&=9 \end{aligned}$$

Množenjem druge jednačine sa 6 i dodavanjem trećoj dobijamo sistem:

$$\begin{aligned} x+y+z&=6\\ -y+z&=1\\ 5y&=10 \end{aligned}$$

Ovo je sistem trougaonog oblika iz kojeg se neposredno vidi da je jedinstveno rešenje $(x,y,z)=(1,2,3)$.

b) Ako u polaznom sistemu prvu jednačinu pomnoženu redom sa 2, 1 i -3 dodamo drugoj, trećoj odnosno četvrtoj jednačini, dobijamo ekvivalentan sistem:

$$\begin{aligned} 2x-y+z&=8\\ 5x+y&=9\\ 5x+y&=9\\ -5x-y&=-9 \end{aligned} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{aligned} 2x-y+z&=8\\ 5x+y&=9 \end{aligned}$$

Ovo je sistem od dve jednačine sa tri nepoznate koji ne može da ima jedinstveno rešenje. Neka je $x = t \in R$ proizvoljno. Tada iz druge jednačine sistema dobijamo $y = 9 - 5t$ i zamenom obe vrednosti u prvu jednačinu dobijamo $z = 17 - 7t$.

Dakle skup rešenja je $(x, y, z) = (t\,, 9 - 5t\,, 17 - 7t)$.

c)

$$\begin{array}{l} 2x + 3y + z = 0 \\ -3x - 4y \;\; = 1 \\ (a+2)x + 4y = 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 2x + 3y + z = 0 \\ -3x - 4y \;\; = 1 \\ (a-1)x = 2 \end{array}$$

Skup rešenja zadatog sistema jednačina glasi:

Za $a \neq 1$ imamo $(x, y, z,) = \left(\dfrac{2}{a-1}, \dfrac{-a-5}{4(a-1)}, \dfrac{3a-1}{4(a-1)} \right)$.

Za $a = 1$ sistem nema rešenja.

2. Gausovom metodom rešiti sisteme jednačina:

a) $\begin{array}{l} x + 2y - 6z = -13 \\ 2x + 5y + 4z = 24 \\ 3x + 10y + z = 26 \end{array}$ **b)** $\begin{array}{l} x + 2y - 3z = 5 \\ 2x + 3y - 5z = 8 \\ 5x + y - 8z = 7 \end{array}$ **c)** $\begin{array}{l} 2x - y + z = -1 \\ x + 2y - 3z = 8 \\ ax + y - 2z = 7 \end{array}$

Rešenje:

a) $(x, y, z) = (1, 2, 3)$; **b)** $(x, y, z) = (1, 2, 0)$;

c) Za $a \neq 3$ je $(x, y, z) = (0, -5, -6)$, za $a = 3$ je $(x, y, z) = (t, 7t - 5, 5t - 6)$.

3. Kramerovom metodom rešiti sisteme jednačina:

a) $\begin{array}{l} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{array}$ **b)** $\begin{array}{l} x + 2y + z = 10 \\ 2x + y + z = 6 \\ 10x - y + 3z = 2 \end{array}$

c) $\begin{aligned} x+y+z&=3\\ x-2y+2z&=1\\ -2x+y-3z&=4 \end{aligned}$ **d)** $\begin{aligned} 2x+y+z&=-1\\ -x+y+2z&=3\\ 3x+2y+4z&=1 \end{aligned}$

Rešenje:

a) $D=\begin{vmatrix}3&2&1\\2&3&1\\2&1&3\end{vmatrix}=12$, $D_x=\begin{vmatrix}5&2&1\\1&3&1\\11&1&3\end{vmatrix}=24$, $D_y=\begin{vmatrix}3&5&1\\2&1&1\\2&11&3\end{vmatrix}=-24$,

$D_z=\begin{vmatrix}3&2&5\\2&3&1\\2&1&11\end{vmatrix}=36$.

Kako je $D\neq 0$ sistem ima jedinstveno rešenje:

$x=\frac{D_x}{D}=\frac{24}{12}=2$, $y=\frac{D_y}{D}=\frac{-24}{12}=-2$, $z=\frac{D_z}{D}=\frac{36}{12}=3$, $(x,y,z)=(2,-2,3)$.

b) $D=0$, $D_x=D_y=D_z=0$. Zaključujemo da je sistem neodređen.

Sistem se transformiše u ekvivalentni sistem:

$$\begin{aligned} x+2y+z&=10\\ -3y-z&=-14 \end{aligned}$$

čije je rešenje $(x,y,z)=\left(\frac{2+t}{3},\frac{14-t}{3},t\right)$, gde je $t\in R$.

c) $D=0$, $D_x=32$, pa prema Kramerovoj teoremi sistem nema rešenja.

d) $(x,y,z)=(-1,0,1)$.

4. Diskutovati i rešiti sisteme jednačina u zavisnosti od realnog parametra a :

a) $\begin{aligned} ax+y+z&=1\\ x+ay+2z&=2\\ 2x+y+z&=0 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} 3x-2y+z&=0\\ -x+y-2z&=2\\ ax-y-z&=0 \end{aligned}$ **c)** $\begin{aligned} x+y+az&=1\\ x+ay+z&=1\\ ax+y+z&=1 \end{aligned}$

Rešenje:

a)

$$D=\begin{vmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & a & 2\\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} a & 2\\ 1 & 1 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 2\\ 2 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & a\\ 2 & 1 \end{vmatrix}=a(a-2)+3+1=a^2-4a+4=(a-2)^2;$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 2 & a & 2\\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 2 & 2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 2 & a \end{vmatrix}=a-2;$$

$$D_y=\begin{vmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 2 & 2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & 1\\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2a-1;$$

$$D_z=\begin{vmatrix} a & 1 & 1\\ 1 & a & 2\\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 1 & 1\\ a & 2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a & 1\\ 1 & 2 \end{vmatrix}=5-4a\,.$$

Za $D\neq 0\Leftrightarrow (a-2)^2\neq 0\Leftrightarrow a\neq 2$ sistem ima jedinstveno rešenje:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{1}{a-2}\,,\ y=\frac{D_y}{D}=\frac{2a-1}{(a-2)^2}\,,\ z=\frac{D_z}{D}=\frac{5-4a}{(a-2)^2}\,.$$

$$(x,y,z)=\left(\frac{1}{a-2},\frac{2a-1}{(a-2)^2},\frac{5-4a}{(a-2)^2}\right).$$

Za $D=0$,odnosno za $a=2$ dobijamo $D_y=3\neq 0,$ pa je sistem nemoguć.

b) $D=3(a-2)$, $D_x=-6$, $D_y=-2(a+3)$, $D_z=-2(2a-3)$.

Za $D=3(a-2)$, tj. za $a\neq 2$ imamo jedinstveno rešenje:

$$(x,y,z)=\left(\frac{-2}{a-2},-\frac{-2(a+3)}{3(a-2)},\frac{-2(2a-3)}{3(a-2)}\right).$$

Za $D=0$, tj. za $a=2$, $D_x\neq 0, D_y\neq 0, D_z\neq 0$ sistem je nemoguć i nema rešenja.

c) $D=-(a-1)^2(a+2)$, $D_x=-(a-1)^2$, $D_y=-(a-1)^2$, $D_z=-(a-1)^2$.

Za $D\neq 0,$ odnosno za $a\neq 1\wedge a\neq -2$ sistem ima jedinstveno rešenje:

$$(x,y,z)=\left(\frac{1}{a+2},\frac{1}{a+2},\frac{1}{a+2}\right).$$

$D=0$ za $a=1\vee a=-2$.

Za $a=-2$ je $D_x\neq 0$, $D_y\neq 0$, $D_z\neq 0$ sistem je nemoguć i nema rešenja.

Za $a=1$ je $D_x=0$, $D_y=0$, $D_z=0$ sistem je neodređen i svodi se na tri iste jednačine:

$x+y+z=1$, $x+y+z=1$, $x+y+z=1$.

Ako uvedemo smenu da je $x=t\in R$ i $y=r\in R$, dobijamo $z=1-t-r$, pa je rešenje oblika $(x,y,z)=(t,r,1-t-r)$.

5. Rešiti sisteme jednačina:

a) $\begin{aligned} x+y+az&=2\\ x+ay+z&=-1\\ ax+y+z&=-1\end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x+y+z&=a\\ x+(1+a)y+z&=2a\\ x+y-(1+a)z&=0\end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x+y+az&=3\\ x+ay+z&=0\\ ax+y+z&=0\end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x+y+z&=1\\ x+ay+az&=1\\ ax+ay+az&=1\end{aligned}$.

Rešenje:

a) $D=-(a-1)^2(a+2)$, $D_x=(a-1)(a+2)$, $D_y=(a-1)(a+2)$,
$D_z=-2(a-1)(a+2)$.

Za $D\neq 0$, tj. za $a\neq 1\wedge a\neq -2$ sistem ima jedinstveno rešenje

$$(x,y,z)=\left(-\frac{1}{a-1},-\frac{1}{a-1},\frac{2}{a-1}\right).$$

$D=0$ za $a=-2\vee a=1$.

Za $a=-2$ je $D_x=0, D_y=0, D_z=0$ i sistem se svodi na:

$$\begin{aligned} x+\ \ y-2z&=2\\ x-2y+\ \ z&=-1\\ -2x+y\ +\ \ z&=-1\end{aligned}$$

Rešavanjem bilo kojom od poznatih metoda dobijamo rešenje:
$(x,y,z)=(t+1,t+1,t)$.

Za $a=1$, $D_x=0, D_y=0, D_z=0$, sistem je kontradikcija.

$x+y+z=2$, $x+y+z=-1$, $x+y+z=-1$ i nema rešenja.

b) $D=-a(a+2)$, $D_x=a\left(-a^2+2\right)$ $D_y=-a(a+2)$, $D_z=-a^2$.

Za $D\neq 0$, tj. za $a\neq 0\wedge a\neq -2$ sistem ima jedinstveno rešenje:

$$(x,y,z)=\left(\frac{a^2-2}{a+2},1,-\frac{a}{a+2}\right).$$

$D=0$ za $a=-2\vee a=0$.

Za $a=-2$ sistem je nemoguć.

Za $a=0$ sistem je neodređen i rešenje je $(x,y,z)=(t,-t,0)\ t\in R$.

c) Za $D\neq 0,$ odnosno za $a\neq 1\wedge a\neq -2$, sistem ima jedinstveno rešenje

$$(x,y,z)=\left(-\frac{3}{(a-1)(a+2)},-\frac{3}{(a-1)(a+2)},\frac{3(a+1)}{(a-1)(a+2)}\right).$$

Za $D=0$, odnosno za $a=-2$ sistem nije moguć i nema rešenja.

Za $D=0$, odnosno za $a=1$ sistem nije moguć i nema rešenja.

d) $D=a(a-1)^2$, $D_x=0$, $D_y=0$, $D_z=(a-1)^2$.

Za $D\neq 0$, odnosno za $a\neq 0\wedge a\neq 1$ je $(x,y,z)=\left(0,0,\frac{1}{a}\right)$.

Za $D=0$, odnosno za $a=1$ je $(x,y,z)=(1-t-r,t,r)$, $t,r\in R$.

Za $D=0$, odnosno za $a=0$ sistem nije moguć i nema rešenja.

6. U zavisnosti od vrednosti realnog parametra a diskutovati i rešiti sistem linearnih jednačina:

a) $\begin{array}{l} x-2y+z=1 \\ 3x+2y+z=0 \\ 5x-2y+az=1 \end{array}$ **b)** $\begin{array}{l} x+y+z=3 \\ x-ay+2z=1 \\ 2x+2y-az=6 \end{array}$ **c)** $\begin{array}{l} x+y+2z+u=0 \\ 2x-y+z-2u=0 \\ x-2y-z-3u=0 \end{array}$

Rešenje:

a) Korišćenjem Kroneker -Kapelijeve teoreme imamo da je A matrica sistema, a A_p proširena matrica sistema.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & a & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & -2 & -3 \\ 0 & 8 & a-5 & -4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & a-3 & -1 \end{array}\right]$$

Ako je $a\neq 3$, onda $\operatorname{rang}A_p=\operatorname{rang}A=3$. Kako je broj nepoznatih u sistemu $n=3$, sistem ima jedinstveno rešenje. Rešenje sistema

$$\begin{array}{l} x-2y+z=1 \\ 8y-2z=-3 \\ (a-3)z=-1 \end{array},$$

je $(x,y,z)=\left(\frac{a-1}{4(a-3)},\frac{7-3a}{8(a-3)},\frac{1}{3-a}\right)$.

Ako je $a=3$, onda je $\text{rang}A_p=3$, a $\text{rang}A=2$, pa sistem nema rešenja.

b) Ako je $a\neq -1\wedge a\neq -2$, onda je $\text{rang}A_p=\text{rang}A=3$ i tada sistem ima jedinstveno rešenje $(x,y,z)=\left(3-\frac{2}{a+1},\frac{2}{a+1},0\right)$.

Ako je $a=-2$, onda je $\text{rang}A_p=\text{rang}A=2<3$ i tada sistem ima beskonačno mnogo rešenja oblika $(x,y,z)=(5,-2-t,t)$, $t\in R$.

Ako je $a=-1$ onda je $\text{rang}A=2\neq\text{rang}A_p=3$ i tada sistem nema rešenja.

c) Kako je $\text{rang}(A)=2$, a $n=3$ sistem jednačina ima i netrivijalnih rešenja i svodi se na sistem od dve jednačine sa dve nepoznate:

$$x+y=-2z-u$$
$$2x-y=-z+2u$$

čije je rešenje $(x,y,z,u)=\left(-t+\frac{r}{3},-t-\frac{4r}{3},t,r\right);\ t,r\in R$.

7. Rešiti homogeni sistem jednačina i diskutovati rešenja u zavisnosti od paramerta

a) $\begin{matrix}2x+2y+3z=0\\3x+ay+5z=0\\x+7y+3z=0\end{matrix}$ **b)** $\begin{matrix}x+y+z=0\\ax+4y+z=0\\6x+(a+2)y+2z=0\end{matrix}$

c) $\begin{matrix}x+2y+z=0\\x+y+z=0\\ax+y+z=0\end{matrix}$ **d)** $\begin{matrix}x+y+z=0\\x+(a+1)y+2z=0\\x+\ (a+1)z=0\end{matrix}$

Rešenje:

a) Uslov da homogen sistem ima netrivijalna rešenja je da determinanta matrice sistema bude jednaka nuli ili kako smo već naglasili da rang matrice sistema nije jednak broju nepoznatih.

$$D=\begin{vmatrix}2 & 2 & 3\\ 3 & a & 5\\ 1 & 7 & 3\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow a=5.$$

Za $a=5$ matrica sistema je $\begin{bmatrix}2 & 2 & 3\\ 3 & 5 & 5\\ 1 & 7 & 3\end{bmatrix}$ i njen rang je jednak 2, što znači da se sistem svodi na dve jednačine sa tri nepoznate:

$$2x+2y=-3z$$
$$3x+5y=-5z$$

Prema tome, rešenje sistema je $(x,y,z)=(-5t/4,-t/4,t)$, $t\in R$.

b) $D=a^2-a-12$.

Za $D\neq 0$, odnosno za $a\neq 4\wedge a\neq -3$, sistem ima samo trivijalno rešenje $(x,y,z)=(0,0,0)$.

$D=0$ za $a=4$ i tada sistem postaje:

$$x+y+z=0$$
$$4x+4y+z=0$$
$$6x+6y+2z=0$$

koji ima rešenja oblika $(x,y,z)=(k,-k,0)$, $k\in R$.

$D=0$ za $a=-3$ sistem postaje:

$$x+y+z=0$$
$$-3x+4y+z=0$$
$$6x-y+2z=0$$

koji ima rešenja $(x,y,z)=(-3k,-4k,7k)$, $k\in R$.

c) $D=a-1$.

$D\neq 0$ za $a\neq 1$, tada sistem ima samo trivijalno rešenje $(x,y,z)=(0,0,0)$.

Za $D=0$, odnosno za $a=1$, sistem pored trivijalnog ima i beskonačno mnogo netrivijalnih rešenja i svodi se na sistem oblika:

$$x+2y+z=0$$
$$x+y+z=0$$

čije je rešenje oblika $(x,y,z)=(-t,0,t)$, $t\in R$.

d) $D=a^2+1\neq 0 \quad \forall a\in R$, pa sistem ima samo trivijalno rešenje.

8. Rešiti sistem jednačina matričnom metodom:

a) $\begin{aligned} x+2y-z&=-3\\ 2x+3y+z&=-1\\ x-y-z&=3 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} x+y+z&=2\\ x+2y+3z&=2\\ x+y-2z&=5 \end{aligned}$ **c)** $\begin{aligned} 2x-y+3z&=-1\\ x+2y-4z&=5\\ 3x+y+2z&=1 \end{aligned}$

Rešenje:

a) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} -3\\ -1\\ 3 \end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix} x\\ y\\ z \end{bmatrix}.$

$AX=B \Leftrightarrow X=A^{-1}\cdot B$

$\det A=9\neq 0$, $A^{-1}=\frac{1}{9}\cdot\begin{bmatrix} -2 & 3 & 5\\ 3 & 0 & -3\\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$

b) $X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{9}\cdot\begin{bmatrix} -2 & 3 & 5\\ 3 & 0 & -3\\ -5 & 3 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -3\\ -1\\ 3 \end{bmatrix}=\frac{1}{9}\cdot\begin{bmatrix} 18\\ -18\\ 9 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\\ -2\\ 1 \end{bmatrix},$

$(x,y,z)=(2,-2,1).$

c) $(x,y,z)=(1,2,-1).$



PITANJA ZA PONAVLJANJE

1. Šta je matrica?
2. Navesti vrste matrica.
3. Definisati matrične operacije.
4. Šta je detrminanta?
5. Defisati Sarusovo pravilo za izračunavanje determinanti.
6. Defisati Laplasovo pravilo za izračunavanje determinanti.
7. Nabrojati osnovne osobine determinanti.
8. Šta je rang matrice i kako se određuje?
9. Definisati inverznu matricu.
10. Šta je adjungovana matrica?



KLJUČNI POJMOVI

- MATRICA
- RANG MATRICE
- MINOR
- KOFAKTOR
- ADJUNGOVANA MATRICA
- INVERZNA MATRICA
- DETERMINANTA
- SARUSOVO PRAVILO
- LAPLASOVO PRAVILO
- KRAMEROVA PRAVILA
- HOMOGENI SISTEM
- GAUSOVA METODA

II - GLAVA

FUNKCIJE

SADŽAJ OVOG POGLAVLJA JE:

- **FUNKCIJE JEDNE PROMENLJIVE**
- **NIZ**
- **GRANIČNA VREDNOST**
- **NEPREKIDNOST**
- **REDOVI**
- **FUNKCIJE VIŠE PROMENLJIVIH**

CILJEVI UČENJA

Kada ovo poglavlje proučite znaćete:

1. Šta su funkcije jedne i više promenljivih,
2. Da definišete osobine funkcija,
3. šta su inverzne i složene funkcije,
4. šta je niz,
5. šta je red,
6. pojam granične vredosti,
7. pojam neprekidosti.

4. ELEMENTI MATEMATIČKE ANALIZE

4.1. MODUL REALNOG BROJA

Definicija 1.
Modulom ili apsolutnom vrednošću realnog broja *a* nazivamo nenegativni realni broj $|a| = \begin{cases} a\,, a > 0 \\ 0\,, a = 0 \\ -a\,, a < 0 \end{cases}$,

Neposredno iz definicije modula sledi da je za svako a∈R $|-a| = |a|$, odnosno $-|a| \le a \le |a|$. Geometrijski, modul realnog broja predstavlja rastojanje tačke koja odgovara tom broju na brojnoj pravoj do tačke koja odgovara broju nula. Tako je $|-4| = |4|,\ \ |0| = 0$ itd.

Sada možemo zaključiti da je nejednakost $|x| < \varepsilon$, (ε>0) ekvivalentna sa nejednakostima $-\varepsilon < x < \varepsilon$. Može se pokazati da je nejednakost $|x-a| < \varepsilon$ ekvivalentna sa nejednakostima $a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$.

Za module realnih brojeva važe sledeće osobine:

$$|a+b| \le |a| + |b|, \qquad |a-b| \le |a| + |b|, \qquad |a-b| \ge |a| - |b|.$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \qquad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \ne 0.$$

4.2. NEKI PODSKUPOVI SKUPA REALNIH BROJEVA I NJIHOVE OSOBINE

Definicija 2.
Ako su $a, b \in R$, a<b, tada podskupove skupa realnih brojeva definisane na sledeći način:

$$[a,b] = \{x | a \le x \le b\} \qquad (a,b] = \{x | a < x \le b\}$$
$$[a,b) = \{x | a \le x < b\} \qquad (a,b) = \{x | a < x < b\}$$

zovemo redom: ***zatvorenim intervalom (segmentom), poluotvorenim intervalom sleva, poluotvorenim intervalom sdesna, odnosno otvorenim intervalom*** .

Definicija 3.
Ako je $a \in R$, tada podskupove realnih brojeva definisane na sledeći način:

$$(a,+\infty) = \{x | x > a\} \qquad (\text{-}\infty,\text{a}) = \{x | x < a\},$$
$$[a,+\infty) = \{x | x \geq a\} \qquad (\text{-}\infty,\text{a}] = \{x | x \leq a\},$$

zovemo redom: ***beskonačnim otvorenim intervalima,*** **odnosno** ***beskonačno zatvorenim intervalima.***

Pored ovih oznaka za skup svih realnih brojeva ćemo upotrebljavati oznaku $(-\infty,+\infty)$

Definicija 4.
Skup X, $X \subset R$ je ***ograničen sa donje strane*** ako postoji broj $m \in R$ za koji važi da je

$$\forall x \in X \quad x \geq m .$$

Najveće od svih donjih ograničenja (granica) $m_i \in R, i \in N$ naziva se *infimum* skupa

$$\inf X = \max\{m_i, m_i \leq x, \forall x \in X\}$$

Ako je $\inf X = x_1, x_1 \in X$ onda kažemo da je x_1 ***najmanji ili minimalan*** element u skupu X i pišemo $x_1 = \min X$

Definicija 5.
Skup X, $X \subset R$ je ***ograničen sa gornje strane*** ako postoji broj $M \in R$ za koji važi da je

$$\forall x \in X \quad x \leq M .$$

Najveće od svih gornjih ograničenja $M_i \in R, i \in N$ naziva se ***supremum*** skupa X

$$\sup X = \max\{M_i, M_i \geq x, \forall x \in X\}$$

Ako je $\sup X = x_1, x_1 \in X$ onda kažemo da je x_1 ***najveći ili maksimalan*** element u skupu X I pišemo $x_1 = \max X$

Za skupove koji nisu ograničeni kažemo da su neograničeni. Napomenimo da su skupovi $(-\infty,a),(-\infty,a],(a,b),[a,b]$ ograničeni odozgo, a da su skupovi $(a,-\infty),[a,+\infty),(a,b),[a,b]$ ograničeni odozdo.

Teorema 1.
Svaki neprazan skup realnih brojeva ograničen odozgo ima konačan ***supremum,*** a ograničen odozdo konačan ***infimum.***

Teorema 2.
Za proizvoljni neprazan podskup skupa realnih brojeva supremum i infimum su jedinstveni.

Primer :

Dat je skup $(0,1] \subset R$.

Tada je $\sup(0,1] = 1 = \max(0,1]$ jer je $1 \in (0,1]$

$\inf(0,1] = 0$, ali ne postoji minimalan element jer je $0 \notin (0,1]$

Od značaja je za dalja izlaganja upoznati se sa pojmom okoline neke tačke.

Teorema 3.
Proizvoljan skup U $\subset$ R zovemo ***okolinom tačke*** x_0 ako postoji $\varepsilon > 0$, takvo da je $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \subseteq U$.

Inače sam skup $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \subseteq U$, kao otvoreni interval, zvaćemo još i ε-okolinom tačke x_0 .

4.3. POJAM FUNKCIJE

4.3.1. Pojam funkcije jedne nezavisne promenljive

Definicija 6.
Neka su A i B proizvoljni skupovi. ***Preslikavanje* ili *funkcija*** $f : A \to B$ predstavlja zakon pridruživanja pomoću koga se proizvoljnom elementu $x \in A$ dodeljuje element $y \in B$ takav da je $y = f(x)$.

Element $x \in A$ naziva se ***original,*** a $y \in B$ njegova *slika*.
Skup $D_x \subseteq A$ naziva se ***oblast definisanosti* ili *domen*** funkcije..
Skup $D_y \subseteq B$ naziva se ***oblast vrednosti* ili *kodomen*** funkcije.

Funkcije kod kojih su domen i antidomen podskupovi skupa realnih brojeva zovu se ***realne funkcije*** realne promenljive (sa kojima ovde isključivo radimo). Funkcije će nam najčešće biti zadane formulama (analitičkim izrazima) *y=f(x)* (odnosno *y=y(x), y=F(x), y=*$\phi(x)$ *...)*

Primer:

Odrediti domen funkcija- skup tačaka *x* za koji izraz *f(x)* ima smisla:

a) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$,

Iz uslova da je $x-3 \neq 0$, dobijamo $x \neq 3$. Prema tome domen funkcije je skup $D_x = R \setminus \{3\}$ ili uobičajen je i zapis $x \in (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$.

b) $y = \sqrt{4-x^2}$, $\quad 4 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-2, 2]$.

c) $y = \ln x$, $\quad x > 0 \Leftrightarrow x \in (0, \infty)$.

d) $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\quad D_x = R$.

Primer :

Odrediti kodomen funkcija:

a) $y = \sin x$, $D_y : y \in [-1,1]$;

b) $y = x - 2$, $D_y = R$;

c) $y = x^2 + 1$, $D_y : y \in [1, +\infty)$

Definicija 7.
Za funkciju $f : A \to B$ kažemo da je ***jednoznačna*** ako bilo kojem elementu $x \in A$ odgovara najviše jedan element $y \in B$.

Definicija 8.
Funkcija $f : A \to B$ se naziva preslikavanje "$1-1$" ili ***injektivnom*** ako

$$(\forall x_1, x_2 \in A)\, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Definicija 9.
Funkcija $f : A \to B$ se naziva preslikavanje **"*na*" ili *surjektivnim*** ako

$$(\forall y \in B\,, \exists x \in A)\, y = f(x)\,.$$

Definicija 10.
Ako je preslikavanje $f : A \to B$ "$1-1$" i "na" zovemo ga ***bijektivnim ili obostrano jednoznačnim preslikavanjem.***

Napomenimo još da se funkcije u primenama mogu zadavati i tabelarno (na konačnim skupovima), grafički, u obliku programa na računaru itd, jer nije uvek moguće svakoj funkcionalnoj zavisnosti pridružiti analitički izraz u praksi.

4.3.2. Grafik funkcije

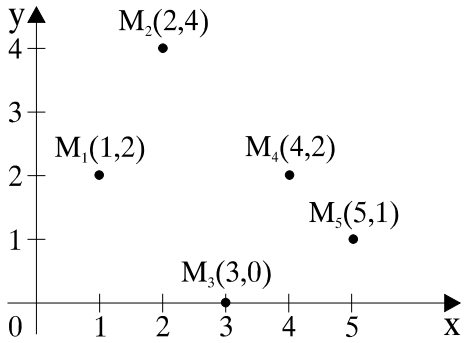
Definicija 11.
Grafikom funkcije y=f(x), u Dekartovom koordinatnom sistemu, u ravni, zovemo skup tačaka u ravni M(x,f(x)).

Primer:

Grafik funkcije zadate tabelom

x	1	2	3	4	5
y	2	4	0	2	1

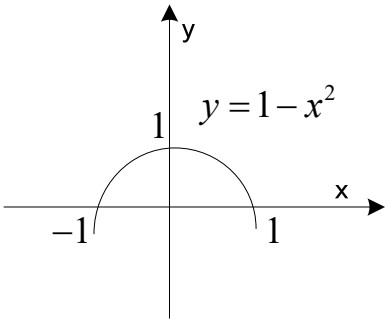
Dakle, grafik ove funkcije je skup tačaka G={M_1,M_2,M_3,M_4,M_5}. Tako, na primer, tačka M_2(2,4) pripada grafiku date funkcije jer je y(2)=4.



Slika 1

Primer:

Grafik funkcije $y=1-x^2$ je kriva koja se naziva parabola .

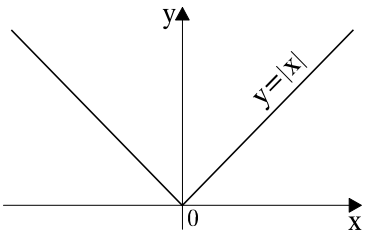


Slika 2

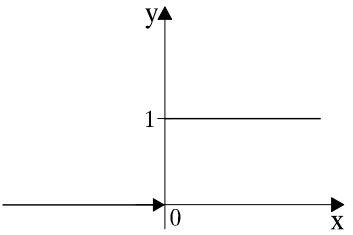
Primer:

Grafik funkcije $y=|x|$ je prikazan na slici 3.

Grafik funkcije $y=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x\geq 0\end{cases}$ je prikazan na slici 4.



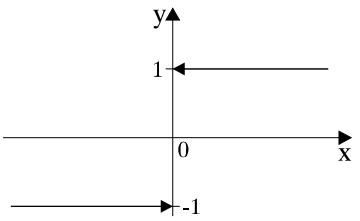
Slika 3



Slika 4

Primer :

Grafik funkcije $f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$ je dat na slici 5.



Slika 5

Napomena:

Postoje funkcije kojima je nemoguće nacrtati grafik. Primer takve funkcije je Dirišleova funkcija

$$D(x)=\begin{cases}0 & x \quad \text{racionalno}\\ 1 & x \quad \text{iracionalno}\end{cases}$$

U navedenim primerima *y* je definisano eksplicitno kao funkcija od *x*, tj. jednačinom *y=f(x)*. Primetimo da *y* kao funkcija od *x* može biti zadana i implicitno, tj. jednačinom F(x,y)=0.

4.3.3.Slaganje ili proizvod preslikavanja

Definicija 12.
Proizvodom dve funkcije $f: A \to B$ i $g: B \to C$ naziva se funkcija $g \circ f: A \to C$, za koju važi:

$$(\forall x \in A)\,(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right).$$

Primer:

Date su funkcije $f(x)=x+3$ i $g(x)=2x-\sqrt{x}$. Onda je:

$f\circ g(x)=f\left(g(x)\right)=2x+3-\sqrt{x}$,

$g\circ f(x)=g\left(f(x)\right)=2x+6-\sqrt{x+3}$.

$f\circ f(x)=f\left(f(x)\right)=x+6$.

4.3.4. Inverzna funkcija

Definicija 13.

Neka je $f:A\to B$ bijektivno preslikavanje ("$1-1$" i "na"). Tada postoji jedinstvena funkcija $f^{-1}:B\to A$ koju nazivamo ***inverzna funkcija*** takva da je

$$f^{-1}\left(f(x)\right)=x.$$

Za datu funkciju $f:A\to B$ može da postoji samo jedna inverzna funkcija $f^{-1}:B\to A$.

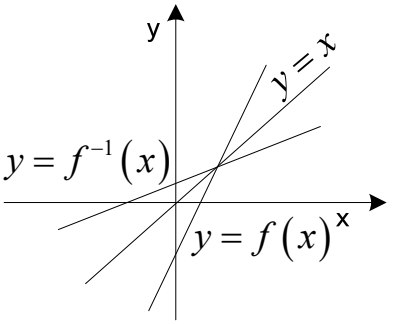
Primer:

Odrediti inverznu funkciju funkcije $f(x)=2x-1$.

Na osnovu definicija 8 I 9 može se dokazati da je zadato preslikavanje 1-1 i na, odnosno da je bijekcija. Znači da postoji inverzno preslikavanje f^{-1}, koje glasi

$$f^{-1}(x)=y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}.$$

Grafici funkcija f i f^{-1} su simetrični u odnosu na pravu $y=x$.



Slika 6

Primer :

Odrediti inverznu funkciju funkcije $f(x) = x^2$.

Pošto preslikavanje $f(x) = x^2$, $f : R \to R_+$ nije "$1-1$", pa time i bijekcija, ne postoji inverzno preslikavanje f^{-1} .

4.3.5. Neke važnije osobine funkcija

Monotone funkcije

Definicija 14.
Za funkciju y=f(x) definisanu u nekom skupu D kažemo da je ***rastuća (opadajuća)*** ako je za ($\forall x_1, x_2 \in E$) $x_1 < x_2$

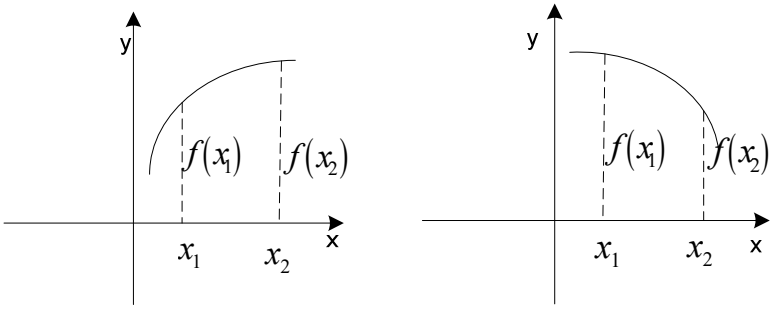
$f(x_1) < f(x_2)$ $\quad$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Rastuće i opadajuće funkcije zovemo zajedničkim imenom ***monotone funkcije***.
Videti sliku 7.

Definicija 15.
Za funkciju y=f(x) definisanu u nekom skupu D kažemo da je ***neopadajuća (nerastuća***) ako je za ($\forall x_1,x_2 \in E$) $x_1<x_2$

$f(x_1) \leq f(x_2)$ $\quad$ $(f(x_1) \geq f(x_2))$.

Nerastuće i neopadajuće funkcije ćemo zvati ***slabo monotonim funkcijama.***
Jasno je da je svaka monotona funkcija slabo monotona, dok obrnuto ne mora važiti.
Intervale u kojima slabo monotona funkcija ima konstantnu vrednost zovemo ***intervalima konstantnosti***.



Slika 7

Primer :

Funkcija $y=e^x$ je rastuća funkcija u celoj oblasti definisanosti.
Funkcija $y=e^{-x}$ je opadajuća funkcija u celoj oblasti definisanosti.

Parne i neparne funkcije

Definicija 16.
Funkcija $f(x)$ je ***parna*** ako je $(\forall x \in D), f(-x)=f(x)$.
Grafik parne funkcije je simetričan u odnosu na osu Oy.
Funkcija $f(x)$ je ***neparna*** ako je $(\forall x \in D), f(-x)=-f(x)$.
Grafik neparne funkcije je simetričan u odnosu na koordinatni početak O.

Primer :

Parna funkcija

$f(x)=x^2-2\,;\, f(-x)=(-x)^2-2=x^2-2=f(x)$

Neparna funkcija

$f(x)=x^3-2x$

$f(-x)=(-x)^3-2(-x)=-x^3+2x=-(x^3-2x)=-f(x).$

Funkcija koja nije ni parna ni neparna.

$f(x)=x^2-2x^3+1;$

$f(-x)=(-x)^2-2(-x)^3+1=x^2+2x^3+1,$

Periodične funkcije

Definicija 17.

Funkcija $f(x)$ je ***periodična*** ako postoji broj $T\neq 0$ za koji je ispunjena jednakost $(\forall x\in D)\, f(x+T)=f(x)$. Broj T nazivamo periodom funkcije. Najmanji pozitivni period zovemo *os**novnim periodom funkcije*** i označava se sa ω.

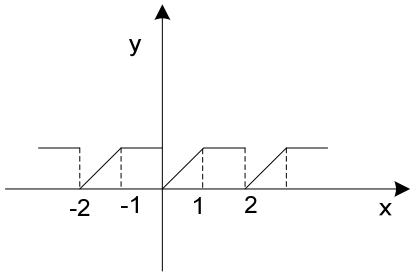
Iz definicije periodične funkcije proizilazi da je njen grafik "dovoljno" nacrtati u jednom intervalu $[x;\, x+\omega]$ gde je ω njena osnovna perioda. Ceo grafik će činiti beskonačno mnogo grafika kongruentnih sa nacrtanim, a koji se nalaze u intervalima $[x;\, x+\omega]$ gde je k ceo broj.

Primer:

Trigonometrijske funkcije sinx i cosx su periodične sa osnovnom periodom $\omega=2\pi$ a funkcije tgx i ctgx su takođe periodične sa osnovnom periodom $\omega=\pi$.

Primer:

$f(x)=\begin{cases}1, & -1\le x\le 0\\ x, & 0\le x\le 1\end{cases}$ i $f(x+2)=f(x)$.



Funkcija je periodična sa perodom $T=2$.

Slika 8

ZADACI

Odrediti oblast definisanosti sledećih funkcija:

1. **a)** $y=\dfrac{2x}{x^2-1}$; **b)** $y=\dfrac{1-2x}{(x-1)^2}$; **c)** $y=\sqrt{9-x^2}$;

d) $y=\sqrt{4x-x^2}$; **e)** $y=\dfrac{8x-16-x^2}{\sqrt{2-x}}$.

Rešenje:

a) $x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \pm 1$, $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$;

b) $D_x=R\setminus\{1\}$.

c) $9-x^2\geq 0 \Leftrightarrow (3-x)(3+x)\geq 0$, $x\in[-3,3]$;

d) $4x-x^2\geq 0 \Leftrightarrow x(4-x)\geq 0$, $x\in[0,4]$;

e) $2-x>0 \Leftrightarrow x<2$, $x\in(-\infty,2)$;

2. **a)** $y=\ln\dfrac{x}{3-x}$; **b)** $y=\ln(x^2-6x)$; **c)** $f(x)=\sqrt{\ln\dfrac{5x-x^2}{4}}$.

Rešenje:

a) $\dfrac{x}{3-x}>0$, $x\in(0,3)$;

b) $x^2-6x>0$, $x\in(-\infty,0)\cup(6,+\infty)$;

c) $1^\circ\ \ln\dfrac{5x-x^2}{4}\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{5x-x^2}{4}\geq 1 \Leftrightarrow x\in[1,4]$ $2^\circ\ \dfrac{5x-x^2}{4}>0 \Leftrightarrow x\in(0,5)$.

Rešenje je presek dobijenih rešenja $x\in[1,4]$.

3. Odrediti kodomen funkcija:

a) $y=-\dfrac{1}{2}x^2-1$; **b)** $y=x^2-9$; **c)** $y=2^x+1$.

Rešenje:

a) $y \in (-\infty, -1]$; **b)** $y \in [-9, +\infty)$; **c)** $y \in [1, +\infty)$.

4. Date su funkcije.

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \frac{x^2}{x}, \quad f_3(x) = \sqrt{x^2}, \quad f_4(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2.$$

Da li među njima ima istih?

Rešenje:

$$f_1(x) = x,\ D_x = R,\ D_y = R$$

$$f_2(x) = \frac{x^2}{x} = x,\ D_x = R / \{0\},\ D_y = R$$

$$f_3(x) = \sqrt{x^2} = |x|, \quad D_x = R,\ D_y = R_+$$

$$f_4(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x,\ D_x = R_+,\ D_y = R_+$$

Sve funkcije su različite.

5. Date su funkcije

$$f_1(x) = \sin^2 x + \cos^2 x, \quad f_2(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}}, \quad f_3(x) = \frac{\ln e^x}{x}, \quad f_4(x) = \frac{\sqrt[3]{x^3}}{x}$$

Da li među njima ima istih?

Rešenje:

$$f_1(x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1,\ D_x = R$$

$$f_2(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \pm 1,\ D_x = R / \{0\}$$

$$f_3(x) = \frac{\ln e^x}{x} = 1, \quad D_x = R / \{0\}$$

$$f_4(x) = \frac{\sqrt[3]{x^3}}{x} = 1,\ D_x = R / \{0\}$$

Iste su funkcije f_3 *i* f_4.

6. Odrediti domen i nule datih funkcija:

a) $y=\dfrac{x^2+3x-10}{x^2+1}$; **b)** $y=x\sqrt{x^2-1}$;

c) $y=\left(x^2-4\right)e^x$; **d)** $y=\dfrac{1+\ln x}{x^2}$.

Rešenje:

a) Domen: $D_x=R$.

Nule funkcije: $\dfrac{x^2+3x-10}{x^2+1}=0\Leftrightarrow x_1=2\vee x_2=-5$.

b) Domen: $x\in\left(-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right)$. Nule funkcije: $y=0\Leftrightarrow x_{1,2}=\pm1$.

c) Domen je skup R. Nule funkcije: $\left(x^2-4\right)e^x=0\Leftrightarrow x_{1,2}=\pm2$, $e^x\neq0$.

d) Domen: $x\in\left(0,+\infty\right)$. Nule funkcije: $1+\ln x=0\Leftrightarrow x=e^{-1}$.

7. Dokazati da funkcije nisu ni parne ni neparne:

a) $y=\dfrac{2x-2}{x^2}$; **b)** $y=\dfrac{e^x}{x-1}$.

Rešenje:

a) $y\left(-x\right)=\dfrac{2\left(-x\right)-2}{\left(-x\right)^2}=\dfrac{-2\left(x+1\right)}{x^2}$; $y\left(-x\right)\neq y\left(x\right)$ i $y\left(-x\right)\neq-y\left(x\right)$;

b) $y\left(-x\right)=\dfrac{e^{-x}}{-x-1}=-\dfrac{1}{e^x\left(x+1\right)}$, $y\left(-x\right)\neq y\left(x\right)$ i $y\left(-x\right)\neq-y\left(x\right)$.

8. Dokazati da su funkcije parne:

a) $y=\sqrt{4-x^2}$; **b)** $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$;

c) $y=\left(x^2-1\right)e^{-x^2}$; **d)** $y=x^2-1-3\cos x$.

Rešenje:

a) $y(-x)=\sqrt{4-(-x)^2}=\sqrt{4-x^2}=y(x)$;

b) $y(-x)=e^{-\frac{(-x)^2}{2}}=e^{-\frac{x^2}{2}}=y(x)$;

c) $y(-x)=\left((-x)^2-1\right)e^{-(-x)^2}=\left(x^2-1\right)e^{-x^2}=y(x)$;

d) $y(-x)=(-x)^2-1-3\cos(-x)=x^2-1-3\cos x=y(x)$.

9. Dokazati da su funkcije neparne:

a) $y=x^3-2x$; **b)** $y=\frac{x}{2}-\frac{2}{x}$;

c) $f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$; **d)** $y=\frac{2^x-1}{2^x+1}$.

Rešenje:

a) $y(-x)=(-x)^3-2(-x)=-\left(x^3-2x\right)=-y(x)$;

b) $y(-x)=\frac{(-x)^2-4}{2\cdot(-x)}=-\frac{x^2-4}{2x}=-y(x)$;

c) $y(-x)=\frac{1+e^{-x}}{e^{-x}-1}=\frac{1+\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x}-1}=-\frac{e^x+1}{e^x-1}=-y(x)$;

d) $y(-x)=\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=\frac{\frac{1}{2^x}-1}{\frac{1}{2^x}+1}=-\frac{2^x-1}{2^x+1}=-y(x)$.

10. Ispitati sve poznate osobine funkcije $y=\ln\left(x^2-1\right)$

Rešenje:

Domen: $(x-1)(x+1)>0$, $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

Nule: $x^2-1=1\Leftrightarrow x_1=\pm\sqrt{2}$.

Znak funkcije:

$y(x)<0 \Leftrightarrow 0<x^2-2<0 \Leftrightarrow x\in\left(-\sqrt{2},-1\right)\cup\left(1,\sqrt{2}\right)$

$y(x)>0 \Leftrightarrow x^2-2>0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right).$

$y(-x)=\ln\left((-x)^2-1\right)=\ln\left(x^2-1\right)=y(x)$, funkcija je parna.

11. Odredi osnovni period sledećih funkcija:

a) $y=2\sin 2x$; **b)** $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$;

c) $y=\sin^2 x$; **d)** $y=\cos x+3\cos 2x-\frac{1}{3}\cos 3x$.

Rešenje:

a) $2\sin 2x=2\sin 2(x+T)\Leftrightarrow \sin 2x-\sin 2(x+T)=0$

$\Leftrightarrow 2\sin\frac{2x-2x+2T}{2}\cdot\cos\frac{2x+2x-2T}{2}=0$

$\Leftrightarrow 2\sin T\cdot\cos(2x-T)=0 \Leftrightarrow \sin T=0,\ \cos(2x-T)\neq 0 \Leftrightarrow T=\pi$;

Napomena**:** Osnovni period funkcija $y=\sin bx$ i $y=\cos bx$ je $T=\frac{2\pi}{b}$, a za funkcije $y=\operatorname{tg}bx$ i $y=\operatorname{ctg}bx$ je $T=\frac{\pi}{b}$.

b) $T=\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$; **c)** $y=\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x),\ T=\pi$;

d) $T_1=2\pi$, $T_2=\pi$, $T_3=\frac{2\pi}{3}$, pa je $T=NZS(T_1,T_2,T_3)=2\pi$.

12. Ispitati monotonost sledećih funkcija:

a) $y=2x+3$; **b)** $y=2^x$.

Rešenje:

a) $x_1<x_2\Rightarrow 2x_1+3<2x_2+3$, što znači da funkcija strogo raste.

b) $x_1<x_2\Rightarrow 2^{x_1}<2^{x_2}$, što znači da funkcija raste.

5. NIZOVI

5.1. OSNOVNI POJMOVI

Definicija 1.
Uređeni skup elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ obrazuje ***niz*** ako se svakom prirodnom broju $n \in N$ po nekom zakonu pridruži jedan i samo jedan element a_n.

Ako je niz je preslikavanje $f : N \to R$, onda se radi o realnim nizovima.

Primer:

$1, 2, 3, \ldots$ predstavlja niz prirodnih brojeva.

Niz je određen svojim opštim članom a_n, na osnovu koga se mogu odrediti članovi.

Primer:

Ako je opšti član niza $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in N$, onda su članovi $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}, \ldots$.

Definicija 2.
Niz $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ je:
rastući *ako* je $a_{n+1} > a_n$, ***opadajući*** *ako je* $a_{n+1} < a_n$,
neopadajući *ako je* $a_{n+1} \geq a_n$, ***nerastući*** ako je $a_{n+1} \leq a_n$, za $n \in N$.

Ovakvi nizovi zovu se ***monotoni*** nizovi.

Definicija 3.
Za niz se kaže da je ***ograničen*** ako postoje realni brojevi m i M takvi da je $m < a_n < M$, $n \in N$.

Broj m je ***donja granica,*** dok je M ***gornja granica*** niza.
Najveća donja granica je *infimum* niza, a najmanja gornja granica je ***supremum*** niza.

Primer:

Niz sa opštim članom $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ je ograničen. Donja granica je $m = -1$, a gornja granica je $M = \frac{1}{2}$, tj. svi članovi niza zadovoljavaju relaciju $-1 \le a_n \le \frac{1}{2}$.

Treba naglasiti da vrednosti m i M nisu jedinstveni, naime ima neprebrojivo mnogo drugih granica.
U ovom primeru su navedeni upravo infimum i supremum skupa vrednosti niza.
A tačne su i sledeće nejednakosti $-1 \le a_n < 1$ ili $-2 < a_n < 2$ itd.

5.2. TAČKA NAGOMILAVANJA

Definicija 4.
Za broj a kažemo da je ***tačka nagomilavanja niza*** (a_n), ako se u proizvoljnoj okolini toga broja nalazi beskonačno mnogo elemenata niza.

Sa prethodnom definicijom je ekvivalentna sledeća:

Definicija 5.
Broj a je ***tačka nagomilavanja niza*** (a_n) ako za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji podniz (a_{n_k}) datog niza takav da svi elementi datog podniza imaju osobinu $\left|a_{n_k} - a\right| < \varepsilon$.

Teorema 1.
Ograničeni niz ima bar jednu tačku nagomilavanja.

Primer:

Niz sa opštim članom:

1. $a_n = n$ nema tačku nagomilavanja.
2. $a_n = \frac{1}{n}$ ima jednu tačku nagomilavanja $a = 0$ koja ne pripada nizu.
3. $a_n = \frac{(-1)^n n + 1}{n+1}$ ima dve tačke nagomilavanja $a_1 = 1$, koja pripada nizu i $a_2 = -1$, koja ne pripada nizu.

5.3. GRANIČNA VREDNOST NIZA

Definicija 6.
Broj a nazivamo ***graničnom vrednošću*** ili ***limesom*** niza (a_n) ako se u proizvoljnoj okolini tačke a nalaze skoro svi članovi niza.

Pod iskazom "skoro svi članovi niza" podrazumevamo izuzimanje eventualno njih konačno mnogo. Ova definicija može da se iskaže i na sledeći ekvivalentan način:

Definicija 7.
Broj a nazivamo ***graničnom vrednošću* ili *limesom niza*** (a_n) ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0(\varepsilon) \in N$ tako da je $|a_n - a| < \varepsilon$ za svako $n \in N, n > n_0(\varepsilon)$.

Činjenicu da je broj a granična vrednost niza (a_n) označavamo na sledeći način:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{ili} \quad a_n \to a \ (n \to \infty).$$

Nizovi koji imaju graničnu vrednost zovu se ***konvergentni,*** a nizovi koji nemaju graničnu vrednost zovu se ***divergentni.***

Primer:

Dat je niz $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in N$.

Pokazati da je njegova granična vrednost 1. Odrediti n_0 za $\varepsilon = 0,01$.

Kako je $|a_n - a| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$ za $\forall \varepsilon > 0$, pa zaključujemo da je 1 granična vrednost niza. Možemo pisati da je $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Za $\varepsilon = 0,01$ imamo $\frac{1}{n+1} < 0,01$, odakle je $n > 99$ tj. $n_0 = 99$.

Dakle, u ε okolini broja 1 nalazi se beskonačno mnogo članova niza, a van ε okoline samo konačno mnogo, 99 članova .

Teorema 2.
Ako je niz konvergentan onda je on ograničen.

Teorema 3.
Konvergentan niz ima jedinstvenu graničnu vrednost.

Posledica*:*
Ako je niz konvergentan onda je njegova granična vrednost jedina tačka nagomilavanja.

Teorema 4.
Svaki monotoni rastući (opadajući) niz ograničen odozgo (odozdo) je konvergentan.

5.4. KOŠIJEV OPŠTI KRITERIJUM KONVERGENCIJE

Na osnovu osobina graničnih vrednosti dosad smo unapred znali da li posmatrani niz ima graničnu vrednost i kolika je. Postavlja se pitanje da li se za neki niz može postaviti pitanje da li konvergira koristeći samo poznavanje samog niza, ne znajući unapred kojoj bi to graničnoj vrednosti konvergirao.

Definicija 8.

Niz (a_n) je ***Košijev*** ako zadovoljava uslov

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall m \in N)(\forall n \in N)\, m, n > n_0 \to |a_m - a_n| < \varepsilon$$

Ili napisano drugačije

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall p \in N)(\forall n \in N)\, n > n_0 \to |a_{m+p} - a_n| < \varepsilon\,.$$

Očigledno je da je svaki konvergentan niz i Košijev niz.

Teorema 5.

Potreban i dovoljan uslov da bi niz konvergirao je da je Košijev.

Dokaz:

Neka je $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ I $\varepsilon > 0$. Ako je $n_0 \in N$ izabrano tako da je $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ za $n > n_0$. Tada za svako $m, n > n_0$ važi

$$|a_m - a_n| \le |a_m - a| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

pa je niz (a_n) je Košijev.

5.5. ARITIMETIČKE OPERACIJE SA NIZOVIMA

Teorema 6.

Ako je $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Tada važi:

1. $\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot a$, $c \in R$;
2. $\lim_{n\to\infty} \left(a_n \pm b_n\right) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = a \pm b$;
3. $\lim_{n\to\infty} \left(a_n \cdot b_n\right) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$;
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}, \left(b \neq 0\right)$.

Dokaz teoreme direktno proizilazi iz definicije granične vrednosti niza

5.6. BESKONAČNO MALI I BESKONAČNO VELIKI NIZOVI

Definicija 9.

Za niz (a_n) kažemo da je ***beskonačno mali*** (*nula niz*) ako je konvergentan i ako je $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Definicija 10.

Za niz (a_n) kažemo da je ***beskonačno veliki*** ako za svako M>0, postoji $n_0(M) \in N$ takav da je za svako $n \in N$, $n > n_0$ $\left|a_n\right| > M.$

U tom slučaju pišemo da je $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ ili $a_n \to \infty$ kad $n \to \infty$.

Bez dokaza navodimo sledeća svojstva.

Teorema 7.
Ako je niz (a_n) ograničen a niz (b_n), $b_n \neq 0$, beskonačno veliki
onda je niz $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ beskonačno mali.

Teorema 8.
Ako je apsolutna vrednost niza (a_n) ograničena odozdo pozitivnim brojem, a (b_n) je nula niz čiji su elementi različiti od nule, onda je $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ beskonačno veliki niz.

Teorema 9.
Ako su nizovi (a_n) I (b_n) konvergentni, a imaju istu graničnu vrednost,
$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = A$ I $a_n \leq c_n \leq b_n$, tada je $\lim_{n\to\infty} c_n = A$.

5.7. NEKI VAŽNIJI NIZOVI

(1) Niz sa opštim članom $x_n=q^n$, $0<q<1$, je konvergentan i pri tome je $\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$

Zaista kako je $0<q<1$ to je $q^{n+1}<q^n$, pa je niz monotono opadajući, a kako je i $q^n>0$ za svako $n\in N$ to je on i ograničen pa postoji granična vrednost ovog niza.
Neka je $\lim_{n\to\infty} q^n = A.$ Jasno je da pri tome mora biti i $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = A$, odnosno $q\lim_{n\to\infty} q^n = A$ ili $qA=A$, odakle je (kako je $q\neq 1$) $A=0$.

(2) Niz sa opštim članom $x_n=q^n$, $|q|>1,$ je beskonačno veliki niz.
Sledi iz prethodnog primera.

(3) Broj *e* .

Niz sa opštim članom

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$ konvergira.

Pokazaćemo da je ovaj niz monotono rastući i ograničen odozgo, pa po teoremi 4 konvergira

Dokažimo prvo monotonost niza .

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}=\left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=\left(\frac{\frac{n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}=$$

$$\left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}=\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}$$

Ako primenimo Bernulijevu nejednakost dobijamo

$$>\left(1-\frac{n+1}{(n+1)^2}\right)\cdot\frac{n+1}{n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)\cdot\frac{n+1}{n}=1$$ što znači da niz raste.

Dokažimo sada da je niz ograničen.

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\binom{n}{3}\frac{1}{n^3}+.....+\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}=$$

$$=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+.....+\frac{n(n-1)....1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+.....+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)....\left(1-\frac{n-1}{n}\right)<$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\ldots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + 2 = 3$$

Očigledno je da je niz ograničen sa donje strane sa 2.

Dakle $2 \le \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$.

Zadati niz je konvergentan i njegovu graničnu vrednost ćemo označiti sa *e*, tj.

$$\lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Broj *e* je iracionalan i njegova vrednost je **e=2,7182818284...**

Ovaj broj ima velikiznačaj u matematici jer je on prirodna osnova za logaritme.

ZADACI

1. Napisati nekoliko članova niza čiji je opšti član:

a) $a_n = \frac{1}{n+1}$; b) $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$.

Rešenje:

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$; b) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots$.

2. Naći opšti član niza, zadatog sa nekoliko prvih članova:

a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$; b) $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \ldots$.

Rešenje:

a) $a_n = \frac{1}{2^n}$; b) $a_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$.

3. Naći tačke nagomilavanja i ispitati konvergenciju sledećih nizova:

a) $a_n = \frac{1}{n+1}$; b) $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$;

c) $a_n = \frac{n+1}{n}$; d) $a_n = (-1)^n \frac{n+2}{n}$.

Rešenje:

a) tačka nagomilavanja je 0, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ i niz je konvergentan,

b) tačka nagomilavanja je 0, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ i niz je konvergentan,

c) tačka nagomilavanja je 1, $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ i niz je konvergentan,

d) niz ima dve tačke nagomilavanja, -1 i 1, i niz ne konvergira.

4. Odrediti granične vrednosti nizova:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+2n+3}{3n^2+1}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{3n^2+1}$; c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2}{3n+1}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{(n+1)^2}$; e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$.

Rešenje:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+2n+3}{3n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}}{3+\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{2}{3}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{3n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{2}{n}}{3+\dfrac{1}{n^2}}=0$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2}{3n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}}=\infty$;

d) Po formuli za zbir prvih n članova aritmetičkog niza $S_n=\dfrac{n}{2}\left(2a_1+(n-1)d\right)$, gde je $a_1=1$, $d=2$, dobijamo $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{(n+1)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2=1$.

e) Po formuli za zbir prvih n članova geometrijskog niza $S_n=a_1\cdot\dfrac{1-q^n}{1-q}$, gde je $a_1=1$, $q=\dfrac{1}{2}$ dobijamo $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{1}{2}}=2$.

18. Odrediti granične vrednosti nizova:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n}}$; **d)** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$.

Rešenje:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\sqrt{n^2+1}+n}$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\left(n^2+1-n^2\right)}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}=0$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{\sqrt{n^2+1}+n}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\left(n^2+1-n^2\right)}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+1}=\dfrac{1}{2}$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\left(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n}\right)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{\dfrac{1}{n}}\right)=1$.

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{n+1-n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)=\infty$.

19. Odrediti granične vrednosti nizova:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{\frac{n}{3}}$; **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{2n}$; **c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-3}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$.

Rešenje:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{3}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2}{n}\cdot\frac{n}{3}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{3n}}=e^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{e^2}$ **;**

b)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-(n+1)}\right)^{-\frac{2n}{n+1}}$$

$$=e^{-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}.$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n}\right)^{\frac{n}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{3}{n}\right)^{-\frac{n}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}}=e^{-\frac{3}{2}}$.

20. Dokazati sledeće rezultate:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n^2+1}}=1$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^3+(n-1)^3}=0$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+4+7+\ldots+(3n-2)}{3n+1}-\frac{n}{2}\right)=-\frac{1}{3}$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}-n}{n}=0$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{1+2+3+\ldots+(n-1)}=2$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2}=2$

) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{2^{\frac{1}{n}}+1}=0$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}=3$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\frac{1}{2}$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{3n}=e^{-6}$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)=1$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n+5^n}{3^n-5^n}=-1$.

6. BROJNI REDOVI

Definicija 1.

Neka je $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ niz brojeva,

tada se izraz $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ naziva ***beskonačni brojni red*.**

Definicija 2.

Izraz $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ je takođe ***brojni red*.**

Definicija 3

Neka je dat niz delimičnih parcijalnih suma reda,

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \ldots S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Ako postoji granična vrednost

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

kažemo da ***red konvergira*** i da je S **suma reda.**

Red koji nije konvergentan je ***divergentan***.

Red $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ naziva se ***ostatak reda***.

Primer:

Dokazati da je red $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ (harmoniski red **)** divergentan.

Kako se red može napisati na sledeći način:

$$1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{15}\right)+\cdots>1+2\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{1}{8}+8\cdot\frac{1}{16}+\cdots=$$

$$=1+2\cdot\frac{1}{2^2}+2^2\cdot\frac{1}{2^3}+2^3\cdot\frac{1}{2^4}+\cdots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots$$

odakle zaključujemo da red divergirá.

Teorema 1.
Potreban uslov za konvergenciju reda je da $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dokaz:
Kako je $S_n = a_1 + a_2 + \cdots a_n$ i $S_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots a_{n-1}$, dobijamo $a_n = S_n - S_{n-1}$.
Ako red konvergira onda je:
$\lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\leftarrow\infty} S_{n-1} = S - S = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Teorema 2.

Ako je red konvergentan i ako je $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ njegov ostatak, tada je $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$.

Dokaz:
Imamo
$S_n + r_n = S \Leftrightarrow r_n = S - S_n$, $\lim_{n\to\infty} r_n = S - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0$.
Znači da sumu svakog konvergentnog reda možemo po volji aproksimirati pomoću parcijalnih suma prvih n članova, čineći pri tom grešku r_n.

6.1. REDOVI SA POZITIVNIM ČLANOVIMA

Kako da su svi članovi reda pozitivni, niz njihovih parcijalnih suma je rastući niz, pa red ili konvergira konačnom određenom broju ili divergira u beskonačno (određeno divergira).

6.1.1. Kriterijumi za ispitivanje konvergencije redova

Kriterijum upoređivanja članova.

Ako su članovi zadatog reda $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sa pozitivnim članovima, počev od nekog člana, uvek manji od odgovarajućih članova nekog drugog reda $\sum b_k$ za koji znamo da konvergira, tada i zadati red konvergira.

Ako su članovi zadatog reda $\sum a_k$ sa pozitivnim članovima, počev od nekog člana, uvek veći od odgovarajućih članova nekog drugog reda $\sum b_k$ za koji znamo da divergira, tada i zadati red divergira.

Dokaz:

Ako su S_n' i S_n'' parcijalne sume datih redova, a red $\sum b_n$ konvergira, onda $\lim_{n\to\infty} S_n'' = S'',\ S'' > 0$.

Kako su svi članovi reda pozitivni $S_n'' < S''$. Iz relacije $a_1 < b_1, a_2 < b_2, \cdots a_n < b_n \cdots$ dobijamo da je $S_n' < S_n''$, odnosno $S_n' < S''$, što znači da se vrednosti niza S_n' moraju nagomilavati oko nekog broja S' koji je manji ili jednak S''. Dakle počev od nekog dovoljno velikog broja sve tačke niza S_n' nagomilavaće se oko S', tj $\lim_{n\to\infty} S_n' = S'$, odnosno red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergira.

Primer:

Dat je red $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$, ispitati da li konvergira.

Ako ga uporedimo sa harmonijskim redom $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, i kako je $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n} = b_n$, a znajući da harmonijski red divergira, zaključujemo da i zadati red divergira.

Dalamberov kriterijum (D'Alamber)

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je red sa pozitivnim članovima i neka je $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Tada za:

1. $l < 1$ - red konvergira,
2. $l > 1$ - red divergira,
3. $l = 1$ - ne znamo da li red konvergira ili divergira
   (prelazimo na drugi kriterijum za ispitivanje konvergencije).

Ovaj kriterijum samo odgovara na pitanje da li red konvergira ili ne, ali ne izračunava sumu reda.

Primer:

Ispitati konvergenciju reda $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{100^k}{k!}$

Kako je $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{100^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{100^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{100n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{100}{n+1} = 0$

$l = 0 < 1$, red konvergira.

6.2. NAIZMENIČNI ILI ALTERNATIVNI REDOVI

Definicija 4.

Red $a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{n-1} a_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$, $a_k > 0$,

naziva se ***alternativni*** ili ***naizmenični red***.

Definicija 5.

Suma naizmeničnog reda S postoji ako je zadovoljena nejednakost $0 \le S \le a_1$.

Lajbnicova teorema

Alternativni red konvergira ako:

1. apsolutne vrednosti članova alternativnog reda opadaju (ne rastu) tj $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \cdots \ge a_n \cdots$,
2. $\lim_{n\to 0} a_n = 0$.

Dokaz:

Uočimo zbir konačno mnogo parnih članova reda

$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n})$. Kako je $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \cdots \ge a_n$ dobijamo da je $S_{2n} \ge 0$.

Očigledno niz $S_2, S_4, \ldots S_{2n}$ raste (ne opada).

Sa druge strane ovaj zbir se može napisati i u sledećem obliku:

$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) \cdots + (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_n$, pa je $S_{2n} \le a_1$.

Dakle niz S_{2n} je rastući i ograničen je odozgo, pa je konvergentan, tj $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$, $S > 0$ i $S \le a_1$.

Sa druge strane zbir neparnih članova je $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$.

$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = S + 0 = S$.

Kako je $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$ i $\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = S$ zaključujemo da je $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ odnosno polazni red konvergira.

Primer:

Ispitati konvergenciju reda $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$.

Ovo je alternativni red, gde je opšti član $a_n = \frac{1}{n}$ pozitivan i monotono opadajući nula niz pa po Lajbnicovom kriterijumu red konvergira.

6.3. APSOLUTNA I USLOVNA KONVERGENCIJA REDA

Ako red ima konačno mnogo pozitivnih ili negativnih članova, odbacujući ih, konvergencija ili divergencija se ne menja. Dobijamo red čiji su članovi istog znaka. Zato ćemo posmatrati samo one redove koji imaju beskonačno mnogo kako pozitivnih tako i negativnih članova kao što su alternativni redovi.

Definicija 6:

1. Neka je red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentan. Ako je red $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergentan, kažemo da je polazni red ***apsolutno konvergentan***.
2. Neka je red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentan. Ako je red $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ divergentan, kažemo da je polazni red ***uslovno konvergentan***.

Košijeva teorema

Ako je red $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergentan, onda je i red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentan (obratno ne važi).

Dokaz:

Posmatrajmo pomoćni red $\left(a_1+|a_1|\right)+\left(a_2+|a_2|\right)+\cdots\left(a_n+|a_n|\right)+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k+|a_k|\right)$

Kako je $0 \le a_n+|a_n| \le 2|a_n|$, a red $\sum_{k=1}^{\infty} 2|a_k|$ je konvergentan, pa je po kriterijumu upoređivanja i red $\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k+|a_k|\right)$ konvergentan.

Polazni red se može napisati u obliku $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k+|a_k|\right) - \sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ i proizilazi da je red $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentan kao razlika dva konvergentna reda.

Primer:

Ispitati konvergenciju reda $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}$.

Ovo je alternativni red koji konvergira. Red njegovih apsolutnih vrednosti $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ je harmonijski red, koji divergira. Znači zadati red uslovno konvergira.

Primer:

Ispitati konvergenciju reda $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k\sqrt{k}}$.

Ovo je alternativni red koji konvergira po Lajbnicovom kriterijumu. Red njegovih apsolutnih vrednosti $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$ takođe konvergira. Znači zadati red apsolutno konvergira.

7. GRANIČNA VREDNOST FUNKCIJE

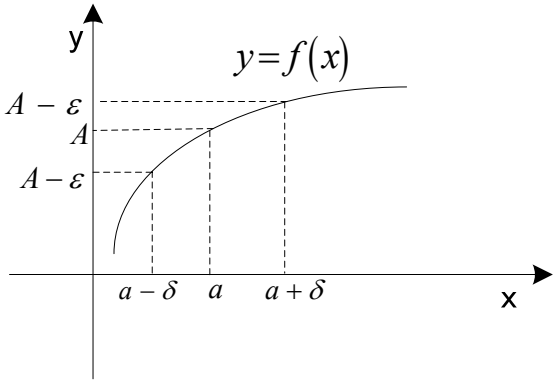
Definicija 1.
Za funkciju y=f(x), definisanu u nekoj okolini tačke a, (osim možda u samoj tački a), kažemo da ima ***graničnu vrednost A*** ako za proizvoljnu okolinu tačke A postoji okolina tačke a koja se (sa eventualnim izuzetkom tačke a) preslikava u pomenutu okolinu tačke A funkcijom f.

Navedimo sada i drugu ekvivalentnu definiciju granične vrednosti odnosno limesa funkcije:

Definicija 2.
Za funkciju y=f(x), definisanu u nekoj okolini tačke a (osim možda u samoj tački a), kažemo da u tački a ima ***graničnu vrednost A***, ako za svako $\varepsilon>0$ postoji $\delta(\varepsilon)>0$, takav da za svako x koje zadovoljava nejednakosti $0<|x-a|<\delta$ je zadovoljena nejednakost $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Činjenicu da je A granična vrednost funkcije f u tački a zapisujemo na sledeći način:

$$\lim_{x\to a} f(x)=A \text{ ili } f(x)\to A \quad (x\to a).$$



Slika 1

Navedimo i treću definiciju granične vrednosti funkcije:

Definicija 3.
Za funkciju y=f(x), definisanu u nekoj okolini tačke a (osim možda u samoj tački a), kažemo da ima ***graničnu vrednost A***, ako i samo ako za svaki niz (x_n) čiji elementi su različiti od a, a pripadaju okolini tačke a u kojoj je funkcija definisana i koji konvergira ka tački a, niz $(f(x_n))$ je konvergentan i pri tome je

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \text{ ili } f(x) \to A \quad (x \to a).$$

Napomenimo da za definiciju granične vrednosti funkcije y=f(x) u tački a nije bitno da li je funkcija u tački a definisana ili ne.

Definicija 4.
Za funkciju y=f(x) definisanu na nekom intervalu (a_1,a), $a_1<a$, kažemo da ima u tački ***graničnu vrednost A***, ako za svako $\varepsilon>0$ postoji $\delta(\varepsilon)>0$ takav da za svako x koje zadov nejednakosti $a-\delta<x<a$ važi nejednakost $|f(x)-A|<\varepsilon$.

U ovom slučaju pišemo

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = A$$

Definicija 5.
Za funkciju y=f(x) definisanu na nekom intervalu (a,a_2), $a<a_2$ kažemo da u tački a ima desnu ***graničnu vrednost A***, ako za svako $\varepsilon>0$ postoji $\delta(\varepsilon)>0$ takvo da za svako x koje zadovoljava nejednakosti

$$a<x<a+\delta$$

važi nejednakost

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

U ovom slučaju pišemo

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = A$$

Nije teško zaključiti da, ako funkcija ima graničnu vrednost, onda ona ima i levu i desnu graničnu vrednost, a da obratno važi jedino u slučaju kada funkcija ima i levu i desnu graničnu vrednost i kada su one međusobno jednake.
Postoje funkcije koje u nekoj tački imaju i levu i desnu graničnu vrednost ali ne i graničnu vrednost. Takva je recimo funkcija y=sgnx kod koje je

$$\lim_{x\to 0+} \operatorname{sgn} x = 1, \quad \lim_{x\to 0-} \operatorname{sgn} x = -1,$$

dok $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ ne postoji.

U prethodno datim definicijama pretpostavili smo da je a konačan broj. Ako je $a = +\infty$ odnosno a=-∞ onda imamo sledeće definicije:

Definicija 6.
Za funkciju f(x) definisanu u nekom intervalu $(a,+\infty)$ kažemo da ima ***graničnu vrednost*** *A* kada x "teži" ka $+\infty$, ako za svako ε>0 postoji M(ε)>a, takav da za svako x koje zadovoljava nejednakost x>M, imamo da je $|f(x) - A| < \varepsilon$. Ovu činjenicu označavamo na sledeći način

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \text{ ili } f(x) \to A, \; x \to +\infty.$$

Na potpuno analogan, dualan način se definiše granična vrednost funkcije kada x "teži" ka $-\infty$.

Teorema 1.
Funkcija y=f(x) u nekoj tački a iz oblasti definisanosti ima ***najviše jednu graničnu vrednost.***

Teorema 2.
Ako funkcija y=f(x) ima konačnu graničnu vrednost u tački a, onda je ona ***ograničena*** u nekoj okolini te tačke.

Teorema 4.
Ako funkcije u(x) i v(x) imaju granične vrednosti u tački a, i ako postoji okolina 0(a) tačke a, takva da je za svako x∈0(a) (x≠a) ispunjena nejednakost

$$u(x) \leq v(x),$$

tada je

$$\lim_{x \to a} u(x) \leq \lim_{x \to a} v(x).$$

Teorema 5.
Ako funkcije u(x) i w(x) imaju istu graničnu vrednost u tački a, i ako su u nekoj okolini 0(a) tačke a ispunjene nejednakosti

$$u(x) \leq v(x) \leq w(x)$$

za svako x∈0(a) (x≠a), tada postoji granična vrednost funkcije v(x) i pri tome je

$$\lim_{x \to a} u(x) = \lim_{x \to a} v(x) = \lim_{x \to a} w(x).$$

7.1. ARITMETIČKE OPERACIJE SA GRANIČNIM VREDNOSTIMA FUNKCIJA

Ako funkcije $f(x)$ i $g(x)$ imaju granične vrednosti kad $x \to a$, tj. $\lim_{x \to a} f(x) = A$ i $\lim_{x \to a} g(x) = B$, tada je:

1. $\lim_{x \to a} c\, f(x) = c \lim_{x \to a} f(x) = c\, A$;
2. $\lim_{x \to a} \left(f(x) \pm g(x) \right) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = A \pm B$;
3. $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = A \cdot B$,
4. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{A}{B}$ za $\left(g(x) \neq 0,\ B \neq 0 \right)$.

7.2. BESKONAČNO MALE I BESKONAČNO VELIKE FUNKCIJE

Definicija 6.
Za funkciju y=f(x) kažemo da je ***beskonačno mala*** kada x→a (pri čemu a može biti i beskonačno), ako je $\lim_{x\to a} f(x) = 0.$

Beskonačno male funkcije se još nazivaju i ***infinitezimale.***
Jedina konstanta koja je beskonačno mala je nula.

Beskonačno male i beskonačno velike funkcije su povezane jer važi sledeći stav.

Teorema 6.
Funkcija f(x) je bekonačno mala, različita od nule, kad $x\to a$, ako i samo ako je $\frac{1}{f(x)}$ beskonačno velika funkcija.

Dokaz:

Ako je f(x) beskonačno mala funkcija i M>0, tada je $\varepsilon = \frac{1}{M} > 0$, pa postoji δ(ε)>0 tako da je za svako x koje zadovoljava nejednakosti $0<|x-a|<\delta$ zadovoljena nejednakost $|f(x)| < \varepsilon = \frac{1}{M}$, a ovo je ekvivalentno sa $\left|\frac{1}{f(x)}\right| > M$ pa je $\left|\frac{1}{f(x)}\right|$ beskonačno velika funkcija. Obratno je analogno.

Beskonačno male i beskonačno velike funkcije se mogu definisati i kad
x→a+0 i x→a-0.

7.3. NEPREKIDNOST FUNKCIJA

7.3.1. Neprekidnost funkcije u tački

Definicija 7.
Za funkciju y=f(x) definisanu u nekoj okolini tačke x_0, kažemo da je ***neprekidna u tački*** x_0, ako je

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Imajući u vidu definicije granične vrednosti funkcije mogu se dati i sledeće definicije neprekidnosti funkcije u tački.

Definicija 8.
Za funkciju y=f(x) definisanu u nekoj okolini tačke x_0, kažemo da je ***neprekidna u tački*** x_0, ako za svako $\varepsilon>0$ postoji $\delta(\varepsilon)>0$ takvo da je

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

za svako x koje zadovoljava nejednakost $|x - x_0| < \delta$.

Iz ove definicije sledi da se neprekidnost ispituje samo u onim tačkama u kojima je funkcija definisana. Međutim, nije obavezno da ta tačka, kao kod kranične vrednosti bude tačka nagomilavanja domena funkcije.

Teorema 1.
Ako je $x_0 \in A$ tačka nagomilavanja domena funkcije $f : A \to R$, tada je funkcija neprekidna u tački x_0 ako I samo ako je $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Ako je funkcija y=f(x) definisana u nekom intervalu (a,b), i ako su $x, x_0 \in (a,b)$, tada razliku $x-x_0$ označavamo sa Δx i zovemo ***priraštajem argumenta*** u tački x_0, a razliku $f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ označavamo sa Δy i **nazivamo *priraštajem funkcije*** u tački x_0 za dati priraštaj argument

Teorema 2.
Funkcija y=f(x), definisana u nekoj okolini tačke x_0, neprekidna je u tački x_0, ako i samo ako je $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$

Teorema 3.
Ako su funkcije f(x) i g(x) neprekidne u tački x_0 tada su i funkcije

$$f(x)+g(x),\ f(x)-g(x),$$

$$f(x)\cdot g(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)}\quad \left(\text{uz uslov } g(x_0)\neq 0\right)$$

neprekidne u tački x_0.

7.3.2. Tačke prekida funkcije

Ako funkcija f nije neprekidna u nekoj tački $x_0 \in D$, kažemo da je funkcija prekidna u toj tački.
Prekidi mogu da budu:

Prividan prekid ako je

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

Prekid prve vrste ako je

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = a\ ,\ \lim_{x \to x_0 0} f(x) = b \text{ i } a \neq b$$

Za funkciju koja ima prekid prva vrste u tački x_0 kaže se da u toj tački ima *konačan skok*.

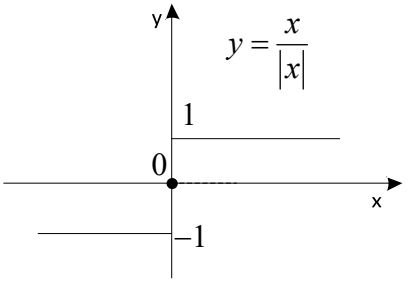
Prekid druge vrste ako nije ni prividan ni prekid prve vrste.

Primer :

Funkcija $f(x)=\frac{x}{|x|}$ u tački x=0 ima prekid prve vrste jer je

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x}{|x|}=1 \text{ a } \lim_{x\to 0-}\frac{x}{|x|}=-1$$

Ovaj prekid je otklonjiv jer funkciju u tački nula možemo dodefinisati, naprimer da je $f(0)=0$

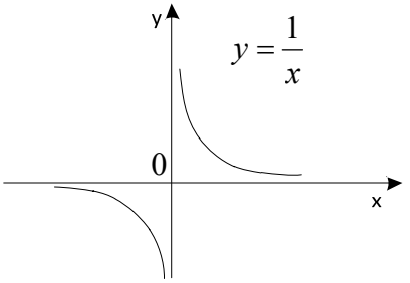


Slika 2

Primer :

Funkcija $y=\frac{1}{x}$ u tački x=0 ima prekid druge vrste jer je

$$\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}=-\infty \text{ a } \lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}=+\infty.$$



Slika 3

7.3.3. Neprekidnost funkcije na intervalu

Definicija 9.
Za funkciju y=f(x) kažemo da je ***neprekidna na intervalu*** (a,b), ako je neprekidna u svakoj tački toga intervala.

Da bismo definisali neprekidnost funkcije na zatvorenom intervalu, treba definisati neprekidnost funkcije u tački sleva i zdesna.

Definicija 10.
Ako je funkcija y=f(x) definisana na intervalu (a-ε,a], ([a,a+ε)) (ε>0) i pri tome je

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = f(a) \quad \left(\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a) \right),$$

onda kažemo da je funkcija f(x) u tački a ***neprekidna sleva (zdesna).***

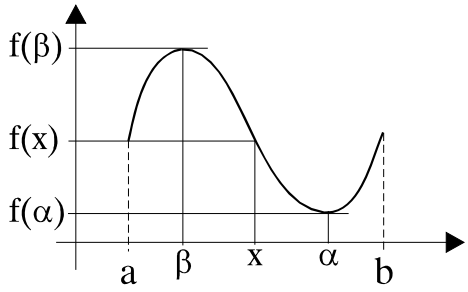
Definicija 11.
Za funkciju y=f(x) kažemo da je ***neprekidna na intervalu*** [a,b] ako je neprekidna na intervalu (a,b), dok je u tački a neprekidna zdesna a u tački b neprekidna sleva.

Teorema 4.
Ako je funkcija neprekidna na zatvorenom intervalu [a,b], onda je ona ograničena na tom intervalu.

Napomenimo da ova teorema ne mora važiti na otvorenom ili poluotvorenom intervalu.

Tako, na primer, funkcija $y = \frac{x-1}{x^2}$ je neprekidna na intervalu (0,1] ali nije ograničena na njemu.

Teorema 5.
Neprekidna funkcija na zatvorenom intervalu dostiže najveću i najmanju vrednost, tj. postoje tačke $\alpha,\beta\in[a,b]$ takve da je za svako $x\in[a,b]$ $f(\alpha)\le f(x)\le f(\beta)$ (sl. 2.).



Slika 4.

Ova teorema takođe ne mora važiti za otvoren, odnosno poluotvoren interval, čak ni u slučaju da je funkcija y=f(x) na njemu neprekidna i ograničena. Na primer, y=x na intervalu (0,1) je i neprekidna i ograničena ali nema na tom intervalu ni najveću ni najmanju vrednost.

Teorema 6.
Ako je funkcija y=f(x) neprekidna na zatvorenom intervalu $[a,b]$ i brojevi f(a) i f(b) su različitog znaka, onda na intervalu (a,b) postoji bar jedna tačka c takva da je f(c)=0.

Posledica 1: Ako je funkcija y=f(x) neprekidna na intervalu $[a,b]$, onda ona dostiže u bar jednoj od tačaka ovog intervala bilo koju vrednost koja se nalazi između najveće i najmanje vrednosti.

7.4. ASIMPTOTE FUNKCIJE

Prava $x = a$ je ***vertikalna asimptota*** funkcije $f(x)$ ako je

$$\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty .$$

Prava $y = b$ je ***horizontalna asimptota*** funkcije $f(x)$ ako je

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b .$$

Prava $y = kx + n$ je ***kosa asimptota*** funkcije $f(x)$ ako je:

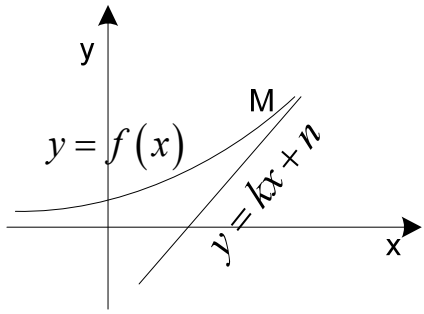
$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - kx - n \right) = 0 .$$

Odavde je $\lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - kx \right) = n$.

Ako podelimo poslednju vezu sa x dobićemo:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{f(x) - kx}{x} \right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - k \right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = k \text{ , pa je}$$

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \text{, a } n = \lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - kx \right).$$



Slika 5.

Primer:

Odrediti asimptote funkcija:

a) $f(x)=\dfrac{3}{x^2-1}$.

Funkcija ima prekide za $x=\pm 1$ i te prave mogu da budu njene vertikalne asimptote.

Kako je $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{3}{x^2-1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{3}{x^2-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to -1+0}\dfrac{3}{x^2-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to -1-0}\dfrac{3}{x^2-1}=+\infty$

,

funkcija ima dve vertikalne asimptote, prave $x=\pm 1$.

Pošto je $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3}{x^2-1}=0$, postoji i horizontalna asimptota, x - osa, tj. prava $y=0$.

Funkcija koja ima horizontalnu nema kosu asimptotu.

b) $f(x)=\dfrac{3x^2}{x-1}$.

Funkcija ima prekid za $x=1$, a $\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=-\infty$, i prava $x=1$ je vertikalna asimptota.

Pošto je $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$, funkcija nema horizontalnu asimptotu i može da ima kosu.

Kako je $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x^2}{x^2-x}=3$ $n=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x}{x-1}=3$,

kosa asimptota je prava $y=3x+3$.

Z A D A C I

1. Na osnovu definicije granične vrednosri pokazati da je:

a) $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)=1$; **b)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4$.

Rešenje:

a) Po definiciji broj 1 će biti granična vrednost funkcije ako $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, tako da ako je $|x-1|<\delta$, onda je $|(2x-1)-1|<\varepsilon$.

Kako je $|(2x-1)-1|=2|x-1|<\varepsilon\Rightarrow|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, i ako uzmemo da je $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$, biće $|(2x-1)-1|<\varepsilon$, za $|x-1|<\delta$. Zanači, 1 je granična vrednost funkcije.

b) $\left|\dfrac{x^2-4}{x-2}-4\right|=|x+2-4|=|x-2|<\varepsilon$, za svaki $|x-2|<\delta=\varepsilon$.

2. Odrediti granične vrednosti funkcija:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^2$; **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x+1}{2x+1}$;

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x^2-2x+1}$; **d)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)^2}{2x^2-2x+1}$.

Rešenje:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}\right)^2=1$; **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x+1}{2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}=\infty$; **c)** 0; **d)** $\dfrac{1}{2}$

3. Izračunati granične vrednosti sledećih funkcija:

a) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+7x+12}$; **b)** $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^4-6x^2-27}{x^3+3x^2+x+3}$;

c) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+x-2}{x^3-4x+3}$; **d)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^5-16x}{2x^2+4x-16}$.

Rešenje:

a) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2+7x+12}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+3)(x+2)}{(x+3)(x+4)}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+2}{x+4}=-1;$

b) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^4-6x^2-27}{x^3+3x^2+x+3}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x^2-9)(x^2+3)}{(x+3)(x^2+1)}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x-3)(x^2+3)}{x^2+1}=-\dfrac{36}{5}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^3-4x+3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x^2+x-3)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{x^2+x-3}=-3;$

d) $\dfrac{16}{3}.$

4. Izračunati granične vrednosti sledećih funkcija:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right);$ **b)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1};$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{4x};$ **d)** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}.$

Rešenje:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0.$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}\cdot\dfrac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(\sqrt{x+3}\right)^2-4}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\dfrac{1}{8}.$

c) $\dfrac{1}{4};$ **d)** 4

5. Izračunati granične vrednosti :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x^2}$;

Rešenje:

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+16}+4}{\sqrt{x^2+16}+4}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+16}+4}{\sqrt{x^2+1}+1}=4;$$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x^2}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+1}+1}{\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+1}+1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^3-1}{x^2\left(\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2\left(\left(\sqrt[3]{x^2+1}\right)^2+\sqrt[3]{x^2+1}+1\right)}=\frac{1}{3};$$

6. Dokazati da je:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Rešenje:

Za $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, uz uslov $x\neq 0$, dobijamo $|\sin x|\le|x|\le|\mathrm{tg}x|$.

$$|\sin x|\le|x|\le\left|\frac{\sin x}{\cos x}\right|\Leftrightarrow 1\le\left|\frac{x}{\sin x}\right|\le\left|\frac{1}{\cos x}\right|\Leftrightarrow|\cos x|\le\frac{\sin x}{x}\le 1.$$

Znajući da je $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$, zaključujemo da je $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

7.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}$; **d)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\sin x}{2x+\sin x}$.

Rešenje:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}=4\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{4x}=4$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{2\sin 2x}{2x}}{\dfrac{3\sin 3x}{3x}}=\dfrac{2}{3}$;

c) 1; **d)** $\dfrac{1}{3}$.

8.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+4}-2}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sin 3x}$; **c)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)}$.

Rešenje:

a) 16; **b)** $\dfrac{1}{18}$; **c)** 3.

Odrediti sledeće granične vrednosti funkcija ako je:

$$e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \quad \text{odnosno} \quad e=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

9.

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^x$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{x}}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$; **d)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$.

Rešenje:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^{\frac{2x}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\ (1+2x)^{\frac{3}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{3}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{6}{2x}}=e^{6}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{x+1}{x-1}-1\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^{x\cdot\frac{x-1}{2}\cdot\frac{2}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x-1}}=e^{2}$;

d) e^{3}.

10.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x}$; **c)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x}-1}{x}$;

Rešenje:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x}=\left\{\begin{array}{c} t=e^{x}-1 \\ x=\ln(1+t)\end{array}\right\}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\ln(1+t)}=1$;

c) $\ln a$.

7.5. FUNKCIJA VIŠE PROMENLJIVIH

Definicija funkcije sa dve promenljive se daje na isti način kao i definicija funkcije sa jednom promenljivom, sa razlikom što je oblast definisanosti ove funkcije neki skup uređenih parova (x,y) realnih brojeva. Skup vrednosti funkcije je i u ovom slučaju neki podskup skupa realnih brojeva.

Definicija 12.
Funkcija sa dve promenljive je bilo koje pravilo, zakon po kome svakom uređenom paru (x,y) iz nekog skupa $A \subseteq R^2$ pridružujemo tačno jedan broj $z \in B \subseteq R$.

Skup A je dakle oblast definisanosti, skup B je skup vrednosti funkcije, x i y se zovu ***nezavisnim promenljivima*****,** z se zove ***zavisnom promenljivom*** ili ***funkcijom*****.** Funkcije sa dve promenljive označavamo na sličan način kao i funkcije sa jednom promenljivom: z=f(x,y), z=F(x,y), z=z(x,y), itd.

Za nalaženje vrednosti z_0 funkcije z=f(x,y) za odre|ene vrednosti argumenata $x=x_0$ i $y=y_0$, koristićemo najčešće sledeću oznaku $z_0=f(x_0, y_0)$. Funkcija sa dve promenljive, analogno kao i u slučaju funkcije sa jednom promenljivom, može biti zadata na razne načine: tabelarno, analitičkim izrazom, itd.

Često puta pri zadavanju funkcije analitičkim izrazom se ne ukazuje na oblast definisanosti iste i u takvim slučajevima za oblast definisanosti funkcije se uzima skup tačaka u ravni O_{xy}, za koje izraz f(x,y) ima smisla.

Tako, na primer, polinomi prvog stepena $z=ax+by+c$, polinomi drugog stepena $z=ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f$, i polinomi proizvoljnog stepena su definisani za svaku tačku iz ravni O_{xy}.

Racionalne funkcije sa dve promenljive, tj. količnici dvaju polinoma sa dve promenljive x i y, su definisane u svim tačkama ravni O_{xy} za koje je polinom u imeniocu različit od nule. Tako, na primer, racionalna funkcija

$$z = \frac{x + y^2 + 4y}{x - 3y}$$

je definisana u svim tačkama ravni, izuzevši tačke sa prave x-3y=0.

Funkcija $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ je definisana za $4-x^2-y^2\geq 0$, odnosno u unutrašnjosti kruga i na kružnici $x^2+y^2=4$.

Kao što smo definisali funkcije sa dve promenljive, na isti način se mogu definisati i funkcije sa tri promenljive i funkcije sa više od tri promenljive.

Da bismo definisali graničnu vrednost funkcije sa dve promenljive potrebno je definisati pojam okoline tačke $P_0(x_0,y_0)$.

Definicija 13.
Okolinom tačke $P_0(x_0,y_0)$ nazivamo proizvoljan skup tačaka u ravni koji sadrži unutrašnjost kruga sa centrom u tački P_0 poluprečnika ε, gde je ε neki pozitivan realan broj.

Specijalno unutrašnjost kruga sa centrom u tački P_0 poluprečnika ε zovemo ε-okolinom tačke P_0.

Broj b nazivamo graničnom vrednošću funkcije z=f(x,y) kad $x\to x_0$, $y\to y_0$, ako za svako $\varepsilon>0$ postoji δ okolina tačke $P_0(x_0,y_0)$ takva da za sve tačke iz te okoline, osim možda za tačku P_0, važi nejednakost:

$$|\, f(x,y)-b\,| < \varepsilon.$$

Tada pišemo $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=b$ odnosno

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=b\,.$$

Analogno se može definisati i granična vrednost funkcije sa više prome-nljivih.

Za granične vrednosti funkcija dve ili više promenljivih važe analogni stavovi kao za granične vrednosti funkcije sa jednom promenljivom. Pojam nepre-kidnosti funkcija sa dve ili više promenljivih u tački se daje analogno kao i u slučaju funkcije sa jednom promenljivom.

Definicija 14.

Funkcija z=f(x,y) je ***neprekidna*** u tački P_0 ako je definisana u nekoj okolini ove tačke i ako je

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0).$$

Za funkcije sa dve ili više promenljivih neprekidne u nekoj tački važe analogni stavovi kao i za funkcije sa jednom promenljivom neprekidne u nekoj tački.

Kod funkcija sa jednom promenljivom smo posmatrali neprekidnost funkcije na intervalu, dok se kod funkcija sa dve ili više promenljivih posmatra neprekidnost funkcije u odgovarajućoj oblasti na analogan način i sa analognim stavovima. Ovde ćemo dati pojam dvodimenzionalne oblasti i pojam neprekidnosti funkcije sa dve promenljive u oblasti.

Otvorena oblast je skup tačaka u ravni koji zadovoljava sledeća dva svojstva:

1. Za svaku tačku iz oblasti postoji neka okolina te tačke koja pripada oblasti.
2. Svake dve tačke iz oblasti mogu se spojiti linijom koja je neprekidna i cela pripada oblasti.

Tačku P_0 nazivamo graničnom tačkom neke oblasti G ako svaka okolina tačke P_0, pored tačaka iz oblasti G, sadrži tačke koje ne pripadaju oblasti G.

Skup svih graničnih tačaka neke oblasti zovemo njenom granicom.

Ako nekoj otvorenoj oblasti pridružimo sve njene granične tačke dobijamo skup tačaka koje zovemo zatrvorenom oblašću.

Ako za datu oblast možemo naći krug koji pokriva tu oblast, onda tu oblast zovemo ograničenom, a u protivnom oblast zovemo neograničenom.

Oblast zovemo *jednosvezanom* ako sa svakom zatvorenom konturom (linijom) koja pripada oblasti, oblasti pripada i deo ravni koji ona ograničava. U protivnom oblast je *višesvezana*.

Pri definisanju pojma neprekidnosti na zatvorenoj oblasti zahteva se neprekidnost u svakoj tački iz te oblasti pri čemu se za granične tačke podrazumeva da je funkcija neprekidna u graničnoj tački P_0 ako je ispunjena jednakost $\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$ kada P teži ka P_0 po tačkama koje pripadaju oblasti.

Za funkcije neprekidne u ograničenoj zatvorenoj oblasti F važi da su u toj oblasti:

1. Ograničene;
2. Dostižu u toj oblasti najveću i najmanju vrednost;
3. Dostižu u toj oblasti svaku vrednost između najveće i najmanje vrednost



PITANJAZA PONAVLJANJE

1. Šta je funkcija?
2. Nabrojati i definisati osobine funkcija.
3. Kako glasi definicija niza?
4. Definisati osnovne osobine nizova.
5. Granična vrednost niza i osobine.
6. Granična vrednost funkcije i osobine.
7. Pojam asimptota funkcije.
8. Neprekidnost funkcije jedne promenljive.
9. Pojam funkcije više promenljivih.
10. Granična vrednost funkcije više promenljivih.
11. Neprekidnost funkcije više promenljivih.



KLJUČNI POJMOVI

- Funkcija
- Domen
- Kodomen
- Niz
- Asimptote
- Tačka nagomilavanja
- Granična vednost-limes
- Konvergencija
- Divergencija

I I I - G L A V A

DIFERENCIJALNI RAČUN

SADŽAJ OVOG POGLAVLJA JE:

- **IZVOD FUNKCIJE**
- **DIFERENCIJABILNOST I NEPREKIDNOST FUNKCIJE U TAČKI**
- **DIFERENCIJAL FUNKCIJE**
- **NAJVAŽNIJE TEOREME DIFERENCIJALNOG RAČUNA**
- **IZVODI I DIFERENCIJALI FUNKCIJA DVE NEZAVISNO PROMENLJIVE**
- **PRIMENA DIFERENCIJALNOG RAČUNA**

C I L J E V I U Č E N J A

Kada ovo poglavlje proučite znaćete:

1. Šta je izvod funkcije.
2. Kako glasi tablica izvoda elementarnih funkcija.
3. Koja su pravila diferenciranja.
4. Pojam diferencijala.
5. Izvode i diferencijale višeg reda.
6. Osnovnih teorema diferencijalnog računa.

8. DIFERENCIJALNI RAČUN

8.1. IZVOD FUNKCIJE

Osnovni pojam diferencijalnog računa je izvod funkcije u određenoj tački, tako da ćemo razmatranje ovog računa početi njegovim uvođenjem.

Definicija 1.
Neka je $f:(a,b)\to R$ neprekidna funkcija i $x_0\in(a,b)$.
Ako se za razliku $x-x_0$ uvede oznaka $\Delta x_0,\ \Delta x_0\neq 0,\ x_0+\Delta x_0\in(a,b)$ i ako količnik

$$\frac{f(x_0+\Delta x_0)-f(x_0)}{\Delta x_0}$$

ima konačnu vrednost kada $\Delta x_0\to 0$, tada granična vrednost

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0+\Delta x_0)-f(x_0)}{\Delta x_0}$$

predstavlja ***izvod funkcije u tački*** x_0 i označava se sa $f'(x_0)$.

Ako postoji izvod funkcije u tački x_0 kažemo da je funkcija f ***diferencijabilna*** u tački x_0.

Primer.

Naći izvod funkcije $y=x^3$ u tački $x_0=2$

$$f'(2)=\lim_{\Delta x_0\to 0}\frac{f(2+\Delta x_0)-f(2)}{\Delta x_0}=\lim_{\Delta x_0\to 0}\frac{(2+\Delta x_0)^3-2^3}{\Delta x_0}=$$

$$=\lim_{\Delta x_0\to 0}\frac{12\Delta x_0+6{\Delta x_0}^2+{\Delta x_0}^3}{\Delta x_0}=12.$$

Primer.

Ispitati da li funkcija $y = x^{\frac{2}{3}}$ ima izvod u tački $x = 0$.

$$\lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{f(\Delta x_0) - f(0)}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta x_0^{\frac{2}{3}}}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{1}{\Delta x_0^{\frac{1}{3}}} = \infty$$

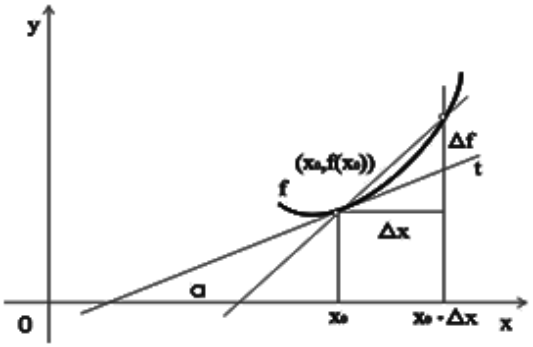
Granična vrednost ne postoji, pa funkcija f nema izvod u tački $x = 0$.

8.1.1. Geometrijska interpretacija izvoda funkcije

Ako funkcija f ima izvod u tački x_0, tada grafik ove funkcije ima tangentu u tački $(x_0,\ f(x_0))$ čiji je ***koeficijent pravca jednak izvodu funkcije*** f u tački x_0

$$k = f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0}$$

$$k = tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



Slika 1

Važi i obrnut stav, ako grafik neprekidne funkcije f ima tangentu u tački $(x_0, f'(x_0))$ tada je njen koeficijent pravca jednak izvodu funkcije u tački x_0.

Primer:

Naći jednačinu tangente krive $y = e^x + 1$ u tački $x_0 = 0$

$f(x_0) = f(0) = e^0 + 1 = 2$, pa je dodirna tačka $M(0,2)$.

Koeficijent pravca tangente u tački M je

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1,$$

pa je jednačina tangente: $y = x + 2$

Slično pojmu izvoda funkcije u nekoj tački, definišu se i pojmovi levog i desnog izvoda funkcije u određenoj tački.

8.1.2.Levi i desni izvod funkcije

Neka je funkcija f definisana i neprekidna u okolini tačke x_0. Ako se za razliku $x - x_0$ uvede oznaka Δx_0, $\Delta x_0 < 0$ i ako količnik

$$\frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0}$$

ima konačnu vrednost kada $\Delta x_0 \to 0$, tada ova granična vrednost predstavlja ***levi izvod funkcije u tački*** x_0 i označava se sa $f_-'(x_0)$. Dakle,

$$f_-'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0}$$

Analogno definiše se pojam desnog izvoda funkcije u određenoj tački.

Neka je funkcija f definisana i neprekidna u okolini tačke x_0.

Ako je Δx_0, $\Delta x_0 > 0$ i ako količnik

$$\frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0}$$

ima konačnu vrednost kada $\Delta x_0 \to 0$, tada ova granična vrednost predstavlja ***desni izvod funkcije u tački*** x_0 i označava se sa $f_+'(x_0)$.

Dakle:

$$f_+'(x_0) = \lim_{\Delta x_0 \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0}$$

Relacija između levog i desnog izvoda funkcije u određenoj tački i diferencijabilnosti funkcije u toj tački je iskazana sledećom teoremom

Teorema 1.

Ako je funkcija f diferencijabilna u tački x_0 tada važi:

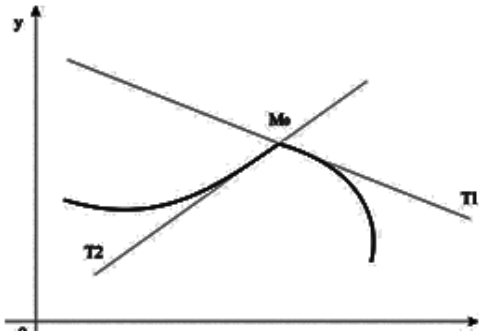
$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$$

i obrnuto, tj. ako za neku funkciju f važi:

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$$

tada je funkcija f ***diferencijabilna u tački*** x_0**.**

Ako je $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$, tada funkcija f nije diferencijabilna u tački x_0, f tada nema tangentu u tački M_0 (sl. 2.).



Slika 2.

8.2. DIFERENCIJABILNOST I NEPREKIDNOST FUNKCIJE U TAČKI

Pri definisanju funkcije f u tački x_0, pretpostavljeno je da je funkcija f neprekidna u nekoj okolini tačke x_0. Ispitajmo sada u kakvom su odnosu neprekidnost i diferencijabilnost funkcije u tački.

Teorema 2.
Ako je funkcija f diferencijabilna u nekoj tački, tada je ona neprekidna u toj tački.

Dokaz

Neka postoji $f'(x_0)$, tada je:

$$\frac{f(x_0+\Delta x_0)-f(x_0)}{\Delta x_0}-f'(x_0)=\varepsilon(\Delta x_0)$$

i pri tom $\varepsilon(\Delta x_0)\to 0$, kada $\Delta x_0 \to 0$. Ako označimo $x=x_0+\Delta x_0$, tada je:

$$f(x)=f(x_0)+\Delta x_0 f'(x_0)+\Delta x_0\cdot\varepsilon(\Delta x_0)$$

odnosno:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{\Delta x_0\to 0}(f(x_0)+\Delta x_0\ f'(x_0)+\Delta x_0\cdot\varepsilon(\Delta x_0))=f(x_0),$$

što znači da je funkcija f neprekidna u tački x_0.

Obrnuto ne važi tj. ako je funkcija neprekidna u nekoj tački tada ona ne mora biti diferencijabilna u toj tački. Na primer, funkcija $y=|x|$ je neprekidna za svako x pa i za $x=0$. Međutim u ovoj tački funkcija nije diferencijabilna.

Definicija2.
Ako funkcija f ima izvod, odnosno diferencijabilna je u svakoj tački intervala (a,b) tada je funkcija f ***diferencijabilna na intervalu*** (a,b), odnosno ima ***izvod***

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

za svako $x\in(a,b)$.
Ovako definisana funkcija f' naziva se ***izvodna funkcija*** ili ***izvod funkcije*** f.

8.2.1.Pravila za diferenciranje

Ako su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ diferencijabilne u tački x, tada je:

1. $\left(C \cdot f(x)\right)' = C \cdot f'(x), (C = const.)$;
2. $\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x)$;
3. $\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
4. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}, \left(g(x) \neq 0\right)$.

8.2.2. Tablica izvoda osnovnih funkcija

Funkcija	Izvodna funkcija
$f(x) = A,\ A = const,\ x \in R$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n,\ n \in N,\ x \in R$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = x^\alpha,\ \alpha \in R,\ x \in R$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
$f(x) = a^x,\ 0 < a \neq 1,\ x \in R$	$f'(x) = a^x \ln a$
$f(x) = e^x,\ x \in R$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \log_a x,\ 0 < a \neq 1,\ x \in R^+$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln a}$
$f(x) = \ln x,\ x \in R^+$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \sin x,\ x \in R$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x,\ x \in R$	$f'(x) = -\sin x$

$f(x)=tg\ x,\ x\in R\setminus\{(2k+1)\pi/2;\ k\in Z\}$	$f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$f(x)=ctg\ x,\ x\in R\setminus\{k\pi;\ k\in Z\}$	$f'(x)=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$f(x)=arc\sin x,\ \lvert x\rvert<1,\ x\in R$	$f'(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$
$f(x)=arc\cos x,\ \lvert x\rvert<1,\ x\in R$	$f'(x)=-\dfrac{1}{1-x^2}$
$f(x)=arc\ tg\ x,\ x\in R$	$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$
$f(x)=arc\ ctg\ x,\ x\in R$	$f'(x)=-\dfrac{1}{1+x^2}$

Primer:

Naći prvi izvod sledećih funkcija:

a) $y=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$, $\quad y'=\dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$;

b) $y=3x^3+2x-3$, $\quad y'=3\left(x^3\right)'+2\left(x\right)'-\left(3\right)'=9x^2+2$;

c) $y=e^x\ln x$, $\quad y'=\left(e^x\right)'\ln x+e^x\left(\ln x\right)'=e^x\ln x+\dfrac{e^x}{x}$;

d) $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$

$$y'=\frac{\left(x^2\right)'\left(x^2-1\right)-x^2\left(x^2-1\right)'}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{2x\cdot\left(x^2-1\right)-x^2\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=-\frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}$$

e) $y=\dfrac{\ln x}{\ln x-1}$; $\quad y'=\dfrac{\frac{1}{x}\left(\ln x-1\right)-\frac{1}{x}\ln x}{\left(\ln x-1\right)^2}=-\dfrac{1}{x\left(\ln x-1\right)^2}$

8.2.3.Izvod složene funkcije:

Ako funkcija $u = f(x)$ ima izvod u tački x, a funkcija $y = g(u)$ ima izvod u tački $u = f(x)$, tada složena funkcija $y = g\left[f(x)\right]$ ima izvod u tački x koji je jednak

$$y'(x) = g'(u)\,f'(x)$$

Formula za izvod složene funkcije, lako se prenosi na slučaj kad je složena funkcija formirana od više funkcija. Na primer $y = h(g(f(x)))$, tada je

$$y' = h'(g(f(x)) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x)\,.$$

Primer:

Naći izvod složene funkcije

1. $y = \left(3+2x^2\right)^{33}$,

$$y' = 33\left(3+2x^2\right)^{32}\left(3+2x^2\right)' = 33\left(3+2x^2\right)^{32} \cdot 4x = 132x\left(3+2x^2\right)^{32}$$

2. $y' = e^{x^2} \cdot (x^2)' = e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2}$

3.

$$y = \sqrt{\left(3+2x^2\right)^{33}}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\left(3+2x^2\right)^{33}}} \cdot 33\left(3+2x^2\right)^{32} \cdot 4x = \frac{66x\left(3+2x^2\right)^{32}}{\sqrt{\left(3+2x^2\right)^{33}}}$$

4. $y = \ln\sin e^{x^2}$ $\qquad y' = \dfrac{1}{\sin e^{x^2}} \cdot \cos e^{x^2} \cdot e^{x^2} \cdot 2x = ctge^{x^2} \cdot e^{x^2} \cdot 2x$

8.2.4. Izvod funkcije višeg reda

U slučaju da je i izvodna funkcija f' u tački x_0 diferencijabilna u istoj toj tački, tj. da izvodna funkcija i sama ima izvodnu funkciju, nova izvodna funkcija se obeležava sa f'' i naziva se *drugi izvod* ili ***izvod drugog reda funkcije*** f u tački x_0, $f''_{(x)} = (f'_{(x)})'$

Analogno se definišu izvodi višeg reda. U opštem slučaju izvod n-tog reda se dobija kao izvodna funkcija od (n -1)- og izvoda:

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x) \right]'$$

Primer:

1. Treći izvod funkcije $y = \ln x$ je:

$$y' = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0, \quad y'' = \frac{-1}{x^2}, \quad y''' = \frac{2}{x^3}.$$

2. n-ti izvod funkcije $y = e^x$ je $y^{(n)} = e^x$.

8.3. DIFERENCIJAL FUNKCIJE

Diferencijal funkcije ima veoma važnu ulogu u matematičkoj analizi. Prvo ćemo definisati pojmove priraštaja i diferencijala funkcije, zatim objasniti geometrijsku interpretaciju diferencijala funkcije, da bi se na kraju navela osnovna pravila za njegovo izračunavanje.

Definicija 3.
Neka funkcija f ima izvod f' u nekoj tački x.
Priraštaj funkije $\Delta f(x)$ u tački x je izraz

$$\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x$$

pod uslovom da $\alpha \to 0$, kada $\Delta x \to 0$.

Iz definicije priraštaja funkcije mogu se uočiti dve vrednosti, to su $f'(x)\Delta x$ i $\alpha\Delta x$. Ako se izvrši poređenje ove dve vrednosti uz uslove koji važe da $\alpha \to 0$ i $\Delta x \to 0$, može se zaključiti da član $\alpha\Delta x$ ima beskonačno malu vrednost koja je znatno manja od vrednosti člana $f(x)\Delta x$. Na osnovu ove analize vrednosti priraštaja funkcije dobijamo da je:

$$\Delta f(x) \approx f(x)\Delta x$$

Definicija 4.
Ako je funkcija $f(x)$ diferencijabilna u tački x, onda se izraz $f'(x)\Delta x$ naziva ***diferencijalom funkcije*** u tački x i obeležava $\mathrm{d}y$:

$$\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x .$$

Ako se uvedu oznake $dx = \Delta x$ i $dy = \Delta f(x)$, tada je izvod funkcije:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Na ovaj način se dobija još jedna definicija izvoda funkcije f, kao količnika diferencijala funkcije i diferencijala nezavisno promenljive.

Kako je Δx mala veličina, aproksimativna relacija je:

$$\Delta f(x) \approx df(x) ,$$

Kako je $\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$ uz prethodnu relaciju dobijamo novu:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + df(x)$$

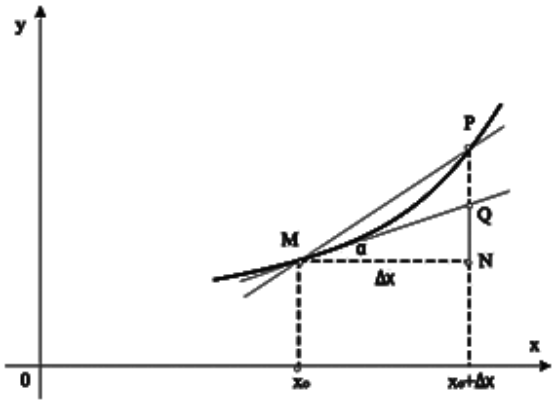
Obe aproksimativne relacije se veoma često koriste u teoriji približnih računa za približno izračunavanje vrednosti određenih izraza.

Diferencijal funkcije $y = x$ je $\mathrm{d}y = 1 \cdot \Delta x$, tj. $\mathrm{d}x = \Delta x$.

8.3.1. Geometrijska interpretacija diferencijala funkcije

Data je funkcija f čiji grafik ima tangentu u tački $M(x, f(x))$. Diferencijal funkcije geometrijski predstavlja promenu ordinate tangente u posmatranoj tački kada se x promeni za Δx, odnosno za dx.

$$NQ = NM \cdot tg\alpha = f'(x) \cdot \Delta x = dy$$



Slika 3

Takođe, kao što je pri razmatranju izvoda funkcije dat pregled osnovnih pravila dobijanja izvoda funkcija, to ona postoji i pri izračunavanju diferencijala funkcije. U svim navedenim pravilima važi da su $u = u(x)$ i $v = v(x)$ diferencijabilne funkcije.

8.3.2.Pravila za izračunavanje diferencijala funkcija

$$d(u \pm v) = du \pm dv$$
$$d(uv) = vdu + udv$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}, \quad v \neq 0$$

Analogno pojmovima drugog izvoda i u opštem slučaju n-tog izvoda definišu se i pojmovi diferencijala drugog reda, odnosno u opštem slučaju diferencijala n-tog reda.

8.3.3.Definicija diferencijala funkcije drugog reda

Diferencijal drugog reda jednak je diferencijalu diferencijala prvog reda, odnosno

$$d^2y = d(dy) = y''dx^2$$

Na osnovu ove relacije može se izvesti zaključak da je drugi izvod funkcije jednak količniku diferencijala drugog reda funkcije i kvadrata diferencijala argumenta, odnosno

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Analogno se dobija izraz za n-ti izvod. On je količnik diferencijala n-tog reda funkcije i diferencijala argumenta stepena n, odnosno

$$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$$

Diferencijal n-tog reda može se zapisati

$$d^ny = y^{(n)}dx^n.$$

Primer:

Diferencijali sledećih funkcija su:

1. $d\left(x^n\right) = nx^{n-1}dx$
2. $d(e^x)=e^xdx$
3. $d\left(\ln x\right) = \frac{1}{x}dx$
4. $d\left(x^2+\sin x\right) = d\left(x^2\right)+d\left(\sin x\right) = 2xdx+\cos xdx = \left(2x+\cos x\right)dx$
5. $d\left(xe^x\right) = d\left(x\right)e^x + xd\left(e^x\right) = e^xdx + xe^xdx = \left(1+x\right)e^xdx$
6. $d\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos^2 xdx+\sin^2 xdx}{\cos^2 x}$

ZADACI

Naći prvi izvod sledećih funkcija:

1. **a)** $y=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$; **b)** $y=4x^3+2x^2-3+\sqrt{x}$;

c) $y=\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{5x^5}-\frac{1}{\sqrt{x}}=-4$; **d)** $y=6x^{\frac{2}{3}}\sqrt{x}+5x^2\sqrt[5]{x}$.

Rešenje:

a) $y'=\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{2}{3}-1}=\frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$;

b)

$$y'=\left(4x^3\right)'+\left(2x^2\right)'-\left(3\right)'+\left(\sqrt{x}\right)'=4\cdot 3x^{3-1}+2\cdot 2x^{2-1}+\frac{1}{2\sqrt{x}}=12x^2+4x+\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

c) $y'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}-3x^{-4}+x^{-6}+\frac{1}{2}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{3}{x^4}+\frac{1}{x^6}+\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

$y'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}-3x^{-4}+x^{-6}+\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-\frac{3}{x^4}+\frac{1}{x^6}+\frac{1}{2\sqrt{x^3}};;$

d) $y=6x^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{x}+5x^2\cdot\sqrt[5]{x}=6x^{\frac{7}{6}}+5x^{\frac{11}{5}}$,

$y'=6\cdot\frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}-1}+5\cdot\frac{11}{5}x^{\frac{11}{5}-1}=7x^{\frac{1}{6}}+11x^{\frac{6}{5}}=7\sqrt[6]{x}+11x\cdot\sqrt[5]{x}$.

2. **a)** $y=\left(x+2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)$; **b)** $y=x^2\cos x$;

c) $y=x-\sin x\cos x$; **d)** $y=\left(x^2-2x\right)\cdot\left(x^4+7\right)$.

Rešenje:

a) $y'=\left(x+2\right)'\left(\sqrt{x}+2\right)+\left(x+2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)'=\sqrt{x}+2+\left(x+2\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$=\sqrt{x}+2+\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{\sqrt{x}}$;

b) $y'=2x\cos x-x^2\sin x$;

c) $y' = 1 - \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = 2\sin^2 x$;

d) $y' = (2x-2)\cdot\left(x^4+7\right) + \left(x^2-2x\right)\cdot 4x^3 = 6x^5 - 10x^4 + 14x - 14$.

3. **a)** $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$; **b)** $y = \dfrac{x^3}{x-1}$; **c)** $y = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$; **d)** $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}$.

Rešenje:

a)

$$y' = \frac{\left(x^2-1\right)'\left(x^2+1\right) - \left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2x\left(x^2+1\right) - 2x\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2} =$$

$$= \frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

b) $y' = \dfrac{3x^2(x-1) - x^3}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^3 - 3x^2}{(x-1)^2}$;

c) $y' = \dfrac{e^x\left(e^x+1\right) - e^x\left(e^x-1\right)}{\left(e^x+1\right)^2} = \dfrac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$

d)

$$y' = \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot(1-\operatorname{tg} x) - \operatorname{tg} x\cdot\left(-\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)}{(1-\operatorname{tg} x)^2} = \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\left(\dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x}\right)^2} = \frac{1}{(\cos x - \sin x)^2}.$$

4. **a)** $y = \dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$; **b)** $y = \dfrac{1+\ln x}{x}$; **c)** $y = \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$;

Rešenje:

a) $y' = \dfrac{2x^2-2}{\left(x^2+x+1\right)^2}$; **б)** $y' = -\dfrac{\ln x}{x^2}$; **c)** $y' = \dfrac{1}{\cos x - 1}$

Naći izvod sledećih složenih funkcija:

5. **a)** $y=(1-2x)^{13}$; **b)** $y=3\sin 4x$; **c)** $y=\sin^4 x$.

Rešenje:

a) $y'=13(1-2x)^{12}\cdot(1-2x)'=-26(1-2x)^{12}$;

b) $y'=3\cos 4x\cdot(4x)'=12\cos 4x$;

c) $y'=4\sin^3 x\cdot(\sin x)'=4\sin^3 x\cos x$.

6. **a)** $y=e^{x^2-2x+2}$; **b)** $y=xe^{x^2-2x}$.

Rešenje:

a) $y'=e^{x^2-2x+2}\cdot\left(x^2-2x+2\right)'=(2x-2)e^{x^2-2x+2}$.

b) $y'=e^{x^2-2x}+xe^{x^2-2x}(2x-2)=e^{x^2-2x}\left(1+2x^2-2x\right)$.

7. **a)** $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$; **b)** $y=\ln\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)$; **c)** $y=\ln\dfrac{x}{1-x^2}$.

Rešenje:

a) $y'=\dfrac{1}{\dfrac{1+x}{1-x}}\cdot\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)'=\dfrac{1-x}{1+x}\cdot\dfrac{-2x}{(1-x)^2}=\dfrac{2x}{x^2-1}$;

b) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}\cdot\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}\cdot\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}\right)$

c) $y'=\dfrac{1-x^2}{x}\cdot\dfrac{\left(1-x^2\right)+2x^2}{\left(1-x^2\right)^2}=\dfrac{1+x^2}{x\left(1-x^2\right)}$

8. **a)** $y=\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}$; **b)** $y=\ln\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$;

Rešenje:

a) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}} \cdot \left(\dfrac{x}{1+x} \right)' = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1+x}{x}} \cdot \dfrac{1+x-x}{(1+x)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1+x}{x}} \cdot \dfrac{1}{(1+x)^2}$

b) $y' = \dfrac{1}{\dfrac{\sin x}{1-\cos x}} \cdot \dfrac{(-1)}{1-\cos x} = -\dfrac{1}{\sin x}$;

9. $y = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3\dfrac{x}{2}$; **Rešenje:** $y' = \dfrac{1}{2\cos^4\dfrac{x}{2}}$.

10. $y = e^{-x}(\sin x + \cos x)$; **Rezultat:** $y' = -2e^{-x}\sin x$.

11. $y = \sin x - \dfrac{1}{3}\sin^3 x$; **Rezultat:** $y' = \cos^3 x$.

12. $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$; **Rezultat:** $y' = \dfrac{1}{1-x^2}$.

13. Data je parabola $y = \dfrac{1}{4}x^2$ i tačka $A(4, y)$ na njoj. Napisati jednačinu tangente i normale u datoj tački.

Rešenje:

Kako tačka $A(4, y)$ pripada grafiku funkcije, zamenom koordinata tačke u jednačinu funkcije dobijamo $y = 4$, pa su kordinate tačke $A(4, 4)$.

Izvod date funkcije je $y' = \dfrac{1}{2}x$. Znajući da je koeficijent pravca tangente jednak vrednosti prvog izvoda funkcije u datoj tački dobijamo $k_t = y'(4) = 2$, a $k_n = -\dfrac{1}{k_t} = -\dfrac{1}{2}$.

Jednačine tangente i normale su:

$t : y - 4 = 2(x-4) \Leftrightarrow y = 2x - 4$,

$n : y - 4 = -\dfrac{1}{2}(x-4) \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{2}x + 6$.

14. U tački $M(1,y)$ krive $y=x^3+x+x^{-1}$ napisati jednačinu njene tangente i normale.

Rešenje:
Za $x=1$ je $y=3$, pa su kordinate tačke $M(1,3)$.
Izvod date funkcije je $y'=3x^2+1-\frac{1}{x^2}$, pa dobijamo $k_t=y'(1)=3$, a
$k_n=-\frac{1}{k_t}=-\frac{1}{3}$.
Jednačine tangente i normale su:
$t: y-3=3(x-1)\Rightarrow y=3x;\ n: y-3=-\frac{1}{3}(x-1)\Rightarrow y=-\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}$.

15. Odrediti realne parametre a i b tako da parabola $y=x^2+ax+b$ dodiruje pravu $y=x$ u tački $A(1,1)$.

Rešenje:
Kako tačka $A(1,1)$ pripada grafiku funkcije zamenom koordinata tačke u jednačinu funkcije dobijamo vezu $a+b=0$.
Data prava $y=x$ je tangenta funkcije sa koeficijentom pravca $k=1$.
Kako je $y'=2x+a$, dobijamo $k=y'(1)=1$, tj. $1=2+a\Rightarrow a=-1$ i $b=1$
Jednačina funkcije dakle glasi $y=x^2-x+1$.

16. U kojoj tački parabole $y=\frac{1}{2}x^2-3x+4$ njena tangenta ima koeficijent pravca 1.

Rešenje:
Kako je $y'=x-3$, a koeficijent pravca tangente je 1, dobijamo $1=x-3$, tj. $x=4$. Kako je tačka sa apscisom 4, dodirna tačka parabole i tangente, zamenom ove vrednosti u parabolu dobijamo ordinatu dodirne tačke $y=\frac{1}{2}\cdot 4^2-3\cdot 4+4=0$. Dakle tražena tačka ima koordinate $(4,0)$.

17. U kojim tačkama parabole $y=-x^2+x+2$ je njena tangenta paralelna x osi.

Rešenje:
$y'=-2x+1$. Kako je tangenta paralelna x osi njen koeficijent pravca je 0. Iz uslova de je $-2x+1=0$, dobijamo $x=\frac{1}{2}$, odnosno tačka ima koordinate $\left(\frac{1}{2},\frac{9}{4}\right)$.

18. .Odrediti tačke u kojima su tangente krivih $y=x^3-x-1$ i $y=3x^2-4x+1$ paralelne.

Rešenje: $(1,-1)$ i $(1,0)$.

19. Naći približnu vrednost koristeći pojam diferencijala funkcije:

a) $\sqrt[4]{17}$; **b)** $\sqrt[3]{1,02}$; **c)** $\sin 29°$; **d)** $\sin 31°$.

Rešenje:

a) Koristićemo formulu $f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x$.
Ako uzmemo da je $x=16$, $\Delta x=1$, $f(x)=\sqrt[4]{x}$, $f(16)=\sqrt[4]{16}=2$ i

$f'(x)=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$, $f'(16)=\frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}}=\frac{1}{32}$ dobijamo

$\sqrt[4]{17}=\sqrt[4]{16+1}\approx 2+\frac{1}{32}\cdot 1\approx 2,031$.

b) Ako uzmemo da je $x=1$, $\Delta x=0,02$, $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $f(1)=\sqrt[3]{1}=1$ i

$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{4\sqrt[3]{x^2}}$, $f'(1)=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{1^2}}=\frac{1}{3}$ dobijamo

$\sqrt[3]{1,02}=\sqrt[3]{1+0,02}\approx 1+\frac{1}{3}\cdot 0,02\approx 1,0066$.

c) $\sin 29^\circ = \sin\left(30^\circ - 1^\circ\right) \approx \sin 30^\circ - \cos 30^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0,484$.

d) $\sin 31^\circ = \sin\left(30^\circ + 1^\circ\right) \approx \sin 30^\circ + \cos 30^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0,515$.

20. Dokazati da je:

a) $\ln 1,01 \approx 0,01$; **b)** $\sqrt[5]{31} \approx 1,9875$; **c)** $\cos 62^\circ \approx 0,469$.

21. Izračunati $f^{(3)}\left(0\right)$, gde je $f\left(x\right) = x^2 e^{2x}$.

Rešenje:

$f'\left(x\right) = 2xe^{2x} + 2x^2 e^{2x} = 2\left(x^2 + x\right)e^{2x}$;

$f''\left(x\right) = 2\left(\left(2x+1\right)e^{2x} + 2\left(x^2 + x\right)e^{2x}\right) = 2\left(2x^2 + 4x + 1\right)e^{2x}$;

$f'''\left(x\right) = 2\left(\left(4x+4\right)e^{2x} + 2\left(2x^2 + 4x + 1\right)e^{2x}\right) = 4\left(2x^2 + 6x + 3\right)e^{2x}$;

$f^{(5)}\left(0\right) = 12$.

8.4. NAJVAŽNIJE TEOREME DIFERENCIJALNOG RAČUNA

Navešćemo sada najvažnije teoreme diferencijalnog računa. One pokazuju da se iz same egzistencije izvoda funkcije može mnogo zaključiti o osobinama funkcije.

Definicija 5.
Funkcija *f* ima ***lokalni minimum*** ako u tački a postiji ε okolina tačke *a* za koju važi

$$\forall x \in \left(a - \varepsilon, a + \varepsilon\right),\ f\left(x\right) \geq f\left(a\right),$$

odnosno ***lokalni maksimum***, ako je

$$\forall x \in \left(a - \varepsilon, a + \varepsilon\right),\ f\left(x\right) \leq f\left(a\right),$$

Minimum i maksimum funkcije nazivaju se ***ekstremima funkcije.***

Fermaova teorema

Neka funkcija $f(x)$ dostiže svoju ekstremnu vrednost u nekoj tački $c \in (a,b)$ i neka je diferencijabilna u tački c. Tada je $f'(c)=0$.

Dokaz

Predpostavimo da funkcija dostiže svoju najveću vrednost u tački c.

Tada je $f(c) \geq f(c+\Delta x)$, pa za

$\Delta x > 0$, imamo $\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \leq 0$

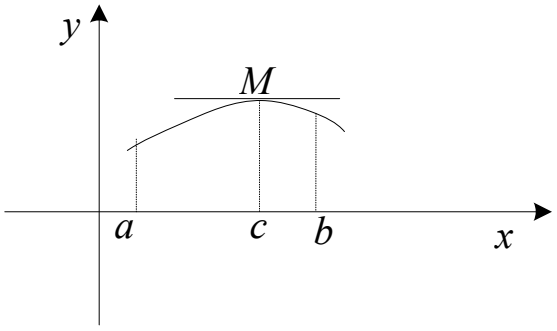
$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} = f'_{+}(c) \leq 0$

$\Delta x < 0$, imamo $\dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \geq 0$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} = f'_{-}(c) \geq 0$, tj $f'(c)=0$.

Slično se dokazuje za najmanju vrednost funkcije.

Geometrijsko tumačenje Fermaove teoreme



Slika 4

Kako je $f'(c)=0$, to znači da je $\mathrm{tg}\alpha=0$, tj $\alpha=0$, gde je α ugao koji tangenta u tački $M\left(c,f(c)\right)$ grafika funkcije zaklapa sa x osom.

To znači da ako diferencijabilna funkcija u tački $c\in(a,b)$ dostiže svoju najveću ili najmanju vrednost, onda je tangenta na njen grafik u tački $M\left(c,f(c)\right)$ paralelna sa x osom.

Rolova teotema:

Neka je funkcija $f(x)$

1. definisana i neprekidna na $[a,b]$,
2. diferencijabilna na (a,b),
3. $f(a)=f(b)$.

Tada postoji bar jedna tačka $c\in(a,b)$, takva da je $f'(c)=0$.

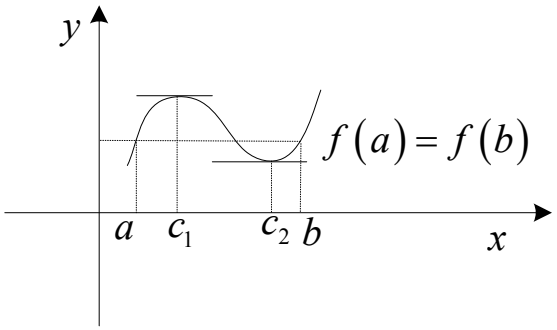
Dokaz

Tvrđenje ove teoreme je intuitivno jasno, jer ako funkcija $f(x)$ ima istu vrednost na krajevima odsečka $[a,b]$, tj. $f(a)=f(b)$, tada sigurno postoji tačka $c\in(a,b)$, takva da je tangenta na krivu $f(x)$ u tački c paralelna sa osom Ox.

Pretpostavimo da je $f(x)\neq const.$ Pošto je funkcija $f(x)$ neprekidna na zatvorenom intervalu $[a,b]$, ona mora na tom intervalu biti i ograničena, i postoji najmanja vrednost m i najveća vrednost M funkcije $f(x)$ na odsečku $[a,b]$. Ako je $m<M$, onda mora da se jedna od vrednosti m, M može dostići u nekoj vrednosti $c\in[a,b]$, jer je $f(a)=f(b)$, odakle po Fermaovoj teoremi zaključujemo da je $f'(c)=0$.

Geometrijsko tumačenje Rolove teoreme

Postoji bar jedna tačka $M\left(c,f(c)\right)$, $c\in(a,b)$ u kojoj je tangenta grafika funkcije paralelna sa x osom.



Slika 5

Primer:

Dokazati da funkcija $f(x)=x^3-4x+1$ na intervalu $[-2,2]$ ispunjava uslove Rolove teoreme i odrediti odgovarajuću vrednost nezavisno promennjive c.

1. Data funkcija je definisana za $x \in R$, pa je definisana i neprekidna i na intervalu $[-2,2]$.
2. Kako je $f'(x)=3x^2-4$, zaključujemo da je funkcija diferencijabilna na intervalu $(-2,2)$.
3. Kako je $f(-2)=f(2)=1$,

funkcija ispunjava uslove Rolove teoreme na $[-2,2]$.

Dakle, postoji bar jedana tačka $c \in (-2,2)$ takva da je $f'(c)=0$.

Rešavanjem jednačine $f'(c)=3c^2-4=0$ dobijamo $c_{1,2}=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$. Kako obe vrednosti pripadaju intervalu $(-2,2)$, zaključujemo da postoje dve tačke koje pripadaju datom intervalu za koje je $f'(c_1)=f'(c_2)=0$.

Košijeva teorema:

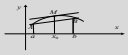
Neka su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ definisane i neprekidne na $[a,b]$, a diferencijabilne na (a,b), i neka je $g'(x)\neq 0$, $x \in (a,b)$.

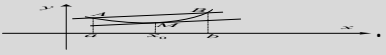
Tada postoji bar jedna tačka $c \in (a,b)$ takva da je $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Lagranžova teorema:

Neka je funkcija $f(x)$:

1. definisana i neprekidna na $[a,b]$,
2. diferencijabilna na (a,b).

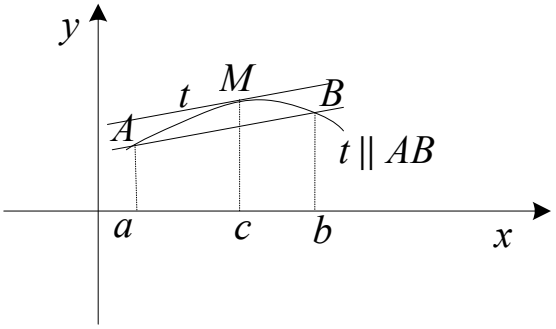
Tada postoji bar jedna tačka  takva da je

 .

Lagranžova teorema je specijalan slučaj Košijeve teoreme za $g(x) = x$.

Geometrijsko tumačenje Lagranževe teoreme:

Postoji tačka $M(c, f(c))$, $c \in (a,b)$ u kojoj je tangenta grafika funkcije paralelna sa sečicom AB, čiji je koeficijent pravca $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



Slika 6

Primer:

Odrediti tačku $(c, f(c))$ grafika funkcije $f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 9x$ takvu da $c \in (0,1)$, u kojoj je tangenta paralelna sa sečicom koja prolazi kroz tačke $(0, f(0))$ i $(1, f(1))$.

Funkcija $f(x)$ je definisana i neprekidna za $x \in R$ pa i na intervalu $[0,1]$.

Kako je $f'(x) = 12x^2 - 24x + 9$, funkcija je diferencijabilna za svako $x \in R$ pa i za $x \in (0,1)$.

Na osnovu Lagranžove teoreme imamo

$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f'(c)$, $c \in (0,1)$, odnosno $1 = 12c^2 - 24c + 9$ ili

$3c^2 - 6c + 2 = 0$. Odavde je $c_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$. Kako $\frac{3 - \sqrt{3}}{3} \in (0,1)$, a

$\frac{3 + \sqrt{3}}{3} \notin (0,1)$, tražena vrednost je $c = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$. Tražena tačka je

$\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{3}, f\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{3} \right) \right)$.

Lopitalova teorema:

Ako su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ diferencijabilne u nekoj okolini tačke a, pri čemu je $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ ili $(\pm\infty)$ i $g'(a) \neq 0$, tada je:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dokaz:

Kako je $f(a) = g(a) = 0$, važi $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$.

Na osnovu Košijeve teoreme tada postoji bar jedna tačka $c \in (a,b)$ takva da je $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$, tj $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$, odalke dobijamo

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Napomena:
Ukoloko u ovom koraku nismo izgubili neodređenost nastavićemo sa istim postupkom, odnosno tražimo drugi izvod, pa treći i tako redom do god ne izgubimo neodređenost.

Znači uopšteno možemo reći:
Ako funkcije $f(x)$ i $g(x)$ imaju n - te izvode koji su neprekidni u tački $x = a$ i ako je $f(a) = g(a) = f'(a) = g'(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = g^{(n-1)}(a) = 0$ i $g^{(n)}(a) \neq 0$, onda je $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ldots = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$.

Lopitalova teorema se koristi za rešavanje neodređenih izraza tipa "$\frac{0}{0}$" i "$\frac{\infty}{\infty}$"**.** U slučaju neodređenosti tipa "$0\cdot\infty$" i "$\infty - \infty$", one se moraju transformisati u oblik "$\frac{0}{0}$" ili "$\frac{\infty}{\infty}$"**.** U slučaju neodređenosti tipa "0^0, "1^∞" ili "∞^0"**,** izaraz se prvo logaritmuje čime se svodi na jedan od pomenutih slučajeva.

Primer:

Primenom Lopitalove teoreme odrediti granične vrednosti:

$$1.\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{L}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x\to 0} \cos x = 1;$$

$$2.\ \lim_{x\to +\infty} \frac{6 - 2\ln x}{x^2} \overset{L}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{-2}{x}}{2x} \overset{L}{=} -\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0;$$

$$3.\ \lim_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}\overset{L}{=}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin x+x\cos x}\overset{L}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-x\cos x}{2\cos x-x\sin x}=0$$

$$4.\ \lim_{x\to +0}x\ln x=\lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{L}{=}\lim_{x\to +0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to +0}x=0.$$

$$5.\ \lim_{x\to 0_+}x^x=\lim_{x\to 0_+}e^{\ln x^x}=e^{\lim\limits_{x\to 0_+}x\ln x}=e^0=1.$$

Kod izučavanja funkcija najčešće je potrebno izračunati vrednost funkcije za neku vrednost nezavisno promenljive. Ponekad to izračunavanje postaje veoma složeno, naprimer kod trigonometrijskih, eksponencijalnih ili logaritamskih funkcija.

Kako su polinomi funkcije koje se najlakše izračunavaju, vrednost neke funkcije u tački može se približno izračunati aproksimacijom date funkcije polinomom.

Pri aproksimaciji funkcije $f(x)$ polinomom $P(x)$ činimo grešku $R(x)$, koja iznosi $R(x)=f(x)-P(x)$. Cilj aproksimacije je da greška bude minimalna, a aproksimacija je bolja ukoliko je tačka x bliža tački a.

Postoje različiti postupci aproksimacije funkcije polinomom, a jedan od njih je Teljorov polinom.

Tejlorova teorema

Ako je funkcija $f(x)$ u okolini tačke a $n+1$ - puta diferencijabilna tada je:

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x),$$

gde je polinom

$$P_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n,$$

a greška je:

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\,f^{(n+1)}(c),\ c\in(x,a)\ \text{ili}\ c\in(a,x).$$

Polinom $P_n(x)$ se naziva ***Tejlorov polinom*** u tački a.

Za slučaj kada je tačka $a=0$ dobija se ***Maklorenov razvoj*** funkcije

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n)}(\theta x)x^n.$$

Primer:

Razviti u Tejlorovu formulu funkciju $f(x)=\frac{1}{x+1}$ po stepenima $x+2$, odnosno u okolini tačke $a=-2$, polinomom drugog stepena.

$f(-2)=-1$,

$f'(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}\Rightarrow f'(-2)=-1$,

$f''(x)=\frac{2}{(x+1)^3}\Rightarrow f''(-2)=-2$,

$f'''(x)=\frac{-6}{(x+1)^4}\Rightarrow f'''(\theta x)=\frac{-6}{(\theta x+1)^4}$, $0<\theta<1$.

Tejlorova formula date funkcije glasi:

$$\frac{1}{x+1}=-1-(x+2)-(x+2)^2-\frac{(x+2)^3}{(\theta(x+2)-2)^4},\ 0<\theta<1.$$

Primer :

Razviti funkciju $f(x)=\sqrt{1+x}$ u Maklorenovu formulu za $n=2$, tj. zaključno sa kvadratnim članom.

$f(0)=1$,

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}} \Rightarrow f'(0)=\frac{1}{2}$,

$f''(x)=-\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f''(0)=-\frac{1}{4}$,

$f'''(x)=\frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow f'''(\theta x)=\frac{3}{8}(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}$, $0<\theta<1$,

$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}$.

ZADACI

1. Ispitati da li funkcija $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ na intervalu $[-1,1]$ ispunjava uslove Rolove teoreme.

Rešenje:
Data funkcija je definisana i neprekidna za $x\in R$, pa prema tome i na intervalu $[-1,1]$.

Osim je $f(-1)=f(1)=1$.

Kako je $f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, funkcija nije diferencijabilna u tački $0\in(-1,1)$, pa funkcija ne ispunjava uslove Rolove teoreme na $[-1,1]$.

2. Dokazati da jednačina $4x^3-3x^2-2x+1=0$ ima bar jedno rešenje na intervalu $[0,1]$.

Rešenje:
Uočimo funkciju $y=4x^3-3x^2-2x+1$. Ona je definisana i neprekidna na $[0,1]$. Pored toga $f(0)=f(1)=0$. Prema tome, na osnovu Rolove teoreme postoji tačka $c\in(0,1)$ takva da je $f'(c)=0$.

Kako je $y'=12x^2-6x-2$, $6c^2-3c-1=0\Leftrightarrow c_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{35}}{12}$.

Tačka $c_1=\frac{3+\sqrt{35}}{12}\in(0,1)$ i ta vrednost je rešenje jednačine.

3. Dokazati da važi Langranžova teorema za funkciju $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$, $x\in[0,3]$ i odrediti odgovarajuće c.

Rešenje:

Data funkcija je definisana i neprekidna za $x\neq -1$, a to znači i za $x\in[0,3]$. Kako je $f'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}$, biće $f(x)$ diferencijabilna za sve $x\neq -1$ pa dakle i za $x\in(0,3)$.

Na osnovu Langranžove teoreme postoji $c\in(0,3)$, tako da je

$$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(c),$$

odnosno $\dfrac{\frac{1}{2}-(-1)}{3}=\dfrac{2}{(c+1)^2}$. Rešenja ove jednačine su $c_1=-3, c_2=1$ pa kako $-3\notin(0,3)$, biće $c_2=1$ tražena vrednost.

4. Dokazati da važi Langranžova teorema za funkciju $f(x)=x^3-5x^2-3x$, za $x\in[1,3]$ i odrediti c.

Rezultat: $c=\dfrac{7}{3}$.

5. Napisati Langranžovu formulu za funkciju $f(x)=\sqrt{x}$ na odsečku $[1,4]$ i odrediti c. Objasniti i geometrijski.

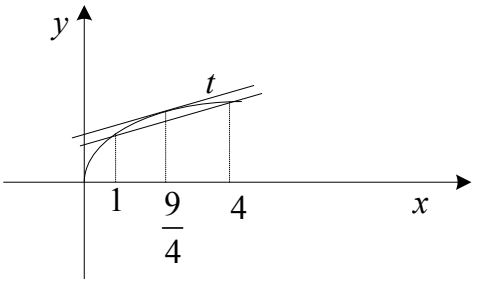
Rešenje:

Data funkcija je definisana i neprekidna $x\in[1,4]$. Izvod $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ je takođe definisan za $x\in(1,4)$.

Znači $f(x)$ je diferencijabilna na $(1,4)$, pa prema Langranžovoj teoremi važi jednakost $\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}=f'(c), c\in(1,4)$.

$f(4)=2,\ f(1)=1,\qquad f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, paje $\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2\sqrt{c}}\Leftrightarrow 2\sqrt{c}=3\Leftrightarrow c=\dfrac{9}{4}$.

S obzirom da $\dfrac{9}{4}\in(1,4)$, to je tražena vrednost c.



Slika 7

Geometrijski gledano, postoji tangenta grafika funkcije koja je paralelna sa sečicom koja prolazi kroz tačke $(1,1),(4,2)$ i njena dodirna tačka ima apscisu $\dfrac{9}{4}$.

Primenom Lopitalove teoreme odrediti granične vrednosti:

Neodređenost tipa "$\dfrac{0}{0}$" ili "$\dfrac{\infty}{\infty}$".

6.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-8x+5}{2x^2+6x}$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$; **c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{2x}}{x^3}$;**d)** $\lim\limits_{x\to 0_+}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}$.

Rešenje:

a). $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-8x+5}{2x^2+6x}\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-8}{4x+6}=\dfrac{1}{2}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{6x}\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{6}=\dfrac{1}{6}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{2x}}{x^3}\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\cdot e^{2x}}{3x^2}\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4\cdot e^{2x}}{6x}\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8\cdot e^{2x}}{6}=\infty$;

d) $\lim\limits_{x\to 0_+}\dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{x^2}\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to 0_+}\dfrac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}}{2x}=-\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0_+}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}=-\dfrac{1}{4}.$

7.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin x}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x+e^{2x}-1-2x-2x^2}{x^3}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

Rešenje:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin x}\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ae^{ax}-be^{bx}}{\cos x}=a-b$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x+e^{2x}-1-2x-2x^2}{x^3}\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x+2e^{2x}-2-4x}{3x^2}$

$\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+4e^{2x}-4}{6x}\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x+8e^{2x}}{6}=\dfrac{3}{2}$;

c) 2;

Neodređenost tipa "$\infty-\infty$".

8.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$;

c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$; **d)** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg}x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$.

Rešenje:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x\left(e^x-1\right)}\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{e^x+e^x+xe^x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2+x}=\dfrac{1}{2}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\sin x}{x^2\cdot\sin x}\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\cos x}{2x\cdot\sin x+x^2\cdot\cos x}=\infty$;

c) ∞; **d)** -1.

Neodređenost tipa "$0\cdot\infty$".

9.

a) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\ln x$; **b)** $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{ctg}2x$; **c)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-e^{2x}\right)\operatorname{ctg}x$.

Rešenje:

a) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\ln x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{x^{-2}}\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2}=0$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{ctg}2x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{tg}2x}\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\frac{2}{\cos^2 2x}}=\dfrac{1}{2}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-e^{2x}\right)\operatorname{ctg}x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{2x}}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\cos x\overset{L}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2e^{2x}}{\cos x}=-2$.

Neodređenost tipa "0^0", "1^∞" ili "∞^0".

10.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{\frac{1}{x^2}}$; **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x\right)^{\frac{1}{x}}$;

Rešenje:

a) $\lim\limits_{x\to 0}e^{\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}}\overset{L}{=}e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2x\cos x}}=e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\ln(\ln x)^{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{x}}\overset{L}{=}e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{1}}=e^0=1$;

11. Dokazati formulu.

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \ldots$$

Posmatrajmo funkciju $f(x) = e^{\sin x}$. Tada je:

$$f'(x) = e^{\sin x}\cos x \Rightarrow f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = e^{\sin x}\left(\cos^2 x - \sin x\right) \Rightarrow f''(0) = 1,$$

$$f'''(x) = e^{\sin x}\left(\cos^3 x - 3\sin x\cos x - \cos x\right) \Rightarrow f'''(0) = 0,$$

$$f^{IV}(x) = e^{\sin x}\left(\cos^4 x - 4\cos^2 x + 3\sin^2 x + \sin x - 6\sin x\cos^2 x\right) \Rightarrow f^{IV}(0) = -3.$$

$$f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + \ldots.$$

8.5. PRIMENA DIFERENCIJALNOG RAČUNA

Ispitivanje toka i crtanje grafika funkcije čini značajno poglavlje u matematici, a diferencijalni račun je neizostavljiv pri ovim operacijama.
Neki od osnovnih pojmova koji se pominju pri ispitivanju toka i grafika funkcije su već navedeni i definisani u predhodnom tekstu - pojmovi lokalnog ekstremuma (lokalnog maksimuma i minimuma) su definisani u delu teksta sa dokazom Fermaove teoreme, pa ih nećemo ponavljati.

8.5.1. Monotonost funkcije

Teorema 4.
Neka je funkcija f diferencijabilna i monotono rastuća (opadajuća) na intervalu (a,b), tada je

$$f'(x) > 0 \text{ , } \left(f'(x) < 0\right) \text{ za } x \in (a,b).$$

Takođe važi i obrnuta relacija,
ako je $f'(x) > 0$, $\left(f'(x) < 0\right)$ za svako x koje pripada intervalu (a,b) tada je f ***monotono rastuća (opadajuća) funkcija*** za $x \in (a,b)$.

Dokaz:

Neka je za $\forall x \in (a,b)$ ispunjeno $f'(x) \geq 0$. Uzmimo proizvoljne vrednosti x_1, x_2 takve da je $a \leq x_1 < x_2 \leq b$.

Na osnovu Lagranžove teoreme imamo:

$f(x_1) - f(x_2) = f'(x_0)(x_1 - x_2)$, za neko $x_1 < x_0 < x_2$.

Znajući da je $x_1 - x_2 < 0$ i $f'(x) \geq 0$, dobijamo da je $f(x_1) - f(x_2) < 0$, tj. funkcija $f(x)$ je rastuća.

Dokaz u drugom slučaju je identičan.

Primer:

Ispitati monotonost sledećih funkcija:

a) $f(x) = x^3$;

Izvod funkcije je $f'(x) = 3x^2$. Kako je $f'(x) \geq 0$ za $\forall x \in R$, funkcija je rastuća.

b) $f(x) = \frac{1}{x}$.

Izvod funkcije je $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Kako je $f'(x) < 0$ za $\forall x \in D_x$, funkcija je opadajuća.

c) $f(x) = x^2 - 2x + 3$

Izvod funkcije je $f'(x) = 2x - 2$. Kako je $f'(x) \geq 0$ za $x > 1$, a $f'(x) < 0$ za $x < 1$,zaključujemo da je funkcija je rastuća za $x > 1$, a opadajuća za $x < 1$.

8.5.2. Ekstremne vrednosti funkcije

Potreban uslov za ekstrem

Ako diferencijabilna funkcija $f(x)$ ima u tački $x = x_1$ ekstrem (maksimum ili minimum), tada je u toj tački $f'(x_1) = 0$. (Fermaova teorema)

Tačke u kojima je $f'(x) = 0$ nazivaju se ***stacionarnim tačkama***.

Iz navedenog uslova sledi da, ako je funkcija $f(x)$ diferencijabilna, tada ona može imati ekstremum samo u tačkama u kojima je njen izvod jednak nuli, obratan zaključak ne važi. Naime, ako je $f'(x_1)=0$, ne mora značiti da u toj tački funkcija ima ekstrem.

Dovoljan uslov za ekstrem

Teorema 5.
Neka je funkcija $f(x)$ neprekidna na intervalu (a,b) koji sadrži stacionarnu tačku x_1 tog intervala i diferencijabilna u tom intervalu. Ako je:

$f'(x)>0$ za $x<x_1$ i $f'(x)<0$ za $x>x_1$, tada je $f(x_1)=\max f(x)$

$f'(x)<0$ za $x<x_1$ i $f'(x)>0$ za $x>x_1$, tada je $f(x_1)=\min f(x)$

Napomena:
Predhodna teorema kaže da ako izvodna funkcija $f'(x)$ menja znak pri prolasku kroz tačku x_1 tada funkcija $f(x)$ ima ekstrem u tački x_1.

Pri ispitivanju ekstrema funkcije pomoću prvog izvoda određujemo:

1. $f'(x)$,
2. stacionarne tačke, tj.rešavamo jednačinu $f'(x)=0$,
3. određujemo znak izvoda, $f'(x)$, sa obe strane stacionarnih tačaka,
4. vrednost funkcije $f(x)$ za svaku od stacionarnih tačaka.

Primer:

Odrediti ekstreme funkcije $f(x)=xe^x$.
Izvod funkcije je $f'(x)=(x+1)e^x$. Nula prvog izvoda je $x=-1$
Kako je $e^x>0, \forall x\in R$, $f'(x)>0$ za $x>-1$ i $f'(x)<0$ za $x<0$, zaključujemo da funkcija ima minimum u tački $x=-1$.

Teorema o lokalnim ekstremima funkcije pomoću izvoda n-tog reda

Neka je f diferencijabilna funkcija koja ima sve izvode, od prvog reda do izvoda (n)- tog reda, i neka važi relacija

$f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ i $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ za vrednosti $n \geq 2$.

Tada važe sledeća pravila:

1. ako je n paran broj, x_0 jeste lokalna ekstremna tačka i to lokalni maksimum ako je $f^{(n)}(x_0) < 0$, a lokalni minimum ako je ispunjeno $f^{(n)}(x_0) > 0$.
2. ako je neparan broj, x_0 nije lokalna ekstremna tačka.

Primer:

Odrediti ekstreme funkcije $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.

Prvi izvod funkcije je $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$. Nule izvoda su $x = 3$, $x = -1$.

Drugi izvod funkcije je $f''(x) = 6x - 6$.

Kako je $f''(3) = 12 > 0$, a $f''(-1) = -12 < 0$, funkcija za $x = 3$ ima minimum $f_{\min} = f(3) = -22$, a za $x = -1$ ima maksimum $f_{\max} = f(-1) = 10$.

8.5.3 Konveksnost i konkavnost funkcije

Pored određivanja tačaka lokalnih ekstremuma, diferencijalni račun pojednostavljuje i postupak ispitivanja konveksnosti ili konkavnosti funkcije i određivanja prevojnih tačaka. Prvo je potrebno definisati navedene pojmove.

Definicija 6.

Funkcija $f(x)$ je ***konveksna*** na intervalu (a,b)

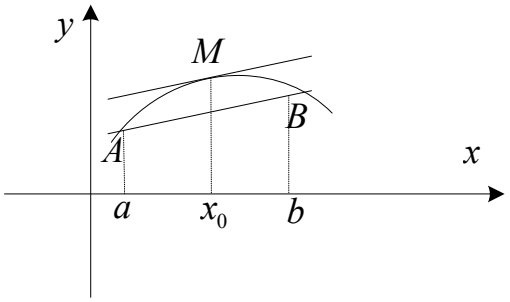
ako je za $(\forall x_1, x_2 \in (a,b)) x_1 \neq x_2$

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right),$$

a ***konkavna*** ako je

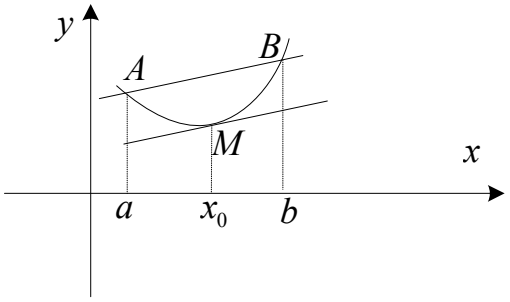
$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

Kod ***konkavne*** funkcije sve tačke grafika funkcije leže ispod bilo koje njene tangente na tom intervalu.



Slika 8

Kod ***konveksne*** funkcije sve tačke grafika funkcije leže iznad bilo koje njene tangente na tom intervalu.



Slika 9

Teorema 6.

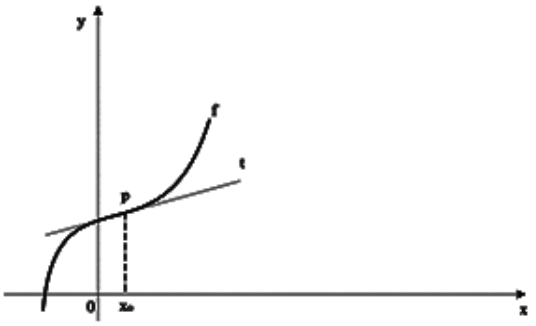
Neka je funkcija $f(x)$ dva puta diferencijabilna na (a,b).

Ako je za $x \in (a,b)$, $f''(x) \geq 0$, tada je funkcija ***konveksna*** na (a,b).

Ako je $x \in (a,b)$, $f''(x) \leq 0$, tada je funkcija ***konkavna*** na (a,b).

8.5.4.Prevojne tačke funkcije

Definicija 7.
Prevojna tačka grafika funkcije *f(x)* je tačka koja razdvaja konveksni i konkavni deo (tangenta u toj tački postoji i preseca grafik, jer je sa jedne strane prevojne tačke iznad, a sa druge strane ispod grafika).



Slika 10

Teorema 7.
***Potreban uslov za postojanje prevojne tačke**:* Ako je $x = x_0$ prevojna tačka funkcije $f(x)$, onda ili $f''(x_0)$ ne postoji ili je $f''(x_0) = 0$.

Dovoljan uslov za postojanje prevojne tačke**:* Ako je funkcija $f(x)$ dva puta diferencijabilna na (a,b), a pri prolasku kroz tačku $x_0 \in (a,b)$ drugi izvod $f''(x)$ menja znak, tada je tačka $(x_0, f(x_0))$ ***prevojna tačka.

Primer :

Odrediti prevojne tačke funkcije $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.

Prvi izvod funkcije je $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$. Drugi izvod funkcije je $f''(x) = 6x - 6$. $f''(x) = 0$ za $x = 1$. Za $x > 1$, $f''(x) > 0$ i u toj oblasti funkcija je konveksna, a za $x < 1$, $f''(x) < 0$ i u toj oblasti funkcija je konkavna. Prevojna tačka je $(1, -6)$.

Teorema o prevojnim tačkama funkcije pomoću izvoda n-tog reda

Neka je $f\ (n)$ - puta diferencijabilna, za čije izvode važi:

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0 \text{ i } f^{(n)}(x_0)\neq 0 \text{. za } n\geq 2 .$$

Tada važe sledeća pravila

1. ako je n paran broj tada x_0 nije prevojna tačka funkcije f
2. ako je n neparan broj tada x_0 jeste prevojna tačka funkcije f

8.6. ISPITIVANJE TOKA FUNKCIJA

Nakon svih navedenih definicija i teorema, za ispitivanje funkcije potrebno je ispitati njene osobine i nacrtati grafik:

Korak br. 1

Odrediti oblasti definisanosti funkcije;

Korak br. 2

Ispitati ponašanje funkcije na rubovima domena i odrediti asimptote;

Korak br. 3

Ispitati da li je funkcija parna, neparna ili periodična;

Korak br. 4

Odrediti tačke preseka grafika sa osama. Znak funkcije;

Korak br. 5

Ispitati monotonost funkcije i naći ekstremne tačke funkcije;

Korak br. 6

Odrediti intervale konveksnosti i konkavnosti funkcije i naći prevojne tačke;

Korak br. 7

Na osnovu dobijenih tačaka i ispitanih osobina nacrtati grafik funkcije.

Primer :

Ispitati osobine funkcije $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ i nacrtati njen grafik.

1) Funkcija je definisana i neprekidna na skupu $D=(-\infty,+\infty).$

2) Kako je $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=1$, grafik funkcije ima horizontalnu asimptotu $y=1$.

3) Funkcija je parna.

4) Za $x=0$ $y=1$; za $y=0$ $x_{1,2}=\pm 1$; presečne tačke grafika sa koordinantnim osama su: $A(0,1)$, $B(1,0)$; $C(-1,0)$

5) $y>0$ za $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.
$y<0$ za $x\in(-1,1)$.

6) Prvi izvod funkcije: $y'=\dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$

postoji za svako x i pri tom $y'<0$ za $x<0$; $y'=0$ za $x=0$; $y'>0$ za $x>0$; funkcija opada na $(-\infty,0)$ i raste na $(0,+\infty)$ i pri tom je $y_{\min}=y(0)=-1$. Ekstremna tačka minimum $E(0,-1)$.

7) Drugi izvod funkcije

$y''=\dfrac{4(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$, postoji za svako x i pri tom je:

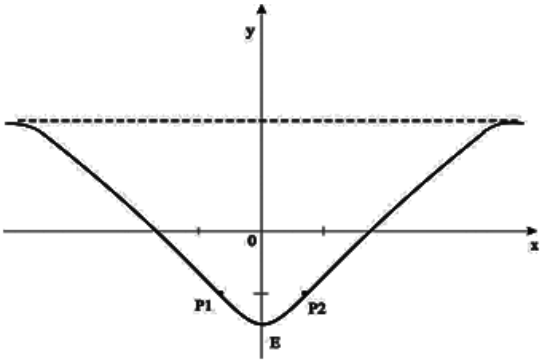
$y''<0$, $x\in(-\infty,-\dfrac{\sqrt{3}}{3})\cup(\dfrac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$, pa je funkcija konveksna

$y''>0$, $x\in(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3})$, pa je funkcija konkavna

$y''=0$, $x_{1,2}=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Prevojne tačke: $P_1(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{1}{2})$ i $P_2(\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{1}{2})$.

Na osnovu dobijenih podataka grafik funkcije je dat na slici



Primer :

Ispitati osobine funkcije $y=\dfrac{x^3}{4-x^2}$ i nacrtati njen grafik i konstruisati grafik.

1) Funkcija definisana $D=(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty).$

2) Kako je $\lim\limits_{x\to -2\pm 0}\dfrac{x^3}{4-x^2}=\pm\infty$ i $\lim\limits_{x\to 2\pm 0}\dfrac{x^3}{4-x^2}=\pm\infty$ vertikalne asimptote su prave $x=2$ i $x=-2$.

Funkcija se može napisati u obliku $f(x)=-x+\dfrac{4x}{4-x^2}$ pa je kosa asimptota $y=-x$, $\dfrac{4x}{4-x^2}\to 0$ kada $x\to\pm\infty$.

3) Funkcija je neparna.

4) Presečna tačka grafika sa koordinantnim osama je $O(0,0).$

5) Znak funkcija $y>0$ za $x\in(-\infty,-2)\cup(0,2)$;

$y<0$ za $x\in(-2,0)\cup(2,+\infty)$.

6) Izvod funkcije $y'=\dfrac{x^2\left(12-x^2\right)}{\left(4-x^2\right)^2}$

$y'=0$ za $x=\pm 2\sqrt{3}$;

$y'>0$, $x\in(-2\sqrt{3},-2)\cup(-2,2)\cup(2,2\sqrt{3});$ funkcija raste

$y'<0$, $x\in(-\infty,-2\sqrt{3})\cup(2\sqrt{3},+\infty)$, funkcija opada

$y_{\min}=y(-2\sqrt{3})=3\sqrt{3};\qquad y_{\max}=y(2\sqrt{3})=-3\sqrt{3};$

7) Drugi izvod funkcije:

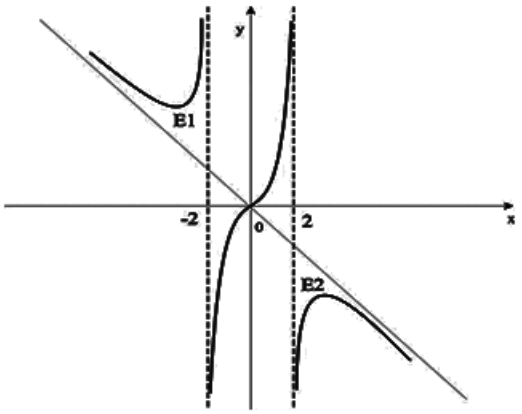
$$y''=\frac{8x(x^2+12)}{(4-x^2)^3}$$

$y''>0$, $x\in(-\infty,-2)\cup(0,2);$ funkcija je konveksna

$y''<0$, $x\in(-2,0)\cup(2,+\infty);$ funkcija je konkavna

$y''=0$, $x=0$ pa je prevojna tačka $P(0,0)$

Grafik funkcije je dat na slici



Primer:

Ispitati funkciju $y = x^{\frac{2}{3}} e^{-x}$.

1) Funkcija je definisana na skupu $D = (-\infty, +\infty)$.
2) Kako je $\lim_{x \to -\infty} x^{\frac{2}{3}} e^{-x} = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{2}{3}} e^{-x} = 0$, horizontalna asimptota je prava $y = 0$.
3) Tačka preseka sa osama je $O(0,0)$.
4) Znak funkcije $y > 0$ za $x \neq 0$.
5) Izvod funkcije $y' = \frac{(2-3x)e^{-x}}{3\sqrt[3]{x}}$ postoji za $x \neq 0$ i pri tom je:

   $y' < 0$ za $x \in (-\infty, 0) \cup (\frac{2}{3}, +\infty)$; funkcija opada

   $y' > 0$ za $x \in (0, \frac{2}{3})$; funkcija raste

   $y_{\min} = y(0) = 0$; $\quad y_{\max} = y(\frac{2}{3}) = \sqrt[3]{\frac{4}{9}} e^{-\frac{2}{3}} \approx 0,4.$

6) Drugi izvod funkcije:

$$y'' = \frac{(9x^2 - 12x - 2)e^{-x}}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

$y'' = 0$ za $y'' = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2}$;

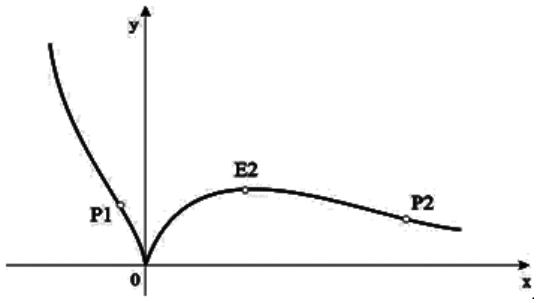
$y'' > 0$ za $x \in (-\infty, \frac{2-\sqrt{6}}{3}) \cup (\frac{2+\sqrt{6}}{3}, +\infty)$; funkcija je konveksna

$y'' < 0$ za $x \in (\frac{2-\sqrt{6}}{3}, 0) \cup (0, \frac{2+\sqrt{6}}{3})$; funkcija je konkavna

Postoje dve prevojne tačke čije su apscise:

$x_1 = \frac{2-\sqrt{6}}{3} \approx -0,15$ i $x_2 = \frac{2+\sqrt{6}}{3} \approx 1,48$

$y_1 = f(x_1) \approx 0,34$ i $y_2 = f(x_2) \approx 0,30$ (sl. 13.).



8.7. IZVODI I DIFERENCIJALI FUNKCIJA DVE NEZAVISNO PROMENLJIVE

Neka je $z = f(x, y)$ neprekidna funkcija dve nezavisno promenljive u oblasti $D \subseteq R^2$.

Definicija 8.

Parcijalni izvod funkcije f po promenljivoj $x_i, i = 1,2$ naziva se granična vrednost, ako postoji i obeležava sa

$$z_x' = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \leftarrow 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$z_y' = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \leftarrow 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Praktično, pri određivanju parcijalnog izvoda po promenljivoj $x_i, i = 1,2$, traži se običan izvod po toj promenljivoj, a druga promenljiva se smatra konstantom

Iz definicije parcijalnih izvoda sledi da se oni izračunavaju pomoću pravila za izračunavanje izoda funkcija sa jednom promenljivom.

Primer:

Parcijalni izvodi funkcije $z = x^2 + xy + 3x + 2y$ su:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y + 3 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2$$

Primer:

Za funkciju $z = \frac{xy}{x+y}$ pokazati da je $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2}{(x+y)^2}$ i $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{(x+y)^2}$,

$x\frac{y^2}{(x+y)^2} + y\frac{x^2}{(x+y)^2} = \frac{xy}{x+y}$.

Parcijalni diferencijal funkcije sa dve promenljivih po jednoj promenljivoj je proizvod parcijalnog izvoda funkcije po toj promenljivoj i priraštaja te promenljive, odnosno diferencijala te promenljive.

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x = \frac{\partial z}{\partial x}dx \qquad d_y z = \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y = \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

.

Zbir svih parcijalnih diferencijala se naziva ***totalni diferencijal.***

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Priraštaj funkcije $z = f(x, y)$ po definiciji je:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

gde $\varepsilon_1 \to 0$ i $\varepsilon_2 \to 0$, kada $\Delta x \to 0$ i $\Delta y \to 0$

Totalni diferencijal može se upotrebiti u približnim računima. Ako su Δx i Δy dovoljno mali, onda se priraštaj funkcije z može zameniti sa totalnim diferencijalom funkcije z, tj.

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \approx dz\ .$$

8.7.1 Parcijalni izvodi i totalni diferencijali višeg reda

Neka je data funkcija $z = f(x, y)$ koja ima parcijalne izvode prvog reda:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = z'_x(x, y) = f_x'(x, y) \quad \text{i} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = z'_y(x, y) = f_y'(x, y)$$

Ovi parcijalni izvodi su takođe funkcije od $x,\ y$ i mogu imati svoje parcijalne izvode, odnosno ***parcijalne izvode drugog reda*** ili ***drugi parcijalni izvod***

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = z''_{xx}(x, y) = f_{xx}''(x, y)\ ,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = z''_{yy}(x, y) = f_{yy}''(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = z''_{xy}(x,y) = f_{xy}''(x,y)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = z''_{yx}(x,y) = f_{yx}''(x,y)$$

Ako su parcijalni izvodi prvog reda neprekidne funkcije tada su mešoviti parcijalni izvodi drugog reda jednaki:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

Na sličan način se dobijaju parcijalni izvodi trećeg, četvrtog,..., n-tog reda. Iz definicije parcijalnog izvoda sledi da egzistencija parcijalnog izvoda n-tog reda u nekoj tački x povlači za sobom egzistenciju predhodnih (n-1)-og parcijalnog izvoda u okolini posmatrane tačke.

Neka je data funkcija $z = f(x, y)$ i totalni diferencijal prvog reda.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Kako se dx i dy mogu smatrati kao konstanta, tako je totalni diferencijal prvog reda funkcija od x i y, koja može imati svoj totalni diferencijal, koji se zove totalni diferencijal drugog reda (drugi totalni diferencijal)

$$d^2 z = d(dz) = d\left[\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right] =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)dy =$$
$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dydx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 =$$
$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

Na sličan način se dobijaju totalni diferencijali trećeg, četvrtog, ..., n-tog reda.

Primer:

Naći prvi i drugi totalni diferencijal funkcije $z = x^4 + 4x^2y^3 + 7xy + 1$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 8xy^3 + 7y \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 12x^2y^2 + 7x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 + 8y^3 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 24x^2y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 24xy^2 + 7 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 24xy^2 + 7$$

$$dz = (4x^3 + 8xy^3 + 7y)dx + (12x^2y^2 + 7x)dy$$

$$d^2z = (12x^2 + 8y^3)dx^2 + 2(24xy^2 + 7)dxdy + 24x^2ydy^2$$

8.7.2.Ekstremne vrednosti

Potreban uslov za postojanje ekstremne vrednosti

Da bi funkcija $z = f(x, y)$ imala ekstremnu vrednost u tački (x_0, y_0) potrebno je da:

$$z'_x(x_0, y_0) = 0 \quad \text{i} \quad z'_y(x_0, y_0) = 0$$

Tačke u kojima su prvi parcijalni izvodi jednaki nuli su ***stacionarne tačke.***

Dovoljan uslov za postojanje ekstremne vrednosti

Neka je (x_0, y_0) stacionarna tačka funkcije $z = f(x, y)$ i neka je:

$$A = z''_{xx}(x_0, y_0); \quad B = z''_{xy}(x_0, y_0); \quad C = z''_{yy}(x_0, y_0);$$

$$\Delta = B^2 - A \cdot C$$

a) Ako je $\Delta\big|_{(x_0, y_0)} < 0$, funkcija $z = f(x, y)$ ima u tački (x_0, y_0) ekstremnu vrednost i to ako je $A < 0 (C < 0)$ ima maksimum, ako je $A > 0 (C > 0)$ ima minimum.

b) Ako je $\Delta\big|_{(x_0, y_0)} > 0$, funkcija $z = f(x, y)$ nema u tački (x_0, y_0) ekstremnu vrednost.

c) Ako je $\Delta\big|_{(x_0, y_0)} = 0$ slučaj je neodređen i potrebna su dalja ipitivanja.

8.7.3.Uslovni ekstrem

Ekstremna vrednost funkcije $z = f(x, y)$ gde su promenljive x i y vezane nekim dodatnim uslovom $g(x, y) = 0$ je uslovni (vezani) ekstrem funkcije.

Za određivanje uslovnog ekstrema najpre se formira tzv. Lagranžova funkcija $F(x, y)$:

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

gde je λ - konstanta (Lagranžov množilac).

Stacionarne tačke za egzistenciju ekstrema Lagranžove funkcije određuju se iz uslova:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{\partial f}{\partial \lambda} + 1 \cdot g(x, y) = 0 + g(x, y) = g(x, y) = 0$$

Iz ovog sistema jednačina određuju se vrednosti x_i, y_i i λ odnosno stacionarne tačke (x_i, y_i) u kojima funkcija može imati ekstremnu vrednost.

Da li u stacionarnoj tački (x_0, y_0) funkcija ima ekstremnu vrednost određuje se preko znaka drugog diferencijala u toj tački:

$$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy^2 \quad \text{gde je} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0$$

Ako je $d^2F\big|_{(x_0, y_0)} < 0$ funkcija $z = f(x, y)$ ima uslovni maksimum u stacionarnoj tački i $z_{\max} = f(x_0, y_0)$, a ako je $d^2F\big|_{(x_0, y_0)} > 0$ tada funkcija $z = f(x, y)$ ima uslovni minimum u stacionarnoj tački i $z_{\min} = f(x_0, y_0)$. Ako je $d^2F = 0$ potrebna su dalja ispitivanja.

Primer:

Naći ekstremne vrednosti funkcije $z = 2 + 2x + 4y - x^2 - y^2$.

Najpre se određuju stacionarne tačke

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 - 2x = 0$, za $x_0 = 1$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 4 - 2y = 0$, za $y_0 = 2$.

Zatim se određuju parcijalni izvodi drugog reda

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

Na osnovu dobijenih podataka određuje se

$\Delta = 0 - (-2)(-2) = -4 < 0$

$A = -2 < 0$, funkcija z ima maksimum u tački $(1, 2)$

$z_{\max} = z(1,2) = 7.$

Primer:

Naći uslovne ekstreme funkcije $z = x^2 + y^2$ pri uslovu $x + y = 1$

Funkcija Lagranžea je

$$F(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1)$$

Parcijalni izvodi prvog reda su:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y - 1$$

Rešenje sistema jednačina

$$2x + \lambda = 0$$

$$2y + \lambda = 0$$

$$x + y = 1$$

$$\lambda_0 = -1, \quad x_0 = \frac{1}{2}, \quad y_0 = \frac{1}{2}.$$

Kako je $\frac{\partial F}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$, $d^2F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right) = 2dx^2 + 2dy^2 > 0$

znači da funkcija pri uslovu $x + y = 1$ ima minimum u tački $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $z_{\min} = \frac{1}{2}$.

ZADACI

Ispitati i grafički prikazati sledeće funkcije:

12. a) $y = x^3 + 6x^2 + 9x$; **b)** $y = x^4 - 2x^2 + 3$;

c) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$; **d)** $y = x^2(3 - x)$.

Rešenje:

a)

1. Domen: $x \in R$.
2. Nule i znak funkcije

   $y = 0 \Leftrightarrow x^3 + 6x^2 + 9x = 0 \Leftrightarrow x(x+3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3$

   Presek sa *y* osom: Funkcija seče $\dashv\!\!+\!\!\vdash$ - osu u koordinatnom početku.

   Znak funkcije: Za $x \in (-\infty, 0)$, $y < 0$, za $x \in (0, \infty)$, $y > 0$.
3. Asimptote: Funkcija nema asimptota.
4. Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti:

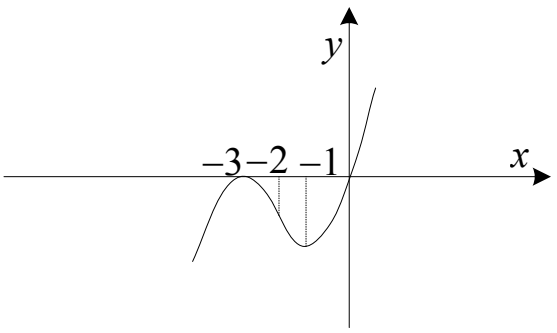
   $y' = 3x^2 + 12x + 9$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -3$.

   Za $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$ $y' < 0$ i $y \searrow$, a za $x \in (-3, -1)$ $y' > 0$ i $y \nearrow$.

   $y_{\min}(-3) = 0$, $y_{\max}(-1) = -4$.
5. Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke: $y'' = 6x + 12$. $y'' = 0$ za $x = -2$.

   Za $x \in (-\infty, -2)$, $y'' < 0$ i $y \cap$, a za $x \in (-2, \infty)$, $y'' > 0$ i $y \cup$.

   Funkcija ima prevojnu tačku $P(-2, -2)$.



b) Domen: $x \in R$. Nule funkcije: Funkcija nema realnih nula.

Presek sa *y* osom: Funkcija seče y - osu u tački $(0,3)$.

Znak funkcije: $y > 0$ za $\forall x \in D_x$.

Parnost, neparnost: $y(x) = y(-x)$ funkcija je parna.

Asimptote: Funkcija nema asimptota.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti: $y' = 4x^3 - 4x$,

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm 1$.

Za $x \in (-\infty,-1) \cup (0,1)$ $y' < 0$ i $y \searrow$,

a za $x \in (-1,0) \cup (1,\infty)$ $y' > 0$ i $y \nearrow$.

$y_{max}(0)=3,\ y_{min}(\pm 1)=2.$

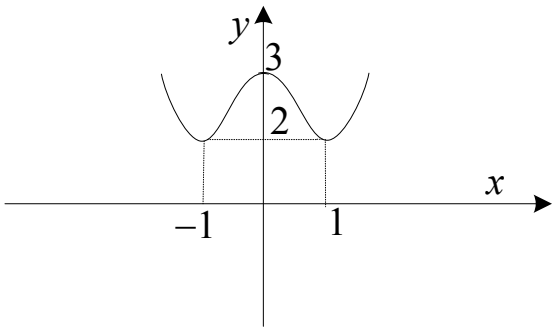
Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke: $y'' = 12x^2 - 4$. $y'' = 0$ za

$x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$x \in \left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3},\infty\right), \quad y'' > 0, \ y \cup$

$x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \quad y'' < 0, \ y \cap$

Funkcija ima dve prevojne tačke $P_{1/2}\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{22}{9}\right)$.



c) Domen: $x \in R$.

Nule funkcije: $y = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = (x-1)^2 (x-4) \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 4$.

Presek sa *y* osom: Funkcija seče y - osu u tački $(0,-4)$.

Znak funkcije: Za $x \in (-\infty, 4)$, $y < 0$, a za $x \in (4, \infty)$, $y > 0$.

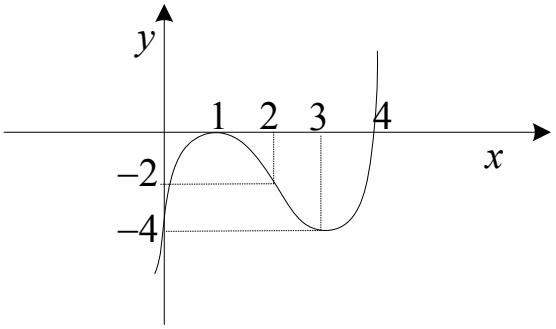
Asimptote: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \pm\infty$ funkcija nema asimptota.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti: $y' = 3x^2 - 12x + 9 = 0$ za $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3$. Za $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$, $y' > 0$ i $y \nearrow$, a za $x \in (1,3)$, $y' < 0$ i $y \searrow$. $y_{\max}(1) = 0$, $y_{\min}(3) = -4$.

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke: $y'' = 6x - 12$. $y''=0$ za $x = 2$.

Za $x \in (-\infty, 2)$, $y'' < 0$ i $y \cap$, a za $x \in (2, \infty)$, $y'' > 0$ i $y \cup$.

Funkcija ima prevojnu tačku $P(2,-2)$.



d) Domen: $x \in R$. Nule funkcije: $y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$.

Presek sa *y* osom: Funkcija seče y - osu u tački $(0,0)$.

Znak funkcije: Za $x \in (-\infty, 3)$ $y > 0$, a za $x \in (3, \infty)$ $y < 0$.

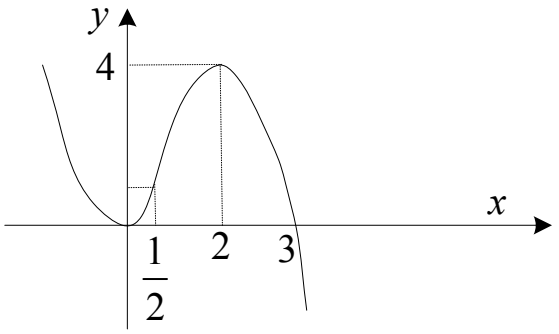
Asimptote: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \mp\infty$ funkcija nema asimptota.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti: $y' = 6x - 3x^2$ za $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$. Za $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, $y' < 0$ i $y \searrow$, a Za $x \in (0,2)$, $y' > 0$ i $y \nearrow$. $y_{\max}(2) = 4$, $y_{\min}(0) = 0$.

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke: $y'' = 6 - 12x$. $y''=0$ za $x = \frac{1}{2}$.

Za $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$, $y'' > 0$ i $y \cup$, a za $x \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$, $y'' < 0$ i $y \cap$.

Funkcija ima prevojnu tačku $P\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right)$.



13. a) $y = \frac{2x}{1+x^2}$; **b)** $y = \frac{3}{x^2-1}$; **c)** $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$;

d) $y = \frac{x^2-4}{x^2-1}$; **e)** $y = \frac{x^2-2x-3}{2x-x^2}$; **f)** $y = \frac{4x}{4-x^2}$.

Rešenje:

a) Domen: $1+x^2 > 0$, $x \in R$.

Parnost, neparnost: $y(x) = -y(-x)$ funkcija je neparna.

Nule funkcije: $y = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Presek sa *y* osom: Funkcija seče y - osu u koordinatnom početku.

Znak funkcije: Za $x \in (-\infty, 0)$, $y < 0$, a za $x \in (0, \infty)$, $y > 0$.

Asimptote: $\lim_{x \to \pm\infty} y = 0$ pa je $y = 0$ (x-osa) horizontalna asimptota funkcije.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti:

$y' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$. $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1$. Za $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $y' < 0$ i $y \searrow$, a za $x \in (-1, 1)$, $y' > 0$ i $y \nearrow$. $y_{\min}(-1) = -1$, $y_{\max}(1) = 1$.

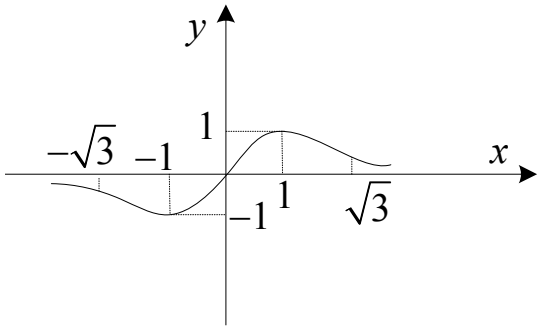
Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke:

$y'' = \dfrac{4x\left(x^2-3\right)}{\left(1+x^2\right)^3}$, $y''=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\pm\sqrt{3}$. Za

$x \in \left(-\sqrt{3},0\right) \cup \left(\sqrt{3},+\infty\right)$, $y''>0$ i $y \cup$, a za

$x \in \left(-\infty,-\sqrt{3}\right) \cup \left(0,\sqrt{3}\right)$, $y''<0$ i $y \cap$.

Funkcija ima tri prevojne tačke $P_1\left(-\sqrt{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right), P_2\left(0,0\right), P_3\left(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.



b) Domen: $x \in \left(-\infty,-1\right) \cup \left(-1,1\right) \cup \left(1,+\infty\right)$.

Parnost, neparnost: Funkcija je parna.

Nule funkcije: Funkcija nema nule.

Znak funkcije: Za $x \in \left(-\infty,-1\right) \cup \left(1,+\infty\right)$, $y>0$, a za $x \in \left(-1,1\right)$ $y<0$.

Asimptote funkcije: Kako je, $\lim\limits_{x \to -1\pm} y = \mp\infty$, Prave $x=\pm 1$ su vertikalne asimptote. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = 0$, pa je prava $y=0$, tj. x - osa horizontalna asimptota.

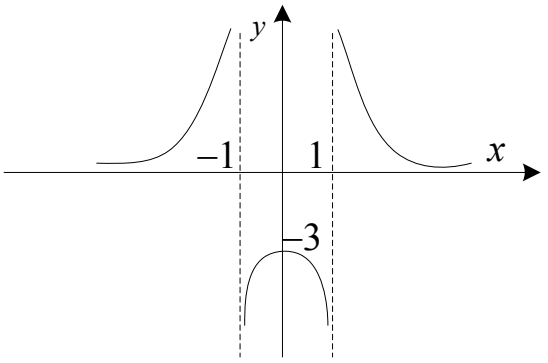
Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti: $y' = \dfrac{-6x}{\left(x^2-1\right)^2}$. $y'=0 \Leftrightarrow x=0$.

Za $x \in \left(-\infty,0\right)$, $y'>0$ i $y \nearrow$, a za $x \in \left(0,+\infty\right)$, $y'<0$ i $y \searrow$. $y_{\max}\left(0\right)=-3$.

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke: $y'' = \dfrac{6\left(3x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^3}$.

Za $x \in \left(-\infty,-1\right) \cup \left(1,\infty\right)$, $y''>0$ i $y \cup$, a za $x \in \left(-1,1\right)$, $y''<0$ i $y \cap$.

Funkcija nema prevojne tačke.



c) Domen: $x \in (-\infty,1) \cup (1,+\infty)$.

Nule funkcije: $y = 0 \Leftrightarrow 2x-1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Presek sa *y* osom: $y(0) = -1$.

Znak funkcije: Za $x \in \left(\frac{1}{2},+\infty\right)$, $y > 0$, a za $x \in \left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$, $y < 0$.

Asimptote: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 0$ pa je prava $y = 0$ horizontalna asimptota.

$\lim\limits_{x\to 1\pm} y = +\infty$, pa je prava $x = 1$ vertikalna asimptota.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti:

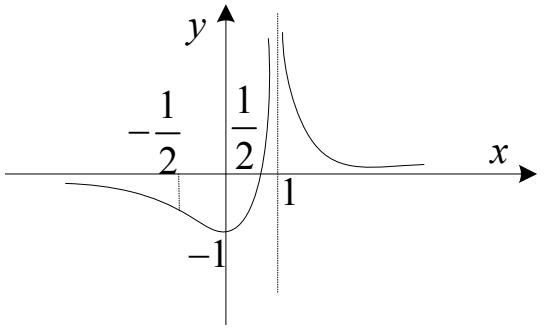
$y' = \frac{-2x}{(x-1)^3}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Za $x \in (-\infty,0) \cup (1,+\infty)$, $y' < 0$ i $y \searrow$, a za $x \in (0,1)$, $y' < 0$ i $y \nearrow$.

$y_{\min}(0) = -1$.

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke:

$y'' = \frac{2(2x+1)}{(x-1)^4}$. $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$. Za $x \in \left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$, $y'' < 0$ i $y \cap$, a za $x \in \left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$, $y'' > 0$ i $y \cup$. Prevojna tačka je tačka $P\left(-\frac{1}{2},-\frac{8}{9}\right)$.



d) Domen: $x \in (-\infty,-1) \cup (-1,1)(1,+\infty)$.

Parnost, neparnost: $y(x) = y(-x)$ funkcija je parna.

Nule funkcije: $y = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$. Presek sa *y* osom: $y(0) = 4$.

Znak funkcije: Za $x \in (-\infty,-2) \cup (-1,1) \cup (2,+\infty)$, $y > 0$,

a za $x \in (-2,-1) \cup (1,2)$, $y < 0$.

Asimptote: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = 1$ pa je prava $y = 1$ horizontalna asimptota.

$\lim\limits_{x \to -1\pm} y = \pm\infty$, $\lim\limits_{x \to 1\mp} y = \pm\infty$, pa su prave $x = \pm 1$ vertikalne asimptote.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti:

$$y' = \frac{6x}{\left(x^2 - 1\right)^2},\ y' = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

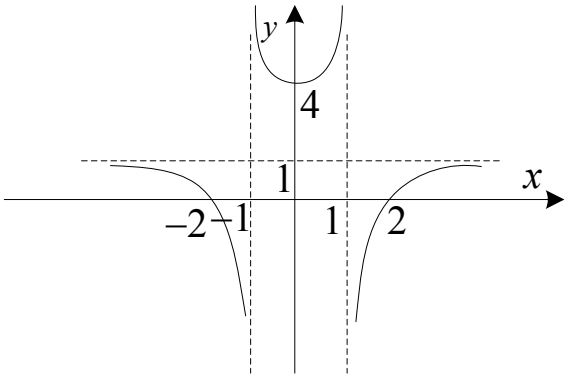
Za $x \in (-\infty, 0)$, $y' < 0$ i $y \searrow$, a za $x \in (0,+\infty)$, $y' > 0$ i $y \nearrow$: $y_{\min}(0) = 4$

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke:

$$y'' = \frac{-6\left(3x^2 + 1\right)}{\left(x^2 - 1\right)^3}.$$

Za $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$, $y'' < 0$ i $y \cap$, a za $x \in (-1,1)$, $y'' > 0$ i $y \cup$.

Funkcija nema prevojne tačke.



e) Domen: $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$.

Nule funkcije:

$y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3$.

Presek sa *y* osom: Funkcija ne seče y - osu.

Znak funkcije:

Za $x \in (-1, 0) \cup (2, 3)$, $y > 0$, za $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 2) \cup (3, \infty)$, $y < 0$.

Parnost neparnost: Funkcija nije ni parna ni neparna.

Asimptote:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = -1$ pa je $y = -1$ horizontalna asimptota.

$\lim\limits_{x \to 0\mp} y = \pm\infty$, $\lim\limits_{x \to 2\pm} y = \pm\infty$, pa su $x = 0$ i $x = 2$ vertikalne asimptote.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti:

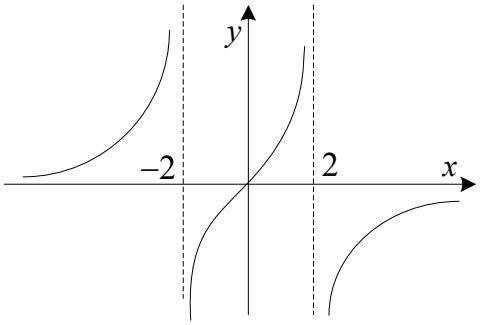
$y' = \dfrac{6(1-x)}{\left(2x - x^2\right)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Za $x \in (-\infty, 1)$, $y' > 0$ i $y \nearrow$, a za $x \in (1, +\infty)$, $y' < 0$ i $y \searrow$. $y_{\max}(1) = -4$.

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke: $y'' = \dfrac{-6\left(3x^2 - 6x + 4\right)}{\left(2x - x^2\right)^3}$

Za $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, $y'' > 0$ i $y \cup$, a za $x \in (0, 2)$, $y' < 0$ i $y \cap$.

Funkcija nema prevojne tačke.

e)



14.

a) $y=\dfrac{x^2-6x+3}{x-3}$;

b) $y=\dfrac{(x-1)^3}{2(x+1)^2}$;

c) $y=\dfrac{4x-x^2-4}{x-1}$;

d) $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$;

e) $y=\dfrac{3x-x^2}{x-4}$;

f) $y=\dfrac{10}{4x^3-9x^2+6x}$.

Rešenje:

a) Domen: $x\in(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$.

Nule funkcije: $y=0\Leftrightarrow x^2-6x+3=0\Leftrightarrow x_1=3-\sqrt{6}\vee x_2=3+\sqrt{6}$.

Znak funkcije:

Za $x\in\left(3-\sqrt{6},3\right)\cup\left(3+\sqrt{6},+\infty\right)$, $y>0$,za

$x\in\left(-\infty,3-\sqrt{6}\right)\cup\left(3,3+\sqrt{6}\right)$, $y<0$.

Asimptote: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=\pm\infty$, funkcija nema horizontalnu asimptotu.

$\lim\limits_{x\to3\pm}y=\mp\infty$, prava $x=3$ je vertikalna asimptota funkcije.

Kosa asimptota funkcije je prava $y=kx+n$:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-6x+3}{x^2-3x}=1,n=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-6x+3}{x-3}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x+3}{x-3}=-3$$

pa je prava $y=x-3$ kosa asimptota funkcije.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti:

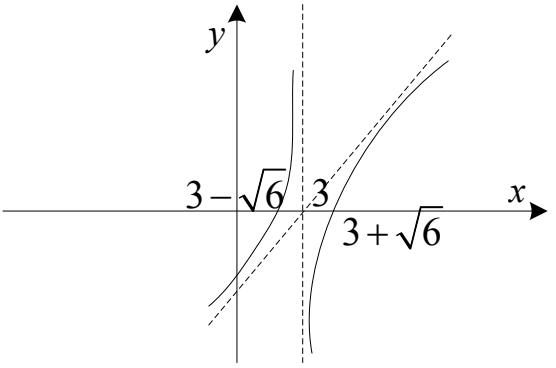
$$y' = \frac{x^2 - 6x + 15}{(x-3)^2} > 0$$

pa je funkcija je stalno rastuća. Funkcija nema ekstremnih vrednosti.

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke: $y'' = \frac{-12}{(x-3)^3}$.

Za $x \in (-\infty, 3)$, $y'' > 0$ i $y \cup$, a za $x \in (3, \infty)$, $y'' < 0$ i $y \cap$.

Funkcija nema prevojnih tačaka.



b) Domen: $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

Nule funkcije: $y = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Presek sa *y* osom: $y(0) = -\frac{1}{2}$.

Znak funkcije: Za $x \in (-\infty, 1)$, $y < 0$, a za $x \in (1, \infty)$, $y > 0$.

Asimptote: $\lim_{x \to \pm\infty} y = \pm\infty$ pa funkcija nema horizontalnu asimptotu.

$\lim_{x \to 1\pm} y = -\infty$, pa je prava $x = -1$ je vertikalna asimptota funkcije.

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{(x-1)^3}{2x(x+1)^2} = \frac{1}{2},\ n = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{(x-1)^3}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{-5x^2 + 2x - 1}{2x^2 + 4x + 2} = -\frac{5}{2}$$

prava $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ je kosa asimptota funkcije.

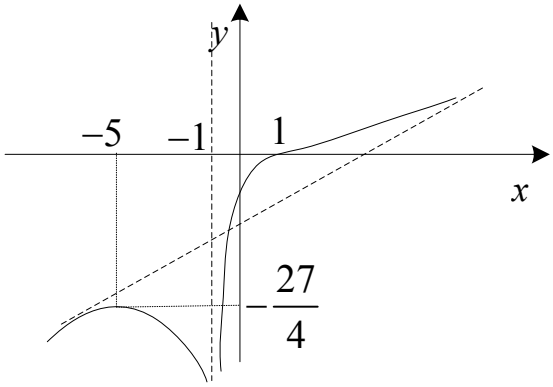
Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti:

$y' = \frac{(x-1)^2(x+5)}{2(x+1)^3}$. $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -5$.

$x \in (-\infty,-5) \cup (-1,1)$, $y' > 0$ i $y \nearrow$, a za $x \in (-5,-1) \cup (1,+\infty)$, $y' < 0$ i $y \searrow$. $y_{\max}(-5) = -\frac{27}{4}$.

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke: $y'' = \frac{12(x-1)}{(x+1)^4}$. $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Za $x \in (-\infty,1)$, $y'' < 0$ i $y \cap$, a za $x \in (1,\infty)$, $y'' > 0$ i $y \cup$. Prevojna tačka funkcije je $P(1,0)$.



c) Domen: $x \in (-\infty,1) \cup (1,+\infty)$. Nule funkcije: $y = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Znak funkcije: Za $x \in (-\infty,1), y > 0$, a za $x \in (1,+\infty), y < 0$.

Asimptote: Funkcija nema horizontalne asimptote.

Prava $x = 1$ vertikalna asimptota, a prava $y = -x + 3$ je kosa asimptota.

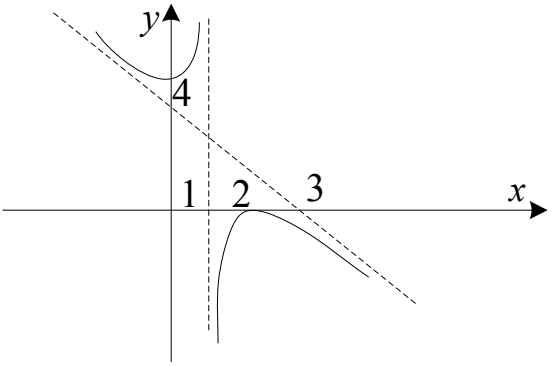
Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti: $y' = \frac{-x^2 + 2x}{(x-1)^2}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$. Za $x \in (-\infty,0) \cup (2,+\infty)$, $y' < 0$ i $y \searrow$, a za $x \in (0,2)$, $y' > 0$ i $y \nearrow$. $y_{max}(2)=0$ i $y_{\min}(0) = 4$.

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke: $y'' = \frac{-2}{(x-1)^3}$.

Za $x \in (-\infty,1), y'' > 0$ i $y \cup$, a za $x \in (1,+\infty), y'' < 0$ i $y \cap$.

Nema prevojnih tačka.



d) Domen: $x \in (-\infty,-1) \cup (-1,+\infty)$. Nule funkcije: $y = 0$ za $x = 0$.

Znak funkcije: $y < 0$ za $x \in (-\infty,-1) \cup (-1,0)$, $y > 0$ za $x \in (0,+\infty)$.

Asimptote: Funkcija nema horizontalnu asimptotu, prava $x = -1$ je vertikalna asimptota, a prava $y = \frac{1}{2}x - 1$ je kosa asimptota funkcije.

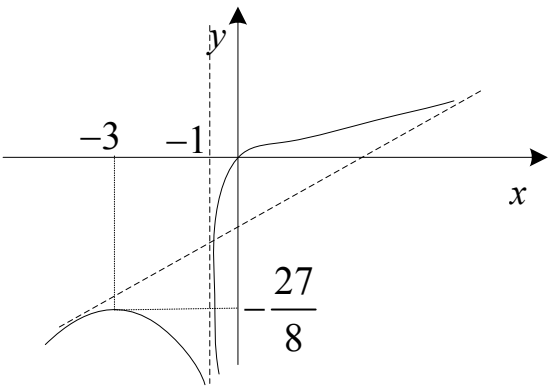
Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti: $y' = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3$. Za $x \in (-\infty,-3) \cup (-1,+\infty)$, $y' > 0$ i $y \nearrow$, a za $x \in (-3,-1)$, $y' < 0$ i $y \searrow$. $y_{\max}(-3) = -\frac{27}{8}$.

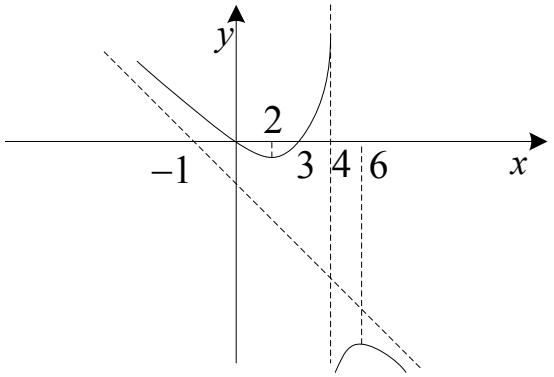
Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke: $y'' = \frac{3x}{(x+1)^4}$. $y'=0 \Leftrightarrow x=0$.

Za x∈(-∞,0), y''<0 i $y \cap$, a za $x \in (0,+\infty)$, $y'' > 0$ i $y \cup$.

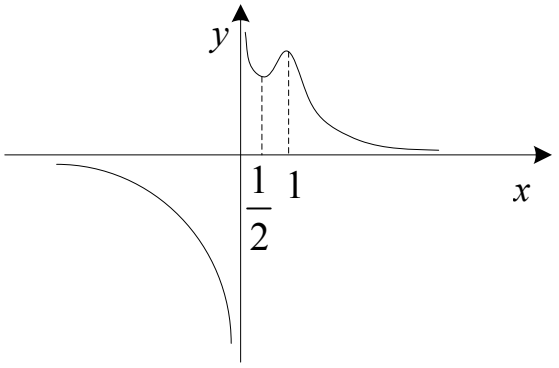
Prevojna tačka funkcije je $P(0,0)$.



e)



f)



15. a) $y = x^2 e^{-x}$; **b)** $y = x^3 e^{x}$; **c)** $y = e^{-x}\left(2 - x^2\right)$; **d)** $y = x e^{-x^2}$.

Rešenje:

a) Domen: $x \in \left(-\infty, +\infty\right)$. Nule funkcije: $x = 0$.

Znak funkcije: $y \geq 0$ za $x \in R$.

Asimptote: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{e^x} \overset{L}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{e^x} 2 \overset{L}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = +0$,

pa je $y = 0$ (x-osa) horizontalna asimptota funkcije.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti:

$y' = e^{-x} x\left(2 - x\right)$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$.

Za $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ $y' < 0$ i $y \searrow$, a za $x \in (0, 2)$ $y' > 0$ i $y \nearrow$.

$y_{\min}(0) = 0$, $y_{\max}(2) = 4e^{-2} \approx 0,54$.

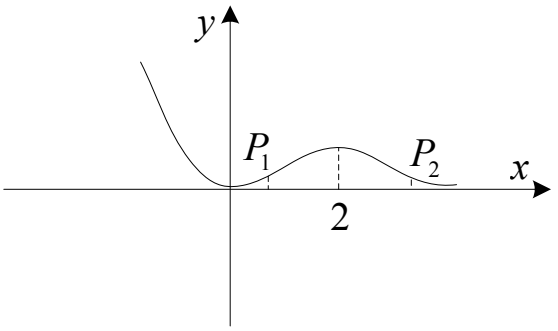
Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke:

$y'' = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$, $y'=0 \Leftrightarrow x^2-4x+2=0 \Leftrightarrow x_{1/2}=2\pm\sqrt{2}$.

Za $x \in (2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$, $y'' < 0$ i $y \cap$,

a za $x \in (-\infty, 2-\sqrt{2}) \cup (2+\sqrt{2}, +\infty)$, $y'' > 0$ i $y \cup$.

Prevojne tačke date funkcije, tj. njihove približne koordinate su $P_1(0,59; 0,19)$ i $P_2(2,41; 0,52)$.



b) Domen: $x \in (-\infty, +\infty)$. Nule funkcije: $x = 0$.

Znak funkcije: $y < 0$ za $x < 0$, $y > 0$ za $x > 0$.

Asimptote:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{e^{-x}} \overset{L}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{-e^{-x}} \overset{L}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{6x}{e^{-x}} \overset{L}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{6}{-e^{-x}} = -0, \quad \lim_{x\to+\infty} y = +\infty,$$

pa je $y = 0$ (x - osa) horizontalna asimptota funkcije.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti:

$y' = x^2(x+3)e^x$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -3$. Za $x \in (-\infty, -3)$, $y' < 0$ i $y \searrow$,

a za $x \in (-3, +\infty)$, $y' > 0$ i $y \nearrow$. $y_{\min}(-3) = (-3)^3 e^{-3} = -\frac{27}{e^3} \approx -1,34$.

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke :

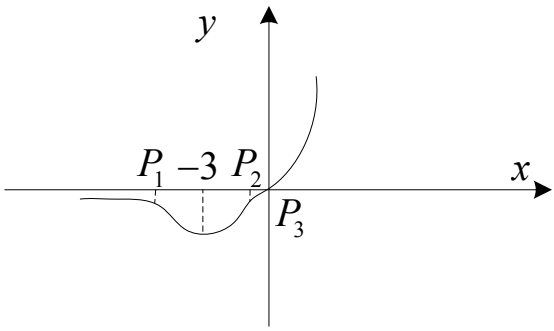
$y'' = x(x^2 + 6x + 6)e^x$.

$y'' = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = -3-\sqrt{3} \approx -4,73 \vee x_3 = -3+\sqrt{3} \approx -1,27$.

Za $x \in \left(-\infty, -3-\sqrt{3}\right) \cup \left(-3+\sqrt{3}, 0\right)$, $y'' < 0$ i $y \cap$, a za

$x \in \left(-3-\sqrt{3}, -3+\sqrt{3}\right) \cup \left(0, +\infty\right)$, $y'' > 0$ i $y \cup$.

Prevojne tačke funkcije su $P_1\left(-3-\sqrt{3}, -0,73\right)$, $P_2\left(-3+\sqrt{3}, -0,8\right), P_3\left(0,0\right)$.



c) Domen: $x \in \left(-\infty, +\infty\right)$ .Nule funkcije: $x = \pm\sqrt{2}$.

Presek sa *y* osom: $y\left(0\right) = 2,$

Znak funkcije: Za $x \in \left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right)$, $y < 0$,

a za $x \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ $y > 0$.

Asimptote: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2-x^2}{e^x} \overset{L}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x}{e^x} \overset{L}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2}{e^x} \overset{L}{=} -0,$

pa je $y = 0$ horizontalna asimptota. Funkcija nema vertikalnu asimptotu.

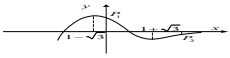
Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti:

$y' = e^{-x}\left(x^2 - 2x - 2\right)$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$. $y \nearrow$

za $x \in \left(-\infty, 1-\sqrt{3}\right) \cup \left(1+\sqrt{3}, \infty\right)$, $y \searrow$

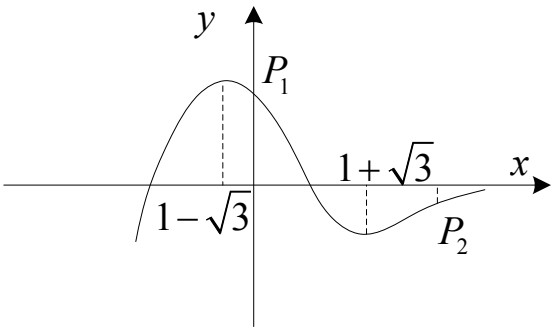
za $x \in \left(1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\right)$. $y_{\max} = y\left(x_1\right) = y_1 \approx 2,3$; $y_{\min} = y\left(x_2\right) = y_2 \approx 0,9$.

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke:

 $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$.

Za $x \in \left(0,4\right), y'' > 0$ i $y \cup$, a za $x \in \left(-\infty, 0\right) \cup \left(4, \infty\right), y'' < 0$ i $y \cap$.

$y\left(0\right) = 2,$ $y\left(4\right) = e^{-4} \cdot \left(-14\right) = -14e^{-4} \approx 0,26$ su prevojne tačke funkcije.



d) Domen: $x \in (-\infty, +\infty)$. Nule funkcije: $y = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Znak funkcije: Za $x \in (-\infty, 0)$ $y < 0$, a za $x \in (0, \infty)$ $y > 0$.

Parnost, neparnost: funkcija je neparna.

Asimptote: $\lim_{x \to \pm\infty} y = 0$ pa je prava $y = 0$ horizontalna asimptota funkcije.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti:

$$y' = \frac{1 - 2x^2}{e^{x^2}},\ y' = 0 \Leftrightarrow\ x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Za $x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), y' > 0$ i $y \nearrow$, $x \in \left(-\infty - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right), y' < 0$ i $y \searrow$

$$y_{\max} = y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2e}};\ y_{\min} = y\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2e}}.$$

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke:

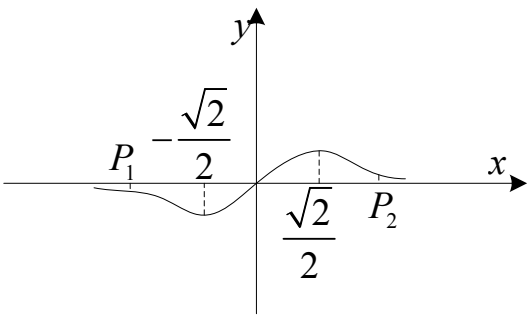
$$y'' = \frac{2x\left(2x^2 - 3\right)}{e^{x^2}}\quad y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Za $x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \cup \left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right), y'' > 0$ i $y \cup$,

a za $x \in \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right) \cup \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\right), y'' < 0$ i $y \cap$.

$$y(0) = 0,\ y\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{3}{2}}, y\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = -\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{3}{2}}$$

su prevojne tačke funkcije.



16.

a) $y = e^{\frac{1}{x}}$; **b)** $y = xe^{-\frac{1}{x^2}}$;

c) $y = e^{-\frac{1}{x+1}}$; **d)** $y = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$; **e)** $y = xe^{\frac{1}{x}}$.

Rešenje:

a) Domen: $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Nule funkcije: Funkcija nema nula.

Znak funkcije: $y > 0$ za $x \in D_x$.

Asimptote: $\lim_{x \to \pm\infty} y = 1$, funkcija ima horizontalnu asimptotu $y = 1$.

$\lim_{x \to 0-} y = 0$, $\lim_{x \to 0+} y = +\infty$, funkcija ima vertikalnu asimptotu $x = 0$,

kada $x \to 0_+$.

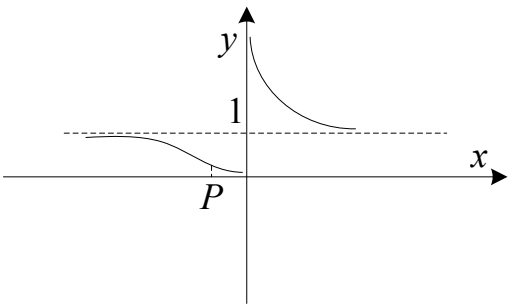
Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti:

$y' = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$, $x \in D_x$, $y' < 0$ i $y \searrow$. Funkcija nema ekstremnih vrednosti.

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke :

$y'' = e^{\frac{1}{x}} \frac{1+2x}{x^4}$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$. Za $x \in \left(0, -\frac{1}{2}\right), y'' < 0$ i $y \cap$,

a za $x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right), y'' < 0$ i $y \cup$. Prevojna tačke je $P\left(-\frac{1}{2}, e^{-2}\right)$.



b) Domen: $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Nule funkcije: Funkcija nema nula.

Znak funkcije: Za $x \in (-\infty, 0), y < 0$, a za $x \in (0, +\infty)$ $y > 0$.

Parnost, neparnost: funkcija je neparna.

Asimptote: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \pm\infty$, funkcija nema horizontalnu asimptotu.

$$k = \lim_{x\to\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} = 1, n = \lim_{x\to\infty}\left(xe^{-\frac{1}{x^2}} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 1}{\frac{1}{x}} \overset{L}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 1}{-\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x} \right) = 0$$

pa je $y = x$ kosa asimptota funkcije.

$\lim\limits_{x \to 0\pm} y = \pm 0$, pa funkcija nema vertikalnih asimptota.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti: $y' = e^{-\frac{1}{x^2}} \left(1 + \frac{2}{x^2} \right)$, $x \in D_x$,

$y' > 0$ i $y \nearrow$ .Funkcija nema ekstremnih vrednosti.

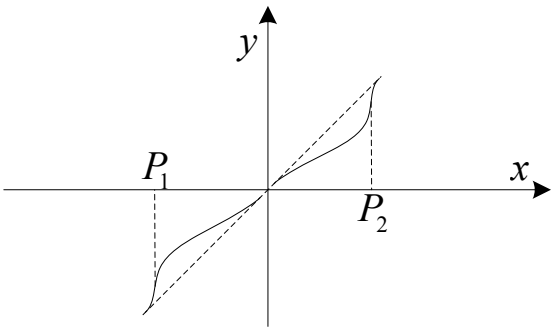
Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke:

$y'' = 2e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{2 - x^2}{x^5}$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

Za $x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2}), y'' > 0$ i $y \cup$, za

$x \in (-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty), y'' < 0$ i $y \cap$.

$y\left(-\sqrt{2}\right)=-\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}\approx -0,86$; $y\left(\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}e^{-\frac{1}{2}}\approx 0,86$ su prevojne tačke.



c) Domen: $x\in\left(-\infty,-1\right)\cup\left(-1,+\infty\right)$.Nule funkcije: funkcije nema nula.

Znak funkcije: $y>0$ za $x\in D_x$. Presek sa *y* osom: $y\left(0\right)=e^{-1}=\frac{1}{e}$.

Asimptote: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}e^{-\frac{1}{x+1}}=e^{+0}=1$, prava $y=1$ je horizontalna asimptota.

$\lim\limits_{x\to-1-}e^{-\frac{1}{x+1}}=e^{+\infty}=+\infty,\quad \lim\limits_{x\to-1+}e^{-\frac{1}{x+1}}=e^{-\infty}=+0$, prava $x=-1$
je vertikalna asimptota funkcije.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti: $y'=\left(x+1\right)^{-2}e^{-\frac{1}{x+1}};\ x\in D_x$

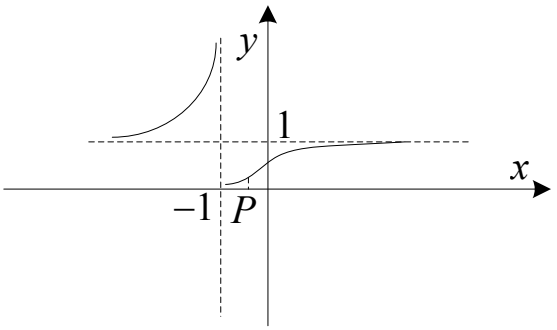
y'>0 y↗.

Funkcija nema ekstremnih vrednosti.

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke:

$y''=-\frac{2x+1}{\left(x+1\right)^4}e^{-\frac{1}{x+1}};\ y''=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$. Za $x\in\left(0,-\frac{1}{2}\right), y''>0$ i $y\cup$, a za

$x\in\left(-\frac{1}{2},+\infty\right), y''<0$ i $y\cap$. Prevojna tačke funkcije je $P\left(-\frac{1}{2},e^{-2}\right)$.



d) Domen: $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Nule funkcije: $x = -2$.

Znak funkcije: Za $x \in (-\infty, -2), y < 0$, a za $x \in (-2, +\infty)$, $y > 0$.

Asimptote: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \pm\infty$, funkcija nema horizontalnu asimptotu.

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x+2}{x} \cdot e^{\frac{1}{x}} = 1,$$

$$n = \lim_{x \to \infty} \left((x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \to \infty} \left(x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) + 2e^{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} + 2 = 3,$$

pa je $y = x + 3$ kosa asimptota funkcije. $\lim\limits_{x \to -0} y = 0$, $\lim\limits_{x \to +0} y = +\infty$.

Funkcija ima vertikalnu asimptota kada $x \to 0_+$.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti:

$y' = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x^2 - x - 2}{x^2}$, $y' = 0$ za $x = -1 \vee x = 2$.

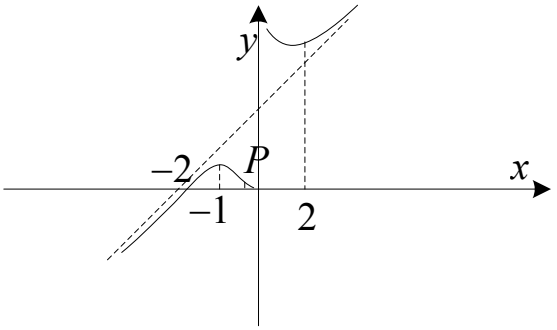
Za $x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty), y' > 0$ i $y \nearrow$, a za $x \in (-1, 2), y' < 0$ i $y \searrow$.

$$y_{\max} = y(-1) = \frac{1}{e}; \; y_{\min} = y(2) = 3\sqrt[3]{e}$$

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke: $y' = e^{\frac{1}{x}} \frac{3x+2}{x^4}$,

$y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$. Za $x \in \left(-\infty, -\frac{2}{3} \right), y'' < 0$ i $y \cap$,

a za $x \in \left(-\frac{2}{3}, +\infty \right), y'' > 0$ i $y \cup$. $y\left(-\frac{2}{3} \right) = \frac{8}{3} \cdot e^{\frac{3}{2}}$ je prevojna tačka funkcije.



e) Domen: $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Nule funkcije: $x = 0$.

Znak funkcije: Za $x \in (-\infty, 0)$, $y < 0$, a za $x \in (0, +\infty)$, $y > 0$.

Asimptote: $\lim_{x \to \pm\infty} y = \pm\infty$, funkcija nema horizontalnu asimptotu.

$\lim_{x \to 0-} y = -0$, $\lim_{x \to 0+} y = +\infty$, pa je prava $x = 0$ vertikalna asimptota kad $x \to +0$, a $y = x + 1$ kosa asimptota funkcije.

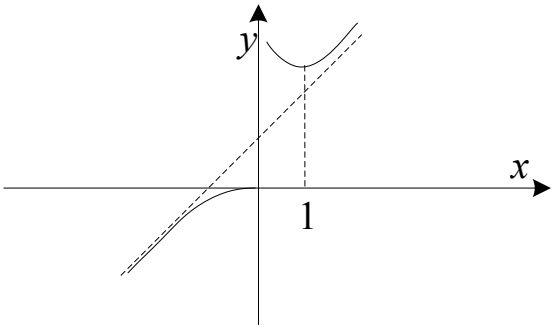
Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti: $y' = \frac{x-1}{x} \cdot e^{\frac{1}{x}}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Za $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty), y' > 0$ i $y \nearrow$. a za $x \in (0,1), y' < 0$ i $\not\searrow$.

$y_{\min}(1) = e$.

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke : $y'' = \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}}$,

Za $x \in (-\infty, 0)\, y'' < 0$ i $y \cap$. a za $x \in (0, +\infty), y' > 0$ i $y \cup$. Nema prevojne tačke.



17. a) $y=\dfrac{\ln x}{x}$; b) $y=x^2\ln^2 x$; c) $y=x^2\left(1-2\ln x\right)$; d) $y=x^3\ln x$

Rešenje:

a) Domen: $x\in\left(0,+\infty\right)$. Nule funkcije: $x=1$.

Znak funkcije: Za $x\in\left(0,1\right)$ $y<0$, a za $x\in\left(1,+\infty\right)$ $y>0$.

Asimptote: $\lim\limits_{x\to+0} y=-\infty$, pa je prava $x=0$ vertikalna asimptota.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=+0$, pa je prava $y=0$ horizontalna asimptota funkcije.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti: $y'=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$y'=0\Leftrightarrow 1-\ln x=0\Leftrightarrow x=e$.

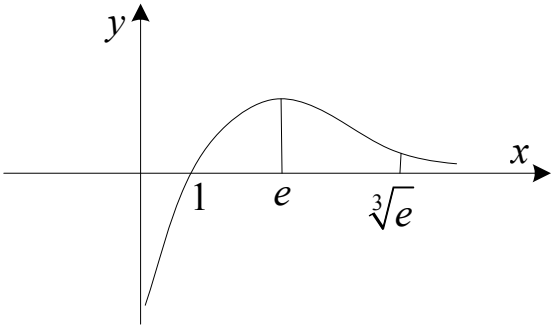
Za $x\in\left(0,e\right)$, $y'>0$ i $y\nearrow$, a za $x\in\left(e,+\infty\right)$, $y'<0$ $y\searrow$. $y_{\max}\left(e\right)=\dfrac{1}{e}$

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke:

$y''=\dfrac{2\ln x-3}{x^3}$, $y''=0\Leftrightarrow x=e^{\frac{3}{2}}$.

Za $x\in\left(0,e^{\frac{3}{2}}\right)$, $y''<0$ i $y\cap$, a za $x\in\left(e^{\frac{3}{2}},\infty\right)$, $y''>0$ i $y\cup$.

$y\left(e^{\frac{3}{2}}\right)=\dfrac{3}{2e^{\frac{3}{2}}}$ je prevojna tačka.



b) Domen: $x\in\left(0,+\infty\right)$.Nule funkcije: $y=0\Leftrightarrow x=1$.

Znak funkcije: $y\geq 0$, $x\in D_x$.

Asimptote: $\lim\limits_{x\to+0} y=+0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$, funkcija nema asimptota.

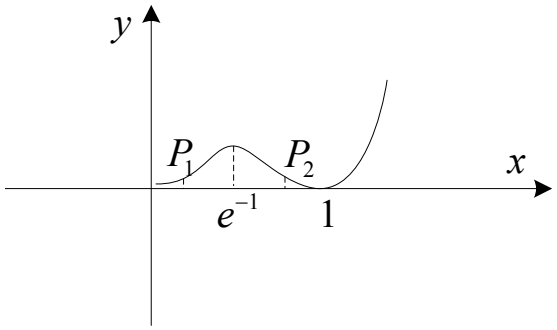
Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti: $y' = 2x\left(\ln x + 1\right)\ln x$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = e^{-1}$. Za $x \in \left(0, e^{-1}\right) \cup \left(1, +\infty\right)$, $y' > 0$ i $y \nearrow$, a za $x \in \left(e^{-1}, 1\right)$, $y' < 0$ $y \searrow$. $y_{\max}\left(e^{-1}\right) = e^{-2} \approx 0{,}14$, $y_{\min}\left(1\right) = 0$.

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke: $y'' = 2\left(\ln^2 x + 3\ln x + 1\right)$,

$y'' = 0 \Leftrightarrow x_1 = e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}} \approx 0{,}07 \vee x_2 = e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}} \approx 0{,}68$.

Za $x \in \left(0.07, 0.68\right)$, $y'' < 0$ i $y \cap$, a za $x \in \left(0, 0.07\right) \cup \left(0.68, +\infty\right)$, $y'' > 0$ i $y \cup$.

Funkcija ima dve prevojne tačke: $P_1\left(0.07\ ,\ 0.03\right)$, $P_2\left(0.68\ ,\ 0{,}07\right)$.



c) Domen : $x \in \left(0, +\infty\right)$. Nule funkcije: $x = \sqrt{e}$.

Znak funkcije: Za $x \in \left(0, \sqrt{e}\right)$, $y > 0$, a za $x \in \left(\sqrt{e}, +\infty\right)$, $y < 0$.

Asimptote: $\lim\limits_{x \to +0} x^2\left(1 - 2\ln x\right) = \lim\limits_{x \to +0} \dfrac{1 - 2\ln x}{x^{-2}} \overset{L}{=} \lim\limits_{x \to +0} x^2 = +0,$

$\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty,\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{y}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - 2\ln x\right) = +\infty$. Funkcija nema asimptota.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti:

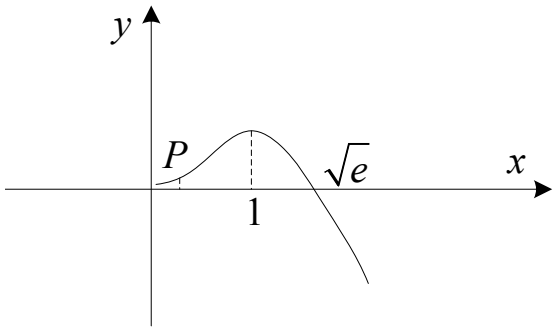
$y' = -4\ln x,$ pa je $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Za $x \in \left(0, 1\right)$, $y' > 0$ i $y \nearrow$, a za $x \in \left(1, +\infty\right)$, $y' < 0$ i $y \searrow$. $y_{\max} = y\left(1\right) = 1$.

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke

$y'' = -4\left(\ln x + 1\right)$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = e^{-1}$.

Za  $y'' > 0$ i $y \cup$, a za $x \in (e^{-1}, +\infty)$, $y'' < 0$ i $y \cap$.

$y\left(e^{-1}\right)=3e^{-2}$ je prevojna tačka.



d) Domen $x\in(0,+\infty)$. Nule funkcije: $x=1$.

Znak funkcije: Za $x\in(0,1), y<0$, a za $x\in(1,+\infty)$, $y>0$.

Asimptote: $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{x^{-3}}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-3x^{-4}}\overset{L}{=}\left(-\dfrac{1}{3}\right)\lim\limits_{x\to+0}x^3=-0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}y=+\infty,$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\ln x=+\infty,$ pa funkcija nema asimptota.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti:

$y'=x^2\left(3\ln x+1\right),$

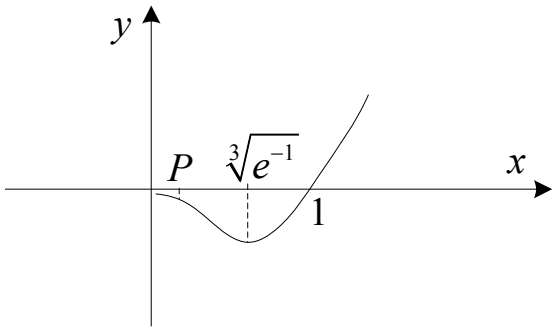
$y'=0\Leftrightarrow\ x=e^{-\frac{1}{3}}\approx 0,7$. Za $x\in\left(0,e^{-\frac{1}{3}}\right)$, $y'<0$ i $y\searrow$, a za

$x\in\left(e^{-\frac{1}{3}},+\infty\right)$, $y'>0$ i $y\nearrow$. $y_{\min}=\left(e^{-\frac{1}{3}}\right)^3\ln e^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{3e}\approx 0,1$.

Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke: *y''=x(6lnx+5)*

$y''=0\Leftrightarrow x=e^{-\frac{5}{6}}\approx 0,2$.

Za $x\in\left(0,e^{-\frac{5}{6}}\right)$, $y''<0$ i $y\cap$ a za $x\in\left(e^{-\frac{5}{6}},+\infty\right)$, $y''>0$ i $y\cup$. Prevojna tačka funkcije $P\left(e^{-\frac{5}{6}},-\dfrac{5}{6}e^{-\frac{5}{2}}\right)$.



18.

a) $y=\dfrac{1}{\ln x-1}$; b) $y=\dfrac{1+\ln x}{x}$;

c) $y=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$ d) $y=\ln^2 x-4\ln x+3$.

Rešenje:

a) Domen: $x\in(0,e)\cup(e,+\infty)$. Nule funkcije: Funkcija nema nula.

Znak funkcije: Za $x\in(0,e)$ $y<0$,a za $x\in(e,+\infty)$ $y>0$.

Asimptote: $\lim\limits_{x\to 0+} y=-0$, $\lim\limits_{x\to e\pm} y=\pm\infty$, pa je prava $x=e$ vertikalna asimptota.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=+0$, pa je prava $y=0$ horizontalna asimptota funkcije.

Intervali monotonosti: i ekstremne vrednosti:

$y'=-\dfrac{1}{x(\ln x-1)^2}$, $y'<0$, $y\searrow$. Funkcija nema ekstremnih vrednosti.

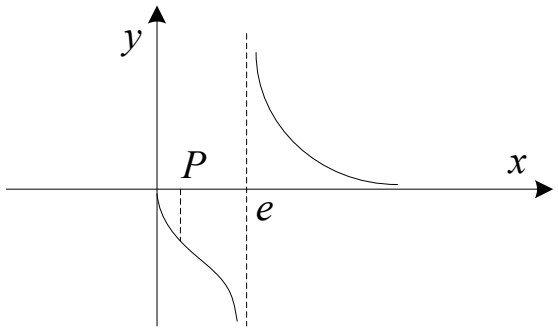
Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke:

$y''=\dfrac{\ln x+1}{x(\ln x-1)^3}$, $y''=0\Leftrightarrow x=e^{-1}$.

Za $x\in(e^{-1},e)$, $y''<0$ i $y\cap$

a za $x\in(0,e^{-1})\cup(e,+\infty)$, $y''>0$ i $y\cup$,

pa je $P\left(e^{-1},-\dfrac{1}{2}\right)$ prevojna tačka funkcije.



b) Domen: $x \in (0, +\infty)$. Nule funkcije: $x = e^{-1}$.

Znak funkcije: Za $x \in \left(0, e^{-1}\right)$ $y < 0$, a za $x \in \left(e^{-1}, +\infty\right)$, $y > 0$.

Asimptote: Prave $x = 0$ vertikalna, a $y = 0$ i horizontalna asimptota.

Intervali monotonosti i ekstremne vrednosti:

$y' = -\dfrac{\ln x}{x^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Za $x \in (0,1)$, $y' < 0$ i $y \searrow$,

a za $x \in (1, \infty)$, $y' > 0$ i $y \nearrow$, $y_{\max} = y(1) = 1$.

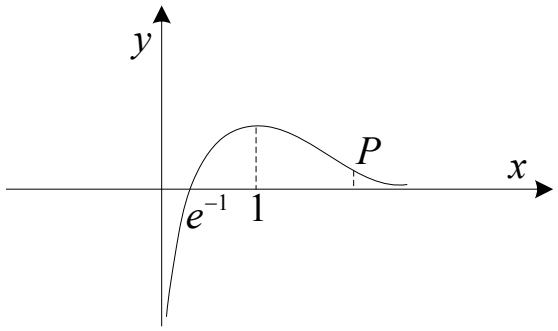
Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke:

$y'' = \dfrac{2\ln x - 1}{x^3}$, pa je $y'' = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$.

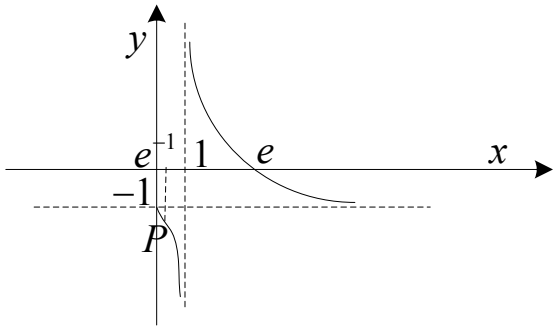
Za $x \in \left(0, \sqrt{e}\right)$, $y'' < 0 \Leftrightarrow y \cap$,

a za $x \in \left(\sqrt{e}, \infty\right)$, $y'' > 0 \Leftrightarrow y \cup$ $y\left(\sqrt{e}\right) = \dfrac{3}{2\sqrt{e}}$.

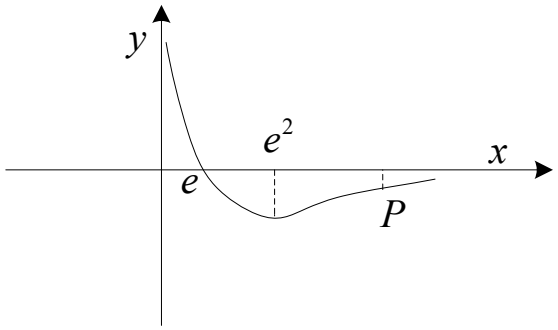
Prevojna tačka je $y\left(\sqrt{e}, \dfrac{3}{2\sqrt{e}}\right)$.



c)



d)



19. Naći prve parcijalne izvode funkcije:

a) $z = x^2 + y^2 \qquad z'_x = 2x \qquad z'_y = 2y$

b) $z = \dfrac{x}{y} \qquad z'_x = \dfrac{1}{y} \qquad z'_y = \dfrac{-x}{y^2}$

c) $z = \dfrac{x}{x-y} \qquad z'_y = \dfrac{x-y-x}{(x-y)^2} = \dfrac{-y}{(x-y)^2} \qquad z'_y = \dfrac{-x\cdot(-1)}{(x-y)^2} = \dfrac{x}{(x-y)^2}$

d) $z = \sqrt{x-y^2} \qquad z'_x = \dfrac{1}{2\sqrt{x-y^2}} \qquad z'_y = \dfrac{1}{2\sqrt{x-y^2}}(-2y) = \dfrac{-y}{\sqrt{x-y^2}}$

$$z = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} \qquad z'_x = \frac{2x\left(x^2-y^2\right)-2x\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2-y^2\right)^2} = \frac{2x\left(x^2-y^2-x^2-y^2\right)}{\left(x^2-y^2\right)^2} = \frac{-4xy^2}{\left(x^2-y^2\right)^2}$$

$$z'_y = \frac{2y\left(x^2-y^2\right)-\left(x^2+y^2\right)\cdot(-2y)}{\left(x^2-y^2\right)^2} = \frac{2y\left(x^2-y^2+x^2+y^2\right)}{\left(x^2-y^2\right)^2} = \frac{4x^2y}{\left(x^2-y^2\right)^2}$$

20. Naći parcijalne izvode prvog i drugog reda:

a) $z = x^3 + xy + y^3$

b) $z = \ln\left(x + y^2\right)$

Rešenje:

a)
$$z'_x = 3x^2 + y \qquad z''_{xx} = 6x,$$
$$z'_y = 3y^2 + x \qquad z''_{xy} = 1 \qquad z''_{yy} = 6y$$

b)

$$z'_x = \frac{1}{x+y^2}\,, \qquad z'_y = \frac{2y}{x+y^2}\,,$$
$$z''_{xx} = \frac{-1}{\left(x+y^2\right)^2} \qquad z''_{xy} = \frac{-2y}{\left(x+y^2\right)^2}$$

$$z''_{yy} = \frac{2\left(x - y^2\right)}{\left(x + y^2\right)^2} \qquad z''_{yx} = \frac{-2y}{\left(x + y^2\right)^2}$$



PITANJA ZA PONAVLJANJE

1. Kako se definiše prvi izvod funkcije?
2. Kako se definišu izvodi višeg reda?
3. Šta je diferencijal?
4. Geometrijsko tumačenje izvoda I diferencijala funkcije.
5. Kako izgleda i kako se dobija tablica izvoda?
6. Koje su osnovne teoreme diferencijalnog računa?
7. Parcijalni izvodi I totalni diferencijal
8. Uslovni ekstremi



KLJUČNI POJMOVI

- IZVOD
- DIFERENCIJABILNOST
- DIFERENCIJAL
- STACIONARNA TAČKA
- EKSTREM
- PREVOJNA TAČKA
- USLOVNI EKSTEMI

I V - G L A V A

INTEGRALNI RAČUN

SADŽAJ OVOG POGLAVLJA JE:

- **OSNOVNI POJMOVI VEZANI ZA NEODREĐENI INTEGRAL**
- **TABLICA NEODREĐENIH INTEGRALA OSNOVNIH FUNKCIJA**
- **OSNOVNA PRAVILA INTEGRACIJE**
- **ODREĐENI INTEGRAL**
- **PRIMENA INTEGRALNOG RAČUNA**

C I L J E V I U Č E N J A

Kada ovo poglavlje proučite znaćete:

1. Osnovne pojmove i definicije neodređenog i određenog integrala.
2. Tablicu integrala.
3. Neke metode za rešavanje.
4. Njutn-Lajbnicovu formulu.
5. Kako da izračunate površine ravnih figura

9. NEODREĐENI INTEGRAL

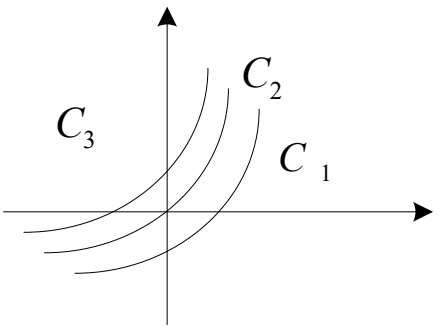
9.1. OSNOVNI POJMOVI VEZANI ZA NEODREĐENI INTEGRAL

U ranijem delu teksta prikazani su načini izračunavanja izvoda. Tema ovog poglavlja je inverzan proces. Pitanje je ako je poznat izvod neke funkcije, kako odrediti tu funkciju. Tako dolazimo do pojma integrala.
Da bi se definisao pojam integrala i načini njegovog izračunavanja, potrebno je uvesti neke nove pojmove. Jedan od njih je pojam primitivne funkcije.

Definicija 1.
Neka je $f(x)$ definisana na intervalu (a,b). Funkcija $F(x)$ zove se ***primitivna*** ili ***prvobitna*** funkcija funkcije $f(x)$ ako je

$$F'(x)=f(x) \text{ ili } \mathrm{d}F(x)=f(x)\mathrm{d}x.$$

Teorema 1.
Ako je $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$ na intervalu (a,b), tada je i bilo koja funkcija oblika $F(x)+C$ takođe primitivna funkcija funkcije $f(x)$, pri čemu je C proizvoljna konstanta



Slika 1

Dokaz:

Iz definicije 1 imamo da za $\forall x \in (a,b)$ važi $F'(x) = f(x)$

Pa imamo $\left(F(x)+C\right)' = F'(x) = f(x)$.

Znači, primitivna funkcija nije jednoznačno određena već je u pitanju familija krivih koje se međusobom razlikuju za konstantu C.

Teorema 2.

Svaka primitivna funkcija $F(x)$ funkcije $f(x)$ na intervalu (a,b) je neprekidna funkcija .

Dokaz:

Po definiciji, primitivna funkcija na nekom intervalu je diferencijabilna na tom intervalu jer je $F'(x) = f(x)$. A Iz diferenciabilnosti direktno sledi neprekidnost.

Važi I obrnuta teorema koju navodimo bez dokaza.

Teorema 3.

Neprekidna funkcija $f(x)$ na intervalu (a,b), ima primitivnu funkciju $F(x)$.

Na osnovu prethodno definisanih pojmova i dokazanih teorema može se definisati pojam neodređenog integrala funkcije.

Definicija 2.

Skup svih primitivnih funkcija funkcije $f(x)$ na intervalu (a,b) zove se ***neodređeni integral*** i obeležava se:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \text{ odnosno } \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C\,.$$

Funkcija $f(x)$ zove se ***podintegralana funkcija,*** a postupak izračunavanja integrala zove se ***integracija.***

Funkcija $f(x)$ za koju postoji neodređeni integral naziva se ***inegrabilnom funkcijom.***

Oznaku $\int$ za integral, kao skraćenicu od latinske reči *integralis,* koja znači potpun, uveo je Lajbnic. Oznaka predstavlja modifikovano slovo S koje predstavlja zbir i potiče iz definicije određenog integrala.

Primer:

Funkcija $F(x)=\sin x$ je primitivna funkcija funkcije $f(x)=\cos x$ jer je $(\sin x+C)'=\cos x$, tj. $d(\sin x+C)=\cos x\cdot dx$

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C$$

9.2. OSOBINE NEODREĐENOG INTEGRALA

1. ***Diferencijal neodređenog integrala*** jednak je podintegralnom izrazu, a izvod pointegralnoj funkciji

$$\mathrm{d}\int f(x)\,\mathrm{d}x=f(x)\,\mathrm{d}x,\qquad \left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)'=f(x).$$

2. ***Neodređeni integral diferencijala*** neke funkcije jednak je podintegralnoj funkciji:

$$\int d\left(f(x)\right)=f(x)+C\qquad \int f'(x)dx=f(x)+C.$$

Izračunavanje izvoda nije predstavljalo veći problem ni kod veoma složenih funkcija. Uvek smo posle određenog broja koraka, pridržavajući se definisanih pravila za rad dolazili do rešenja. Nažalost, kod integrala ne postoji opšti postupak za izračunavanje primitivne funkcije, odnosno izračunavanje neodređenog integrala. Na osnovu pravila koja ćemo uvesti, tablice integrala i

definisanjem pravila za specifične metoda mogu se izračunati neki tipovi neodređenih integrala.

Međutim, postoje relativno jednostavne funkcije čiju je primitivnu funkciju nemoguće odrediti pomoću elementarnih funkcija, mada postoje (na primer $y = e^{-x^2}$, $y = \frac{\sin x}{x}$, $y = \frac{1}{\ln x}$).

9.3. TABLICA NEODREĐENIH INTEGRALA OSNOVNIH FUNKCIJA

Na osnovu tablice izvoda osnovnih funkcija, koja je prikazana u ranijim poglavljima i osnovnih pojmova koji su razmatrani u prethodnom odeljku, dobija se tablica neodređenih integrala osnovnih funkcija. Navedeni integrali prikazani u ovoj tablici se nazivaju još i tablični integrali. U datoj tablici, u svim pravilima, C predstavlja proizvoljnu konstantu.

1.

$$\int dx = x + C$$

2.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

3.

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

4.

$$\int e^x dx = e^x + C$$

5.

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad 0 < a \neq 1$$

6.

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

7.

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

8.

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = tgx + C$$

9.

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -ctgx + C$$

10.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C, \quad |x| < 1$$

11.

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = arctgx + C$$

12.

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = \ln x + \sqrt{x^2+a^2} + C$$

13.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

14.

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

15.

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

16.

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$$

Treba naglasiti da svako pravilo važi u intervalu u kome je podintegralna funkcija definisana.

9.4. OSNOVNA PRAVILA INTEGRACIJE

1. Ako je C proizvoljna konstanta $C \neq 0$, tada važi

$$\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$$

2.

$$\int \left[f_1(x) + f_2(x) \right] dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$$

Primer:

Izračunati integrale:

$$1. \int \left(x^2 + 3x - 3 \right) \mathrm{d}x = \int x^2 \mathrm{d}x + 3\int x \mathrm{d}x - 3\int \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 3x + C,$$

$$2. \int \sqrt{x} \mathrm{d}x = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C,$$

$$3. \int 3\sin x \, \mathrm{d}x = 3\int \sin x \, dx = -3\cos x + C,$$

$$4. \int \left(e^x + 2x^2 \right) \mathrm{d}x = \int e^x \, dx + 2\int x^2 dx = e^x + \frac{2}{3} x^3 + C.$$

Najčešće i pored toga što znamo da postoji primitivna funkcija funkcije $f(x)$ ne možemo metodom neposredne integracije izračunati njen

neodređeni integral. U ovakvim slučajevima koristi se neka od metoda koje navodimo.

9.5. METODE INTEGRACIJE

9.5.1.Metod zamene ili metod smene promenljivih

Neka je $f(x)$ složena funkcija promenljive t, tj. $f(x)=f(g(t))$. Smenom $x=g(t)$ gde je funkcija $g(t)$ neprekidna sa neprekidnim izvodom i inverznom funkcijom $t=g^{-1}(x)$, dobijamo

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int f(g(t))\cdot g'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Primer:

Izračunati integrale koristeći metodu smene:

1. $I=\int\sqrt{2\mathrm{x}+3}\,\mathrm{d}x$

Ako uvedemo smenu $2x+3=t$, diferencijal je $2dx=dt$, odnosno $dx=\frac{1}{2}dt$, pa zadati integral postaje tablični integral po promenljivoj t oblika

$$\frac{1}{2}\int\sqrt{\mathrm{t}}\,\mathrm{dt}=\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{dt}=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}\sqrt{t^3}+C\,.$$

Ako se vratimo na polaznu promenljivu x, rešenje zadatog integrala je

$$I=\frac{1}{3}\sqrt{(2x+3)^3}+C\,.$$

2. $I=\int\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}+2}$.

$$I = \begin{Bmatrix} x+2=t \\ dx = \mathrm{d}t \end{Bmatrix} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{t}} = \ln|t| + C = \ln|x+2| + C\,.$$

9.5.2.Metod parcijalne integracije

Teorema 4.
Neka su $u = u(x)$ i $v = v(x)$ diferencijabilne funkcije. Jednakost:

$$\int u\,\mathrm{d}\,v = uv - \int v\,\mathrm{d}\,u$$ nazivamo ***formulom parcijalne integracije***.

Dokaz:

Na osnovu formule za diferencijal proizvoda funkcija dobijamo da je

$$\mathrm{d}(u\cdot v) = (u\cdot v)'\,\mathrm{d}\,x = (u\cdot v' + u'\cdot v)\,\mathrm{d}\,x = u\cdot(v'\,\mathrm{d}\,x) + v(u'\,\mathrm{d}\,x) = u\,\mathrm{d}\,v + v\,\mathrm{d}\,u$$

Integracijom ove veze dobijamo $\int \mathrm{d}(u\cdot v) = \int (u\,\mathrm{d}\,v + v\,\mathrm{d}\,u)$

odakle je:

$$(u\cdot v) = \int (u\,\mathrm{d}\,v + v\,\mathrm{d}\,u) \text{ ili } \int u\,\mathrm{d}\,v = uv - \int v\,\mathrm{d}\,u\,,$$

pod uslovom da postoji $\int v\,\mathrm{d}\,u$.

Napomena: Kod parcijalne integracije najveći praktični problem je odrediti šta je funcija u , a šta je diferencijal $\mathrm{d}\,v$. Korisno je držati se sledećih pravila :

- **a)**, Kod proizvoda polinoma i eksponencijalne funkcije ili trigonometrijske funkcije, u je uvek polinom.
- **b)** Kod proizvoda polinoma i logaritamske funkcije ili inverzne trigonometrijske funkcije u je uvek logaritamska funkcija, odnosno inverzna trigonometrijska funkcija.
- **c)** Kod proizvoda inverzne trigonometrijske i eksponencijalne funkcije svejedno je šta je u .

Primer:

Izračunati $I = \int x\cos x\,\mathrm{d}\,x.$

$$I = \left\{ \begin{array}{l} u = x\,, \;\; \mathrm{d}\,u = \mathrm{d}\,x \\ \mathrm{d}\,v = \cos x\,\mathrm{d}\,x\,,\, v = \sin x \end{array} \right\} = x \cdot \sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}\,x = x \cdot \sin x + \cos x + C\,.$$

Napomena: Konstanta integracije za funkciju v može se izostaviti i proizvoljnu konstantu dodajemo na kraju postupka integracije.

Primer:

$$I = \int x^2 e^x\,\mathrm{d}\,x\,;$$

$$I = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2\,,\, \mathrm{d}\,u = 2x\,\mathrm{d}\,x \\ \mathrm{d}\,v = e^x\,\mathrm{d}\,x\,,\, v = e^x \end{array} \right\} = x^2 e^x - 2\int x e^x\,\mathrm{d}\,x = x^2 e^x - 2J$$

$$J = \int x e^x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = e^x dx, v = e^x \end{array} \right\} = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x,$$

$$I = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C\,;$$

Napomena:U ovakvim primerima parcijalna integracija se ponavlja onoliko puta koliki je stepen polinoma.

9.5.3. Integracija racionalnih funkcija

Racionalne funkcije su količnici dva polinoma $f\left(x\right) = \dfrac{P_n\left(x\right)}{Q_m\left(x\right)}$, gde su n i m stepeni datih polinoma .

1. Ako je $n \geq m$, tj. funkcija $f(x)$ ***neprava racionalna funkcija***, tada deljenjem polinoma $P_n(x)$ sa polinomom $Q_m(x)$, funkciju $f(x)$ možemo prikazati kao zbir polinoma i prave racionalne funkcije u obliku

$$f(x) = P(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)} \quad .$$

Primer:

Izračunati $I = \int \frac{x^2}{x-1} \mathrm{d}\, x$.

Podintegralnu funkciju možemo napisati u obliku $\frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}$,

pa je $I = \int \left(x + 1 + \frac{1}{x-1} \right) \mathrm{d}\, x = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| + C$.

2. Ako je $f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ***prava racionalna funkcija*** $(n < m)$ tada se ona može rastaviti kao zbir parcijalnih razlomaka oblika

$$\frac{A}{(x-a)^k} \quad , \quad \frac{Ax + B}{\left(x^2 + bx + c\right)^k}$$

pri čemu prvi tip razlomka potiče od realnih, a drugi tip od kompleksnih nula polinoma $Q_m(x)$ u imeniocu funkcije $f(x)$.

Prema tome, problem se svodi na rešavanje integrala oblika

$$\int \frac{A}{(x-a)^k} \mathrm{d}\, x \text{ i } \int \frac{Ax + B}{\left(x^2 + bx + c\right)^k} \mathrm{d}\, x$$

gde su A i B realne konstante koje treba odrediti , $k \in N$, a kvadratni trinom $x^2 + bx + c$ ima konjugovano kompleksno nule.

Primer:

$$I = \int \frac{x+3}{x^2 - x} \mathrm{d}\, x$$

Rastavićemo podintegralnu funkciju na parcijalne razlomke

$$\frac{x+3}{x^2-x}=\frac{x+3}{x(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}.$$

Metodom neodređenih koeficijenata odredićemo nepoznate koeficijente *A* i *B* .
Iz predhodne veze, uklanjanjem razlomaka dobijamo:

$x+3=A(x-1)+Bx \Leftrightarrow x+3=Ax-A+Bx \Leftrightarrow x+3=(A+B)x-A$.

Upoređujući koeficijente uz promenljive sa leve i desne strane jenakosti, dobijamo sistem jednačina

$A+B=1$ i $-A=3$.

Rešavanjem ovog sistema jednačina dobijamo tražene koeficijente, tj. $A=-3,\ B=4$.

Traženi integral je: $\int\left(-\frac{3}{x}+\frac{4}{x-1}\right)dx=-3\ln|x|+4\ln|x-1|+C$.

Primer:

$$I=\int\frac{dx}{x^2(x-1)}.$$

Kako je $x=0$ dvostruka nula imenioca, njoj odgovaraju dva parcijalna razlomka, pa imamo:

$\frac{1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}$, $\qquad 1=Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2$,

$1=(A+C)x^2+(-A+B)x-B$, $\qquad A=-1, B=-1, C=1$,

$I=-\ln|x|+\frac{1}{x}+\ln|x-1|+C$.

Primer:

$$I=\int\frac{x-1}{x(1+x^2)}dx$$

Izraz $1+x^2$ nema realnih nula i zato koristimo sledeće rastavljanje:

$$\frac{x-1}{x\left(1+x^2\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{1+x^2},\quad x-1=A\left(1+x^2\right)+\left(Bx+C\right)x,$$

$$x-1=x^2\left(A+B\right)+Cx+A,\quad A=-1,\quad C=1\ ,\ B=1.$$

$$I=-\int\frac{dx}{x}+\int\frac{x+1}{1+x^2}dx=-\int\frac{dx}{x}+\int\frac{x}{1+x^2}dx+\int\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+arctgx+C.$$

9.6. INTEGRACIJA TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA

Rešavamo integrale oblika: $\int R\left(\sin x,\cos x\right)dx$

Pretpostavka je da je R(sinx,cosx) racionalna funkcija sa dve promenljive (količnika dva polinoma sa sinx i cosx kao promenljivima).

Kod ovakvog zadatka prelazimo na integraciju racionalne funkcije smenom $t=tg\frac{x}{2}$ i dobijamo $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$ i $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$.

U slučaju da je:

1) R(-sinx,cosx)=-R(sinx,cosx) može se primeniti i smena cosx=t;
2) R(sinx,-cosx)=-R(sinx,cosx) može se primeniti i smena sinx=t;
3) R(-sinx,-cosx)=R(sinx,cosx) može se primeniti i smena tgx=t za dobijanje racionalne funkcije.

Napomenimo da se u ova tri zadnja slučaja dobijaju prostije racionalne funkcije za integraciju.

Primer:

$$I=\int\frac{\sin xdx}{2+\cos x}$$

Pošto je funkcija neparna po sinx, ako uvedemo smenu cosx=t dobijamo -sinxdx=dt i

$$I=-\int\frac{dt}{2+t}=-\ln|2+t|+c=-\ln|2+\cos x|+c\ .$$

9.7. INTEGRACIJA IRACIONALNIH FUNKCIJA

Funkcije oblika $R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{p_1}{q_1}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{p_r}{q_r}} \right)$, gde je ad-bc≠0 se nazivaju ***algebarskim iracionalnostima*** (R je racionalna funkcija). Integrali ove funkcije se prevode u integraciju racionalnih funkcija uvođenjem smene $\frac{ax+b}{cx+d}=t^N$, gde je N najmanji zajednički sadržalac brojeva $q_1,\ldots, q_r$.

Primer:

$$I=\int \frac{\sqrt{x}\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x}}$$

Ovde je očigledno a=1, b=0, c=0, d=1 i posle uvođenja smene $x=t^6$ dobijamo:

$$I=6\int \frac{t^8 dt}{1+t^2}=6\int t^6 dt-6\int t^4 dt+6\int t^2 dt-6\int dt+6\int \frac{dt}{1+t^2}=$$

$$=6\frac{\mathrm{t}^7}{7}-6\frac{t^5}{5}+6\frac{t^3}{3}-6t+6arctgt+c$$

Z A D A C I

Izračunati sledeće integrale:

1. **a)** $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$; **b)** $I = \int \left(4x^3 + 3x - 5\sqrt{x} + 8\right)\mathrm{d}x$;

c) $I = \int \left(\frac{x\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x} \right)\mathrm{d}x$; **d)** $I = \int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

Rešenje:

a) $I = \int x^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$;

b)

$$I = \int 4x^3\mathrm{d}x + \int 3x\mathrm{d}x - \int 5\sqrt{x}\mathrm{d}x + \int 8\mathrm{d}x = 4\int x^3\mathrm{d}x + 3\int x\mathrm{d}x - 5\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x + 8\int \mathrm{d}x$$

$$= 4\cdot\frac{x^4}{4} + 3\cdot\frac{x^2}{2} - 5\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 8x + C = x^4 + \frac{3x^2}{2} - \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + 8x + C;$$

c) $I=\int\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{2}{3}}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+\frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1}+C=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{3}}+C$;

d) $I=\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=x-\operatorname{arctg}x+C$.

2. **a)** $I=\int\operatorname{tg}^2x\mathrm{d}x$; **b)** $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2x\cdot\cos^2x}$;

c) $I=\int\frac{\cos 2x}{\sin^2x\cdot\cos^2x}\mathrm{d}x$; **d)** $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2\mathrm{d}x$.

Rešenje:

a) $I=\int\frac{\sin^2x}{\cos^2x}\mathrm{d}x=\int\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)\mathrm{d}x=\operatorname{tg}x-x+C$;

b) $I=\int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^2x\cdot\cos^2x}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{\cos^2x}+\frac{1}{\sin^2x}\right)\mathrm{d}x=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C$;

c) $I=\int\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\sin^2x\cdot\cos^2x}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{\sin^2x}-\frac{1}{\cos^2x}\right)\mathrm{d}x=-\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x+C$;

d) $I=\int\left(\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=\int(1+\sin x)\,\mathrm{d}x=x-\cos x+C$.

3. **a)** $I=\int\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+\sin x-3e^x-\frac{2}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$;

b) $I=\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{4}{x}\right)\mathrm{d}x$;

c) $I=\int e^x\left(2+\frac{e^{-x}}{\cos^2x}\right)\mathrm{d}x$; **d)** $I=\int\left(4\cos x-\frac{5}{\sqrt{9-9x^2}}\right)\mathrm{d}x$.

Rešenje:

a) $I=\int\left(2x^{-\frac{1}{3}}+\sin x-3e^x-\frac{2}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=3x^{\frac{2}{3}}-\cos x-3e^x-2\operatorname{arc}tgx+C$;

b) $I=2\operatorname{arctg}x-3\arcsin x+4\ln|x|+C$;

c) $I=\int\left(2e^x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x=2e^x+\operatorname{tg}x+C$;

d) $I=\int\left(4\cos x-\frac{5}{3\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x=4\sin x-\frac{5}{3}\arcsin x+C$.

4. **a)** $I=\int\frac{e^{2x}+e^x\sin x}{e^x}\,\mathrm{d}x$; **b)** $I=\int\frac{4-x}{2+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;

c) $I=\int\frac{18x^2-2}{3x-1}\,\mathrm{d}x$; **d)** $I=\int\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)\mathrm{d}x$.

Rezultat:

a) $I=e^x-\cos x+C$; **b)** $I=2x-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$;

c) $I=3x^2+2x+C$; **d)** $I=\frac{2x^2\sqrt{x}}{5}+x+C$.

Rešiti sledeće integrale metodom smene:

5. **a)** $I=\int(5-2x)^8\,\mathrm{d}x$; **b)** $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{3x+1}$; **c)** $I=\int x^2\left(x^3+3\right)^2\mathrm{d}x$

Rešenje:

a) $I=\left\{\begin{matrix}5-2x=t\\-2dx=\mathrm{d}t\end{matrix}\right\}=-\frac{1}{2}\int t^8\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^9}{9}+C=-\frac{1}{18}(5-2x)^9+C$;

b) $I=\left\{\begin{matrix}3x+1=t\\3\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\end{matrix}\right\}=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}t}{t}=\frac{1}{3}\ln|t|+C=\frac{1}{3}\ln|3x+1|+C$

c) $I=\left\{\begin{matrix}x^3+3=t\\3x^2\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\end{matrix}\right\}=\frac{1}{3}\int t^2\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\cdot\frac{t^3}{3}+C=\frac{1}{9}\left(x^3+3\right)^3+C$.

6. **a)** $I=\int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$; **b)** $I=\int \frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}\mathrm{d}x$; **c)** $I=\int \frac{2x+3}{x^2+3x-1}\mathrm{d}x$.

Rešenje:

a) $I=\left\{\begin{matrix}1+x^2=t\\ 2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t}==\frac{1}{2}\ln\left|t\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|+C$;

b) $I=\left\{\begin{matrix}1+x^2=t\\ 2x\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2}=\frac{1}{2}\int t^{-2}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t}+C=-\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}+C$;

c) $I=\left\{\begin{matrix}x^2+3x-1=t\\ \left(2x+3\right)\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\end{matrix}\right\}=\int\frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln\left|t\right|+C=\ln\left|x^2+3x-1\right|+C$.

7. **a)** $I=\int e^{2x}\mathrm{d}x$; **b)** $I=\int e^{-x^3}x^2\mathrm{d}x$; **c)** $I=\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$; **d)** $I=\int\frac{e^x}{e^x+1}\mathrm{d}x$.

Rešenje:

a) $I=\left\{\begin{matrix}2x=t\\ 2\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\int e^t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}e^t+C=\frac{1}{2}e^{2x}+C$;

b) $I=\left\{\begin{matrix}-x^3=t\\ -3x^2\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\end{matrix}\right\}=-\frac{1}{3}\int e^t\mathrm{d}t=-\frac{1}{3}e^{-x^3}+C$;

c) $I=\left\{\begin{matrix}\sqrt{x}=t\\ \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}=\mathrm{d}t\end{matrix}\right\}=2\int e^t\,\mathrm{d}t=2e^t+C=2e^{\sqrt{x}}+C$;

d) $I=\left\{\begin{matrix}e^x+1=t\\ e^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\end{matrix}\right\}=\int\frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln\left|t\right|+C=\ln\left|e^x+1\right|+C$.

8. **a)** $I=\int\frac{\ln^2 x}{x}\mathrm{d}x$; **b)** $I=\int\frac{1}{x\cdot\ln x\cdot\ln(\ln x)}\mathrm{d}x$.

Rešenje:

a) $I=\left\{\begin{array}{l}\ln x=t\\ \dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\mathrm{d}t\end{array}\right\}=\int t^2\mathrm{d}t=\dfrac{t^3}{3}+C=\dfrac{\ln^3 x}{3}+C$;

b)

$$I=\left\{\begin{array}{l}\ln x=t\\ \dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\mathrm{d}t\end{array}\right\}=\int\frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}=\left\{\begin{array}{l}\ln t=s\\ \dfrac{\mathrm{d}t}{t}=\mathrm{d}s\end{array}\right\}=\int\frac{\mathrm{d}s}{s}=\ln|s|+C=\ln|\ln t|+C=\ln|\ln(\ln x)|+C$$

.

Dokazati

a) $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{bx+a}=\dfrac{1}{b}\ln|bx+a|+C$, $b\neq 0$; **b)** $\int e^{ax}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a}e^{ax}+C$, $a\neq 0$;

c) $\int\sin ax\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{a}\cos ax+C$, $a\neq 0$; **d)** $\int\cos ax\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a}\sin ax+C$, $a\neq 0$.

Rešenje

a) $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{bx+a}=\left\{\begin{array}{l}bx+a=t\\ dx=\dfrac{1}{b}\mathrm{d}t\end{array}\right\}=\dfrac{1}{b}\int\dfrac{\mathrm{d}t}{t}=\dfrac{1}{b}\ln|t|+C=\dfrac{1}{b}\ln|bx+a|+C$, $b\neq 0$;

b) $\int e^{ax}\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{l}ax=t\\ \mathrm{d}x=\dfrac{1}{a}\mathrm{d}t\end{array}\right\}=\dfrac{1}{a}\int e^t\mathrm{d}t=\dfrac{1}{a}e^{ax}+C$;

primeri pod **c)** i **d)** se dokazuju istom smenom kao u predhodnom slučaju.
Napomena: Rezultate ovih integrala korisno je znati i koristi u rešavanju složenijih integrala. Često ih nazivamo ***polutablični integrali***.

9. **a)** $I=\int\left(e^{-x}+1\right)\mathrm{d}x$; **b)** $I=\int\left(e^{-x}+e^{-2x}\right)\mathrm{d}x$; **c)** $I=\int\left(\sin 2x+\cos 3x\right)\mathrm{d}x$.

Rešenje

a) $I = -e^{-x} + x + C$;

b) $I = -e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + C$;

c) $I = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + C$.

10. **a)** $I = \int \sin^3 x \cos x \mathrm{d}x$; **b)** $I = \int \mathrm{tg}x \,\mathrm{d}x$;

c) $I = \int \frac{x}{\sin^2 2x^2}\,\mathrm{d}x$; **d)** $I = \int \frac{\sin x}{1+3\cos x}\mathrm{d}x$.

Rešenje:

a) $I = \left\{ \begin{matrix} \sin x = t \\ \cos x \,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{matrix} \right\} = \int t^3 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}t^4 + C = \frac{1}{4}\sin^4 x + C$;

b) $I = \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = \left\{ \begin{matrix} \cos x = t \\ -\sin x \,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{matrix} \right\} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{t}$

$= -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C = \ln\frac{1}{|\cos x|} + C$;

c) $I = \left\{ \begin{matrix} 2x^2 = t \\ 4x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{matrix} \right\} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sin^2 t} = -\frac{1}{4}\mathrm{ctg}t + C = -\frac{1}{4}\mathrm{ctg}2x^2 + C$;

d) $I = \left\{ \begin{matrix} 1+3\cos x = t \\ -3\sin x \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\frac{1}{3}\ln|t| + C = -\frac{1}{3}\ln|1+3\cos x| + C$;

11. **a)** $I = \int \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{e^x - 1}}$; **b)**; $I = \int \frac{\mathrm{d}\,x}{x\sqrt{x^2 - 1}}$, $x > 1$.

Rešenje:

a)

$$I = \left\{ \begin{matrix} e^x - 1 = t^2, e^x = t^2 + 1 \\ e^x \,\mathrm{d}\,x = 2t\,\mathrm{d}\,t, \mathrm{d}\,x = \frac{2t\,\mathrm{d}\,t}{1+t^2} \end{matrix} \right\} = 2\int \frac{\mathrm{d}\,t}{1+t^2} = 2\mathrm{arctg}t + C = 2\mathrm{arctg}\sqrt{e^x - 1} + C$$

b)

$$I=\int\frac{\mathrm{d}\,x}{x^2\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}=\left\{\begin{array}{c}\dfrac{1}{x}=t\\ -\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}\,x=\mathrm{d}\,t\end{array}\right\}=-\int\frac{\mathrm{d}\,t}{\sqrt{1-t^2}}=-\arcsin t+C=-\arcsin\frac{1}{x}+C$$

12. **a)** $I=\int\dfrac{\mathrm{d}\,x}{7+5x^2}$; **b)** $I=\int\dfrac{x}{x^4+2}\mathrm{d}\,x$; **c)** $I=\int\dfrac{\cos x\,\mathrm{d}\,x}{4+\sin^2 x}$;

d) $I=\int\dfrac{\mathrm{d}\,x}{e^x+e^{-x}}$; **e)** $I=\int\dfrac{x}{x^4+2x^2+5}\mathrm{d}\,x$.

Rešenje:

a)

$$I=\int\frac{\mathrm{d}\,x}{7+2x^2}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\,x}{\dfrac{7}{2}+x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\dfrac{7}{2}}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{\dfrac{7}{2}}}+C=\frac{1}{\sqrt{14}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{7}}\cdot x+C;$$

b)

$$I=\left\{\begin{array}{c}x^2=t\\ 2x\,\mathrm{d}\,x=\mathrm{d}\,t\end{array}\right\}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\,t}{t^2+2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\ \frac{t}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{\sqrt{2}}\right)+C$$

c) $I=\left\{\begin{array}{c}\sin x=t\\ \cos x\,\mathrm{d}\,x=\mathrm{d}\,t\end{array}\right\}=\int\dfrac{\mathrm{d}\,t}{4+t^2}=\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{t}{2}+C=\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{\sin x}{2}+C$;

d) $I=\left\{\begin{array}{c}e^x=t\\ e^x\,\mathrm{d}\,x=\mathrm{d}\,t\end{array}\right\}=\int\dfrac{\mathrm{d}\,t}{t^2+1}=\operatorname{arctg}t+C=\operatorname{arctg}e^x+C$;

e) $I=\int\dfrac{x}{x^4+2x^2+5}\mathrm{d}\,x=\left\{\begin{array}{c}x^2=t\\ 2x\,\mathrm{d}\,x=\mathrm{d}\,t\end{array}\right\}=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{\mathrm{d}\,t}{t^2+2t+5}=\dfrac{1}{2}\int\dfrac{\mathrm{d}\,t}{(t+1)^2+4}$

$$=\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{t+1}{2}+C=\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2+1}{2}+C.$$

13. **a)** $I=\int\dfrac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{3-4x^2}}$; **b)** $I=\int\dfrac{\cos x}{\sqrt{2-\sin^2 x}}\mathrm{d}\,x$; **c)** $I=\int\dfrac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}\mathrm{d}\,x$.

Rešenje:

a) $I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-x^2}}=\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{\sqrt{3}}+C$;

b) $I=\left\{\begin{matrix}\sin x=t\\ \cos x\,\mathrm{d}\,x=\mathrm{d}\,t\end{matrix}\right\}=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}\,t}{\sqrt{2-t^2}}=\arcsin\frac{t}{\sqrt{2}}+C=\arcsin\frac{\sin x}{\sqrt{2}}+C$;

c) $I=\left\{\begin{matrix}x^3=t\\ 3x^2\,\mathrm{d}\,x=\mathrm{d}\,t\end{matrix}\right\}=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}\,t}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t+C=\arcsin x^3+C$.

14. **a)** $I=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{9+x^2}}$; **b)** $I=\displaystyle\int\frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}}\mathrm{d}\,x$; **c)** $I=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{5x^2-1}}$.

Rešenje:

a) $I=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{9+x^2}}=\ln\left|x+\sqrt{9+x^2}\right|+C$;

b)

$$I=\int\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}+\frac{3}{\sqrt{x^2-4}}\right)\mathrm{d}\,x=\int\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\mathrm{d}\,x+3\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|=\left\{\begin{matrix}x^2-4=t^2\\ x\,\mathrm{d}\,x=t\,\mathrm{d}\,t\end{matrix}\right\}$$

$$\int\mathrm{d}\,t+3\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|=t+3\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|+C=\sqrt{x^2-4}+3\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|+C$$

c) $I=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|x+\sqrt{x^2-\dfrac{1}{5}}\right|+C$.

15. **a)** $I=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}\,x}{5-4x^2}$; **b)** $I=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}\,x}{x^2-7}$.

Rešenje:

a) $I=\dfrac{1}{4}\int\dfrac{\mathrm{d}\,x}{\dfrac{5}{4}-x^2}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{2\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{2}}\ln\left|\dfrac{x+\dfrac{\sqrt{5}}{2}}{x-\dfrac{\sqrt{5}}{2}}\right|+C=\dfrac{1}{4\sqrt{5}}\cdot\ln\left|\dfrac{2x+\sqrt{5}}{2x-\sqrt{5}}\right|+C$;

b) $I=\dfrac{1}{2\sqrt{7}}\ln\left|\dfrac{x-\sqrt{7}}{x+\sqrt{7}}\right|+C$.

16. **a)** $I=\int\dfrac{\mathrm{d}\,x}{17+2x+x^2}$; **b)** $I=\int\dfrac{\mathrm{d}\,x}{x^2+2x+3}$; **c)** $I=\int\dfrac{\mathrm{d}\,x}{x^2-5x+6}$.

Rešenje:

a) $I=\int\dfrac{\mathrm{d}\,x}{x^2+2x+1+16}=\int\dfrac{\mathrm{d}\,x}{(x+1)^2+4^2}=\left\{\begin{matrix}x+1=t\\ \mathrm{d}\,x=\mathrm{d}\,t\end{matrix}\right\}$

$=\int\dfrac{\mathrm{d}\,t}{t^2+4^2}=\dfrac{1}{4}\operatorname{arctg}\dfrac{t}{4}+C=\dfrac{1}{4}\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{4}+C$;

b)

$I=\int\dfrac{\mathrm{d}\,x}{(x+1)^2+2}=\left\{\begin{matrix}x+1=t\\ \mathrm{d}\,x=\mathrm{d}\,t\end{matrix}\right\}=\int\dfrac{\mathrm{d}\,t}{t^2+2}\quad=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{t}{\sqrt{2}}+C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}+C$

c) $I=\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-5}{x-1}\right|+C$.

17. **a)** $I=\int\dfrac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{27-x^2+6x}}$; **b)** $I=\int\dfrac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{2x^2-6x+5}}$;

c) $I=\int\dfrac{\mathrm{d}\,x}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}}$.

Rešenje:

a)

$I=\int\dfrac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{36-(x-3)^2}}=\left\{\begin{matrix}x-3=t\\ \mathrm{d}\,x=\mathrm{d}\,t\end{matrix}\right\}=\int\dfrac{\mathrm{d}\,t}{\sqrt{36-t^2}}=\arcsin\dfrac{t}{6}+C=\arcsin\dfrac{x-3}{6}+C$

b)

$$I=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{x^2-3x+\frac{5}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x-\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{2x^2-6x+5}{2}}\right|+C$$

c)

$$I=\left\{\begin{array}{l}\ln x=t\\ \dfrac{\mathrm{d}\,x}{x}=\mathrm{d}\,t\end{array}\right\}=\int\frac{\mathrm{d}\,t}{\sqrt{1-4t-t^2}}=\int\frac{\mathrm{d}\,t}{\sqrt{5-(t+2)^2}}=\arcsin\frac{t+2}{\sqrt{5}}+C=\arcsin\frac{\ln x+2}{\sqrt{5}}+C$$

18. **a)** $I=\int\frac{dx}{\sin x}$; **b)**; $I=\int\frac{dx}{1-\sin x}$;

Rešenje:

a) $I=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C$;

b) $I=\int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{1+t^2}}dt=2\int\frac{dt}{t^2-2t+1}=2\int\frac{dt}{(t-1)^2}=-\frac{2}{t-1}+C=\frac{2}{1-tg\frac{x}{2}}+C$.

Rešiti integrale metodom parcijalne integracije:

19.

a) $I=\int xe^x\,\mathrm{d}\,x$; **b)** $I=\int x\sin x\,\mathrm{d}\,x$;

c) $I=\int x\cdot 2^{-x}\,\mathrm{d}\,x$; **d)** $I=\int\frac{x}{\sin^2 x}\mathrm{d}\,x$.

Rešenje:

a) $I=\left\{\begin{array}{c} u=x\,,\ \ \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=e^x\,\mathrm{d}x\,,\ v=e^x \end{array}\right\}=x\cdot e^x-\int e^x\,\mathrm{d}x=x\cdot e^x-e^x+C\,;$

b)

$$I=\left\{\begin{array}{c} u=x\,,\ \ \mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=\sin x\,\mathrm{d}x\,,\ v=-\cos x \end{array}\right\}=-x\cdot\cos x+\int\cos x\,\mathrm{d}x=-x\cdot\cos x+\sin x+C$$

c)

$$I=\left\{\begin{array}{c} u=x\,,\mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=2^{-x}\,\mathrm{d}x\,,\ v=-\dfrac{1}{\ln 2}2^{-x} \end{array}\right\}=-\frac{x\cdot 2^{-x}}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 2}\int 2^{-x}\,\mathrm{d}x=-\frac{x\cdot 2^{-x}}{\ln 2}-\frac{2^{-x}}{\ln^2 2}+C$$

d)

$$I=\left\{\begin{array}{c} u=x\,,\mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=\dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x\,,\ v=-\mathrm{ctg}x \end{array}\right\}=-x\cdot\mathrm{ctg}x+\int\mathrm{ctg}x\,\mathrm{d}x=-x\cdot\mathrm{ctg}x+\int\frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x$$

$$=-x\cdot\mathrm{ctg}x+\ln\left|\sin x\right|+C\,.$$

20.

a) $I=\int x^2\cos x\,\mathrm{d}x\,;$ **b)** $I=\int\left(x^2+x+2\right)e^{2x}\,\mathrm{d}x\,;$

C) $I=\int\left(x^2+5x+6\right)\cos 2x\,\mathrm{d}x\,.$

Rešenje:

a) $I=\left\{\begin{array}{c} u=x^2\,,\mathrm{d}u=2x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=\cos x\,\mathrm{d}x\,,\ v=\sin x \end{array}\right\}=x^2\sin x-2\int x\sin x\,\mathrm{d}x=x^2\sin x-2J$

$$J=\left\{\begin{array}{c} u=x\,,\mathrm{d}u=\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=\sin x\,\mathrm{d}x\,,\ v=-\cos x \end{array}\right\}=-x\cos x+\int\cos x\,\mathrm{d}x=-x\cos x+\sin x$$

$$I=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C\,;$$

b $I=\left\{\begin{array}{l} u=x^2+x+2\,,\,\mathrm{d}u=\left(2x+1\right)\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=e^{2x}\,\mathrm{d}x\,,\,v=\dfrac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right\}=$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2+x+2\right)e^{2x}-\frac{1}{2}\int\left(2x+1\right)e^{2x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(x^2+x+2\right)e^{2x}-\frac{1}{2}J\,;$$

$$J=\left\{\begin{array}{l} 2x+1=u\,,\,\mathrm{d}u=2\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=e^{2x}\,\mathrm{d}x\,,\,v=\dfrac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right\}=\frac{1}{2}\left(2x+1\right)e^{2x}-\int e^{2x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(2x+1\right)e^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}$$

$$I=\frac{1}{2}\left(x^2+x+2\right)e^{2x}-\frac{1}{4}\left(2x+1\right)e^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}+C=\frac{1}{2}\left(x^2+2\right)e^{2x}+C\,;$$

c) $I=\dfrac{1}{8}\left(2x^2+10x+11\right)\sin 2x+\dfrac{1}{4}\left(2x+5\right)\cos 2x+C\,.$

21.

a) $I=\int\ln x\,\mathrm{d}x\,;$ **b)** $I=\int\operatorname{arctg}x\,\mathrm{d}x\,;$

Rešenje:

a)

$$I=\left\{\begin{array}{l} u=\ln x\,,\,\mathrm{d}u=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x\,,\,v=x \end{array}\right\}=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x=x\ln x-x+C\,;$$

b)

$$I=\left\{\begin{array}{l} u=\operatorname{arctg}x\,,\,\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \\ \mathrm{d}v=\mathrm{d}x\,,\,v=x \end{array}\right\}=x\cdot\operatorname{arctg}x-\int\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C$$

22.

a) $I=\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x\,;$ **b)** $I=\int e^x\cos x\,\mathrm{d}x\,;$

Rešenje:

a)

$$I=\int e^x \sin x \,\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{c} u=e^x\,,\,\mathrm{d}u=e^x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=\sin x\,\mathrm{d}x\,,\,v=-\cos x \end{array}\right\}=-e^x\cos x+\int e^x\cos x\,\mathrm{d}x=$$

$$\left\{\begin{array}{c} u=e^x\,,\,\mathrm{d}u=e^x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=\cos x\,\mathrm{d}x\,,\,v=\sin x \end{array}\right\}=-e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x=-e^x\cos x+e^x\sin x-I$$

$$2I=-e^x\cos x+e^x\sin x+C \Leftrightarrow I=\frac{1}{2}\left(e^x\left(\sin x-\cos x\right)\right)+C\,;$$

b) $I=\frac{1}{2}\left(e^x\left(\sin x+\cos x\right)\right)+C\,;$

23.

a) $I=\int x\cdot \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x\,;$ **b);** $I=\int x^3 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\,.$

Rešenje:

a)

$$I=\left\{\begin{array}{c} u=\operatorname{arctg}x\,,\,\mathrm{d}u=\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v=x\,\mathrm{d}x\,,\,v=\dfrac{x^2}{2} \end{array}\right\}=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(x^2+1\right)\operatorname{arctg}x-x\right)+C;$$

b) $-\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2}+C\,.$

24.

a) $I=\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x$; **b)** $I=\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\mathrm{d}\,x$; **c)** $\int\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}\,x$;

.

Rešenje:

a)

$$I=\left\{\begin{matrix}\sqrt{x}=t\,,\,x=t^2\\ \mathrm{d}\,x=2t\,\mathrm{d}\,t\end{matrix}\right\}=2\int te^t\,\mathrm{d}\,t=2\left(te^t-e^t\right)+C=2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right)+C;$$

b)

$$I=\int\frac{1}{x}\cdot\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\mathrm{d}\,x=\left\{\begin{matrix}u=\frac{1}{x}\,,\,\mathrm{d}\,u=-\frac{1}{x^2}\mathrm{d}\,x\\ \mathrm{d}\,v=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\mathrm{d}\,x\,,\,v=\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\mathrm{d}\,x=-e^{\frac{1}{x}}\end{matrix}\right\}=-\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}-\int\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\mathrm{d}\,x=-\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}+e^{\frac{1}{x}}+C;$$

c) $I=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C$;

Rešiti integrale racionalne funkcije:

25.

a) $I=\int\frac{x^4+2}{x^2+1}\mathrm{d}\,x$; **b)** $I=\int\frac{x^3}{x+3}\mathrm{d}\,x$.

Rešenje:

a) $I=\int\left(x^2-1+\frac{3}{x^2+1}\right)\mathrm{d}\,x=\frac{x^3}{3}-x+3\mathrm{arctg}x+C$;

b) $I=\int\left(x^2-3x+9-\frac{27}{x+3}\right)\mathrm{d}\,x=\frac{x^3}{3}-3\cdot\frac{x^2}{2}+9x-27\ln\left|x+3\right|+C$.

26.

a) $I=\int\frac{x-3}{x^3-x}\mathrm{d}\,x$; **b)** $I=\int\frac{x+2}{x(x-1)(x+1)}\mathrm{d}\,x$;

c) $I=\int\frac{x+1}{x(x-3)(x+2)}dx$; **d)** $I=\int\frac{x}{(x+2)(x+3)}\,\mathrm{d}\,x$.

Rešenje:

a)

$$\frac{x-3}{x^3-x}=\frac{x-3}{x(x+1)(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-1}$$

$$x-3=A\left(x^2-1\right)+Bx(x-1)+Cx(x+1)$$

$$x=0\Rightarrow A=3$$

$$x=1\Rightarrow C=-1$$

$$x=-1\Rightarrow B=-2$$

$$I=\int\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$=3\ln|x|-2\ln|x+1|-\ln|x-1|+C=\ln\left|\frac{x^3}{(x-1)(x+1)^2}\right|+C\ ;$$

b) $\dfrac{x+2}{x(x-1)(x+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x+1}$

$$A=-2, B=\frac{3}{2}, C=\frac{1}{2}$$

$$I=\int\left(\frac{-2}{x}+\frac{3}{2}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}\right)=-2\ln|x|+\frac{3}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|+C=$$

$$=\ln\frac{\sqrt{|x+1|\cdot|x-1|^3}}{x^2}+C\ ;$$

c) $I=-\dfrac{1}{6}\ln|x|+\dfrac{4}{15}\ln|x-3|-\dfrac{1}{10}\ln|x+2|+C\ ;$

d) $I=-2\ln|x+2|+3\ln|x+3|+C\ .$

27.

a) $I=\int\dfrac{x+2}{x^3-2x^2}\,\mathrm{d}\,x\ ;$ **b)** $I=\int\dfrac{\mathrm{d}\,x}{x^2-6x+5}\ ;$ **c)** $I=\int\dfrac{\mathrm{d}\,x}{x^2-6x+13}\ .$

Rezultat:

a) $I=\dfrac{1}{x}+\ln\left|\dfrac{x-2}{x}\right|+C\ ;$ **b)** $I=\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-5}{x-1}\right|++C\ ;$ **c)** $I=\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x-3}{2}+C\ .$

28.

a) $I=\int\dfrac{2x+1}{x^3+4x^2+4x}\,dx\ ;$ **b)** $I=\int\dfrac{x^2+2}{(x-2)(x+1)^3}\,dx\ ;$

c) $I=\int\frac{3x+2}{x\left(x+1\right)^2}dx$; **d)** $I=\int\frac{dx}{x^3\left(x-1\right)^2}$.

Rešenje:

a) $\frac{2x+1}{x^3+4x^2+4x}=\frac{2x+1}{x\left(x+2\right)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}$

$2x+1=A(x+2)^2+Bx(x+2)+Cx$

$2x+1=x^2\left(A+B\right)+x\left(4A+2B+C\right)+4A$

$A=\frac{1}{4}, B=-\frac{1}{4}, C=\frac{3}{2}$

$I=\int\left(\frac{1}{4x}-\frac{1}{4\left(x+2\right)}+\frac{3}{2(x+2)^2}\right)dx$

$=\frac{1}{4}\left(\ln|x|-\ln|x+2|\right)-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x+2}+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|-\frac{3}{2\left(x+2\right)}+C$;

b) $\frac{x^2+2}{(x-2)(x+1)^3}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}+\frac{D}{(x+1)^3}$

$A=-\frac{2}{9}, B=\frac{2}{9}, C=\frac{5}{3}, D=-3$

$I=\int\left(-\frac{2}{9\left(x-2\right)}+\frac{2}{9\left(x+1\right)}+\frac{5}{3(x+1)^2}-\frac{3}{(x+1)^3}\right)dx$

$=\frac{2}{9}\ln\left|\frac{x+1}{x-2}\right|-\frac{5}{3(x+1)}+\frac{3}{2(x+1)^2}+C$;

c) $I=2\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+\frac{4x+3}{2\left(x+1\right)^2}+C$;

d) $I=-\frac{1}{2x^2}-\frac{2}{x}-\frac{1}{x-1}+3\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|+C$.

29.

a) $I=\int\frac{dx}{\left(1+x\right)\left(1+x^2\right)}$; **b)** $I=\int\frac{dx}{x^3+1}$;

Rešenje:

a)

$$\frac{1}{(1+x)\cdot(1+x^2)}=\frac{A}{1+x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}$$

$$A=C=\frac{1}{2}\ ,\ B=-\frac{1}{2}$$

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x}-\frac{1}{2}\int\frac{x-1}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x}-\frac{1}{2}\int\frac{x}{1+x^2}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$\frac{1}{2}\ln|1+x|-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}arctgx+C;$$

b)

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

$$A=\frac{1}{3},B=-\frac{1}{3},C=\frac{2}{3}$$

$$I=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{3}\int\frac{x-2}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{3}\ln|x+3|-\frac{1}{3}I_1=$$

$$I_1=\int\frac{x-2}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx\left\{\begin{matrix}x-\frac{1}{2}=t\\dx=dt\end{matrix}\right\}=\int\frac{t-\frac{3}{2}}{t^2+\frac{3}{4}}dt=$$

$$=\int\frac{t}{t^2+\frac{3}{4}}dt-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}dt=\frac{1}{2}\ln\left|t^2+\frac{3}{4}\right|-\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2-x+1|-\frac{3}{\sqrt{3}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$$

30.

a) $I=\int\frac{3x^2+2x-1}{(x-1)(x^2+1)}dx$; **b)** $I=\int\frac{3x}{x^3+1}dx$; **c** $I=\int\frac{dx}{x(x^2+1)}$.

Rešenje:

a) $I=2\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+3arctgx+C$;

b) $I=-\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x^2-x+1|+\sqrt{3}\,arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$;

c) $I = -\dfrac{x}{\left(x^2-1\right)^2} + C$.

31.

a) $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\left(x+1\right)^2 \sqrt[4]{\left(\dfrac{x-3}{x+1}\right)^3}}$; **b)** $I = \displaystyle\int \frac{\sqrt{2x+3}}{x}\, dx$;

Rešenje:

a) $I = \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{x-3}{x+1} = t \\ \dfrac{dx}{\left(x+1\right)^2} = \dfrac{1}{4} dt \end{array} \right\} = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt[4]{t^3}} = \frac{1}{4}\int t^{-\frac{3}{4}}\, dt = t^{\frac{1}{4}} + C = \sqrt[4]{\frac{x-3}{x+1}} + C$

b)

$$I = \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{2x+3} = t,\ \ x = \dfrac{t^2-3}{2} \\ dx = t\, dt \end{array} \right\} = 2\int \frac{t^2}{t^2-3}\ \ dt\ = 2\int \frac{t^2-3+3}{t^2-3}\ \ dt = 2\int \left(1 + \frac{3}{t^2-3}\right) dt$$

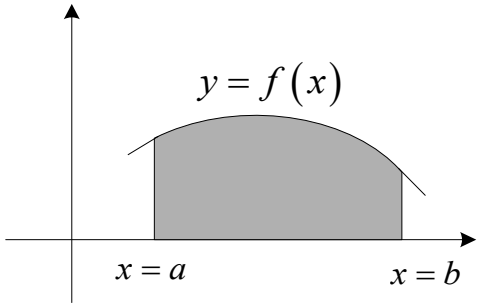
$$2\left(t + 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}} \right| \right) + C = 2\sqrt{2x+3} + \sqrt{3} \ln \left| \frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{3}}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{3}} \right| + C;$$

10. ODREĐENI INTEGRAL

Pojam integrala istorijski je povezan sa problemom merenja površine dela ravni ograničenog nekom krivom linijom. Iz tog razloga u definisanje određenog integrala krenućemo od pojma krivolinijskog trapeza i izračunavanja njegove površine.

10.1. POVRŠINA KRIVOLINISKOG TRAPEZA

Neka je funkcija $f\left(x\right)$ nenegativna, neprekidna i ograničena na intervalu $\left[a,b\right]$. ***Krivolinijski trapez*** predstavlja figuru ograničenu osom Ox , grafikom funkcije $f\left(x\right)$ na intervalu $\left[a,b\right]$, pravama $x = a$ i $x = b$.



Slika 1

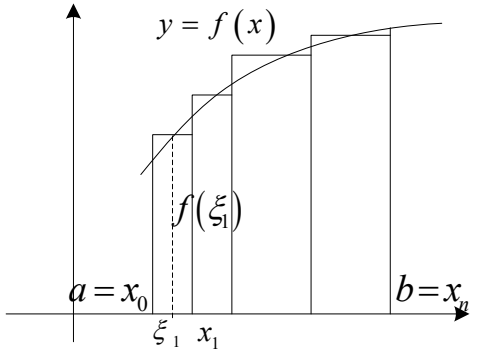
Da bismo izračunali njegovu površinu, podelimo interval $[a,b]$ na n proizvoljnih delova tačkama $a = x_0 < x_1 \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, tako da je

$x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$,…, $x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$.

U svakom intervalu $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,\ldots,n$ izaberimo proizvoljnu tačku ξ_i i formirajmo proizvode $\Delta x_i \; f(\xi_i)$. Ovaj proizvod predstavlja površinu bilo kog pravougaonika stranica Δx_i i $f(\xi_i)$.

Uočimo zbir površina svih ovako dobijenih pravougaonika:

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \, .$$



Slika 2

Ako postoji granična vrednost, nezavisno od podele intervala $[a,b]$ na n delova i izbora tačaka ξ_i, tj.

$$\lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ n\to\infty}} S_n = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

onda je ona je ***površina krivolinijskog trapeza***

10.2. DEFINICIJA ODREĐENOG INTEGRALA

Neka je funkcija $f(x)$ definisana i ograničena na intervalu $[a,b]$. Ako interval $[a,b]$ podelimo tačkama $a = x_0 < x_1 \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ na n delova takvih da je $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, $\ldots$, $x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$. U svakom intervalu $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,\ldots,n$ izaberimo proizvoljnu tačku ξ_i i formirajmo sumu $S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

Ovaj zbir zove se ***integralna suma*** funkcije $f(x)$ na intervalu $[a,b]$.

Ako postoji granična vrednost

$$\lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ n\to\infty}} S_n = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = I,$$

ona se zove ***određeni integral*** funkcije $f(x)$ na intervalu $[a,b]$.

Određeni integral funkcije $f(x)$ simbolički obeležavamo sa

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Funkciju $f(x)$ zovemo ***podintegralnom funkcijom.***

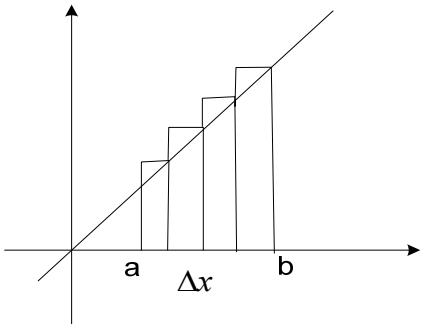
Broj a je ***donja,*** a broj b ***gornja*** granica integrala.

Za određeni integral važe sledeće osobine:

- Ako funkcija $f(x)$ na intervalu $[a,b]$ ima ***određeni integral***, kažemo da je ona na tom intervalu ***integrabilna.***
- ***Neprekidna*** funkcija $f(x)$ na intervalu $[a,b]$ je ***integrabilna*** na tom intervalu.
- ***Integrabilna*** funkcija na intervalu $[a,b]$ mora biti ***ograničena*** na tom intervalu. (obrnuto ne važi).
- ***Ograničena*** funkcija na intervalu $[a,b]$ sa konačnim brojem prekida je ***integrabilna*** na tom intervalu.

Primer :

Izračunati površinu ograničenu grafikom funkcuje $f(x)=x$ na intervalu $[a,b]$ i ordinatama $f(a)$ i $f(b)$, $(a>0, b>0)$, odnosno $\int_a^b x\,dx$



Slika 3

Podelimo interval $[a,b]$ na n jednakih delova, $\Delta x=\frac{b-a}{n}$.

Zbir površina svih pravougaonika čije su osnovice Δx, a visine redom $a+\Delta x$, $a+2\Delta x$, , $a+n\Delta x$ je

$$S_n=\Delta x(a+\Delta x)+\Delta x(a+2\Delta x)+\cdots+\Delta x(a+n\Delta x)=\Delta x\left(na+\Delta x(1+2+3+\cdots+n)\right)$$

$$=\Delta x\left(na+\Delta x(1+2+3+\cdots+n)\right)=\Delta x\left(na+\Delta x\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$=\Delta xna+\Delta x^2\frac{n(n+1)}{2}=\frac{b-a}{n}na+\left(\frac{b-a}{n}\right)^2\frac{n(n+1)}{2}=(b-a)a+(b-a)^2\frac{(n+1)}{2n}$$

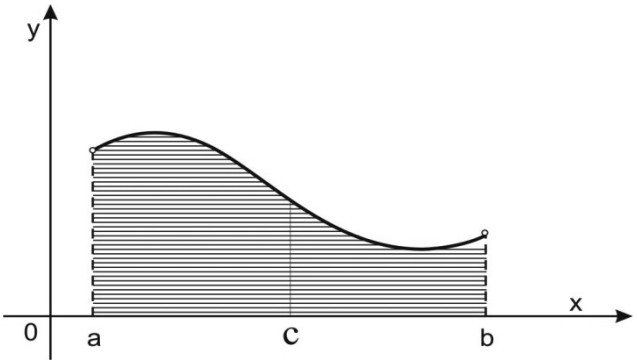
$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left((b-a)\cdot a + (b-a)^2 \cdot \frac{(n+1)}{2n} \right) = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Po definiciji određenog integrala imamo da je $P = \int_a^b x\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$

Napomena*:* Ovaj primer pokazuje koliko je složeno izračunavati određeni integral koristeći pojam integralne sume čak i kod najjednostavnijih funkcija.

10.3. OSOBINE ODREĐENOG INTEGRALA

1. Ako je a > b, tada je $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.
2. Ako je a = b, tada je $\int_a^b f(x)dx = 0$.
3. Neka je dat realan broj c, tada je $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$.
4. Neka su f i g integrabilne funkcije, tada je
$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$
5. Neka je c tačka koja pripada posmatranom intervalu, tada je
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$ (sl. 15.).



Slika 4.

6. Ako je funkcija integrabilna i pozitivna na posmatranom intervalu, tada je

$$\int_a^b f(x)dx > 0 .$$

Ovo pravilo se analogno može primeniti i na negativnu funkcije, pri čemu bi određeni integral bio, takođe, negativan.

7. Ako je f(x) ≤ g(x), gde je x tačka koja pripada posmatranom intervalu, tada je

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx .$$

I ovo pravilo se može analogno primeniti za slučaj da je f veća ili jednaka od g na posmatranom intervalu.

8. Ako je f integrabilna na posmatranom intervalu, tada je $i|f|$ integrabilna na istom intervalu i važi $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.

9. ***Teorema o vrednosti prve formule o srednjoj vrednosti određenog integrala***

Ako je funkcija f integrabilna na intervalu [a, b], i ako za svako x koje pripada ovom intervalu važi da je f(x) ≥ m, odnosno f(x) ≤ M, gde su m i M donja i gornja granica funkcije f, na posmatranom intervalu, tada postoji broj α, takav da je m ≤ α ≤ M i važi

$$\int_a^b f(x)dx = \alpha(b-a)$$

10. ***Teorema o srednjoj vrednosti određenog integrala***

Ako je funkcija f integrabilna na intervalu [a, b], tada postoji tačka ξ koja pripada posmatranom intervalu i za koju važi

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

10.4. VEZA ODREĐENOG I NEODREĐENOG INTEGRALA

NJUTN-LAJBNICOVA FORMULA

Njutn i Lajbnic su dokazali da postoji veza između određenog i neodređenog integrala. Na taj način dobila se opšta metoda za rešavanje određenih integrala i mogućnost njihove primene u različitim oblastima nauke i prakse.

Teorema 1.
Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna na intervalu $[a,b]$, a $F(x)$ njena primitivna funkcija, tj $F'(x)=f(x)$ tada je

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

Dokaz:
Neka je $F_1(x)$ takođe primitivana funkcija funkcije $f(x)$, takva da je

$$F_1(x)=\int_a^x f(x)\,dx,\ x\in[a,b].$$

Kako su $F(x)$ i $F_1(x)$ dve primitivne funkcije iste funkcije, one se razlikuju za neku konstantu C, pa je

$$F(x)=\int_a^x f(x)\,dx + C.$$

Za $x=a$ dobijamo

$F(a)=\int_a^a f(x)\,dx + C = 0 + C = C$, čime je određena konstanta C, pa je

$$F(x)=\int_a^x f(x)\,dx+F(a).$$

Uzmimo sada da je $x=b>a$. Iz predhodne relacije dobijamo

$F(b)=\int_a^b f(x)\,dx+F(a)$, odnosno

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a).$$

Primer:

Izračunati:

$$I=\int_1^2 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_1^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$

10.5.TEOREME O IZRAČUNAVANJU ODREĐENIH INTEGRALA

Pri razmatranju neodređenog integrala uvedeni su pojmovi smene promenljivih i parcijalne integracije. Primenu ovih pojmova kod određenih integrala objašnjavaju teoreme koje slede.

10.5.1.*Teorema o smeni promenljivih kod određenog integrala.*

Neka je $f(x)$ složena, neprekidna funkcija na intervalu $[a,b]$. Uvedimo smenu $x=g(t)$. Ako funkcija $g(t)$ ima neprekidan izvod na intervalu $[\alpha,\beta]$ gde je $g(\alpha)=a$, $g(\beta)=b$, tada je

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f\left(g(t)\right)g'(t)\,dt$$

Uvođenjem smene $x=g(t)$ menjaju se granice integracije.

Ako su polazne granice integracije bile a i b, onda su nove granice $\alpha = g^{-1}(a)$ i $\beta = g^{-1}(b)$.

10.5.2. *Teorema o parcijalnoj integraciji kod određenog integrala.*

Neka funkcije $u = u(x)$ i $v = v(x)$ imaju neprekidne izvode na intervalu [a, b], tada važi

$$\int_a^b udv = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b vdu \ .$$

Primer:

Izračunati:

1. $$\int_0^3 \sqrt{1+x}\,dx = \left\{\begin{matrix}\sqrt{1+x} = t, x = t^2 - 1\,,\ dx = 2tdt \\ x = 0\,,\ t = 1, \quad x = 3\,,\ t = 2\end{matrix}\right\} = 2\int_1^2 t^2\,dt = \frac{2}{3}t^3\Big|_1^2 = \frac{14}{3}$$

2. $$\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx = \left|\begin{matrix}x = u & du = dx \\ \sin x\,dx = dv & v = -\cos x\end{matrix}\right| = \left(-x\cos x\right)\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\cos x\,dx$$

$$= -\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} - 0\cos 0\right) + \sin x\Big|_0^{\pi/2} = \sin\pi/_2 - \sin 0 = 1$$

10.6. NESVOJSTVENI INTEGRAL

U prethodnom odeljku je definisan pojam određenog integrala. U samoj definiciji oblast integracija je ograničena, korišćen je interval [a, b] i integrabilna funkcija je na posmatranom intervalu definisana i ograničena. Ako integral nije konačan ili ako funkcija nije ograničena na konačnom integralu, tada ovakve integrale zovemo ***nesvojstveni integrali*** i oni moraju biti posebno definisani. Postoje dve vrste nesvojstvenog integrala, u daljem tekstu se daju njihove definicije i osobine.

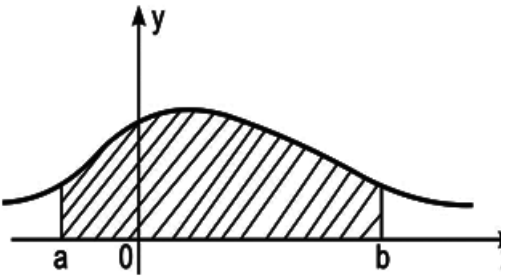
10.6.1. Definicija nesvojstvenog integrala prve vrste

Neka je funkcija f neprekidna na intervalima [a, ∞), (-∞, b], (-∞,∞). Tada su nesvojstveni ***integrali prve vrste funkcije*** f na intervalima sledeće granične vrednosti:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx$$



Slika 5.

Nesvojstveni integral prve vrste se još naziva i nesvojstveni integral u odnosu na oblast integracije. U prethodnim definicijama ako postoji granična vrednost tada nesvojstveni integral ***konvergira***, a ako ne postoji, tada taj integral ***divergira***.

Primer:

Izračunati površinu "beskonačog trapeza", ograničenog krivom $y = \frac{1}{x^3}$, pravom $x = a(a > 0)$ i intervalom $[a, +\infty)$.

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b \frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to+\infty}(-\frac{1}{2x^2})\Big|_a^b = -\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}) = \frac{1}{2a^2}.$$

Vrednost nesvojstvenog integrala je konačna pa površina ovog " beskonačnog trapeza" iznosi $P = \frac{1}{2a^2}$.

10.6.2.Definicija nesvojstvenog integrala druge vrste

Neka je funkcija f neprekidna na intervalu [a, b] i neka funkcija f nije ograničena u svakoj okolini tačke b, tj. ispunjena je bar jedna od jednakosti

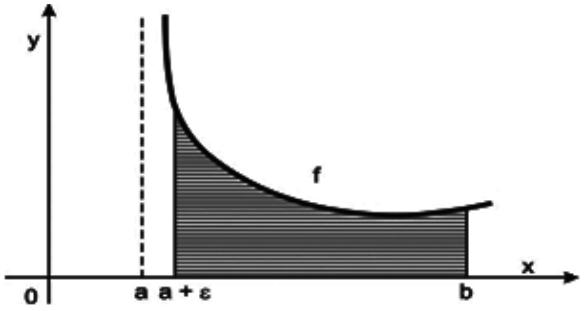
$$\lim_{x\to b-0} f(x) = +\infty \text{ ili } \lim_{x\to b-0} f(x) = -\infty ,$$

tada je nesvojstveni integral druge vrste funkcije f na intervalu [a, b] granična vrednost

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx .$$

Nesvojstveni integral druge vrste se još naziva i nesvojstveni integral u odnosu na podintegralnu funkciju. U prethodnoj definiciji ako postoji granična vrednost tada nesvojstveni integral konvergira, a ako ne postoji, tada taj integral divergira.
Analogno se definiše nesvojstveni integral druge vrste u odnosu na tačku a, (sl. 6.) ako funkcija nije ograničena u svakoj okolini tačke a na intervalu [a, b], kao

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx .$$



Slika 6.

Ako neprekidna funkcija f nije ograničena u svakoj okolini tačke b na intervalu [a, b) $\cup$ (b, c] tada je

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{t_1\to 0+} \int_a^{b-t_1} f(x)dx + \lim_{t_2\to 0+} \int_{b+t}^c f(x)dx .$$

Primer:

"Beskonačnom trapezu", koji je ograničen hiperbolom $y=\frac{1}{x}$, pravom $x=a(a>0)$ i intervalom $[a,+\infty)$, ne možemo dodeliti merni broj jer je

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{t\to+\infty}(\ln x)\Big|_a^t=\lim_{t\to+\infty}(\ln t-\ln a)=+\infty .$$

10.7. PRIMENA ODREĐENOG INTEGRALA

Videli smo da određeni integral $\int_a^b f(x)dx$ geometrijski predstavlja merni broj površine krivolinijskog trapeza nad intervalom $[a,b]$. U konkretnim primenama može predstavljati veličinu puta, veličinu rada itd. Uopšte, kada se mogu formirati sume beskonačno mnogo malih sabiraka, pa postoji granična vrednost tih suma, tada postoji mogućnost primene određenog integrala.

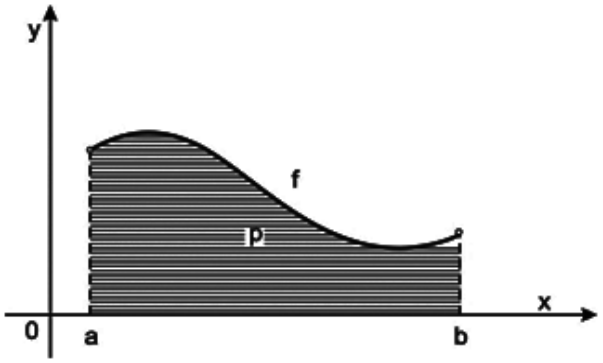
10.7.1.Izračunavanje površina ravnih figura

Izložićemo nekoliko različitih slučajeva izračunavanja površine ravnih figura. Neka je funkcija $f:[a,b]\to R$ integrabilna.

1. Ako je $f\geq 0$, onda se krivolinijski trapez nalazi iznad ose Ox i njegova površina se definiše kao broj

$$P\overset{def}{=}\int_a^b f(x)dx \qquad \text{(1)} \qquad \text{(sl. 7)}$$

Izraz $dP=f(x)dx$ predstavlja elementarnu površinu.

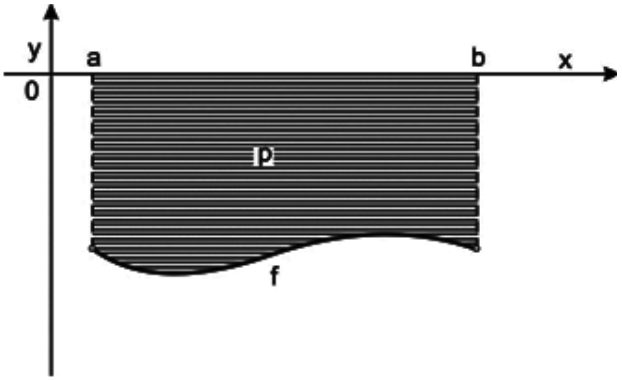


Slika 7

2. Ako je $f \leq 0$, krivolinijski trapez je ispod ose Ox i tada je vrednost integrala (1) negativna (sl. 8.). Kako je pak, merni broj površine uvek pozitivan, to će površina krivolinijskog trapeza u ovom slučaju biti broj

$$(2) \qquad P = \int_a^b \left| f(x) \right| dx.$$

Ovu formulu koristićemo i u slučaju kada je funkcija f promenljivog znaka.



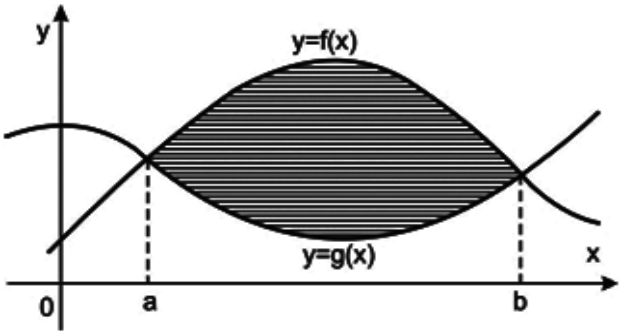
Slika 8

3. Kada je ravna figura ograničena linijama $y = f(x)$ i $y = g(x)$, tada se njena površina dobija kao razlika površina krivolinijskih trapeza.

$$P = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx, \quad \text{tj.} \quad P = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx,$$

gde su granice integrala rešenja jednačine $f(x) = g(x)$.

$f(a) = g(a)$ i $f(b) = g(b)$ (sl. 19.)



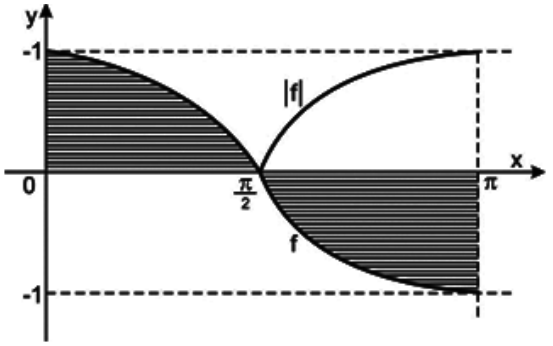
Slika 9.

Primer :

Izračunati površinu ograničenu linijama $y = \cos x$, $x = 0$ i $x = \pi$.

$[0, \pi]$ (sl. 18.). Prema formuli (2) biće

$$P = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\, dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 - \sin\pi + \sin\frac{\pi}{2} = 2$$



Slika 10

ZADACI

Primenom Njutn – Lajbnicove formule izračunati sledeće integrale:

1. **a)** $I=\int_{8}^{27}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; **b)** $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\sin x\right)dx$;

c) $I=\int_{0}^{1}\frac{dx}{x+2}$; **d)** $I=\int_{0}^{4}\left(1+e^{\frac{x}{4}}\right)dx$.

Rešenje:

a) $I=\int_{8}^{27}x^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_{8}^{27}=\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\Big|_{8}^{27}=\frac{3}{2}\left(\left(\sqrt[3]{27}\right)^2-\left(\sqrt[3]{8}\right)^2\right)=\frac{15}{2}$;

b) $I=tgx\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}+\cos x\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=tg\frac{\pi}{4}-tg\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\frac{\pi}{4}-\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=2tg\frac{\pi}{4}=2$;

c) $I=\ln\frac{3}{2}$; **d)** $I=4e$.

2. **a)** $I=\int_{0}^{3}\sqrt{1+x}\,dx$; **b)** $I=\int_{4}^{9}\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

Rešenje:

a)

$$I=\int_{0}^{3}\sqrt{1+x}\,dx=\left\{\begin{matrix}\sqrt{1+x}=t, x=t^2-1, dx=2tdt\\ x=0, t=1,\quad x=3, t=2\end{matrix}\right\}=2\int_{1}^{2}t^2\,dt=\frac{2}{3}t^3\Big|_{1}^{2}=\frac{2}{3}(8-1)=\frac{14}{3}$$

b) $I=7$.

3. **a)** $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x dx$; **b)** $I=\int_{2}^{e}\frac{dx}{x\ln x}$; **c)** $I=\int_{0}^{2}\frac{dx}{4+x^2}$.

Rešenje

a) $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cdot\sin x\,dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2 x\right)\sin x dx$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \cos x = t\,,\, -\sin x dx = dt \\ x = 0\,,\, t = \cos 0 = 1 \\ x = \dfrac{\pi}{2}\,,\, t = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0 \end{array} \right\} = -\int_1^0 \left(1-t^2\right) dt = \int_0^1 \left(1-t^2\right) dt = t\Big|_0^1 - \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3};$$

b) $I = \left\{ \begin{array}{l} \ln x = t\,,\, \dfrac{dx}{x} = dt \\ x = 2\,,\, t = \ln 2 \\ x = e\,,\, t = 1 \end{array} \right\} = \int_{\ln 2}^1 \frac{dt}{t} = \ln t \Big|_{\ln 2}^1 = \ln 1 - \ln\ln 2 = -\ln\ln 2;$

c) $I = \frac{\pi}{8}$.

4. **a)** $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^{2x}-1} dx$; **b)** $I = \int_0^1 \frac{arctgx}{1+x^2} dx$.

Rešenje:

a) $I = \left\{ \begin{array}{c} e^x = t\,,\, e^x dx = dt \\ x = \ln 2\,,\, t = 2 \\ x = \ln 3\,,\, t = 3 \end{array} \right\} = \int_2^3 \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Big|_2^3 = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2};$

b) $I = \frac{\pi^2}{32}$.

5. **a)** $I = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\ dx$.**b)** $I = \int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx$;

Rešenje:

a)

$$I = \left\{ \begin{array}{l} x = r\sin t, dx = r\cos t\, dt \\ x = 0\,,\, t = 0,\,;\, x = r\,,\, t = \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right\} = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt$$

$$I = \frac{r^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r^2\pi}{4}$$

b) $I = 4 - \pi$;

6. **a)** $I=\int_0^1 xe^x\,dx$; **b)** $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$; **c)** $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin(3x)\,dx$,

Rešenje:

a) $I=\left\{\begin{matrix} u=x\,,\,du=dx \\ dv=e^x dx\,,\,v=e^x \end{matrix}\right\}=xe^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x dx=xe^x\Big|_0^1-e^x\Big|_0^1=1;$

b) $I=\left\{\begin{matrix} u=x\,,\,du=dx \\ dv=\cos xdx\,,\,v=\sin x \end{matrix}\right\}=x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=$

$x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1;$

c) $I=\left\{\begin{matrix} u=x^2\,,\,du=2xdx \\ dv=\sin 3x\,dx\,,\,v=-\frac{1}{3}\cos 3x \end{matrix}\right\}=-\frac{1}{3}x^2\cos 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 3x\,dx$

$I=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 3x\,dx=\left\{\begin{matrix} u=x\,,\,du=dx \\ dv=\cos 3x\,dx\,,\,v=\frac{1}{3}\sin 3x \end{matrix}\right\}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}x\sin 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 3x\,dx\right)=$

$=\frac{2}{3}\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{1}{9}\cos 3x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{2}{3}\left(-\frac{\pi}{6}-\frac{1}{9}\right).$

7. **a)** $I=\int_1^e x^3\ln x\,dx$; **b)** $I=\int_0^1 x^3 arctgxdx$;

Rešenje:

a) $I=\left\{\begin{matrix} u=\ln x\,,\,du=\frac{dx}{x} \\ dv=x^3dx\,,\,v=\frac{x^4}{4} \end{matrix}\right\}=\frac{x^4}{4}\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{4}\int_1^e x^3dx=\frac{x^4}{4}\ln x\Big|_1^e-\frac{x^4}{16}\Big|_1^e=\frac{3e^4+1}{16};$

b) $I=\left\{\begin{array}{l} u=arctgx\,,\,du=\dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv=x^3dx\,,\,v=\dfrac{x^4}{4} \end{array}\right\}=\dfrac{x^4}{4}arctgx\Big|_0^1-\dfrac{1}{4}\int\limits_2^4\dfrac{x^4}{1+x^2}dx$

$$=\frac{\pi}{16}-\frac{1}{4}\int\limits_2^4\left(x^2-1+\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\frac{\pi}{16}-\frac{1}{4}\left(\frac{x^3}{3}-x+arctgx\right)\Big|_0^1=\frac{1}{6}.$$

8. **a)** $I=\int\limits_2^\infty\dfrac{dx}{x\sqrt{x-1}}$; **b)** $I=\int\limits_2^\infty\dfrac{dx}{x\ln^2 x}$

c) $I=\int\limits_0^\infty xe^{-x^2}dx$; **d)** $I=\int\limits_1^\infty\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$.

Rešenje

a) $I=\lim\limits_{a\to+\infty}\int\limits_2^a\dfrac{dx}{x\sqrt{x-1}}=\left\{\begin{array}{c} x-1=t^2;dx=2tdt \\ x=2,t=1;x=a,t=\sqrt{a-1} \end{array}\right\}=\lim\limits_{a\to+\infty}\int\limits_1^{\sqrt{a-1}}\dfrac{2tdt}{t\left(t^2+1\right)}$

$$=2\lim_{a\to+\infty}\int\limits_1^{\sqrt{a-1}}\frac{dt}{t^2+1}=2\lim_{a\to+\infty}arctgt\Big|_1^{\sqrt{a-1}}=2\lim_{a\to\infty}\left(arctg\sqrt{a-1}-arctg1\right)=\frac{\pi}{2};$$

b) $I=\dfrac{1}{\ln 2}$; **c)** $I=\dfrac{1}{2}$; **d)** $I=\dfrac{1}{2}$.

9. **a)** $I=\int\limits_{-1}^1\dfrac{dx}{x^2}$; **b)** $I=\int\limits_1^2\dfrac{dx}{x\ln x}$; **c)** $I=\int\limits_{-1}^0\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}dx$.

Rešenje

a) $I=\lim\limits_{\varepsilon\to0-}\int\limits_{-1}^{-\varepsilon}\dfrac{dx}{x^2}+\lim\limits_{\varepsilon\to0+}\int\limits_{\varepsilon}^1\dfrac{dx}{x^2}=\lim\limits_{\varepsilon\to0-}\left(-\dfrac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{-\varepsilon}+\lim\limits_{\varepsilon\to0+}\left(-\dfrac{1}{x}\right)\Big|_{\varepsilon}^1=$

$$=\lim_{\varepsilon\to0-}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)+\lim_{\varepsilon\to0+}\left(-1+\frac{1}{\varepsilon}\right)=\infty;$$

b) $I=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{1+\varepsilon}^2\dfrac{dx}{x\ln x}=\left\{\begin{array}{l} \ln x=t\,,\,\dfrac{dx}{x}=dt \\ x=1\,,\,t=0;x=2\,,\,t=\ln 2 \end{array}\right\}=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\varepsilon}^{\ln 2}\dfrac{dt}{t}$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \ln t \Big|_{\varepsilon}^{\ln 2} = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\ln \ln 2 - \ln \varepsilon \right) = +\infty ;$$

c) $I = 0$

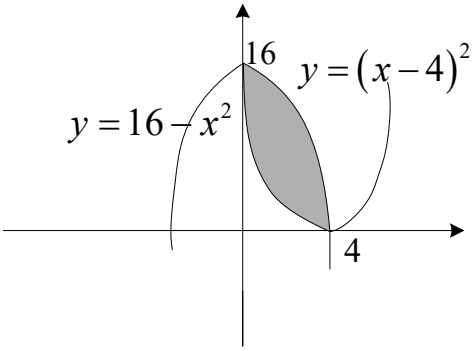
10. Izračunati površinu koju zaklapaju grafici datih krivih:

$y = \left(x - 4 \right)^2$ i $y = 16 - x^2$.

Rešenje

Apscise presečnih tačaka grafika funkcija dobijaju se rešavanjem sistema jednačina:

$\left(x - 4 \right)^2 = 16 - x^2$ i iznose $x = 0 \vee x = 4$.



Tražena površina iznosi:

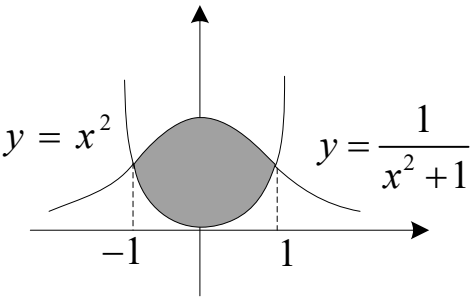
$$P = \int_0^4 \left(16 - x^2 - \left(x - 4 \right)^2 \right) dx = 2 \int_0^4 \left(4x - x^2 \right) dx = 2 \left(2x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^4 = 2 \left(32 - \frac{64}{3} \right) = \frac{64}{3}$$

11. Izračunati površinu koju zaklapaju grafici datih krivih:

$y = \dfrac{x^2}{2}$ i $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

Rešenje

Apscise presečnih tačaka grafika funkcija su: $x = \pm 1$.



Tražena površina iznosi:

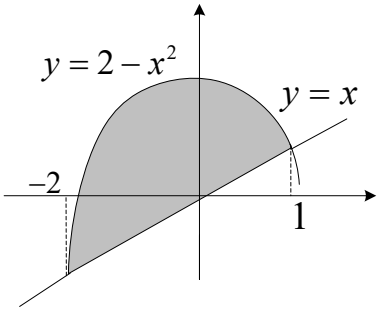
$$P = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{x^2}{2}\right)dx = 2\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{x^2}{2}\right)dx = 2\left(arctgx - \frac{1}{6}x^3\right)\Big|_0^1 = 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$$

12. Izračunati površinu koju zaklapaju grafici datih krivih:

$y = -x^2 + 2$ i $y = x$.

Rešenje

Apscise presečnih tačaka grafika funkcija su $x = -2 \vee x = 1$.



Tražena površina iznosi:

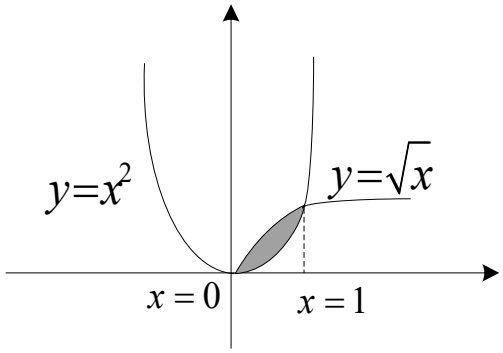
$$P = \int_{-2}^{1}(-x^2+2)dx - \int_{-2}^{1} xdx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^{1} = \frac{9}{2}.$$

13. Izračunati površinu koju zaklapaju grafici datih krivih:

$y = x^2$ i $y = \sqrt{x}$

Rešenje

Apscise presečnih tačaka , uz uslov $x>0$, su: $x=0 \vee x=1$.



$$P=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=\int_0^1\left(x^{\frac{1}{2}}-x^2\right)dx=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

14. Izračunati površinu koju zaklapaju grafici datih krivih:

$y=x^2$ i $y=2-x^2$.

Rešenje

$$P=\int_{-1}^1\left(2-x^2-x^2\right)dx=2\int_0^1\left(2-x^2-x^2\right)dx=4\int_0^1\left(1-x^2\right)dx=4\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{8}{3}.$$



P I T A N J A Z A P O N A V L J A N J E

1. Šta je primitivna funkcija?
2. Kako se definiše neodređeni integral?
3. Koje su najvažnije metode integracije?
4. Kako se definiše određeni integral?
5. Kako glasi Njutn Lajbnicova formula?
6. Gde se sve primenjuje određeni integral?



KLJUČNI POJMOVI:

- Neodređeni integral
- PrimitivnA funkcija
- Parcijalna integracija
- Određeni integral
- Intergrabilna funkcija
- Njutn-Lajbnicova formula
- Nesvojstveni integral

V - GLAVA

EKONOMSKE FUNKCIJE

SADŽAJ OVOG POGLAVLJA JE:

- **FUNKCIJA TRAŽNJE**
- **FUNKCIJA PONUDE**
- **MODELI TRŽIŠTA**
- **FUNKCIJA TROŠKOVA**
- **FUNKCIJA PRIHODA**
- **FUNKCIJA DOBITI**
- **ELASTIČNOST EKONOMSKIH FUNKCIJA**

C I L J E V I U Č E N J A

Kada ovo poglavlje proučite znaćete:

1. Osnovne ekonomske funkcije
2. Modele tržišta
3. Poslovanje i svodjenje rizika na minimum
4. Ekonomsku interpretaciju funkcija, a uz primenu diferencijalnog i integralnog računa

11.1. FUNKCIJA TRAŽNJE

Posmatrajmo na tržištu proizvod X. Analizirajući tražnju (prodatu količinu proizvoda X) zavisno promenljivu, uočavamo da na njenu promenu utiču: cena,broj potencijalnih potrošača, kupovna moć, marketing (promocija), kvalitet, konkurencija i td. $x = f(p,\ n,\ d,\ m,\ k,\ \ldots),$. Dakle to je funkcija od više nezavisno promenljivih.

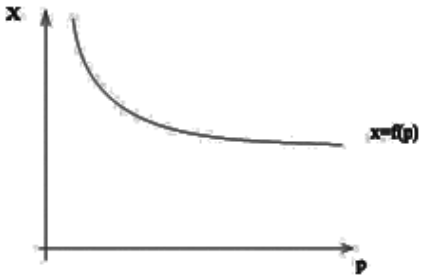
Dominantan uticaj na tražnju proizvoda X ima njegova cena, pa ***funkciju tražnje*** u jednostavnijem obliku možemo predstaviti kao

$x = f(p)$, gde je $p > 0$ - cena proizvoda X ;

($x > 0$, obim proizvodnje proizvoda X koji se traži na tržištu) $x_p' = \frac{dx}{dp} < 0$

funkcija tražnje je, po pravilu, monotono opadajuća.

Navedene uslove: $p > 0,\ x > 0,\ x' < 0$ uz navedenu interpretaciju zovemo potrebnim uslovom postojanja funkcije $x = f(p)$ kao funkcije tražnje.

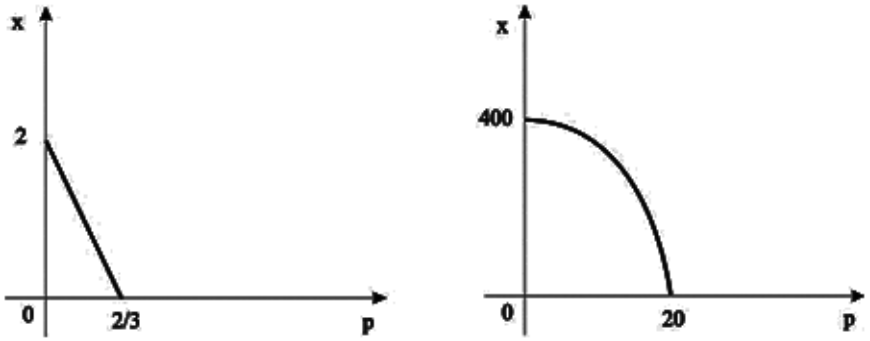


Slika 1

Cenu p možemo izraziti kao inverznu funkciju tražnje $p = f^{-1}(x)$

Primeri:

1. Funkcija $x = -3p + 2, \quad p > 0, x > 0, x' < 0$ je funkcija tražnje pod datim uslovima na intervalu $\left(0, \frac{2}{3}\right)$, (sl. 24.).



Slika 2

2. Funkcija $x=-p^2+400, \quad p>0, x>0, x'<0$ je funkcija tražnje na intervalu $(0,20)$ jer su svi potrebni uslovi ispunjeni.

11.2. FUNKCIJA PONUDE

Zanemarujući ostale promenljive kao faktore koji mogu uticati na ponudu u jednostavnijem obliku možemo je posmatrati kao funkciju cene i izraziti:

$y = g(p)$, $p > 0$, cena; $y > 0$, ponuda proizvoda X;

$y' = \dfrac{dg}{dp} > 0$ ponuda je, po pravilu, rastuća funkcija.

Uslovi: $p > 0,\ y > 0,\ y' > 0$ uz navedenu interpretaciju su potrebni uslovoi postojanja funkcije $y = g(p)$ kao funkcije ponude.

Cenu možemo izraziti kao inverznu funkciju ponude $p = g^{-1}(y)$

Primeri:

1. Funkcija $y = 2p + 1$ je funkcija ponude sa uslovima $p > 0, y > 0, y' > 0$ na intervalu $p \in (0, +\infty)$

2. Funkcija $y = p^2 - 4$ je funkcija ponude na intervalu $p \in (2, +\infty)$ gde su ispunjeni uslovi $p > 0, y > 0, y' > 0$

3. Nacrtaj funkcije ponude i naći njihove inverzne funkcije:

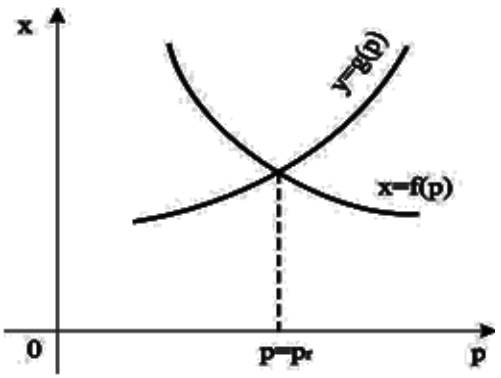
$y = 2p + 1$, $y = p^2 + 2$, $y = e^p$

11.3.MODELI TRŽIŠTA

Konjukciju funkcija tražnje i ponude smatramo ***modelom tržišta***

$$x = f(p) \wedge y = g(p)$$

Cenu $p = p_r$ za koju se postiže ova ravnoteža na tržištu možemo naći analitički i grafički (sl. 25.). $f(p_r) = g(p_r) \Leftrightarrow x = y$



Slika 3

p_k - zovemo ravnotežna cena i za cenu vrednosti robe postiže se idealna situacija na tržištu te robe, nemamo ni viškova (zaliha), ni manjkova (nestašica).

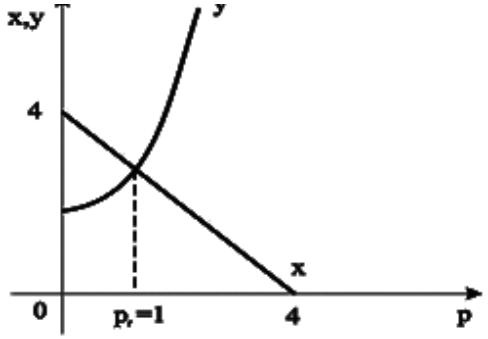
Primeri:

1. Date su funkcije tražnje i ponude $x=-p+4 \quad \text{i} \quad y=p^2+2.$

Analitički ravnotežnu cenu p_r dobijamo kao rešenje jednačine

$$x=y \Rightarrow \quad -p+4=p^2+2 \quad \Rightarrow p_r=1.$$

Grafičko rešenje prikazano je na (sl. 26.).



Slika 4.

2. Tražnja ponude nekog proizvoda data je sledećim relacijama: $x = 20 - 6p$ i $y = 4p - 2$. Pronaći cenu i količinu pri kojima se ostvaruje ravnoteža na tržištu ovog proizvoda.

$$x = 20 - 6p$$
$$\underline{y = 4p - 2}$$
$$x = y \Rightarrow 20 - 6p = 4p - 2 \Rightarrow 6p + 4 = 20 + 2$$
$$10p = 22 \Rightarrow p_r = \frac{22}{10} \Rightarrow p_r = 2,2$$
$$x = y = 4 \cdot 2,22 = 8,8 - 2 = 6,8$$

11.4.FUNKCIJA TROŠKOVA

Funkciju ukupnih troškova možemo analizirati kao funkciju obima proizvodnje proizvoda X i označavamo je sa

$C = F(x)$, $x > 0$, obim proizvodnje;

$C > 0$; ukupni troškovi.

Uslove $x > 0,\ C > 0$, uz navedenu interpretaciju, nazivamo potrebnim uslovima za egzistenciju funkcije troškova $C = F(x)$.

Troškove možemo izračunati i po jedinici proizvoda x, prosečne troškove, i obeležiti sa $\overline{C}$:

$$\overline{C} = \frac{C}{x} = \frac{F(x)}{x}$$

Cilj svakog profitabilnog poslovanja je minimiziranje prosečnih troškova. Dakle, iz uslova minimuma :

Nađemo izvod funkcije prosečnih troškova $\overline{C}$, izjednačimo sa nulom i izračunamo x_0. Za tu vrednost (x_0) drugi izvod $\overline{C}$" treba da bude pozitivan (uslov minimuma), dakle,

$\overline{C}'(x_0) = 0 \ \wedge\ \overline{C}''(x_0) > 0$ nalazimo obim proizvodnje x_0 za koju su prosečni troškovi minimalni

$$\overline{C}_{\min}(x_0) = \frac{F(x_0)}{x_0}.$$

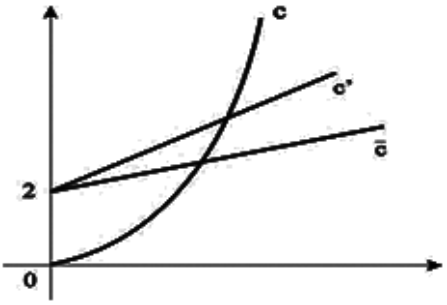
Funkcija graničnih troškova C'je prvi izvod funkcije ukupnih troškova

$$C' = F'(x) = \frac{dF}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x},$$

što je mera apsolutne promene ukupnih troškova na jedinicu priraštaja proizvodnje.

Primeri :

1. Data je funkcija ukupnih troškova $C(x) = x^2 + 2x,$ funkcija prosečnih troškova je $\overline{C}_{(x)} = \frac{C}{x} = \frac{x^2 + 2x}{x} = x + 2$ a graničnih troškova je $C'_{(x)} = \left(x^2 + 2x\right)' = 2x + 2$ .Grafički prikaz ovih funkcija dat je na (sl. 27.).



Slika 5.

2. Funkcija ukupnih troškova data je u obliku $C = 1800x - 75x^2 + x^3$.

a) Odrediti funkciju prosečnih troškova.

b) Odrediti funkciju graničnih troškova.

$$C = 1800x - 75x^2 + x^3$$

$$\bar{C} = \frac{C}{x}$$

$$\bar{C} = \frac{C}{x} = \frac{x^3 - 75x^2 + 1800x}{x}$$

$$\bar{C} = x^2 - 75x + 1800$$

$$\bar{C}' = 2x - 75$$

$$2x - 75 = 0$$

$x = 37,5$ za $x < 37,5$ prosečni troškovi opadaju a za $x > 37,5$ funkcija prosečnih troškova raste

$$C' = 3x^2 - 150x + 1800$$

Funkcija troškova

Ako nam je poznata funkcija graničnih troškova $C' = F'(x),$ onda ćemo ***funkciju ukupnih troškova*** dobiti preko integrala te funkcije po promenljivoj x:

$$C = \int C'(x)dx = \int F'(x)dx .$$

Primer:

Funkcija graničnih troškova $C' = \frac{x}{20} + 50$. Odrediti funkciju ukupnih troškova iz uslova $C(0) = 700$

$$C' = \frac{x}{20} + 50$$

$$\frac{dC}{dx} = \frac{x}{20} + 50 \quad dC = \left(\frac{x}{20} + 50 \right) dx$$

$$\int dC = \int \left(\frac{x}{20} + 50 \right) dx$$

$$C = \frac{x^2}{40} + 50x + A$$

$$C(0) = 700 \quad A = 700$$

$$C = \frac{x^2}{40} + 50x + 700$$

11.5.FUNKCIJA PRIHODA

Funkcija ukupnih prihoda se može predstaviti kao proizvod x, količini prodate robe (tražnje) i cene p, što zapisujemo:

$$P = x \cdot p$$

$x > 0$, funkcija tražnje

$p > 0$, cena,

Uslovi $x > 0,\ p > 0$ su potrebni uslovi za egzistenciju funkcije $P = x \cdot p$, kao funkcije prihoda P.

Funkciju ukupnih prihoda možemo izraziti preko cene:

$$P(p) = x \cdot p = p \cdot f(p), \text{ gde je } x = f(p);$$

ili preko količine prodate robe

$$P(x) = x \cdot f^{-1}(x), \text{ gde je } p = f^{-1}(x).$$

Funkcija prosečnih prihoda je količnik ukupnih prihoda i funkcije tražnje: $\overline{P} = \frac{P}{x} = p$, dakle, prosečan prihod proizvoda X je njegova cena p.

Prvi izvod funkcije prihoda, po promenljivoj *x* ili *p*, je funkcija graničnih prihoda:

$$P_x' = \frac{dP}{dx};$$

$$P_p' = \frac{dP}{dp},$$

to je mera apsolutne promene ukupnog prihoda u odnosu na realizovan obim proizvodnje ali u odnosu na prodajnu cenu jedinice proizvoda. Uspešno poslovanje podrazumeva težnja ka maksimiranju prihoda.Ukoliko je funkcija prihoda data proporciom:

$$P(x) = x \cdot f^{1}(x) \text{ ili } P(p) = p \cdot f(p) \text{ ,}$$

njen maksimum nalazimo na sledeći način:

Prvi izvod funkcije prihoda, P' izjednačimo sa nulom i rešimo po x (ili p). Tako dobijamo vrednosti x_0 (ili p_0). To su potencijalne vrednosti za količinu robe (ili njenu cenu) za koju se postiže maksimalan prihod. Ako je drugi izvod funkcije prihoda P'' za x_0 (ili p_0) manji od nule, to jesu vrednosti koje dovode do maksimuma funkcije P. Dakle,

$$P'_{(x_0)} = 0 \quad (P''_{(x_0)} < 0) \quad \text{ili} \quad P'_{(p_0)} = 0 \quad (P''_{(p_0)} < 0)$$

Primeri:

---

1. Ako je tražnja za proizvodom X: $x = -p + 200$ naći maksimalan prihod.

$$P = x \cdot p = -p^2 + 200p$$

$$P' = -2p + 200 = 0 \quad p_0 = 100 \quad P''(100) = -2 < 0 \qquad P_{\max}(100) = 10000$$

2. Funkcija tražnje nekog prizvoda je $x = -2p + 24000$. Odrediti: a) cenu i tražnju za koju će ukupan prihod biti maksimalan; b) Vrednost maksimalnog ukupnog prihoda.

$$P = x \cdot p$$

$$x = -2p + 24000 \Rightarrow 2p = -x + 24000 \Rightarrow p = -\frac{x}{2} + 12000$$

$$P = x\left(\frac{x}{2} + 12000\right)$$

$$P = -\frac{x^2}{2} + 12000x$$

$$P' = -\frac{2x}{2} + 12000$$

$$P' = -x + 12000 = 0$$

$$p = -\frac{12000}{2} + 12000$$

$$p = -6000 + 12000$$

$$p = 6000$$

$$x = 12000$$

$$P = 12000 \cdot 6000$$

$$P_{\max} = 72000000$$

Funkciju prihoda

Funkciju ukupnih prihoda iz funkcije graničnih prihoda dobijamo preko integrala:

$$P_x = \int P'_{(x)} dx;$$

$$P_p = \int P'_{(p)} dp.$$

Primer:

Poznata je funkcija graničnih prihoda $P' = 16 - 4x$. Pronaći funkciju ukupnih prihoda.

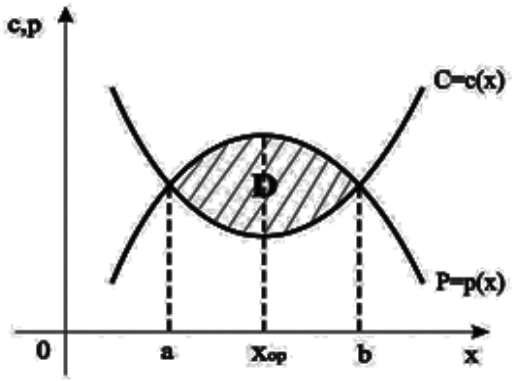
$$P = \int_0^x P' dx = \int_0^x (16 - 4x) dx = 16x - 2x^2$$

11.6. FUNKCIJA DOBITI

Funkcija dobiti se može definisati kao razlika funkcija prihoda i troškova

$$D(x) = P(x) - C(x)$$

Ako je $P(x) - C(x) > 0$ onda se proizvodnja proizvoda X smatra rentabilnom. Interval rentabilne proizvodnje (a, b) dobijamo iz uslova $D = 0$, odnosno $P(a) = C(a)$ i $P(b) = C(b)$.



Slika 6.

Svako profitabilno poslovanje traži maksimiranje ove funkcije.
Odredimo prvi izvod funkcije dobiti, D' i njega izjednačimo sa nulom. Rešenje jednačine, odnosno nule prvog izvoda D' daju vrednost optimalnog obima proizvodnje x_{op} za koji se postiže maksimalna dobit samo ako je za tu vrednost drugi izvod, D'' manji od nule.

Dakle potreban i dovoljan uslov za maksimum ove funkcije je:
$D'(x_{0p}) = P'(x_{0p}) - C'(x_{0p}) = 0 \quad \wedge \quad D''(x_{0p}) < 0$ $D_{\max}(x_{op})$ se postiže pri obimu proizvodnje x_{0p}, optimalnom obimu proizvodnje.

Primeri:

1. Funkcija dobiti je $D(x) = P(x) - C(x) = -5x^2 + 1000x - 100$.

Njen maksimum određujemo:

$$D' = -10x + 1000 = 0 \quad x_{0p} = 100 \quad \wedge \quad D'' = -10 < 0$$
$$D_{\max}(100) = 49900$$

2. Ukupni troškovi dati su funkcijom $C = 20x + 1000$ ukupni prihodi dati su funkcijom $P = \frac{-x^2}{50} + 30x$. Odrediti optimalnu proizvodnju i cenu pri kojoj će dobit biti maksimalna.

$$C = 20x + 1000$$
$$\underline{P = \frac{-x^2}{50} + 30x}$$

$$D = P - C = \frac{-x^2}{50} + 30x - 20x - 1000 = \frac{-x^2 + 500x - 500}{50}$$

$$D' = \frac{-2x + 500}{50}$$
$$-2x + 500 = 0$$
$$x_{op} = 250$$

$$P = p \cdot x \Rightarrow p = \frac{P}{x} \Rightarrow p = \frac{\frac{-x^2}{50} + 30x}{x}$$
$$p = -\frac{x}{50} + 30 \Rightarrow p = \frac{-250}{50} + 30 = -5 + 30 = 25$$
$$D_{\max} = \frac{250^2 + 500 \cdot 250 - 5000}{50}$$
$$D_{\max} = 1150$$

11.7.ELASTIČNOST EKONOMSKIH FUNKCIJA

Pod pojmom ***elastičnosti*** se smatra mogućnost da jedna veličina reaguje na promenu veličine od koje zavisi. Elastičnost se meri i izračunava pomoću njenog koeficijenta $E_{y,x}$ (*x* je nezavisno promenljiva, *y* je zavisno promenljiva).

Po definiciji koeficijent elastičnosti je granična vrednost količnika relativnih promena promenljivih *y* i *x* kad priraštaj Δx teži 0.

$$E_{y,x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x}{y} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y'$$. Kada je:

$E_{y,x} < 1$ – *y* je neelastična prema *x*

$E_{y,x} = 1$ – jednačina normalne elastičnosti

$E_{y,x} > 1$ – *y* je elastična prema *x*

Konkretno za navedene ekonomske funkcije možemo naći njihove koeficijente elastičnosti:

11.7.1. Elastičnost tražnje

$$E_{x,p} = -\frac{p}{x} \cdot x'$$

Znak minus se kod elastičnosti tražnje dodaje u definiciji da se obezbedi pozitivna vrednost koeficijenta (x' ima, po pravilu, negativnu vrednost).

$E_{x,p}$ pokazuje za koliko će se procenata (promila) približno promeniti (smanjiti) tražnja kada se cena poveća za jedan procenat (promil).

$E_{x,p} < 1$ – tražnja je neelastična, porast cene za 1% dovodi do pada tražnje za manje od 1%

$E_{x,p} = 1$ – tražnja opada za 1% kada cena raste za 1%

$E_{x,p} > 1$ – tražnja je elastična,kada se cena poveća za 1% tražnja opada za više od 1%

Primeri:

Za tražnju $x = -p + 100$ koeficijent elastičnosti je

$E_{x,p} = -\frac{p}{-p+100} \cdot (-p+100)' = \frac{p}{-p+100}$. Za cenu $p = 80$ elastičnost je $E_{x,80} = \frac{80}{20} = 4$

Cena za koju je elastičnost tražnje jedinična zove se ***karakteristična cena*** i obeležava se sa p_c.

2. Za funkciju tražnje $x = -3p + 6$ koeficijent elastičnosti je

$E_{x,p} = -\frac{3p}{-3p+6}$ a karakteristična cena je $p_c = 1$ $E_{x,p} = \frac{3 \cdot 1}{-3 \cdot 1 + 6} = 1$.

11.7.2.Elastičnost ukupnih troškova izračunava se po koeficijentu:

$E_{c,x} = \frac{x}{C} \cdot C'$ koji se može napisati i $E_{c,x} = \frac{C'}{\frac{C}{x}} = \frac{C'}{\overline{C}}$

11.7.3.Elastičnost prosečnih troškova je:

$$E_{\overline{C},x} = \frac{x}{\overline{C}} \cdot \overline{C}' = \frac{x}{\frac{C}{x}} \cdot \frac{C' \cdot x - C}{x^2} = \frac{x}{C} \cdot C' - 1 = E_{C,x} - 1$$

Dakle može se $E_{\overline{C},x}$ izračunati i preko $E_{C,x}$.

Analiza koeficijenta elastičnosti ukupnih troškova upućuje nas na povezanost graničnih i prosečnih troškova. Kada je:

$E_{C,x} < 1$, tada je $C' < \overline{C}$;

$E_{C,x} = 1$, tada je $C' = \overline{C}$;

$E_{C,x} > 1$, tada je $C' > \overline{C}$.

Primer:

Data je funkcija ukupnih troškova $C = x^3 - x^2 + 2x$. Naći koeficijent elastičnosti za funkcije $C, \overline{C}, C'$. Pokazati da su minimalni prosečni troškovi jednaki graničnim.

$$E_{C,x} = \frac{x}{x^3 - x^2 + 2x} \cdot (x^3 - x^2 + 2x)' = \frac{3x^2 - 2x + 2}{x^2 - x + 2}$$

$$E_{\overline{C},x} = \frac{x}{x^2 - x + 2} \cdot (x^2 - x + 2)' = \frac{2x^2 - x}{x^2 - x + 2}$$

$$E_{C,x} - 1 = \frac{3x^2 - 2x + 2}{x^2 - x + 2} - 1 = \frac{2x^2 - x}{x^2 - x + 2} = E_{\overline{C},x}$$

S obzirom da je funkcija prosečnih troškova $\overline{C} = x^2 - x + 2$, njen minimum nalazimo na sledeći način:

$$(\overline{C})' = 2x - 1 = 0 \qquad x = \frac{1}{2} \qquad \overline{C}_{\min}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4}$$

$$C' = 3x^2 - 2x + 2 \qquad C'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{4}$$

U opštem slučaju važi da su minimalni prosečni troškovi jednaki graničnim troškovima.

11.7.4.Elastičnost funkcije prihoda

Koeficijent elastičnosti izračunavamo preko cene $E_{P,p} = \frac{p}{P} \cdot P'_{(p)}$, ili preko tražnje x $E_{p,x} = \frac{x}{P} \cdot P_{(x)}'$.

Kako je $P = p \cdot x_p = p \cdot f(p)$ to se $E_{P,p}$ može izraziti :

$$E_{P,p} = \frac{p}{p \cdot f(p)} \cdot \left(f(p) + p \cdot f'(p) \right) = \frac{f(p) + p \cdot f'(p)}{f(p)} =$$

$$1 + \frac{p}{f(p)} \cdot f'(p) = 1 + E_{x,p}$$

Kada je $E_{x,p} < 1$ (tražnja neelastična), ukupni izdaci potrošača se povećavaju.

Ako je $E_{x,p} = 1$, tada porast ili pad cene ne utiče na prodaju.

Za $E_{x,p} > 1$ (tražnja je elastična) porast cene dovodi do opadanja prihoda i obrnuto.

Primer :

Odrediti elastičnost sledećih funkcija

a) $y = x^3 - 2x^2 + 30 \ \text{za} \ x = 10$

b) $y = e^{3x^2} \ \text{za} \ x = 1$

c) $y = x^3 e^x \ \text{za} \ x = 5$

d) $y = x^4 \ln x \ \text{za} \ x = e$

a)

$$y = x^3 - 2x^2 + 30$$

$$y' = 3x^2 - 4x$$

$$E_{x,y} = \frac{x(3x^2 - 4x)}{x^3 - 2x^2 + 30}$$

$$E_{x,y} = \frac{3x^3 - 4x^2}{x^3 - 2x^2 + 30}$$

$$E_{10,y} = \frac{3 \cdot 1000 - 4 \cdot 100}{1000 - 2 \cdot 100 + 30} = \frac{2600}{830} = 3\frac{11}{83}$$

$|E_{10,y}| > 1$ funkcija je elastična.

b)

$$y = e^{3x^2}$$

$$y' = 6xe^{3x^2}$$

$$E_{x,y} = \frac{x \cdot 6xe^{3x^2}}{e^{3x^2}} = 6x^2$$

$E_{1,y} = |6| > 1 \Rightarrow$ funkcija je elastična

c)

$$y = x^3 e^x$$

$$y' = 3x^2 e^x + x^3 e^x$$

$$y' = x^2 e^x (3 + x^3)$$

$$E_{x,y} = \frac{x \cdot x^2 e^x (3 + x^3)}{x^3 e^x} = 3 + x^3$$

$$E_{x,y} = 3 + 5^3 = 3 + 125 = 128 > 1$$

d)

$$y = x^4 \ln x$$

$$y' = 4x^3 \ln x + x^4 \cdot \frac{1}{x} = 4x^3 \ln x + x^3 = x^3 (4 \ln x + 1)$$

$$E_{x,y} = \frac{x \cdot x^3 (4 \ln x + 1)}{4x^3 \ln x} = \frac{x(4 \ln x + 1)}{4 \ln x}$$

$$E_{e,y} = \frac{e(4 \ln e + 1)}{4 \ln e} = \frac{5e}{4}$$

ZADACI

1. Izvoz jednog preduzeća se kretao u januaru 12 miliona novčanih jedinica, u aprilu 15 i u julu 10. Odredit funkciju izvoza $y = ax^2 + bx + c$.
Kada će izvoz biti max.

	x	y
Januar je 1 mesec	(1,	12)
April je 4 mesec	(4,	15)
Jul je 7 mesec	(7,	10)

$y = ax^2 + bx + c$.

$$\left.\begin{array}{ll} a+b+c=12 & a+b+c=12 \\ 16a+4b+c=15 & \Rightarrow 15a+3b=3 \\ 49a+7b+c=10 & 48a+6b=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a+b+c=12 \\ 5a+b=1 \\ 18a=-8 \end{array}$$

$$a=-\frac{4}{9}, \quad b=1-5 \quad a=1+\frac{20}{9}=\frac{29}{9},$$

$$c=12-a-b=12-\frac{29}{9}+\frac{4}{9}=\frac{83}{9}$$

$$y=-\frac{4}{9}x^2+\frac{29}{9}x+\frac{89}{9}$$

$$y'=-\frac{8}{9}x+\frac{29}{9} \qquad -\frac{8}{9}x+\frac{29}{9}=0 \Rightarrow 8x=29 \Rightarrow x=7,1$$

$$y_{\max}=\frac{-4}{9}\cdot 7,1^2+\frac{29}{9}\cdot 7,1+9=33,16$$

2. Data je funkcija tražnje $x=-6p+54$

a) Odrediti funkciju ukupnih prihoda
b) Odrediti cenu za koju će ukupni prihodi dostići max.

$$x=-6p+54 \Rightarrow 6p=-x+54 \Rightarrow p=\frac{-x}{6}+9$$

$$P=x\cdot p=x\cdot\left(-\frac{x}{6}+9\right)=\frac{-x^2}{6}+9x$$

$$\frac{-x^2}{6}+9x=0 \quad \Rightarrow \quad -x^2+54x=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0 \ \wedge \ x_2=54$$

3. Za tražnju $x=-2p+10$ elastičnost tražnje je $E_{x,p}=\frac{2p}{-2p+10}$. Tražnja je definisana u intervalu $(0,5)$ sa karakterističnom cenom $p_c=2,5$. Tražnja je neelastična kada cena varira od 0 do 2,5 a elastična kada je cena veća od 2,5 a manja od 5. Ako je p=3, $E(3)=1,5$ što znači da povećanje cene sa nivoa p=3 za 1% implicira pad tražnje za 1,5%.

4. Neka su za proizvod X na dva različita tržišta funkcije tražnje: $x_1=-2p+10$ i $x_2=-p^2+100$ definisane na intervalima $(0,5)$ i $(0,10)$ i redom odrediti elastičnost zbira $x=x_1+x_2$ i ispitati u kom je intervalu ukupna tražnja neelastična.

$E_{x_1,p}=\frac{2p}{-2p+10}$ i $E_{x_2,p}=\frac{2p^2}{-p^2+100}$ sledi $E_{x,p}=\frac{2p^2+2p}{-p^2-2p+110}$ za $E_{x,p}=1$ biće $3p^2+4p-100=0$, za $p_1=5,43 \ i \ p_2=-6,77$ što znači da je ukupna tražnja $x=-p^2-2p+110$ neelastična u intervalu $0<p<5,43$

5. Na tržištu prisutna su dva potrošača određenog tipa proizvoda sa sledećim funkcijama tražnje $x_1=10-2p \quad i \quad x_2=18-6p$.

a) Naći funkciju tražnje $x=f(p)$, za oba potrošača i na istom grafiku nacrtati krive $x_1=f_1(p)$, $x_2=f_2(p)$ i $x=f(p)$ uz određivanje njihovih oblasti definisanosti i karakterističnih tačaka.

b) Ako je cena p=2, kolike će biti odgovarajuće tražnje i odgovarajuće vrednosti elastičnosti za $x_1, x_2 \ i \ x$?

c) Dati interpretaciju dobijenih rezultata svake od te tri elastičnosti.

$$x_1=10-2p \Rightarrow (x_1=10\,;p=0);(x_1=0\,;p=5)$$

Oblast definisanosti ove funkcije je:

$$0 < p < 5 \quad 10 > x_1 > 0$$

$$x_2 = 18 - 6p \Rightarrow (x_2 = 18\,;\, p = 0);(x_2 = 0\,;\, p = 3)\; i$$

oblast definisanosti

$$0 < p < 3 \quad 18 > x_2 > 0$$

a) Funkcija tražnje je

$$x = \begin{cases} x_1 + x_2 = 28 - 8p & 0 < p \le 3 \\ x_1 = 10 - 2p & 3 \le p < 5 \end{cases}$$

Na tržištu su do cene $p \le 3$ prisutna oba potrošača, a od cene p>3 samo prvi potrošač.

b) Za cenu p=2, vrednosti odgovarajućih elastičnosti tražnji su

$$x_1(2) = 10 - 2 \cdot 2 = 6$$

$$x_2(2) = 6$$

$$x(2) = 12$$

$$E_{x,p} = -\frac{p}{x} \cdot x'$$

$$E_{x_1,p} = -\frac{p}{10-2p}(-2) = \frac{2p}{10-2p} = \frac{2 \cdot 2}{10 - 2 \cdot 2} = \frac{4}{6} = 0,6\%$$

$$E_{x_2,2} = -\frac{2}{6} \cdot (-6) = \frac{12}{6} = 2\%$$

$$E_{x,2} = -\frac{2}{12} \cdot (-8) = \frac{16}{12} = 1,3\%$$

c) $E_{x_1,2} = 0,6$

Ako cenu p=2 povećamo za 1% tj. na $p = 2 \cdot 1,01 = 2,02$ tada će tražnja opasti za 0,6% tj. sa nivoa $X_1(p = 2) = 6$ na nivo $X_1^*(p = 2,02) = 5,96.$

$E_{x_2,2} = 2$. Ako cenu povećamo za 1% tražnja će opasti za 2% tj. sa nivoa $x_2(2) = 6$ na nivo $x_2(2,02) = 5,88$. Ako cenu povećamo za 1% tražnja će opasti za $1,3\%$, tj. sa nivoa $x_2(2) = 12$ na nivo $x(2,02) = 11,84$.

6. Date su funkcije tražnje $x_1 = p^2 - 20p + 100$ i $x_2 = -4p^2 + 400$ $(0 < p < 10)$.

Elastičnost je $E_{x_1,p} = -\dfrac{2p}{p-10}$ i

$$E_{x_2,p} = \frac{8p^2}{-4p^2+400} \Rightarrow E_{x,p} = E_{x_1,p} - E_{x_2,p} = \frac{80p}{-4p^2+400}$$

7. Na tržištu određenog tipa robe nalaze se samo dva prodavca sa pojedinačnim zakonima ponuda $y_1 = -2 + p$ i $y_2 = -2 + 0,4p$ i funkcijom tražnje $x = 6 - 0,6p$.

a) Formirati funkciju tržišne (zajedničke) ponude y=g(p).
b) Proanalizirati algebarski, tabelarno i grafički elastičnost tržišne tražnje u odnosu na cenu.

a) $y_1 = -2 + p \qquad 2 < p < +\infty \qquad 0 < y_1 < +\infty$

$y_2 = -2 + 0,4p \qquad 5 < p < +\infty \qquad 0 < y_2 < +\infty$

Funkcija tržišne ponude je

$$y = g(p) = \begin{cases} y_1 = -2 + p & ; \quad 2 < p \le 5 \\ y_1 + y_2 = -4 + 1,4p & ; \quad 5 \le p < +\infty \end{cases}$$

Na tržištu je za cenu $2 < p \le 5$ prisutan samo prvi prodavac, a za cenu $p \ge 5$ na tržištu su prisutna oba prodavca.

b) $D: \qquad 6 - \dfrac{6}{10}p > 0$

$$E_{x,p} = -\frac{p}{x} \cdot x' = \frac{-p}{6-0,6p}(-0,6) = \frac{0,6p}{6-0,6p}$$

$E_{x,p} = 0 \;\; kada \;\; je \;\; p = 0$

$E_{x,p} < -1 \;\; za \;\; p < 5$

$\frac{-0,6p}{6-0,6p} < -1 \quad , \quad -0,6p < -6 + 0,6p \quad , \quad -1,2p < -6 \quad , \quad p > 5$

$6 - 0,6p = 0 \quad , \quad p = 10$

Ex,p=0	p=0	x=6
E<1	5>p>0	3<x<6
E=1	p=5	x=3
E>1	10>p>5	0<x<3
$E \to \infty$	$p \to 10$	x=0

8. Funkcija graničnih prihoda $P' = -4x + 140$. Odrediti cenu po kojoj će preduzeće ostvariti najveću dobit koja je funkcija prosečnih troškova $\overline{C} = 3x + 60 + \frac{30}{x}$, i neka je $P(0) = 0$.

$P' = -4x + 140$

$\frac{dp}{dx} = -4x + 140$

$dp = (-4x + 140)dx$

$\int dp = \int (-4x + 140)dx$

$P = -2x^2 + 140x$

$C = \overline{C} \cdot x \Rightarrow C = 3x^2 + 60 + 30$

$D = P - C$

$D = -5x^2 + 80x - 30$

$D' = -10x + 80$

$-10x + 80 = 0$

$x_0 = 8$

$P = x \cdot p \Rightarrow p = \frac{P}{x}$

$p = -2x + 140$

$p = -16 + 140$

$p = 124$

$$D_{\max} = -5 \cdot 64 + 640 - 30$$
$$D_{\max} = 930$$

9. Na tržištu određenog tipa robe nalaze se samo dva potencijalna kupca sa odgovarajućim individualnim zakonima tražnje
$x_1 = 6 - 0,6p \quad i \quad x_2 = 10 - 2p.$

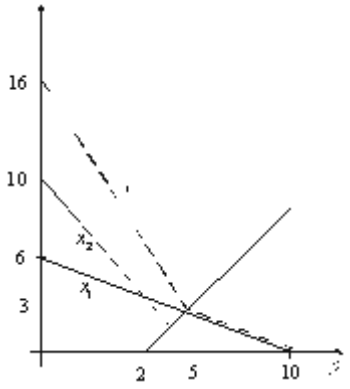
a) Formirati funkciju zajedničke (tržišne) tražnje x =f(p) oba kupca i na istom grafiku nacrtati odgovarajuće krive za $x_1, x_2 \; i \; x$

b) Pronaći cenu (zaokruženu na ceo broj) kod koje se maksimizira ukupan prihod svih prodavaca na tržištu. Kolike su tada odgovarajuće vrednosti $x_1, x_2 \; i \; x$.

$x_1 = 6 - 0,6p \quad ; \quad 0 < p < 10 \qquad 6 > x_1 > 0$
$x_2 = 10 - 2p \quad ; \quad 0 < p < 5 \qquad 10 > x_2 > 0$

a) Funkcija tržišne tražnje je:

$$x = f(p) = \begin{cases} x_1 + x_2 = 16 - 2,6p & , \quad 0 < p \le 5 \\ x_1 = 6 - 0,6p & , \quad 5 \le p \le 10 \end{cases}$$



Na tržištu su do cene $p \le 5$ prisutna oba
potrošača a od cene 5<p<10 samo prvi potrošač

b) $$P = p \cdot x = \begin{cases} p(16 - 2,6p) = 16p - 2,6p^2 & 0 < p \le 5 \\ p \cdot (6 - 0,6p) = 6p - 0,6p^2 & 5 \le p < 10 \end{cases}$$

$$P' = 16 - 5,2p = 0 \Rightarrow p = \frac{16}{5,2} = 3 \qquad P'' = -5,2 < 0$$

$$P' = 6 - 1,2p = 0 \Rightarrow p = \frac{6}{1,2} = 5 \qquad P'' = -1,2 < 0 \Rightarrow$$

$$P_{\max}(3) = 16 \cdot 3 - 2,6 \cdot 3^2 = 48 - 23,4 = 24,6$$

$$P_{\max}(5) = 6 \cdot 5 - 0,6 \cdot 5^2 = 30 - 15 = 15$$

Maksimalan ukupan prihod se postiže za cenu $p_p = 3$ i iznosi P=24,6

$$x_1(3) = 6 - 0,6 \cdot 3 = 4,2$$

$$x_2(3) = 10 - 2 \cdot 3 = 4$$

$$x(3) = 8,2$$

10. Na tržištu prisutna su dva potrošača određenog proizvoda sa odgovarajućim zakonima tražnje:

$$x_1 = 4 - p \;\; i \;\; x_2 = 5 - 0,5p.$$

a) Pronaći funkciju tražnje x =f(p) za oba potrošača zajedno i na istom grafikonu nacrtati odgovarajuće krive tražnje $x_1, x_2 \; i \; x$ uz algebarsko određivanje njihovih oblasti definisanosti i karakterističnih tačaka.

b) Pronaći funkciju ukupnog prihoda $P = p_{(p)}$ svih prodavaca tog proizvoda na posmatranom tržištu.

c) Algebarski, tabelarno i grafički odrediti elastičnost $E_{x_1,p}$.

$$x_1 = 4 - p \quad ; \quad 0 < p < 4 \qquad 4 > x_1 > 0$$

$$x_2 = 5 - 0,5p \quad ; \quad 0 < p < 10 \qquad 5 > x_2 > 0$$

a) Funkcija tržišta tražnje je:

$$x = x(p) = \begin{cases} x_1 + x_2 = 9 - 1{,}5p & ; \quad 0 < p \le 4 \\ x_2 = 5 - 0{,}5p & ; \quad 4 \le p < 10 \end{cases}$$

b) $$P = p \cdot x = \begin{cases} p \cdot (9 - 1{,}5p) = 9p - 1{,}5p^2 & ; \quad 0 < p \le 4 \quad ; \; D_1 \\ p \cdot (5 - 0{,}5p) = 5p - 0{,}5p^2 & ; \quad 4 \le p < 10 \quad ; \; D_2 \end{cases}$$

$$0 < p \le 4 \quad P = p \cdot (9 - 1{,}5p) = 9p - 1{,}5p^2 = 0$$

$$P' = 9 - 3p = 0 \Rightarrow p_{(0)} = 3 \in D_1$$

$$P' = 5 - p = 0 \Rightarrow p_{(0)} = 5 \in D_2$$

Maksimalan prihod $(P_{\max})$ se postiže za cenu $p = 3.$

$$P = p(3) = 3(9 - 1{,}5 \cdot 3) = 13{,}5$$

$$P(1) = 7{,}5$$

$$P(2) = 12$$

$$P(4) = 12$$

$$4 \le p < 10 \quad P = p \cdot (5 - 0{,}5p) = 5p - 0{,}5p^2 = 0 \quad P' = 5 - p = 0$$

$$p_1^0 = 0 \qquad p_2^0 = 10 \qquad p = 5$$

$$P = P(5) = 5(5 - 0{,}5 \cdot 5) = 12{,}5$$

$$P(6) = 6(5 - 0{,}5 \cdot 6) = 12$$

$$P(7) = 10{,}5$$

$$P(8) = 8$$

$$P(9) = 4{,}5$$

c) $$E_{x_1, p} = \frac{-p}{x_1} \cdot x_1 = \frac{-p}{4 - p} \cdot (-1) = \frac{p}{4 - p}$$

$$E_{x,p} = 0 \quad kada\ je \quad p = 0$$
$$E_{x_1,p} < 1\ za\ 0 < p < 2$$
$$\frac{p}{4-p} < 1 \quad , \quad p < -p - 4$$
$$E_{x_1,p} \to -\infty\ za\ p = 4$$
$$4 - p = 0 \quad \Rightarrow \quad p = 4$$

$Ex_1,p=0$	p=0	$x_1=4$
0<E<1	2>p>0	$2< x_1 <4$
E=1	p=2	$x_1=2$
E>1	4>p>2	$0< x_1 <2$
$E \to \infty$	p=4	$x_1=0$

11. Prededuzeće proizvodi jednu vrstu robe X sa funkcijom ukupnih troškova $C = 3x^2 + 35000000$ gde je x mesečna proizvodnja i $x = -\frac{p}{2} + 15000$ funkcija tražnje i p cena jednog proizvoda. Odrediti:

a) Interval rentabiliteta
b) Dobit pri proizvodnji od 2000 proizvoda
c) Optimalnu proizvodnju i maksimalnu dobit
d) Kolika je dobit pri minimalnim prosečnim troškovima?

a)

$$p = -2x + 30000$$
$$P = -2x^2 + 30000x$$
$$D = P - C = -5x^2 + 30000x - 35000000 > 0$$
$$x_1 = 1585$$
$$x_2 = 4414$$

Dobit je pozitivna pri proizvodnji od 1585 do 4414 proizvoda.

b) $D(2000) = 5000000$ pri $p = 26000$

c)

$$D' = -10x + 30000 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 3000$$
$$D'' = -10 < 0 \quad \Rightarrow \quad D_{\max}(3000) = 10000000$$

d)

$$\overline{C} = 3x + \frac{35000000}{x}$$
$$\overline{C}' = 3 - \frac{35000000}{x} = 0$$
$$x = 3416$$
$$\overline{C}''(3416) > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{C}''(3416)_{\min} = 20494$$
$$D(3416) = 8902720$$

12. Na tržištu potpune konkurencije prisutna je cena p=108 dinara određenog proizvoda "X". Individualni proizvođač tog proizvoda ima odgovarajuću funkciju prosečnih troškova $\overline{C} = 50 + 4x + \frac{100}{x}$ gde je x količina njegove proizvodnje – ponude.

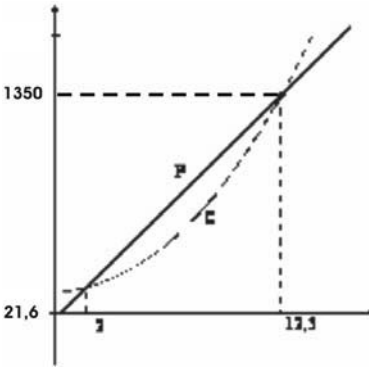
a) Pronaći funkcije: ukupnog, graničnog i prosečnog prihoda i funkciju ukupnih troškova.
b) Na istom grafikonu nacrtati krive ukupnog prihoda i ukupnih troškova, uz izračunavanje njihovih karakterističnih tačaka.
c) Algebarski, tabelarno i grafički odrediti elastičnost ukupnih troškova u odnosu na količinu proizvodnje x.

a) $p = 108\ din. \qquad \overline{C} = 50 + 4x + \frac{100}{x}$

$$P = p \cdot x = 108x \quad , \quad P' = 108 \quad , \quad \overline{P} = 108 \quad \overline{P} = P' = p = 108\ din$$
$$C = \overline{C} \cdot x = 50x + 4x^2 + 100$$

b)

$C = 4x^2 + 50x + 100$



$C = 100 \quad , \quad x = 0$

$C' = 8x + 50 > 0 \;\; za \;\; \forall x > 0$

$P = C \qquad 108x = 4x^2 + 50x + 100$

$4x^2 - 58x + 100 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{29 \pm \sqrt{841 - 400}}{4} = \frac{29 \pm 21}{4}$$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = 12,5$

$P(2) = C(2) = 216 \quad , \quad P(12,5) = C(12,5) = 1350$

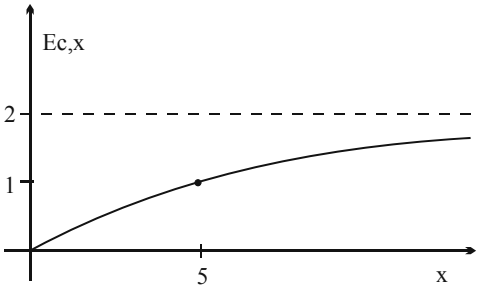
c) $$E_{C,x} = \frac{x}{C} \cdot C' = \frac{C'}{\overline{C}} = \frac{50 + 8x}{50 + 4x + \frac{100}{x}} = \frac{50x + 8x^2}{50x + 4x^2 + 100}$$

$E_{C,s} = 0 \quad , \quad 50x + 8x^2 = 0 \quad , \quad \underline{x = 0}$

$E < 1 \quad , \quad 50x + 8x^2 < 50x + 4x^2 + 100 \quad , \quad x^2 < 25 \quad , \quad x < 5$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{50x + 8x^2}{50x + 4x^2 + 100} \right) = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{50 + 16x}{50 + 8x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to \infty} \frac{16}{8} = 2$$

Ec,x=0	x=0	C=100
0<E<1	0<x<5	100<C<450
E=1	x=5	C=450
1<E<2	5<x<+∞	450<C<+∞
$E \to 2$	$x \to +\infty$	$C \to +\infty$



13. Data je funkcija tražnje x=10-0,5p

a) Pronaći nivo proizvodnje x_p za koji se postiže maksimalan ukupan prihod P i utvrditi njegov iznos.
b) Proanalizirati elastičnost ukupnog prihoda P u odnosu na x i rezultate predstaviti tabelarno i grafički.
c) Grafički predstaviti funkcije tražnje, ukupnog prihoda i graničnog prihoda.

a) $x = 10 - 0,5p$

$p = 20 - 2x$

$P = p \cdot x = (20 - 2x) \cdot x = 20x - 2x^2$

$P' = 20 - 4x = 0 \quad ; \quad x_p = 5 \; ; \quad P(x_p = 5) = 50$

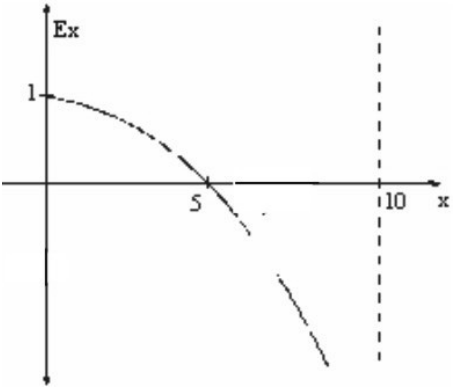
b) $E_{p,x} = \frac{x}{P} \cdot P' = \frac{x}{(20 - 2x) \cdot x} \cdot (20 - 4x) = \frac{20 - 4x}{20 - 2x}$

$E_{p,x} < 1 \; ; \; \frac{20 - 4x}{20 - 2x} < 1 \; ; \; 20 - 4x < 20 - 2x \; ; \; x > 0$

$E_{p,x} < 1 \; za \; x > 0$

$E_{p,x} = 0 \; ; \; 20 - 4x = 0 \; ; \; x = 5$

Ep,x=1	x=0	p=0
0<E<1	5>x>0	50>p>0
E=0	x=5	p=50



c) $p = 20 - 2x$ $\qquad \overline{P} = \dfrac{p \times x}{x} = p$

$P = x(20 - 2x)$

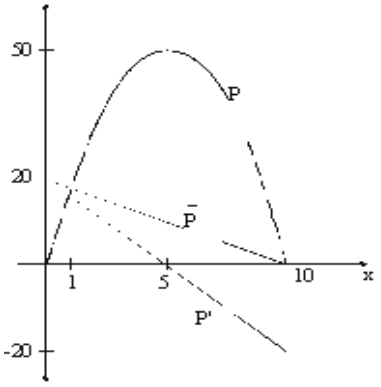
$P = 0 \;\text{Ţ}\; x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 10$

$P' = 20 - 4x$

$P'(0) = 20$

$P'(5) = 0$

$P'(10) = -20$



14. Data je funkcija tražnje x=20-0,5p

a) Naći x_p za koju se postiže maksimalan prihod P

b) U oblasti definisanosti tražnje na istom grafiku nacrtati krive $P,\ P',\ \overline{P}$

c) Analitički, tabelarno i grafički obraditi elastičnost ukupnog prihoda P u odnosu na tražnju x.

a) Prvo ćemo formirati funkciju tražnje, a zatim funkciju ukupnog prihoda:

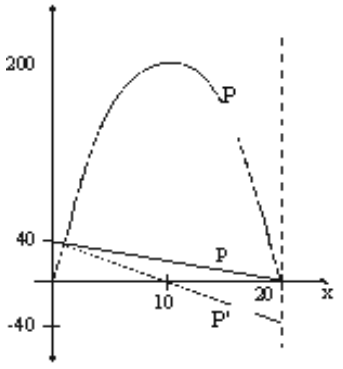
$$p = 40 - 2x \quad P = p \cdot x = (40 - 2x) \cdot x = 40x - 2x^2$$
$$P' = 40 - 4x = 0 \ \Rightarrow \ p_0 = 10$$
$$P''(10) = -4 < 0$$
$$\Rightarrow P_{\max} = P(10) = 40 \cdot 10 - 2 \cdot 10^2 = 200$$

b) $p = 40 - 2x$, $0 < x < 20$, $40 > p > 0$ oblast definisanosti tražnje.

$$P(x) = 40x - 2x^2 \quad , \quad x_1^{\,o} = 0 \quad , \quad x_2^{\,o} = 20 \quad , \quad x^e = 10 \quad , \quad p(10) = 200$$
$$P' = 40 - 4x$$

c)

$$E_{p,x} = \frac{x}{P} \cdot P' = \frac{P'}{\overline{P}} = \frac{40 - 4x}{40 - 2x}$$
$$E_p \le 1 \quad 40 - 4x = 40 - 2x \ , \ E_{p,x} \le 1 \ za \ \forall x \ge 0$$
$$E_p = 0 \ , \ 40 - 4x = 0 \ , \qquad x = 10$$



Ep=1	x=0	P=0
0<E<1	10>x>0	200>P>0
E=0	x=10	P=200

15. Data je funkcija tražnje p=20-2x

a) Pronaći nivo proizvodnje x kod koga se postiže maksimalan ukupan prihod P i utvrditi njegov iznos.

b) Algebarski, tabelarno i grafički analizirati elastičnost ukupnog prihoda P u odnosu na nivo proizvodnje x.

c) Na grafikonu nacrtati funkcije: tražnje, ukupnog prihoda i graničnog prihoda, uz prikaz odgovarajuće algebarske analize.

a) $$P = p \cdot x = (20 - 2x) \cdot x = 20x - 2x^2$$

$$P' = 20 - 4x = 0 \Rightarrow x = 5$$

$$P' = -4 < 0 \max$$

$$P(x = 5) = 50$$

Maksimalan ukupan prihod se postiže za nivo proizvodnje x=5 i iznosi 50.

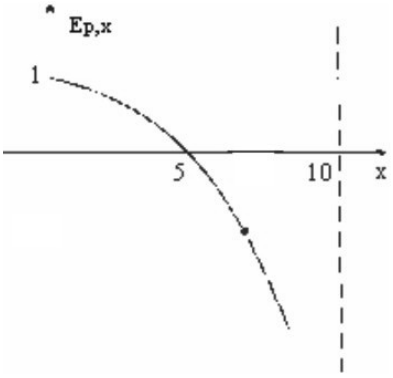
b) $$E_{p,x} = \frac{x}{P} \cdot P' = \frac{P'}{\overline{P}} = \frac{20 - 4x}{20 - 2x}$$

za $0 < x < 5$ funkcija P raste

za $5 < x < 10$ funkcija P opada

$$E_{p,x} = \frac{20 - 4x}{20 - 2x} \leq 1 \quad ; \quad 20 - 4x \leq 20 - 2x \quad tj. \quad x > 0$$

Ep,x=1	x=0	P=0
0<E<1	5>x>0	50>P>0
E=0	x=5	P=50

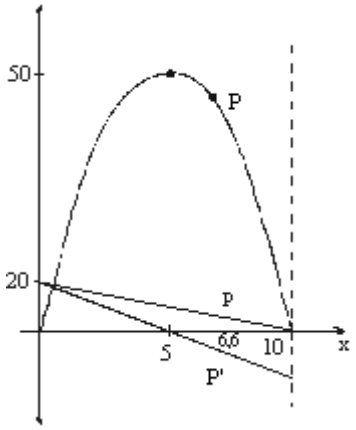


c) $p = 20 - 2x \qquad p^o = 20 \qquad x^o = 10$

$P = 20x - 2x^2 \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = 10$

$P' = 20 - 4x = 0 \qquad x = 5 \qquad P(5) = 50$

$P'' = -4 \qquad za \qquad \forall x \in D$



16. Na tržištu određenog tipa robe prisutna su dva proizvođača sa zakonima ponude $y_1 = -1 + 0,5p \quad i \quad y_2 = -4 + p$

a) Pronaći zakon ukupne (tržišne) ponude y=g(p) i nacrtati odgovarajuće krive ponude y_1, y_2, y uz određivanje oblasti definisanosti i karakterističnih tačaka.

b) Analizirati elastičnost ukupnog prihoda u odnosu na cenu.

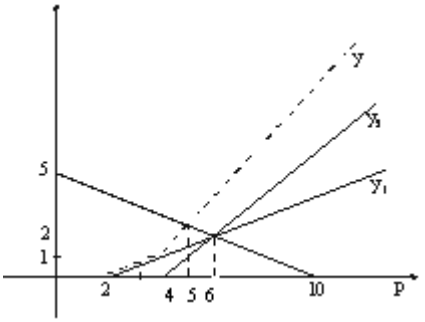
Funkcija tražnje je $x = 5 - 0,5p \quad , \quad D: 0 < p < 10$

$y_1 = -1 + 0,5p \quad , \quad 2 < p < +\infty \qquad 0 < y_1 < +\infty$

$y_2 = -4 + p \quad , \quad 4 < p < +\infty \qquad 0 < y_2 < +\infty$

Zakon tržišne ponude je:

$$y = y(p) = \begin{cases} y_1 = -1 + 0,5p & , \quad 2 < p \le 4 \\ y_1 + y_2 = -5 + 1,5p & , \quad 4 \le p < +\infty \end{cases}$$



$y_1 = y_2$

$-1 + 0,5p = -4 + p \qquad p = 6$

$y_1(5) = 1,5 \qquad y_2(5) = 1$

$y_1(10) = 4 \qquad y_2(10) = 6$

b) $P = p \cdot x = p(5 - 0,5p) = 5p - 0,5p^2 \qquad P' = 5 - p$

$$E_{p,p} = \frac{p}{P} \cdot P' = \frac{p}{p(5 - 0,5p)} \cdot (5 - p) = \frac{5 - p}{5 - 0,5p}$$

$$E_{p,p} \le 1 \quad , \quad \frac{5 - p}{5 - 0,5p} \le 1; \quad 5 - p \le 5 - 0,5p \qquad p > 0$$

$E \le 1 \quad za\ svako\ p \ge 0$

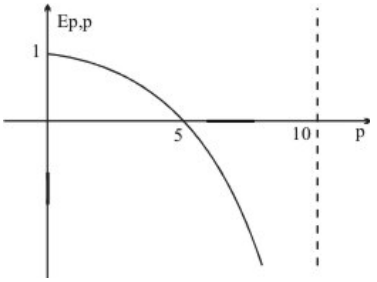
E>1 ne dolazi u obzir zbog toga što je tada cena p<0

$E<-1$, $\frac{5-p}{5-0,5p}<-1$, $5-p<0,5p-5$, $-1,5p<-10$, $p>6,67$

$E=0$ za $5-p=0$, $p=5$

$5-0,5p=0$, $p=10$

Ep,p=1	p=0	P=0
0<E<1	5>p>0	12,5>P>0
E=0	p=5	P=12,5



17. Poznata je funkcija tražnje $x=0,6p^2-12p+60$ i funkcija ponude $y=-10+5p$

a) Pronaći cenu p_p kod koje se postiže maksimalan ukupan prihod i izračunati odgovarajuće vrednosti tražnje, ukupnog prihoda i ponude za tu cenu.

a) $P=p\cdot x=p\left(0,6p^2-12p+60\right)=0,6p^3-12p^2+60p$

$P'=1,8p^2-24p+60=0$

$p_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{144-1,8\cdot 60}}{1,8}=\frac{12\pm 6}{1,8}$

$p_1=\frac{10}{3}$ $p_2=10$

Definisanost tražnje $x' = -1,2p - 12 < 0 \qquad p < 10$

Cena kod koje se postiže maksimalan ukupan prihod je $p_p = \frac{10}{3}$ jer se cena p=10 nalazi van oblasti definisanosti.

$$x\left(\frac{10}{3}\right) = 0,6 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^2 - 12\left(\frac{10}{3}\right) + 60 = 26\frac{2}{3}$$
$$P\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{80}{3} \cdot \frac{10}{3} = \frac{800}{9} = 88\frac{8}{9}$$
$$y\left(\frac{10}{3}\right) = -10 + 5\left(\frac{10}{3}\right) = 6\frac{2}{3}$$

18. Za funkciju tražnje $x = (p-5)^2$ odrediti funkciju graničnih prihoda i elastičnost ukupnih prihoda.

$$P = p \cdot x$$
$$P' = (p-5)^2 + p \cdot 2(p-5) = (p-5)(3p-5)$$
$$E(p) = \frac{3p-5}{p-5}$$

na primer za $p = \frac{2}{3}$ granični prihod $P'\left(\frac{2}{3}\right) = 13$ a $E(P) = 0,7$ što znači da relativno malo povećanje cene sa nivoa $\frac{2}{3}$ povećava prihod približno za 13 novčanih jedinica na jediničnu promenu cene, odnsno relativno malo procentualno povećanje cene sa nivoa $\frac{2}{3}$ povlači porast prihoda za 0,7% pri porastu cene za 1%.

19. Poznata je funkcija graničnog prihoda P'=16-4x.

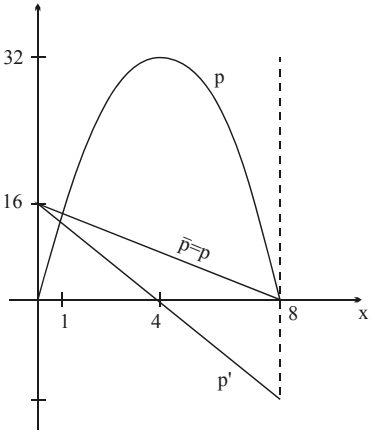
a) Pronaći funkciju ukupnog i prosečnog prihoda.

b) Na istom grafikonu nacrtati krive ukupnog, graničnog i prosečnog prihoda, uz algebarsko određivanje karakterističnih tačaka.

c) Algebarski, tabelarno i grafički odrediti elastičnost ukupnog prihoda u odnosu na tržišnu tražnju x.

a) $$P=\int_0^x P'dx=\int_0^x (16-4x)\,dx=16x-2x^2 \quad ; \quad \overline{P}=\frac{P}{x}=16-2x$$

$$P=16x-2x^2=x(16-2x)$$
$$x_1=0 \qquad x_2=8$$
$$P'=16-4x=0 \quad , \quad x=4$$
$$P(4)=4(16-2\cdot 4)=32$$
$$P(0)=p(8)=0$$
$$P(1)=p(7)=1(16-2{,}1)=14$$
$$P(2)=p(6)=2(16-2{,}2)=24$$
$$P(3)=p(5)=3(16-2{,}3)=30$$

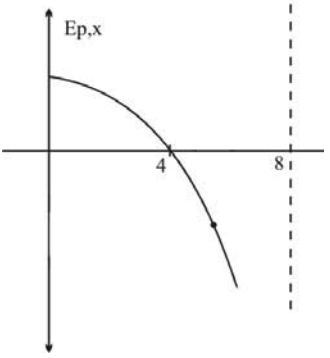


c) $$Ep,x=\frac{x}{P}\cdot P'=\frac{x}{16x-2x^2}\cdot(16-4x)=\frac{16-4x}{16-2x}$$

$E > 1 \quad , \quad \frac{16-4x}{16-2x} < 1 \quad , \quad 16-4x < 16-2x \quad , \quad x > 0$

$E \leq 1$ *za svako* $x \geq 0$

Ep,x=1	x=0	P=0
0<E<1	4>x>0	32>P>0
E=0	x=4	P=32



20. Funkcija graničnih troškova je $C' = \frac{x}{20} + 50$. Odrediti:

a) Funkciju ukupnih troškova iz uslova $C(0) = 700$.

b) Količinu pri kojoj su troškovi najmanji.

a) $C' = \frac{x}{20} + 50$

$\frac{dC}{dx} = \frac{x}{20} + 50$

$dC = \left(\frac{x}{20} + 50 \right) dx$

$\int dC = \int \left(\frac{x}{20} + 50 \right) dx$

$C = \frac{x^2}{40} + 50x + A$

$C(0) = 700$

$A = 700$

$C = \frac{x^2}{40} + 50x + 700$

b) $C' = \frac{x}{20} + 50$

$$\frac{x}{20}+50=0$$
$$x=-1000$$

21. Za funkciju troškova $C=0,01x^2+20x+900$ odrediti proizvodnju za koju su prosečni troškovi jednaki graničnom.

$$\overline{C}=0,01x+20+\frac{900}{x}$$
$$C'=0,02x+20$$
$$\overline{C}=C'$$
$$0,01x+20+\frac{900}{x}=0,02x+20$$
$$0,01x^2=900$$
$$x=300$$

Za proizvodnju $x=300$ minimalni prosečni jednaki su graničnim ukupnim $\overline{C}_{\min}(300)=C'(300)=26$ novčanih jedinica. Prosečni troškovi opadaju pri proizvodnji manjoj od 300 a rastu pri proizvodnji većoj od 300.

22. Za funkciju troškova $C=0,01x^2+20x+900$

a) Odrediti elastičnost ukupnih i prosečih troškova i proveriti vezu između njih.

b) Odrediti elastičnost ukupnih i prosečih troškova pri proizvodnji od 200.

$$E_c=\frac{0,02x^2+20x}{0,01x^2+20x+900}$$
$$E\overline{c}=\frac{0,01x^2-900}{0,01x^2+20x+900}\Rightarrow E\overline{c}=E_c-1$$
$$E_c(200)=0,91$$

što znači da se ukupni troškovi uvećavaju za 0,91% pri povećanju proizvodnje sa nivoa 200 za 1%.

$$E\overline{c}\left(200\right)=-0,09$$

što znači procentualno smanjenje prosečnih troškova za 0,09% pri povećanju proizvodnje za 1% sa nivoa 200.

23. Data je funkcija ukupnih troškova $C=5x^2+320$. Pokazati da su minimalni prosečni troškovi jednaki graničnim ukupnim troškovima.

$$\overline{C}=\frac{C}{x}=\frac{5x^2+320}{x}=5x+\frac{320}{x}$$

$$\overline{C}'=5-\frac{320}{x^2}=0$$

ako je

$$x^2=\frac{320}{5}=64,\ x=8$$

$$\overline{C}''=2\cdot\frac{320}{x^3}>0 \quad za \quad x=8$$

$$\overline{C}_{\min}\left(8\right)=80$$

$$C'=10x$$

$$C'\left(8\right)=80 \quad \Rightarrow \quad \overline{C}_{\min}\left(8\right)=C'\left(8\right)=80$$

24. Poznato je da na tržištu proizvodnja x jednog pojedinačnog prodavca nema uticaja na menjanje tržišne cene p.

Neka je evidentna tržišna cena p=5din. i funkcija ukupnih troškova pojedinačnog prodavca $C=4,5+0,5x^2$

a) Pronaći nivoe nerentabilne, rentabilne i granično rentabilne proizvodnje. Za najrentabilniji nivo proizvodnje izračunati odgovarajuće vrednosti ukupnih troškova, ukupnog prihoda, prihoda, graničnog prihoda i dobiti.
b) Analizirati elastičnost ukupnog prihoda u odnosu na njegovu proizvodnju x, objasniti ekonomsko značenje rezultata.

c) Na istom grafiku nacrtati krive: $p, \overline{p}, p', C \ i \ D,$ za vrednosti $0 \le x \le 10$ uz analize.

$p = 5 \qquad C = 4,5 + 0,5x^2$

a)

$$P = p \cdot x = \underline{5x}$$

$$D = P - C = 5x - 4,5 - 0,5x^2 = -0,5x^2 + 5x - 4,5$$

$$D = -0,5x^2 + 5x - 4,5 = 0 \,/\cdot(-2)$$

$$x^2 - 10x + 9 = 0 \quad , \quad x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 - 9} = 5 \pm 4$$

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = 9$$

$$D = -0,5x^2 + 5x - 4,5$$

$$D' = -x + 5 = 0 \qquad x_r = 5$$

$$D'' = -1 < 0 \quad \Rightarrow \quad D_{\max}\left(x_r = 5\right) = 8$$

Najrentabilniji nivo proizvodnje je $x_r = 5$

$$P(5) = 5 \cdot 5 = 25$$

$$C(5) = 4,5 + 0,5 \cdot 25 = 17$$

$$P' = 5$$

$$\overline{P} = 5$$

$D(5) = P(5) - C(5) = 8$

$D < 0 \ za \ x \in (0;1) \cup (9;+\infty)$, intervali nerentabilne proizvodnje

$D = 0 \ \ za \ \ \overset{0}{x}_1 = 1 \ \ \overset{0}{x}_2 = 9,$ nivoi granično rentabilne proizvodnje

$D > 0 \ \ za \ \ x \in (1;9)$, interval rentabilne proizvodnje

b) $P = 5 \cdot x$

$$E_{p,x} = \frac{x}{P} \cdot P' = \frac{x}{5x} \cdot 5 = 1\%$$

Ako se x promeni za 1% i ukupan prihod će se promeniti za 1%. To je slučaj indiferentne (jedinične) elastičnosti.

c) $P = 5x \qquad P(0) = 0\,; \quad P(5) = 25\,; \quad P = (10) = 50$

$P' = 5 = \overline{P} = p$

$C = 4,5 + 0,5x^2$

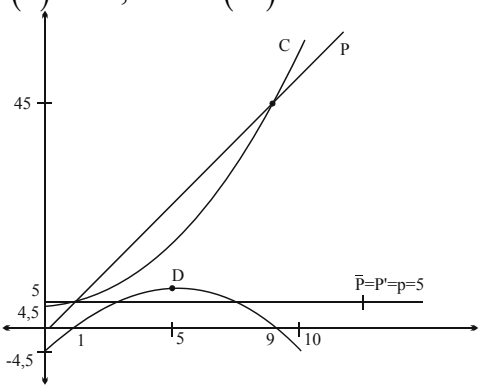
$C(0) = 4,5$

$C(1) = 5$

$C(5) = 17$

$C(9) = 45$

$C(10) = 54,5$



$D = P - C = -0,5x^2 + 5x - 4,5$

$D(0) = -4,5$

$D(1) = 0$

$D(5) = 8$

$D(9) = 0$

$D(10) = -4,5$

25. Data je funkcija tražnje p=9-1,5x i funkcija ukupnih troškova C=6+1,5x

a) Pronaći funkciju ukupnog prihoda P=P(x) i na istom grafiku nacrtati funkcije p=p(x), C=C(x) i P=P(x);

b) Odrediti intervale nerentabilne, rentabilne i najrentrabilnije proizvodnje.

c) Odrediti funkciju ukupne dobiti D=D(x).

a) $p = 9 - 1,5x \quad , \quad C = 6 + 1,5x$

$P = p \cdot x = (9 - 1,5x) \cdot x = 9x - 1,5x^2$

$p = 9 - 1,5x \quad 0 < x < 5 \quad 9 > p > 0$

$p^0 = 9 \quad , \quad x^0 = 6$

$P = 9x - 1,5x^2 \quad , \quad P' = 9 - 3x = 0 \Rightarrow x_e = 3 \quad P'' = -3 < 0$

$x_1{}^0 = 0 \quad , \quad x_2{}^0 = 6 \quad , \quad x^e = 3 \quad \Rightarrow \quad P_{\max} = P(3) = (9 - 1,5.3) \cdot 3 = 13,5$

$P(2) = P(4) = 12$

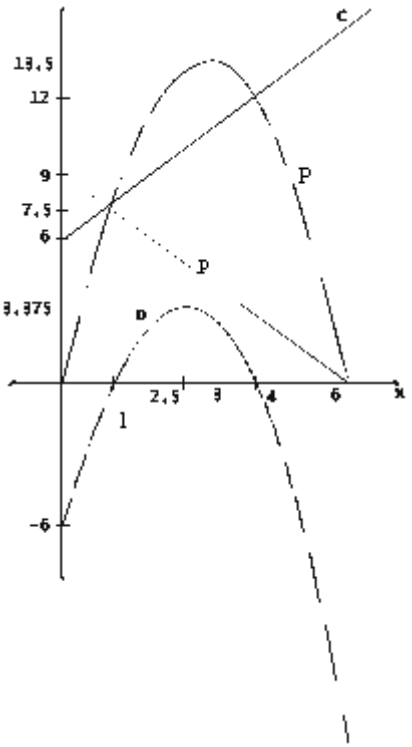
$P(1) = P(5) = 7,5$

$C = 6 + 1,5x$

$C(0) = 6$

$C(3) = 10,5$

$C(6) = 15$



b) $D = P - C = 9x - 1,5x^2 - 6 - 1,5x = -1,5x^2 + 7,5x - 6$

$D = 0 \qquad -1,5x^2 + 7,5x - 6 = 0$

$x_1^{\,0} = 1 \quad , \quad x_2^{\,0} = 4$

$D' = P' - C' = 0 \quad , \quad D' = -3x + 7,5 = 0 \quad , \quad x_1 = 2,5$

$D < 0 \quad x \in (0;1) \cup (4;+\infty)$ Intervali nerentabilne proizvodnje

$D = 0 \quad x_1^{\,0} = 1 \quad x_2^{\,0} = 4$ Nivoi granične rentabilne proizvodnje

$D > 0 \quad x \in (1;4)$ Interval rentabilne proizvodnje

$x_r = 2,5$ Najrentabilniji nivo proizvodnje.

c) $D = P - C = -1,5x^2 + 7,5x - 6$

$D_{\max} = D(2,5) = -1,5.2,5^2 + 7,5.2,5 - 6 = 3,375$

$D(1) = D(4) = 0$

$D(2) = D(3) = 3$

$D(0) = -6$

26. Za neki proizvod funkcija prosečnih prihoda je $\overline{P} = p = 300 - 2x$, funkcija ukupnih troškova je $C = x^2$.

Odrediti:

a) Funkciju ukupnih prihoda;

b) Funkciju graničnih prihoda;

v) Funkciju graničnih troškova;

g) Dobit,

d) količinu proizvoda za koju će dobit biti maksimalna;

đ) pokazati da se to rešenje može dobiti i iz relacije $P' = C'$.

Odrediti: cenu, ukupan prihod, ukupne troškove, i maksimalnu dobit.

$p = 300 - 2x$

a) $\underline{C = x^2}$

$P = x \cdot p \Rightarrow P = 300x - 2x^2$

b) $P' = 300 - 4x$

v) $C' = 2x$

g)
$$D = -2x^2 + 300x - x^2$$
$$D = -3x^2 + 300x$$

d)
$$D' = -6x + 300$$
$$-6x + 300 = 0$$
$$x = 50$$
$$D'' = -6 < 0 \max$$

đ)
$$P' = C''$$
$$300 - 4x = 2x$$
$$300 = 6x \Rightarrow x = 50$$
$$p = 300 - 100$$
$$p = 200$$

$$P = 50 \cdot 200 = 10000$$
$$C = x^2 = 50^2 = 2500$$
$$D_{\max} = 10000 - 2500$$
$$D_{\max} = 7500$$

27. Poznata je funkcija tražnje x=75-0,1p i funkcija ukupnih troškova $C = 100 + 50x + 4x^2$

a) Naći nivo najrentabilnije proizvodnje i odgovarajuću cenu, ukupan prihod, ukupne troškove i ukupnu dobit;

b) Algebarski obraditi i tabelarno ilustrovati elastičnost ukupnih troškova u odnosu na količinu;

c) Koji je nivo najekonomičnije proizvodnje kao i odgovarajuća cena i razlika između ukupnih dobiti iz c) i a)?

$x = 75 - 0,1p \qquad p = 750 - 10x$

a) $P = p \cdot x = (750 - 10x) \cdot x = 750x - 10x^2$

$$D = P - C = 750x - 10x^2 - 100 - 50x - 4x^2 = -100 + 700x - 14x^2$$

$$D' = 700 - 28x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_r = 25 \ , \quad D'' < 0 \Rightarrow D_{\max}$$

$$p(25) = 750 - 10 \cdot 25 = 500$$

$$P(25) = p \cdot x = 500 \cdot 25 = 12.500$$

$$C(25) = 100 + 50 \cdot 25 + 4 \cdot 25^2 = 3850$$

$$D(25) = -100 + 700 \cdot 25 - 14 \cdot 25^2 = 8650 \ \ ili$$

$$D(25) = P(25) - C(25) = 12.500 - 3850 = 8650$$

b) $$E_{C,X} = \frac{x}{100 + 50x + 4x^2} \cdot (50 + 8x) = \frac{50x + 8x^2}{100 + 50x + 4x^2}$$

$$E_{C,X} = 0 \ \ za \ \ x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = -\frac{50}{8} < 0 \ \text{ne dolazi u obzir}$$

$$E_{C,X} < 1 \quad , \quad 50x + 8x^2 < 100 + 50x + 4x^2 \quad , \quad x^2 < 25 \qquad x < 5$$

$$\lim_{x \to \infty} E_{C,X} = \lim_{x \to \infty} \frac{50x + 8x^2}{100 + 50x + 4x^2} = 2$$

Ec,x=0	x=0	C=100
0<E<1	0<x<5	100<C<450
E=1	x=5	C=450
1<E<2	5<x<+∞	450<C<+∞
E=2	$x \to +\infty$	$C \to +\infty$

c) $$E_{C,X} = 1 \quad \Rightarrow \quad x_e = 5$$

$$p(5) = 750 - 50 = 700$$

$$D(5) = -100 + 700 \cdot 5 - 14 \cdot 5^2 = 3050$$

$$D(5) - D(25) = 3050 - 8650 = -5600$$

28. Funkcija ukupnih troškova je $C = 3x^2 + 25$, a funkcija tražnje je $x = -\frac{p}{2} + 15$. Odrediti:

a) proizvodnju i cenu pri kojima se postiže maksimalna dobit i koliko ona iznosi

b) proizvodnju pri kojoj je ukupan prihod jednak ukupnim troškovima (gornju i donju granicu rentabilnosti).

a)

$$P = p \cdot x = (-2x + 30) \cdot x = -2x^2 + 30x$$

$$D = P - C = -2x^2 + 30x - 3x^2 - 25 = -5x^2 + 30x - 25$$

$$D' = -10x + 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

$$D'' = -10 < 0 \quad \Rightarrow \quad D_{\max}(3) = 20$$

pri $p = 24$

b)

$$D > 0$$

$$-5x^2 + 30x - 25 > 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 5$$

Interval rentabiliteta je pri proizvodnji koja se kreće od 1 do 5.

29. Za proizvod X date su funkcije troškova $C = 2x^2 + 4900$ i tražnje $x = -0,5p + 500$. Odrediti:

a) Interval rentabilnosti proizvodnje proizvoda X;

b) Optimalan obim proizvodnje i maksimalnu dobit;

c) Dobit pri minimalnim prosečnim troškovima;

d) Grafički prikazati dobit preko prihoda i troškova

a) $p = 1000 - 2x$, određujemo funkciju prihoda:

$$P = px = 1000x - 2x^2$$

Iz inverznog oblika funkcije tražnje funkcija dobiti $D = P - C$ postaje

$$D = -4x^2 + 1000x - 4900.$$

Nule funkcije dobiti $-4x^2 + 1000x - 4900 = 0$, odnosno jednačine $x^2 - 250x + 1225 = 0$ su $x_1 = 5$ i $x_2 = 245$, pa je interval $5 < x < 245$, u kome je $D > 0$, interval rentabiliteta proizvodnje proizvoda X.

b) Izvodna funkcija $D' = -8x + 1000$ ima nulu $x = 125$ za koju je $D'' = -8 > 0$. Prema tome, $x = 125$ predstavlja optimalni obim proizvodnje, tako da je

$$D_{\max} = D_{(125)} = 57600.$$

c) Funkcija prosečnih troškova $\overline{C} = 2x + \frac{4900}{x}$ ima prvi izvod

$$\overline{C}' = 2 - \frac{4900}{x^2},$$

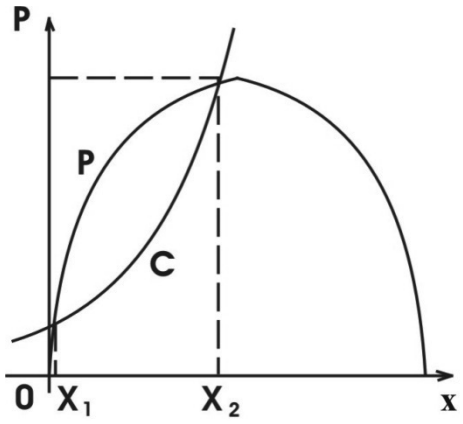
koji je za $x = 49,49$ jednak nuli a drugi izvod

$$C'' = \frac{9800}{x^3},$$

za $x = 49,49$ veći od nule $(C''_{(49,49)} > 0)$, pa je $x = 49,49$ obim proizvodnje proizvoda X za koji se postižu minimalni prosečni troškovi.

Dobit ostvarena za ovaj obim proizvodnje je $D_{(49,49)} = 34790$.

d)



30s. Dati su granični troškovi $C' = \frac{10}{x} + 5$. Naći ukupne troškove ako je $C(1) = 20$.

$$C = \int C'_{(x)}\, dx = \int \left(\frac{10}{x} + 5 \right) dx = 10 \ln x + 5x + A$$

$$C(1) = 20 = 10 \ln 1 + 5 + A \Rightarrow A = 15$$

$$C = 10 \ln x + 5x + 15$$



P I T A N J A Z A P O N A V L J A N J E

1. Šta utiče na funkciju tražnje?
2. Kako izgleda funkcija ponude?
3. Kako izgleda funkcija tržišta?
4. Šta su modeli tržišta?
5. Kako izgleda funkcija dobiti?
6. Šta je elastičnost funkcije prihoda?



KLJUČNI POJMOVI:

- Tražnja
- Ponuda
- Cena
- Tržište
- Dobit
- Prihod

VI - GLAVA

FINANSIJSKA MATEMATIKA

SADŽAJ OVOG POGLAVLJA JE:

- **PROCENTNI RAČUN**
- **PROMILNI RAČUN**
- **PROST INTERESNI RAČUN**
- **SLOŽEN INTERESNI RAČUN**

C I L J E V I U Č E N J A

Kada ovo poglavlje proučite znaćete:

1. Šta je procenat
2. Šta je promil
3. Kako se računa prosta kamata
4. Kako se računa složena kamata

12. FINANSIJSKA MATEMATIKA

12.1. PROCENTNI RAČUN

12.1.1.*Procentni račun od sto*

Procentni račun je račun proporcija. Ako posmatramo neku celinu koju ćemo zvati "glavnica" i označiti je sa **G**, i neki njen deo koji ćemo označiti sa **P** i zvati "procentni iznos" pogodno je znati koliki je deo procentnog iznosa u sto delova glavnice. Taj broj se naziva "procenat" ili "procentna stopa" i označava se sa **p**. Dakle, osnovna proporcija procentnog računa je:

$$G : P = 100 : P$$

ili ekvivalentno $G\,p = 100\,P$ odakle možemo dobiti sledeće tri jednakosti

$$G = \frac{100\,P}{p}, \qquad p = \frac{100P}{G}, \qquad P = \frac{Gp}{100}$$

koje se koriste za izračunavanje glavnice, procentne stope i procentnog iznosa ako su poznate redom procentni iznos i procentna stopa; procentni iznos i glavnica, odnosno glavnica i procentna stopa.
Napomena: procentna stopa je uvek neimenovan broj i pored brojne vrednosti se stavlja znak %.

Primer:

Izračunati:

a) glavnicu G ako je P=25 i p= 4%
b) procentnu stopu ako je G= 250 i P=50
c) procentni iznos P ako je G=300 i p=6%

a) $G = \frac{100 \cdot 25}{4} = 625,$ b) $p = \frac{100 \cdot 50}{250} = 20\%$

c) $P = \frac{300 \cdot 6}{100} = 18$

12.1.2.*Procentni račun više sto i niže sto*

U praktičnim zadacima vezanim za procentni račun ne pojavljuju se obavezno samo veličine definisane na početku već se mogu pojaviti i: glavnica uvećana (umanjena) za procentni iznos G+P (G-P) zajedno sa procentnom stopom a da treba izračunat P ili G.
Polazeći od relacije $G \cdot p = 100 \cdot P$ i dodajući levoj i desnoj strani ove relacije 100G odnosno Pp dobijamo

$$G \cdot p + 100 \cdot G = 100 \cdot P + 100 \cdot G \text{ odnosno } Gp + Pp = 100\,P + Pp$$

tj. $G(100 + p) = 100\,(P + G)$ odnosno $(G + P) \cdot p = (100 + p) \cdot P$

tj. dobijamo proporcije

$$(G + P) : (100 + p) = G : 100 \quad \text{odnosno} \quad (G + P) : (100 + p) = P : p$$

koje se zovu proporcije procentnog računa više sto. Odavde možemo dobiti:

$$G = \frac{100(G+P)}{100+p} \text{ odnosno} \qquad P = \frac{(G+P)\cdot p}{100+p}$$

Analogno, polazeći od relacijie $G \cdot p = 100 \cdot P$ i oduzimajući levoj i desnoj strani 100G odnosno Pp dobijamo proporcije

$$(G - P) : (100 - p) = G : 100 \quad \text{odnosno}$$
$$(G - P) : (100 - p) = P : p$$

koje se zovu proporcije procentnog računa niže sto. Iz njih se dobije:

$$G = \frac{100(G-p)}{100-p} \text{ odnosno} \qquad P = \frac{(G-P)\cdot p}{100-p}$$

Primer :

Cena robe povećana je prvi put za 10% pa zatim opet za 10% pa je zatim smanjena za 20%. posle smanjenja cena robe se prodaje za 10,68 din. Naći početnu cenu.

Cena robe posle sniženja iznosi

$G - P = 9{,}68$ sniženje je za 20%

pa je cena bila pre sniženja

$$G = \frac{100(G-P)}{100-p} = \frac{100 \cdot 9{,}68}{80} = \frac{968}{80} = 12{,}10$$

Ova cena je nastala posle drugog poskupljenja od 10%, dakle

$G_1 + P_1 = 12{,}10$ $p = 10\%$

pa je

$$G_1 = \frac{100(G_1 + P_1)}{110} = \frac{100 \cdot 12{,}10}{110} = 11$$

Ova cena je nastalaposle poskupljenja početne cene G_0 za prvo povećanje od 10% pa imamo

$$G_0 = \frac{100(G_0 + P_0)}{110} = \frac{100 \cdot 11}{110} = 10\,din$$

dakle, početna cena je bila 10 dinara.

12.2. PROMILNI RAČUN

Potpuno analogno u pojednim situacijama u praksi se koristi analogan račun ***procentnom računu – promilni račun.***
Osnovna proporcija peomilnog računa je sledeća proporcija

G : P = 1000 : p

gde su G - glavnica
P - promilni iznos
p - promilna stopa koja je i ovde neimenovan broj uz koji se stavlja znak ‰.

Obrasci u primeni su potpuno analogni kao kod procentnog računa.

12.3. PROST INTERESNI RAČUN

12.3.1.Interesni račun od sto

U poslovnom svetu normalna je pojava pozajmljivanje novca ili roba (što se opet izražava novcem), tj. kreditiranje. Sama reč kredit je latinskog porekla, *credere,* što znači dati na zajam, verovati, uzdati se. Kredit je, dakle, poverenje u dužnika da će tu obavezu izmiriti. Naknada koju dužnik plaća poveriocu kredita za uslugu pozajmljivanja zove se interes ili kamata. Interes se ugovara između poverioca i dužnika tako što se dužnik onavezuje da će za svaku godinu (ili neki drugi rok) platiti poveriocu određen broj dinara na svakih 100 dinara pozajmljene sume. Pozajmljena suma na koju se računa interes se zove kapital ili glavnica – obeležava se sa *K*. Kamata (interes) koja se plaća na svakih sto dinara pozajmljene sume za jednu godinu zove se interesna stopa i obeležava se sa *p* (to je danas procenat). kamata ili interes koja se plaća na celu sumu *K* za određeno vreme obeležava se sa *i*.

Broj godina obeležava se sa *g*.
Broj meseci obeležava se sa *m.*
Broj dana obeležava se sa *d.*

Inača broj dana po mesecima može da se izračunava po kalendaru ili da se pretpostavi da svaki mesec ima po trideset dana. u prvom slučaju se računa da godina ima 365 dana a u drugom 360 dana. Ovo se uvek dogovara izmeđ u dužnika i poverioca kapitala.
Osnovne proporcije prostog inetersnog računa su vrlo slične osnovnim proporcijama procentnog računa – jedina razlika je u tome što ovde imamo i faktor vremena jer veličina interesa zavisi od vremena na koji je novac dat. te proporcije su:

K : i = 100 : pg g - broj godina

K : i = 1200 : p m m – *broj meseci*

K : i = 36000 : pd *d* – broj dana, godina ima 360 dana

K : i = 36500 : pd *d* – broj dana, godina ima 365 dana

Iz ovih relacija mogu se lako dobiti sledeće relacije:

K p d = 100 *i*

$K\,p\,m = 1200\,i$
$K\,p\,d = 36000\,i$
$K\,p\,d = 365\,i$

odakle se lako dobijaju nepoznate veličine za *K;p;g; (m,d) ;i*
ako su date redom *(p,g,i); (K,g,i); (K,p,i); (K,p,g).*

p – je kamatna stopa uvek na godišnjem nivou.

U pojedinim izračunavanjima se koriste i veličine kamatnog broja $K_{br} = K\,d$ i kamatnih ključeva

$$D = \frac{36000}{p} \quad \text{ili} \quad D_1 = \frac{36500}{p}$$

Iz prethodnih relacija sa ovim veličinama lako se dobijaju izrazi

$i_{(360)} = \frac{K_{br}}{D}$ - interes ako se godina računa sa 360 dana

odnosno

$i_{(365)} = \frac{K_{br}}{D}$ - interes ako se godina računa sa 365 dana

Veza između ovih interesa (ako se godina računa 360 ili 365 dana) data je relacijom

$$i_{(365)} = i_{(360)} - \frac{i(360)}{73}$$

koja se lako dokazuje polazeći od njihovih definicija.

Primer:

Izračunati

a) 12% kamatu na sumu od 2000 dinara za 6 godina
b) 8% kamatu na sumu od 5000 za 9 meseci
c) 15% kamatu na sumu od 9000 od 1.maja do 10.juna
d) kapital koji će se za 3 godine uz 10% kamatnu stopu doneti kamate 300 din

e) vreme kada je vraćen zajam od 60000 dinara dat 1. septembra ako je isplaćena kamata od 120 dinara sa interesnom stopom od 6% (godina ima 360 dana)

Rešenje

a) Dato je p = 12%, K = 2000 din, g = 6godina, pa je

$$i = \frac{Kpg}{100} = \frac{2000 \cdot 12 \cdot 6}{100} = 1440 \text{ dinara}$$

b) Dato je p = 8%, K = 5000 din, m = 9, pa je

$$i = \frac{Kpm}{1200} = \frac{5000 \cdot 8 \cdot 9}{1200} = 300 \text{ dinara}$$

c) Dato je p = 15%, K = 9000 din, d = 40, ako godinu računamo na 360 i mesec 30 dana iimamo d = 41 ako godinu računamo na 365 dana i mesece po kalendaru.

U prvom slučaju je:

$$i_{(360)} = \frac{K \cdot p \cdot d}{36000} = \frac{9000 \cdot 15 \cdot 40}{36000} = 150 \text{ din}$$

U drugom slučaju je:

$$i_{(365)} = \frac{K \cdot p \cdot d}{36500} = \frac{9000 \cdot 15 \cdot 41}{36500} = 151 \text{ din}$$

Imamo i slučaj kada mesece radimo po kalendaru a broj dana u godini 360:

$$i_{(360)} = \frac{K \cdot p \cdot d}{36000} = \frac{9000 \cdot 15 \cdot 41}{36000} = 153{,}7 \text{ din}$$

d) Dato je g = 3, p = 10%, i = 300 din, K = ?

$$K = \frac{100i}{p \cdot g} = \frac{100 \cdot 300}{10 \cdot 3} = 1000 \text{din}$$

e) Dato je K= 60000 din, i =120 din, p = 6%

$$d = \frac{36000 \cdot i}{K \cdot p} = \frac{36000 \cdot 120}{60000 \cdot 6} = 12 \text{dana}$$

Dakle, uz pretpostavku da godina ima 360 dana novac je vraćen 12.09

12.3.2.Interesni račun više sto i niže sto

Interesni račun više sto se primenjuje kada je dat kapital uvećan za interes tj. kada je dato *K + i* a interesni račun niže sto kada imamo dat kapital umanjen za interes *K - i.* potpuno analogno kao u slučaju procentnog računa više i niže sto u zavisnosti kako je dato vreme imamo sledeće proporcije sa + za račun više sto sa – za račun niže sto:

za vreme dato u godinama (1)

$$(K \pm i) : (100 \pm p \cdot g) = K : 100$$

i $$(K \pm i) : (100 \pm p \cdot g) = i : p \cdot g$$

za vreme dato u mesecima (2)

$$(K \pm i) : (1200 \pm p \cdot m) = K : 1200$$

i $$(K \pm i) : (1200 \pm p \cdot m) = i : p \cdot m$$

za vreme dato u danima, godina ima 360 dana (3)

$$(K \pm i) : (36000 \pm p \cdot d) = K : 36000$$

i $$(K \pm i) : (36000 \pm p \cdot d) = i : p \cdot d$$

za vreme dato u danima, godina ima 365 dana (4)

$$(K \pm i) : (36500 \pm p \cdot d) = K : 36500$$

i $$(K \pm i) : (36500 \pm p \cdot d) = i : p \cdot d$$

Iz ovih relacija se lako računaju nepoznate veličine koje se pojavljuju u ovakvim zadacima, iz poznatih na primer iz (1) imamo

$$K = \frac{(K \pm i) \cdot 100}{100 \pm p \cdot g}, \qquad i = \frac{(K \pm i) p \cdot g}{100 \pm p \cdot g}$$

Iz (2) imamo

$$K = \frac{(K \pm i) \cdot 1200}{1200 \pm p \cdot m}, \qquad i = \frac{(K \pm i) p \cdot m}{1200 \pm p \cdot m}$$

Iz (3) imamo

$$K = \frac{(K \pm i) \cdot 36000}{36000 \pm p \cdot d}, \qquad i = \frac{(K \pm i) p \cdot d}{36000 \pm p \cdot d}$$

Iz (4) imamo

$$K=\frac{(K\pm i)\cdot 36500}{36500\pm p\cdot d},\qquad i=\frac{(K\pm i)p\cdot d}{36500\pm p\cdot d}$$

Primer:

Po odbitku interesa sa godišnjom interesnom stopom 12% ya 5 meseci dužnik je vratio 3800 din. Izračunati koliki je dug i koliki je interes?

Dato je *K- i* =3800, *p* = 12%, *m* = 5

$$i=\frac{(K\pm i)p\cdot m}{1200\pm p\cdot m}=\frac{3800\cdot 12\cdot 5}{1200-60}=\frac{3800}{19}=200$$

Dakle, dug je 3800+200=4000

Do istog rezultata se može doći i primenom obrasca

$$K=\frac{(K\pm i)\cdot 1200}{1200\pm p\cdot m}=\frac{3800\cdot 1200}{1140}=4000$$

a onda je *i = K - (K-i)* = 4000 – 3800 = 200

Primer :

Zajedno sa kamatom uz interesnu stopu na godišnjem nivou od 15% dužnik je posle 4 meseca vratio 4200 din. Izračunat koliki je bio dug i koliki je interes?

Dato je *K + i* = 4200, *p* =15%, *m* = 4

$$K=\frac{(K\pm i)\cdot 1200}{1200\pm p\cdot m}=\frac{4200\cdot 1200}{1200+15\cdot 4}=\frac{4200\cdot 1200}{1260}=4000$$

Dakle, na ime interesa dužnik je platio 200 din.

12.3.3.Izračunavanje interesa na više suma

Ako je vlasnik kapitala dao više suma na zajam na različito vreme sa istom ili različitom kamatnom stopom tada ako hoćemo da izračunamo interes na ukupan dati novac izvuršimo jednostavno sabiranje pojedinačnih interesa za svaku sumu, dakle:

(1) Date sume su $K_1, K_2, \ldots K_n$

Vreme na koje su date $g_1, g_2, \ldots g_n$

Kamatna stopa *p* ista za sve

$$i = i_1 + \ldots + i_n = \frac{K_1 \cdot p \cdot g_1}{100} + \ldots + \frac{K_n \cdot p \cdot g_n}{100} = \frac{p}{100} \sum_{k=1}^{n} K_k \cdot g_k$$

(2) Date sume su $K_1, K_2, \ldots K_n$

Vreme na koje su date $g_1, g_2, \ldots g_n$

Kamatne stope su $p_1, p_2 \ldots p_n$

$$i = i_1 + \ldots + i_n = \frac{K_1 \cdot p_1 \cdot g_1}{100} + \frac{K_2 \cdot p_2 \cdot g_2}{100} + \ldots + \frac{K_n \cdot p_n \cdot g_n}{100} = \frac{p}{100} \sum_{k=1}^{n} K_k \cdot g_k$$

Analogni obrasci se mogu dati i za vreme dato u mesecima – danima.

Primer:

Banka je dala 10000 dinara sa kamatnom stopom od 15% na 4 meseca dužniku A, 15000 dinara sa kamatnom stopom 12% na 3 meseca dužniku B i 40000 dinara sa kamatnom stopom od 10% na 6 meseci dužniku C. Naći interes koji će banka dobiti.

$K_1=10000$	$K_2=15000$	$K_3=40000$
$m_1=4$	$m_2=3$	$m_3=6$
$p_1=15$	$p_2=12$	$p_3=10$

$$i = \frac{1}{1200} \sum_{k=1}^{3} K_k \cdot m_k \cdot p_k = \frac{10000 \cdot 4 \cdot 15 + 15000 \cdot 3 \cdot 12 + 40000 \cdot 6 \cdot 10}{1200} = 2950$$

12.4. SREDNJI ROK PLAĆANJA

Ukoliko je neko pozajmio novac na više mesta u planiranju izmirenja obaveza nastalih pozajmicama potrebno je ponekad izračunat srednji rok plaćanja svih tih obaveza. pri tome računamo u tri različita slučaja.

I slučaj:

Obaveze i kamatne stope su jednake a vreme je različito, dakle imamo n istih obaveze, sa istom kamatnom stopom a sa vremenima d_1, d_2, …, d_n u trenutku računanja i srednje vreme je aritmetička sredina

$$d_s = \frac{d_1 + d_2 + ... + d_n}{n}$$

II slučaj:

Obaveze su različite, vremena različita, a kamatne stope iste, dakle imamo *n* obaveza K_1,K_2, …, K_n sa vremenom d_1,d_2, …,d_n i ista kamatna stopa, pa je srednje vreme ponderisana aritmetička sredina

$$d_s = \frac{K_1 d_1 + K_2 d_2 + ... + K_n d_n}{K_1 + K_2 + ... + K_n}$$

III slučaj:

Obaveze su različite, vremena različita, različite kamatne stope, tj. imamo obaveze K_1,K_2, …, K_n sa vremenom d_1,d_2, …,d_n i kamatnim stopama respektivno p_1,p_2, …, p_n pa je opet srednje vreme ponderisana aritmetička sredina:

$$d_s = \frac{K_1 p_1 d_1 + K_2 p_2 d_2 + ... + K_n p_n d_n}{K_1 p_1 + K_2 p_2 + ... + K_n p_n}$$

Napomena: III slučaj je najoštiji i prva dva se sadrže u njemu.

Primer:

Dužnik je u obavezi da plati sledeće fakture sa plativošću u danima i kamatna stopa za svakog dato u tabeli

K_k	10000	12000	15000	20000	25000
d_k	15	20	25	30	20
p_k	8	15	12	8	10

Dužnik želi da plati ceo dug odjednom sumom iznosa na fakturama. Kada to može da učini?

Rešenje:

To je moguće učiniti na dan srednjeg vremena plaćanja kada se izravnaju plaćene i neplaćene obaveze.

$$ds = \frac{\sum_{k=1}^{5} K_k \cdot p_k \cdot d_k}{\sum_{k=1}^{5} K_k \cdot p_k} = \frac{10000 \cdot 15 \cdot 8 + 12000 \cdot 20 \cdot 15 + 15000 \cdot 25 \cdot 12 + 20000 \cdot 30 \cdot 8 + 25000 \cdot 20 \cdot 10}{10000 \cdot 8 + 12000 \cdot 15 + 15000 \cdot 12 + 20000 \cdot 8 + 25000 \cdot 10}$$

$$= 22{,}47\, dana$$

Napomena: Ovde se u "izravnavanju" roka plaćanja podrazumeva da dužnik ne plaća kamatu na obaveze koje je isplatio posle isteka roka plaćanja i da ne traži kamatu na sredstva za obaveze uplaćena pre roka kao i to da su te kamate iste i za dužnika i za poverioca.

12.5. ESKONTOVANJE

Plaćanja u platnom prometu između privrednih subjekata mogu biti:

a) na dan dospele obaveze
b) posle dospele obaveze – kasnije
c) pre dospele obaveze – ranije

U slučaju a) plaća se tačno onoliko koliko je obaveza – njena nominalna vrednost. U slučaju b) plaća se interes na zakašnjenje. Obračunava se od dana dospeća do dana plaćanja i dodaje se nominalnoj vrednosti. U slučaju c) obračunava se interes na ranije plaćenu obavezu i oduzima od nominalne vrednosti.

Interes u ovim situacijama se zove ***eskont*** a njegov obračun ***eskontovanje.***

12.5.1.Komercijalni eskont

Eskont računat interesnim računom od sto na nominalnoj vrednosti nekog efekta (menica, kredit…) za vreme od dana eskontovanje do dana dospeća zove se komercijalni eskont i obeležava se sa Ek.

Ako obeležimo sa K_n nominalnu vrednost eskonta sa danom dospeća t=n, sa K_0 eskontovanu vrednost efekta u vremenu t=0, n je broj dana do dospeća efekta a p je eskontna stopa, tada je

$$E_k = \frac{K_n \cdot p \cdot n}{36000} = \frac{K_n \cdot n}{D} \qquad \left(D = \frac{36000}{n} \right)$$

i $$K_0 = K_n - E_k = K_n - \frac{K_n \cdot n}{D} = \frac{K_n \cdot (D - n)}{D}$$

Dakle, K_0 eskontovana vrednost, i ona je umanjena vrednost za eskont od dana eskontovanja do dana dospeća. Eskontovana vrednost se zove sadašnja vrednost efekta.

12.5.2.Racionalni eskont

Nije teško videti da za računanje eskontovane vrednosti u komercijalnom eskontu radimo sa ra;unom od sto a da nam je nominalna vrednost veća (ili manja) od prave sadašnje eskontovane. Dakle, komercijalni eskont je eskont sa izvesnom greškom. Zbog toga uvodimo pojam racionalnog eskonta.

Racionalni eskont je interes aktuelne racionalne vrednosti. Obeležimo sa

K_0 - aktuelnu racionalnu vrednost efekta
K_n - nominalnu vrednost efekta
n - broj dana
p - interesnu stopu
E_r - racionalni eskont

tada je

$$Er = \frac{K_0 \cdot p \cdot n}{36000} = \frac{K_0 \cdot n}{D} \qquad \text{i} \qquad K_n = K_0 + \frac{K_0 \cdot n}{D}$$

Odavde je

$$K_0 = \frac{K_n \cdot D}{D + n} \quad \text{odnosno} \qquad Er = \frac{n \cdot K_n}{D + n}$$

12.6. JEDNAKOST EFEKATA

Kaže se da su dva efekta jednaka u određenom trenutku ako eskontovana istom stopom u tom trenutku imaju istu komercijalnu ili istu racionalnu aktuelnu verdnost.

Epoha (dan, mesec, godina) kada su kapitali jednaki zove se datum ekvivalencije dva kapitala. Neka data dva efekta sa nominalnim vrednostima K_n i K_n' imaju n i n´ dana respektivno pa su komercijalne eskontovane vrednosti:

$$K_0 = \frac{K_n (D - n)}{D} \qquad \text{i} \qquad K_0' = \frac{K_{n'} (D - n')}{D}$$

kako se zahteva $K_0=K_0'$ to će biti za

$$K_n(D-n)=K_n'(D-n')$$

Dakle, jednakost nastaje za one n i n´ koji zadovoljavaju prethodnu jednakost.

Ako isti postupak provedemo za racionalne eskontovane vrednosti dobijamo da će se jednakost postići za n i n´ koji zadovoljavaju

$$\frac{K_n}{D+n}=\frac{K_n'}{D+n'}$$

i važi stav da dva kapitala ne mogu biti istovremeno jednaka u komercijalnom i racionalnom eskontu.

12.7. SLOŽENI INTERESNI RAČUN

Dekurzivno računanje vremena

Pod složenim interesnim računom se podrazumeva računanje kamate na neki kapital u određenom periodu dodavanjem kapitalu tako da zajedno sa početnim kapitalom nadalje donosi kamatu. Ovo obračunavanje i dodavanje interesa kapitalu zove se kapitalisanje i može biti:

godišnje	(per annum) skraćeno (p.a.)
polugodišnje	(per semestre) skraćeno (p.s.)
tromesečno	(per quartale) skraćeno (p.q.)
mesečno	(per mensem) skraćeno (p.m.)

U praksi je najčešće godišnje i polugodišnje.

Računanje i odobravanje kamate na kraju određenog vremenskog perioda zove se dekurzivno računanje interesa i uz kamatnu stopu se obeležava sa *d*.
Pored ovakvog računanja kamata postoji i računanje kamata na početku svakog predstojećeg perioda (tako banke daju zajmove) i zove se anticipativno računanje interesa koje obeležavamo sa slovom a uz interesnu stopu.

12.7.1.Faktor akumulacije

Izračunavanje krajnje vrednosti kapitala

Vrednost kapitala koja se daje pod interes zove se sadašnja vrednost i obeležava se sa K. Vrednost kapitala posle određenog broja u n periodu na kojem je kapitalisan zove se krajnja vrednost i obeležava se sa K_n.

Izračunajmo K_n uz pretpostavku da je K dinara dato uz kamatnu stopu p i sa godišnjim kapitalisanjem.
Posle prve godine imamo interes

$$i_1 = \frac{Kp}{100}$$

koju dodajemo na početni kapital i dobijamo

$$K_1 = K + \frac{Kp}{100} = K(1 + \frac{p}{100})$$

Na kraju druge godine imamo ineteres

$$i_2 = \frac{K_1 p}{100} = K(1 + \frac{p}{100}) \frac{p}{100}$$

koji dodajemo na K_1 i dobijamo

$$K_2 = K_1 + i_2 = K\left(1+\frac{p}{100}\right) + K\left(1+\frac{p}{100}\right)\frac{p}{100} = K\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$$

Na isti način dobijamo da je

$$K_3 = K\left(1+\frac{p}{100}\right)^3, \quad K_4 = K\left(1+\frac{p}{100}\right)^4 \ldots$$

i uopšte

$$K_n = K(1 + \frac{p}{100})^n .$$

Izraz $1+\frac{p}{100}$ se obeležava sa *r* i zove se interesni činilac pa poslednja jednačina postaje $K_n = Kr^n$ pri čemu je r^n predstavlja krajnju vrednost jedne novčane jedinice date pod interes sa kamatnom stopom *p* godišnje na dekurzivno kapitalisanje od *n* godina, i naziva se **faktor akumulacije**.
U slučaju da se kapitalisanje vrši m puta godišnje sa godišnjom kamatom od p procenata tada se procenat umanjuje m puta a stepen se uvećava m puta, dakle, jednačina računanja kapitala posle n godina ima oblik

$$K_{mn}=K\left(1+\frac{p}{m\cdot 100}\right)^{mn}$$

Ovakve stope na kraći period od godine zovu se proporcionalne.

Primer:

Naći sumu na koju naraste 5000 dinara pri a)godišnjem, b) polugodišnjem i c) tromesečnom kapitalisanju sa godišnjom stopom od 4% na 5 godina

a) $K_5 = 5000 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^5 = 6083,26din$

b) $K_{10} = 5000 \cdot \left(1 + \frac{4}{2 \cdot 100}\right)^{5 \cdot 2} = 6094,95din$

a) $K_{20} = 5000 \cdot \left(1 + \frac{4}{4 \cdot 100}\right)^{5 \cdot 4} = 6100,95din$

Napomena: Zbog prilično komplikovanog računanja vrednosti, u praksi u bankarskim poslovima gde su ovi računi česti, za ovaj račun se ne koriste logaritmi i loaritamske tablice već tablica I interesa na interes koja sadrži krajnje vrednosti jednog dinarana kraju 1,2,...,n godine uz dati procenat. Dakle:

$$r = 1 + \frac{p}{100} = I_p^1$$

$$r^2 = (1 + \frac{p}{100})^2 = I_p^2$$

$$r^n = (1 + \frac{p}{100})^n = I_p^n \quad \text{i}$$

$K_n = K_0 r^n$ se zamenjuje sa $K_n = K_0 \cdot I_p^n$ pri godišnjem kapitalisanju sa kamatom od *p* %. Ako se kapitalisanje vrši m puta godišnje sa stopom p% godišnje tada se vrednosti kapitala na kraju n-te godine računa na sledeći način:

$K_{mn} = K_0 I_{\frac{p}{m}}^{mn}$.

12.7.2.*Generalizacija faktora akumulacije*

U primeru iz prethodnog poglavlja se vidi da ako kapitalisanje vršimo češće dobijamo veće sume novca na kraju. Šta bi bilo ako bi kapitalisanje vršili neprekidno?

Polazeći od formule

$$K_{mn}=K_0\left(1+\frac{p}{m\cdot 100}\right)^{mn}$$

tada bi se m neograničeno uvećavalo! Imali bi, dakle

$$\overline{K}_n=\lim_{m\to\infty}K_0\cdot\left(1+\frac{p}{m\cdot 100}\right)^{m\cdot n}$$, odnosno

$$\overline{K}_n=K_0\cdot\lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{p/100}{m}\right)^m\right]^n=K_0\left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{p/100}{m}\right)^m\right]^n$$

$$\overline{K}_n=K_0\left(e^{\frac{p}{100}}\right)^n=K_0e^{\frac{pn}{100}}$$

Broj $e^{\frac{p}{100}}$ se zove dekurzivni interesni činilac a $e^{\frac{p}{100}n}$ se zove faktor akumulacije posle n godina pri neprekidnom ukamaćivanju.

12.7.3.*Konformna (ekvivalentna) stopa*

Iz prethodnih poglavlja smo videli da se uvećanjem broja kapitalisanja povećava krajnja vrednost kapitala i da je ona najveća pir neprekidnom kapitalisanju. Prirodno je postaviti pitanje kako se može vršiti kapitalisanje više puta (na primer m puta) u toku godine i da se isplati ista količina novca kao pri godišnjem kapitalisanju?
Odgovor na ovo pitanje je sledeći: ista količina novca pri godišnjem i češćem kapitalisanju će se postići pomoću evivalentne kamatne stope.

Neka je: i - godišnja kamatna stopa
i_m – ekvivalentna kamatna stopa za m kapitalisanja godišnje

Neka je prema prethodnom zahtevu kapital isti na kraju n-te godine:

$K_0(1+i)^n=K_0(1+i_m)^{mn}$ odakle je

$(1+i)^n=(1+i_m)^{mn}$ odnosno posle korenovanja leve i desne strane

$$(1+i)=(1+i_m)^m$$ odnosno

$$1+i_m=(1+i)^{\frac{1}{m}}$$ a odatle

$$i_m=(1+i)^{\frac{1}{m}}-1$$

tako, na primer, ako je kapitalisanje polugodišnje sa kamatnom stopom od 6% tada je ekvivalentna kamatna stopa

$$i_2=\left(1+\frac{6}{100}\right)^{\frac{1}{2}}-1=2{,}956\%$$

Očigledno, ova stopa je nešto niža nego proporcionalna koja bi u ovom slučaju bila 3%.

Ovo važi i u opštem slučaju što se lako dokazuje koristeći se binarnim obrascem. Polazeći od relacije

$$1+i=(1+i_m)^m$$

i rastavljajući desnu stranu po binarnom obrascu imamo

$$1+i=\binom{m}{0}+\binom{m}{1}i_m+\binom{m}{2}i_m^2+\ldots+\binom{m}{m}=1+m\cdot i_m+\binom{m}{2}i_m^2+\ldots+\binom{m}{m}i_m^m>1+m\cdot i_m$$

odavde je $i>m\cdot i_m$ odnosno $\frac{i}{m}>i_m$.

Dakle, proporcionalna stopa je veća od ekvivalentne.

12.7.4.*Eskontni faktor*

Iz jednačine $K_n=K_0(1+i)^n=K_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ odnosno

$$K_{mn}=K_0\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}=K_0\left(1+\frac{p}{m\cdot 100}\right)^{mn}$$ odnosno

$$\overline{K}_n=K_0e^{\frac{pn}{100}}$$

dobijamo krajnju vrednost kapitala posle *n* godina pri dekurzivnom godišnjem, *m* puta u godini i neprekidnom kapitalisanju sa godišnjom kamatnom stopom *p*.

U primenama je trebalo rešavati i obrnut problem: koliko treba uložiti novca u sadašnjem trenutku da bi posle n godina dobili željenu svotu novca K_n,

odnosno K_{mn} odnosno $\overline{K}_n$ u zavisnosti od vrste kapitalisanja. Jasno, ovo se lako rešava i imamo

$$K_0 = \frac{K_n}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n} \quad \text{odnosno}$$

$$K_0 = \frac{K_{mn}}{\left(1+\frac{p}{m100}\right)^{mn}} \quad \text{odnosno}$$

$$K_o = \frac{\overline{K}_n}{e^{\frac{pn}{100}}} = \overline{K}_n e^{-\frac{pn}{100}}$$

Dakle, početna vrednost koju treba uložiti se dobija kada se željena vrednost podeli sa faktorom akumulacije odnosno ako se željena vrednost pomnoži sa recipročnom vrednošću faktora akumulacije koji se zove još i **eskontni faktor.** Radi lakšeg računanja i eskontni faktor se zadaje tablično (za praktični račun lakše je množiti nego deliti) i dat je tablica II.

Primer :

Koliko treba uložiti novca danas da bi posle 10 godina sa kamatnom stopom 8% uz godišnje kapitalisanje primili 5000 din?

$$K_0 = \frac{5000}{\left(1+\frac{8}{100}\right)^{10}} = 2316\,din$$

12.7.5.*Faktor dodajnih uloga*

U prethodnom razmatranju složenog kamatnog računa izračunavali smo krajnju vrednost kapitala za dati početni kapital dekurzivno na n godina sa kamatnom stopom od p procenata ili obrnuto, izračunavali smo koliki kapital treba uložiti da bi imali određenu krajnju vrednost posle n godina. Dakle, uvek jedan ulog.

Ovde ćemo posmatrati situacije kada imamo ne jedan već više uloga, koji mogu biti u istim vremenskim intervalima kao i u različitim, zatim isti po veličini kao i različiti.

Ulaganje početkom obračunskog perioda

Pretpostavimo da na početku svake godine ulažemo K dinara i neka banka na kraju svake godine vrši kamaćenje sa p% kamatnom stopom. kojom ćemo sumom raspolagati na kraju n-te godine.
Očigledno ćemo imati sledeću situaciju:

Prva uložena suma posle n-te godine je postala $K\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$

Druga uložena suma donosi $K\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1}$

Treća uložena suma postaje $K\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1}$

...

Zadnji ulog postaje $K\left(1+\frac{p}{100}\right)$

Dakle, na kraju n-te godine imamo $\left(1+\frac{p}{100}=r\right)$

$$S_n = K\cdot r^n + K\cdot r^{n-1} + \ldots + K\cdot r = K\cdot r\left(r^{n-1}+r^{n-2}+\ldots+r+1\right) = K\cdot r\frac{r^n-1}{r-1}$$

Napomena 1: Zadnja relacija se može dobiti i na sledeći način:

$S_n = K\cdot r^n + K\cdot r^{n-1} + \ldots + K\cdot r^2 + K\cdot r$ i posle množenja sa r imamo $r\cdot S_n = K\cdot r^{n+1} + K\cdot r^n + \ldots + K\cdot r^3 + K\cdot r^2$ a odavde

$rS_n - S_n = K\cdot r^{n+1} - K\cdot r$ što daje

$S_n(r-1) = Kr(r^n-1)$ odnosno

$$S_n = \frac{K\cdot r(r^n-1)}{r-1}$$

Napomena 2: Izraz $\frac{r\left(r^n-1\right)}{r-1}$ je očigledno zbir iz I tablice od 1 do n za određeni procenat a koji se takođe zadaje tabelarno, tablica III, tj. važi:

$$\frac{r\left(r^n-1\right)}{r-1}=III_p^n$$

i naš osnovni uzraz se računa na sledeći način

$$S_n = K \cdot III_p^n$$

Primer:

Neko ulaže početkom svake godine 10000 dinara. Koliko će imati u banci na kraju iste godine ako se na ime interesa na interes računa po 4% uz godišnje dekurzivno kapitalisanje?

Ovde je K=10000, p=4%, r=1,04, n=5, S_5=?

Dakle, $S_5 = \frac{10000 \cdot 1{,}04\left(1{,}04^5-1\right)}{1{,}04-1} = 56329{,}8din$

Ulaganje krajem obračunskog perioda

Ako se krajem svake godine ulaže K dinara sa p% (pa) d interesa na interes pri godišnjem kapitalisanju koliko ćemo imati novca posle n godina?
Analizirajmo: uloženih K dinara na kraju prve godine posle n godina postaje Kr^{n-1}
drugi ulog od K dinara na kraju je Kr^{n-2}
treći ulog daje Kr^{n-3} i tako dalje poslednji ulog od K dinara se ne kapitališe. Dakle, posle n godini imamo:

$$S_n' = K \cdot r^{n-1} + K \cdot r^{n-2} + ... + K =$$

$$= K(r^{n-1} + r^{n-2} + ... + r + 1) = K\frac{r^n - 1}{r-1}$$

Napomena 1: Ako izraz $r^{n-1} + r^{n-2} + ... + r$ zamenimo tabličnim izrazom III_p^{n-1} tada S_n' možemo računati i na sledeći način

$$S_n' = K\left(1 + III_p^{n-1}\right)$$

Isto tako, između S_n i $S_n^{'}$ mogu da se uspostave sledeće veze:

Uz $S_n^{'} = K\frac{r^n - 1}{r - 1}$ množenjem leve i desne strane sa r dobijamo $r \cdot S_n^{'} = K \cdot r\frac{r^n - 1}{r - 1}$ tj.

$$r \cdot S_n^{'} = S_n \text{ ili}$$

$$S_n^{'} = \frac{S_n}{r} \text{ odnosno}$$

$$S_n^{'} = K \cdot III_p^n \cdot II_p^1.$$

Isto tako i

$$S_n^{'} = K\frac{r^n - 1}{r - 1} = K\frac{I_p^n - 1}{1 + \frac{p}{100} - 1} = K \cdot \frac{100}{p}\left(I_p^n - 1\right)$$

Napomena 2: Za slučajeve kapitalisanja češćih nego što su godišnja kapitalisanja pri ovom računu sa tablicom *III* umesto III_p^n koristi $III_{\frac{p}{m}}^{mn}$ ako je broj kapitalisanja m na godišnjem nivou a godišnja kamatna stopa iznosi p (n je naravno broj godina).

Ulaganje je češće (ređe) od kapitalisanja

U slučajevima kada su ulaganja neravnomerno raspoređena i različita po veličini a računaju se na određeni broj godina tada možemo postupiti na sledeći način: Posle svakog ulaganja kapital se preračunava na krajnji datum te godine i posle se izvrši uobičajeni postupak računa godine za godinu. Ako je ulaganje ređe od kapitalisanja tada se kapitalisanje vrši sa odgovarajućom kamatnom stopom $\frac{p}{m}$ (m je broj kapitalisnja) za m-n period.

Primer:

Ulagano je početkom svakog polugodišta po 10000 dinara u banku koja plaća 6% kamate i vrši godišnje kapitalisanje u trajanju od 5 godina. Koliko novca će biti posle tog perioda?

Na kraju prve godine kada se vrši kapitalisanje ćemo imati kapitalisanje za prvi ulog za celu godinu a za drugi kapitalisanje za pola godine tj.

$$K_1 = 10000\left(1+\frac{6}{100}\right)+10000\left(1+\frac{6\cdot 6}{1200}\right)=20900din$$

Dakle, na kraju svake godine će biti novog novca K_1=21000 dinara, odnosno imađemo

$$S_5' = 21000\left(1+III_6^4\right)=20900\cdot 5{,}6371=117815{,}4$$

Napomena: Ukoliko na primer u banku ulažemo početkom svakog od m perioda u toku jedne godine po K dinara sa godišnjom kamatnom stopom p onda ćemom na kraju godine imati ulog od

$$K_1 = K\left(m+\frac{p(m+1)}{200}\right)$$

Zaista, prvi ulog se kapitališe u potpunosti i na kraju imamo $K(1+\frac{p}{100})$

drugi ulog će postati $K\cdot\left(1+\frac{p\left(12-\frac{12}{m}\right)}{1200}\right)$

treći ulog će postati $K\cdot\left(1+\frac{p\left(12-\frac{12}{m}\cdot 2\right)}{1200}\right)$

...

m-ti ulog će postati $K \cdot \left(1 + \frac{p\left(12 - \frac{12}{m} \cdot (m-1) \right)}{1200} \right)$

I zbir

$$K_1 = K\left(m + \frac{p}{100} + \frac{p\left(12 - \frac{12}{m} \right)}{1200} + ... + \frac{p\left(12 - \frac{12}{m}(m-1) \right)}{1200} \right) =$$

$$= K\left(m + \frac{p}{100} + \frac{p\left(12m - \frac{12}{m}(1 + 2 + ... + (m-1)) \right)}{1200} \right) =$$

$$= K\left(m + \frac{p}{100} + \frac{6p(2m - m + 1)}{1200} \right) = K\left(m + \frac{p}{100} + \frac{p(m-1)}{200} \right) =$$

$$= K\left(m + \frac{2p + pm - p}{200} \right) = K\left(m + \frac{p(m+1)}{200} \right)$$

Faktor aktuelizacije dekurzivnih uloga

Neka krajem prve, druge, ...,n-te godine ulažemo K_1,K_2, ...,K_n dinara uz godišnje kapitalisanje sa kamatnom stopom *p* procenata. Postavlja se pitanje: Koliko novca bi trebalo uložiti početkom prve godine da na kraju n-te godina uz iste uslove imamo isti kapital?

Dakle, ako je taj nepoznati kapital K_0 tada je

$$K_0 \cdot r^n = k_1 \cdot r^{n-1} + k_2 \cdot r^{n-1} + ... + k_n \text{ odakle je}$$

$$K_0 = \frac{k_1}{r} + \frac{k_2}{r^2} + ... + \frac{k_n}{r^n}$$

Ako je $k_1 = k_2 = ... = k_n = k$ tada je

$$K_0 = \frac{k\left(r^n - 1 \right)}{r^n (r-1)}$$

pri tome se $\frac{\left(r^n-1\right)}{r^n\left(r-1\right)}$ zove ***faktor aktuelizacije***.

Danas faktor aktuelizacije je vrednost ulaganja na početku prve godine (zove se još i diskontovana vrednost) ekvivalentna ulaganjima od po jedne novčane jedinice krajem prve,...,n-te godine.

Napomena: Radi lakšeg računa u praksi se koristi tablica za izraz $\frac{r^n-1}{r^n\left(r-1\right)}$ to je tablica IV, dakle,

$$\frac{r^n-1}{r^n\left(r-1\right)}=IV_{p\%}^{n} \qquad \text{i } K_0=k\cdot IV_{p\%}^{n}$$

Faktor aktuelizacije anticipativnih uloga

Analogno kao u prethodnom slučaju, neka početkom prve, druge,..., n-te godine ulažemo k_1, k_2,...,k_n dinara uz godišnje kapitalisanje sa kamatnom stopom od p% možemo postaviti pitanje: koliko bi novca $K_0^{'}$ trebalo uložiti početkom prve godine da bi na kraju n-te godine uz iste uslove imali isti kapital?

Nepoznati kapital bi, dakle, bio $K_0^{'}$ i on bi na kraju n-te godine bio

$K_0^{'}r^n$ i morao bi biti isto kao i $k_1r^n+k_2r^{n-1}+\ldots+k_nr$ dakle,

$K_0^{'}=k_1+\frac{k_2}{r}+\ldots+\frac{k_n}{r^{n-1}}$ ako je $k_1=k_2=\ldots=k_n$ tada je

$$K_0^{'}=k\left(1+\frac{1}{r}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=k\frac{r^n-1}{r^{n-1}\left(r-1\right)}$$

i ove vrednosti se slično kao i prethodna računa primenom tablice IV tj. važi

$K_0^{'}=k\left(1+IV_{p\%}^{n-1}\right)$ jer je $1+\frac{r^{n-1}-1}{r^{n-1}\left(r-1\right)}=\frac{r^n-1}{r^{n-1}\left(r-1\right)}$.

$$a_n=\frac{K}{n}\left(1+\frac{p}{100}\right)$$

sa kojim je otplaćen dug.

Ako se pravi amortizacioni plan zajma u koloni otplata imamo iste vrednosti a anuiteti se dobijaju kad se na ove vrednosti dodaju interesi na odgovarajući iznos duga.

Primer: Kredit od 2700 din uzet je po godišnjoj kamatnoj stopi od 12% na 12 tromesečnih anuiteta sa jednakim isplatama. napraviti plan amortizacije.
Rešenje: Otplata je dakle 2700:12=225 din. Kada dođe vreme prve isplate na kredit valja platiti interes $P_1 = \frac{2700 \cdot 12}{4 \cdot 100} = 81$ din. (kamata je proporcionalna) pa je prvi anuitet, dakle, 225+81=306 dinara. Dakle, preostali deo duga je 2475 na koji se daje na koji se daje otplata posle sledeća tri meseca koja iznosi 225+P_2 a
$P_2 = \frac{2475 \cdot 12}{4 \cdot 100} = 74{,}25$ din. pa je anuitet 299,25 dinara ili pregledno u tabeli:

Period otplate	početni iznos duga	interes	anuitet	otplata	krajnji iznos duga
1	2700	81	306	225	2475
2	2470	74,25	299,25	225	2250
3	2250	67,50	292,50	225	2025
4	2025	60,75	285,75	225	1800
5	1800	54,00	279,00	225	1575
6	1575	47,25	272,25	225	1350
7	1350	40,50	265,50	225	1125
8	1125	33,75	258,75	225	900
9	900	27,00	252,00	225	675
10	675	20,25	245,25	225	450
11	450	13,50	238,50	225	225
12	225	6,75	231,75	225	0
$\sum$	-	526,50	3226,50	2700	-



KLJUČNI POJMOVI:

- PROCENAT
- PROMIL
- KAMATNA STOPA
- ESKONT, ESKONTNI FAKTOR

VII - GLAVA

ELEMENTI TEORIJE VEROVATNOĆE

SADŽAJ OVOG POGLAVLJA JE:

- **POJAM I VRSTE VEROVATNOĆE**
- **POJAM SLUČAJNE PROMENLJIVE**
- **OSOBINE SLUČAJNIH PROMENLJIVIH**
- **VRSTE SLUČAJNIH PROMENLJIVIH**
- **PRIMENE SLUČAJNIH PROMENLJIVIH**

C I L J E V I U Č E N J A

Kada ovo poglavlje proučite znaćete:

1. Pojam slučajnog događaja.
2. Pojam verovatnoće
3. Vrste slučajnih promenljivih
4. Osnovne raspodele

13. ELEMENTI TEORIJE VEROVATNOĆE

13.1. EKSPERIMENTI SA SLUČAJNIM ISHODIMA. SLUČAJNI DOGAĐAJI

Osnovni pojam teorije verovatnoće je slučajan događaj, rezultat nekog eksperimenta, odnosno njihova analiza.
Da bi definisali pojam događaja, pođimo od eksperimenta u kome ishode nismo u mogućnosti unapred da predvidimo. Ako posmatramo neki eksperiment, svaki od mogućih ishoda u tom eksperimentu se naziva elementarni događaj. Elementarne događaje ćemo označavati sa ω, a skup svih njih u nekom eksperimentu ćemo označavati sa Ω. Događaj A je podskup skupa Ω i sastoji se od svih elementarnih događaja koji imaju to svojstvo kojim se A definiše.

Primer:

Pri bacanju kocke skup Ω je $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, gde je ω_i elementarni događaj - kocka je pala, a na gornjoj strani imamo i tačaka. Događaj A - pao je paran broj je dakle $A=\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$.

Događaj A se realizuje pri eksperimentu ako i samo ako se realizuje jedan od elementarnih događaja ω koji se u njemu sadrže.

- ***Siguran*** ili ***izvestan događaj*** je onaj koji se uvek realizuje. Takav je skup Ω koji sadrži sve moguće elementarne događaje u datom eksperimentu.

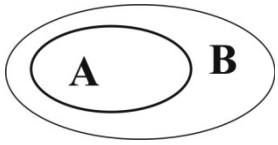
- ***Nemoguć događaj*** je onaj događaj koji se nikad ne realizuje. Obeležavamo ga kao prazan skup ϕ. ($\phi \subset \Omega$)

Primer2:

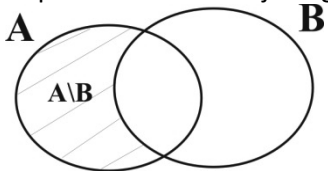
Siguran događaj je da
„ pri bacanju novčića padne pismo ili glava”.
Nemoguć događaj je da
„ pri bacanju kocke sa obeleženim stranicama od 1 do 6 da padne osmica”.

Sve događaje, koji nas interesuju u nekom eksperimentu, ćemo svrstati u jednu klasu F događaja. Ta klasa događaja mora ispuniti određena pravila, a između događaja u toj klasi mogu se posmatrati određene relacije i operacije.

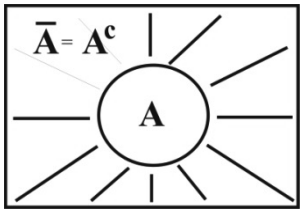
- Ako $A \subset B$, kažemo da realizacija događaja A povlači realizaciju događaja B, odnosno kažemo da događaj A povlači (implicira) događaj B. To znači da je događaj A podskup događaja B, i da se događaj B realizuje uvek kada se realizuje događaj A. Događaj „prilikom bacanja kocke pojavila se dvojka" implicira događaj „prilikom bacanja kocke pojavio se paran broj".



- Razlika dva događaja A i B u oznaci $A \setminus B$ je događaj koji se realizuje ako se realizuje događaj A a da se pri tome ne realizuje događaj B.

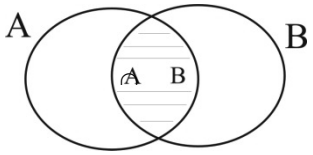


- Svakom događaju A može da se pridruži suprotan ili komplementaran događaj A^c koji se realizuje ako i samo ako se A ne realizuje (skupovno $A^c = \Omega \setminus A$). Suprotan, komplementaran događaj događaju A je specijalan slučaj razlike prostora elementarnih događaja Ω i događaja A. Događaj „pri bacanju kocke pao je paran broj" suprotan događaj je „pao je neparan broj".

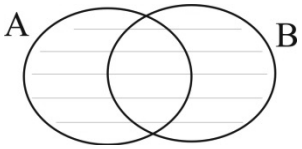


- Proizvod ili presek događaja A i B je događaj u oznaci $A \cap B$ ili AB, koji se realizuje ako i samo ako se realizuju i događaj A i događaj B. Na primer, pri bacanju kocke presek (proizvod) događaja „pao je paran broj" i događaja

„pao je broj deljiv sa tri" je događaj „pala je šestica". Dva događaja A i B su disjunktna, uzajamno se isključuju ako je $A \cap B = \varnothing$.



- Unija ili zbir događaja A i B, u oznaci $A \cup B$, je događaj koji se realizuje ako i samo ako se realizuje bar jedan od događaja A i B. Na primer, pri bacanju kocke unija događaja „pao je paran broj" i događaja „pao je broj veći od dva" je događaj „nije pala dvojka". Uobičajeno je da se unija disjunktnih događaja označava sa A+B.



Definicija preseka i unije se može prirodno proširiti na konačno mnogo događaja $A_1,\ldots, A_n$ u oznaci:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \,, \bigcup_{i=1}^{n} A_i .$$

Dakle, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ je događaj koji se realizuje ako se svaki A_i, i=1,...,n realizuje, a $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ se realizuje ako se realizuje bar jedan A_i, i=1,...,n.

Ako su za $i \neq j$ i,j=1,...,n $A_iA_j=\varnothing$, onda je $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} A_i$.

U teoriji verovatnoće se definišu prebrojivi preseci i unije na sledeći način:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left\{\omega \mid \forall k \in N,\ \omega \in A_k\right\},\ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \left\{\omega \mid \exists k \in N,\ \omega \in A_k\right\}.$$

Kako su relacija $\subset$ i operacije $\cap$, $\cup$, C među događajima odgovarajuće relacije među skupovima, to se poznate veze koje imamo među skupovima mogu interpretirati na događaje.

13.2. POJAM VEROVATONOĆE

Teorija verovatnoće se bavi slučajnim događajem. Slučajni događaji imaju sledeću karakteristiku: u jednom eksperimentu koji se ponavlja n- puta događaj A se realizuje m - puta. Relativna učestalost događaja A, statistička verovatnoća događaja je broj $\frac{m}{n}$ u n- opita i obeležava se sa P(A). Dakle, verovatnoća da se realizuje događaj A, je odnos broja povoljnih elementarnih događaja m prema broju svih jednako mogućih događaja n, $P(A) = \frac{m}{n}$.

Na primer, pri bacanju dve kocke, verovatnoća realizacije događaja A „zbir brojeva na kockama je 8“ je, $P(A) = \frac{5}{36}$.

U predhodnom primeru smo očigledno predpostavili da je svaka mogućnost pri bacanju kocke jednako verovatna!

Da li je uvek zaista tako? Kada jeste, a kada nije?

Jeste ako je kocka napravljena od potpuno homogenog materijala i ako joj je stvarno fizičko težište poklopljeno sa geometrijskim težištem! Dakle ako je i idealno geometrijski napravljeno, ako sve ovo nije onda zbog zakona fizike će veću verovatnoću imati one strane koje su udljenije od težišta i neću sva stanja biti jednako verovatna!
Ako posmatramo bilo koji događaj A (može i napred opisan) i ako je eksperiment o kome se ovaj događaj odigrava ponavljamo i pritom beležimo broj ponavljanja n i broj odigravanja nešeg događaja n(A) i ako posmatramo odnos n(A)/n, primetićemo da se ovaj odnos (relativna učestanost odigravanja našeg događaja) pozicionira prvo na prvoj decimali pa potom na drugoj... Odnosno da ovaj odnos teži nekom fiksiranom broju koji nije slucajan. Taj broj se može smatrati za verovatnoću našeg događaja A.

Ipak ovaj način dobijanja verovatnoća (statističke verovatnoće) i pored toga što je najtacniji nije uvek moguć iz razumnjivih razloga.
U matematici se verovatnoća uvodi aksiomatski, zapravo to je funkcija definisana nad događajima koja je nenegativna, normirana i aditivna:

Definicija 1.

Verovatnoća P(x) je funkcija koja događaje iz polja F preslikava u realne brojeve sa sledećim osobinama:

1) nenegativnost: za $\forall A \quad P(A) \geq 0$
2) normiranost: $P(\Omega)=1$
3) aditivnost: Ako su A_1, A_2,... disjunktni događaji, tj. ako je $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, tada je

$$P\left(\sum_i A_i\right) = \sum_i P(A_i).$$

Teorema 1.

Verovatnoća P(x) ima sledeće osobine:

1) $P(\emptyset)=0$
2) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
3) Ako je $A \subseteq B$ onda je $P(A) \leq P(B)$
4) Za svako $A \in F$, $P(A) \leq 1$
5) Za $\forall A,B \in F$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Dokaz:

1) Kako je $A = A \cup \emptyset$ na osnovu aditivnosti $P(A) = P(A) + P(\emptyset)$, pa je $P(\emptyset)=0$.
2) Sledi iz $A + \overline{A} = \Omega$, normiranosti i aditivnosti.
3) Ako je $A \subseteq B$ onda je $B = A + \overline{A}B$ pa je $P(B) = P(A) + P(\overline{A}B)$, odnosno zbog nenegativnosti sledi $P(B) \geq P(A)$.
4) Sledi iz prethodne osobine i $A \subseteq \Omega$.
5) Kako je $A \cup B = A + \overline{A}B$ i $B = AB + \overline{A}B$, to je $P(A \cup B) = P(A) + P(\overline{A}B)$ i $P(B) = P(AB) + P(\overline{A}B)$, pa eliminišući $P(\overline{A}B)$ iz ove dve, dobijamo traženu jednakost.

Važno je napomenuti da je za teoriju verovatnoće nebitno kako smo došli do polaznih verovatnoća, tj. do polazne funkcije P(.). Teorija verovatnoće se bavi problemom dobijanja novih verovatnoća. Polazne verovatnoće su obično dobijene na tri načina:

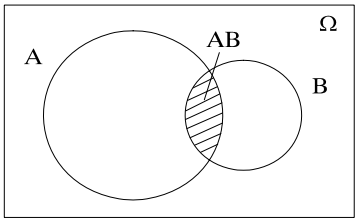
- Klasična definicija verovatnoće da se realizuje očekivani događaj je, odnos broja povoljnih elementarnih događaja prema broju svih jednako mogućih elementarnih događaja P(A)=$\frac{m}{n}$.
- Geometrijskim putem, kao odnos površina (zapremine ili dužine) povoljnih i mogućih za realizaciju nekog događaja;
- Statistički, kao graničnu vrednost relativne učestanosti n(A) i broja eksperimenata n, pri kome se realizuje događaj A.

Napomena: Za događaj A kod koga je P(A)=1 kažemo da je skoro izvestan ili da se realizuje sa verovatnoćom 1. Dakle, ako je P(A)=1 to ne znači da je A=Ω! Isto tako, za događaj B za koji je P(B)=0 kažemo da je skoro nemoguć događaj. Dakle, iz P(B)=0 ne sledi B=∅.

Prema tome, skoro izvestan i skoro nemoguć događaj se definišu preko verovatnoće za razliku od izvesnog i nemogućeg događaja koji su nezavisni od pojma verovatnoće.

13.3. USLOVNE VEROVATNOĆE. NEZAVISNOST

Teorija verovatnoće daje pravila kako se, polazeći od verovanoće nekih događaja nalaze verovatnoće drugih događaja. Verovatnoća realizacije događaja B, ako se realizovao događaj A, zove se uslovna (vezana) verovatnoća događaja B u odnosu na događaj A i obeležava se sa P(B/A).



Slika 1

$$\frac{n_{AB}}{n_A} = \frac{\frac{n_{AB}}{n}}{\frac{n_A}{n}}$$

n_A – broj realizacija događaja A
n_B – broj realizacija događaja B
n_{AB} – broj realizacija događaja AB
n-broj eksperimenata

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)},\ P(A)>0.$$

Na sličan način dobijamo

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

U vezi sa pomenutim verovatnoćama važno je i sledeće pitanje: Kakav je odnos verovatnoća P(B) i $P(B|A)$. Ako su te verovatnoće iste, prirodno je reći da verovatnoća događaja B ne zavisi od događaja A. Dakle, događaj B je nezavisan od događaja A ako je

$$P(B) = P(B|A).$$

Nezavisnost događaja A od događaja B se definiše analogno. Naime, iz uslova

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)},\ P(A) = \frac{P(AB)}{P(B|A)},\ P(A) = \frac{P(AB)}{P(B)},$$

odnosno dobijamo $P(A) = P(A|B)$.

Dakle, ako je B nezavisan od A, onda je i A nezavisan od B, što zajedno očigledno daje sledeću definiciju:

Definicija 2.
Događaji A i B su nezavisni ako je P(AB)=P(A)·P(B), verovatnoća realizacije jednog događaja ne zavisi od verovatnoće realizacije drugog događaja.

Ako je verovatnoća da će se realizovati događaj A, P(A)=p, onda verovatnoća da će se isti događaj realizovati n puta je p^n. Za izračunavanje uslovne verovatnoće može se koristiti i formula klasične verovatnoće.

Primeri:

1. Pri bacanju dve kocke posmatramo zbir brojeva koji se pojavljuje na njima. Kolika je verovatnoća da je zbir 6, ako se zna da je zbir paran broj?

Događaj A: zbir je 6.

Događaj B: zbir je paran broj.

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$P(AB)=\frac{5}{36}\ ;\ P(B)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$$

$$P(A|B)=\frac{\frac{5}{36}}{\frac{1}{2}}=\frac{5}{18}$$

Ili preko klasične verovatnoće pod pretpostavkom da se uslov uzme prilikom određivanja broja povoljnih i mogućih slučajeva:

$$P(A|B)=\frac{5}{18}$$

2. U kutiji se nalazi pet belih i tri crne kuglice. Dva puta se iz kutije vrši izvlačenje bez vraćanja. Kolika je verovatnoća da će se drugi put izvući bela kuglia (crna kuglica), ako je u prvom izvlačenju izvučena bela kuglica.

Događaj A_1: u prvom izvlačenju izvučena bela kuglica

Događaj A_2: u drugom izvlačenju izvučena bela kuglica

Događaj B: u drugom izvlačenju izvučena crna kuglica

$$P(A_2|A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}$$

$$P(A_1A_2)=\frac{C_5^1\cdot C_4^1}{C_8^1\cdot C_7^1}=\frac{5\cdot 4}{8\cdot 7}=\frac{5}{14}\ ;\ P(A_1)=\frac{5}{8}$$

$$P(A_2|A_1)=\frac{\frac{5}{14}}{\frac{5}{8}}=\frac{4}{7}$$

$$P(B|A_1)=1-P(A_2|A_1)=\frac{3}{7}$$

I ovaj problem se lako rešava klasičnom verovatnoćom.

Događaj A: drugi put je izvućena bela kuglica.

Događaj C: drugi put je izvučena crna kuglica.

Nakon prvog izvlačenja u kutii je ostalo 4 bele i 3 crne kuglice.

$$P(A)=\frac{4}{7}\ ;\ P(C)=\frac{3}{7}$$

3. Iz špila od 32 karte slučajno se izvlači jedna karta. Neka je A događaj da je izvučena karta pik i B događaj da je izvučena kara dama. Da li su događaji A i B nezavisni?

$$P(AB)=\frac{1}{32};\ P(A)=\frac{1}{4}\ ;\ P(B)=\frac{1}{8}$$

Prema tome P(AB)=P(A)P(B), što znači da su događaji A i B nezavisni u smislu teorije verovatnoće.

Napomena: Nezavisnost više od dva događaja, npr. događaji $A_1,\ldots, A_n$ se definiše na sledeći način:

Događaji $A_1,\ldots, A_n$ su nezavisni ako je za svakih k događaja $2\le k\le n$, odnosno za svaki niz $s_1<s_2<\ldots<s_n$ brojeva 1,..., n,

$$P\left(A_{s_1}A_{s_2}\ldots A_{s_k}\right)=PA_{s_1}\ldots PA_{s_k}.$$

(Nezavisnost u parovima $P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)$ $i\neq j$ i,j=1,2,..., n nije dovoljna za nezavisnost u celini.) To se vidi iz sledećeg primera:

Neka su tri strane tetraedar obojene plavo, belo, crveno respektivno a četvrta strana i plavo, i belo i crveno. Ako bacamo tetraedar I konstatujemo stranu na koju je pao tetraedar (ona koja se ne vidi), imamo 3 mogućnosti:

B pao je na belu

C pao je na crvenu

P pao je na plavu (ako je pao na stranu koja je obojena sa sve tri boje tada imamo situaciju da je ispunjena svaka od ovih mogućnosti.)

Ako su sve mogućnosti jednako verovatne tada je očigledno P(B)=1/2, P(C)=1/2, P(P)=1/2

Pritom je očigledno $P(BCP)=1/4\neq P(B)*P(C)*P(P)=1/8$, mada nezavisnost u parovima postoji P(BC)=P(B)*P(C), P(CP)=P(C)*P(P), P(BP)=P(B)*P(P).

13.4. FORMULA TOTALNE VEROVATNOĆE I BAJESOVA FORMULA

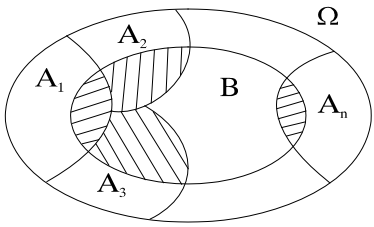
Definicija 3.
Za događaje A_1, A_2,..., A_n koji su uzajamno disjunktni, tj. $A_iA_j=\emptyset$ $i\neq j$ $i,j=1,...,n$, kažemo da čine razbijanje sigurnog događaja ako je

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega.$$

Teorema 1.
Ako događaji A_1,..., A_n čine ***razbijanje sigurnog događaja*** i $P(A_i)>0$ $i=1,...,n$, tada je za $\forall B\in F$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\cdot P(B|A_i).$$

Dokaz:



Slika 2.

Iz $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ sledi $B = \sum_{i=1}^{n} BA_i$, pa je $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(BA_i)$, primenom pravila za množenje $P(BA_i) = P(A_i)\cdot P(B|A_i)$, odnosno dobijamo traženu formulu

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\cdot P(B|A_i).$$

Formula je poznata kao ***formula totalne (ili potpune) verovatnoće*.**

Primeri:

1.U jednoj kutiji se nalazi pet belih i dve crvene kuglice. Prvo se izvlače dve kuglice bez vraćanja, a zatim treća. Kolika je verovatnoća da je treća kuglica crvena?

Događaj A: treća kuglica je crvena.

Događaj B_i(i=1,2,3): broj crvenih kuglica ispred izvlačenja treće kuglice je i-1.

Događaj C_i(i=1,2,3): u i-tom izvlačenju izvučena je crvena kuglica.

$B_1=C_1C_2$

$P(B_1)=P(C_1C_2)=P(C_2|C_1)P(C_1)=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{7}=\frac{1}{21}$

$B_2=C_1\overline{C}_2\cup\overline{C_1}C_2$

$P(B_2)=P(C_1\overline{C}_2)+P(\overline{C_1}C_2)=P(\overline{C_2}\mid C_1)P(C_1)+P\left(C_2\mid\overline{C_1}\right)P\left(\overline{C_1}\right)$

$=\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{7}+\frac{2}{6}\cdot\frac{5}{7}=\frac{20}{42}=\frac{10}{21}$

$B_3=\overline{C_1}\,\overline{C_2}$

$P(B_3)=P\left(\overline{C}_1\,\overline{C}_2\right)=P\left(\overline{C}_2\mid\overline{C}_1\right)P\left(\overline{C}_1\right)=\frac{4}{6}\cdot\frac{5}{7}=\frac{10}{21}$

$P(A|B_1)=0$; $P(A|B_2)=\frac{1}{5}$; $P(A|B_3)=\frac{2}{5}$

Na osnovu teoreme potpune verovatnoće

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(A\setminus B_i)P(B_i)=0\cdot\frac{1}{21}+\frac{1}{5}\cdot\frac{10}{21}+\frac{2}{5}\cdot\frac{10}{21}=\frac{3\cdot10}{5\cdot21}=\frac{2}{7}$$

2. U dvema kutijama se nalaze kuglice. Prva sadrži tri crvene i četiti bele kuglice. Druga sadrži 6 crvenih i 2 bele kuglice. Kolika je verovatnoća da će se izvući bela kuglica iz nasumice izabrane kutije?

Događaj B: kuglica je bele boje.

Događaj A_i(i=1,2): kuglica je iz i- te kutije.

$P(B|A_1)=\frac{4}{7}$; $P(B|A_2)=\frac{2}{8}$; $P(A_1)=\frac{1}{2}$; $P(A_2)=\frac{1}{2}$;

Na osnovu teoreme poptune verovatnoće

$$P(B)=\sum_{i=1}^{2}P(A_i)P(B/A_i)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{8}=\frac{23}{56}$$

Ako su $A_1,...,A_n$ hipoteze za realizaciju događaja B, kolika je verovatnoća da su A_i izazvale događaj B? Odgovor na ovo pitanje daje sledeća formula koja se zove ***Bajesova formula (formula verovatnoće hipoteza)*.**

Teorema 2.
Ako se događaji $A_1, A_2, \ldots, A_n$ uzajamno isključuju u odnosu na događaj B i $P(B) > 0$, tada je

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B_k)P(A|A_k)}, i = 1,\ldots,n.$$

Dokaz:

Iz $P(A_i B) = P(A_i) \cdot P(B|A_i) = P(B) \cdot P(A_i|B)$ imamo

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(B)}$$

i kad P(B) izračunamo prema prethodnoj teoremi dobijamo traženu formulu.

Primeri:

1.Pretpostavlja se da 5% muškaraca i 0,25% žena boluje od daltonizma. Grupa je formirana od 20 žena i 5 muškaraca. Izabere se jedna osoba. Kolika je verovatnoća da je izabrana osoba ženskog pola ako se zna da boluje od daltonizma?

Događaj B: izabrana osoba boluje od daltonizma.
Događaj A_i (i=1,2): izabrana osoba je muškog, ženskog pola, respektivno.

Kako je $P(B|A_1)=\frac{5}{100}$; $P(B|A_2)=\frac{25}{10000}$; $P(A_1)=\frac{1}{5}$; $P(A_2)=\frac{4}{5}$;

To je

$P(B)= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) = \frac{1}{5} * \frac{5}{100} + \frac{4}{5} * \frac{25}{10000} = \frac{3}{250}$;

Iz baesove formule

$P(A_2|B)= \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)} = \frac{1}{6}$;

Analogno dobiljamo $P(A_1|B)= \frac{5}{6}$

2. U dve kutije nalaze se kuglice. Prva sadrži dve crvene i četiri bele, druga čest crvenih i dve bele. Izvlači se jedna kuglica iz slučajno izabrane kutije. Ona je bela. Kolika je verovatnoća da je iz prve kutije?

Događaj B: kuglica je bele boje.
Događaj A_i(i=1,2): kuglica je iz i-te kutije

$P(B|A_1)=\frac{4}{7}$; $P(B|A_2)=\frac{2}{8}$; $P(A_1)=\frac{1}{2}$; $P(A_2)=\frac{1}{2}$;

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B/A_1)}{P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)}=\frac{16}{23};$$

13.5. SLUČAJNE PROMENLJIVE

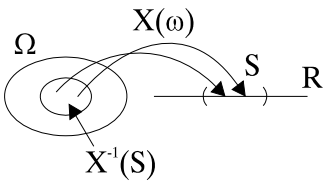
Da bi se izbegla obaveza poznavanja svakog eksperimenta za koji se vezuju verovatnoće, uobičajeno je da se pojam verovatnoće vezuje za pojam koji svi poznaju i koriste – za realne brojeve. Na ovaj način račun sa verovatnoćama je znatno olakšan

13.5.1. Jednodimenzionalne slučajne promenljive

Slučajna promenljiva je funkcija definisana nad skupom elementarih događaja čije vrednosti određuju numerički podaci korenspondirani slučajnim događajima.

Definicija 4.
Neka je (Ω,F,P) prostor verovatnoća. ***Slučajna promenljiva*** $X=x(\omega)$ je funkcija koja skup Ω preslikava u skup realnih brojeva R i za koju je $\{\omega \mid X(\omega)<x\}\in F$ za $\forall x\in R$.

Slučajnom promenljivom mi realnim brojevima, odnosno podskupovima realnih brojeva, dodeljujemo verovatnoće: Naime, ako je $S\subseteq R$ $P(S)=P(\omega \mid X(\omega)\in S)=P(X^{-1}(S))$



Slika 3.

Očigledno je P(R)=1 jer je X(Ω)=R, pa $X^{-1}(R)=\Omega$.
Na ovaj način smo sve "različite" skupove Ω "zamenili" sa realnim brojevima, tj. verovatnoće posmatramo na skupu realnih brojeva.
Neka se na primer eksperiment sastoji iz bacanja kocke. Skup svih elementarnih događaja je $\Omega_1,\Omega_2,..\Omega_6$.
Posmatraćemo dva tipa slučajnih promenljivih: slučajne promenljive diskretnog tipa i slučajne promenljive neprekidnog tipa.

Definicija 5.
Slučajna promenljiva X koja skup Ω preslikava u prebrojiv podskup skupa realnih brojeva (konačan ili beskonačan niz) naziva se ***slučajna promenljiva diskretnog tipa.***

Dakle, slučajne promenljive diskretnog tipa uzimaju vrednosti u prebrojivom (konačnom ili beskonačnom) skupu realnih brojeva (npr. proste slučajne promenljive u konačnom: $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$). Za svaku realnu vrednost x_i možemo naći odgovarajuću verovatnoću i kada su te verovatnoće zadate možemo konstatovati da je ona u potpunosti data. Najčešće to zapisujemo:

$$X:\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p(x_1) & p(x_2) & \dots & p(x_n) \end{pmatrix}$$

i reći ćemo da je slučajna promenljiva X zadata zakonom raspodele verovatnoća. Jasno je da pri tome mora biti $p(x_1)+p(x_2)+...+p(x_n)=1$. (U slučaju da prebrojiv skup vrednosti slučajne promenljive X nije konačan niz već beskonačan niz, tada red $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i)$ mora konvergirati ka 1).

Definicija 6.
Slučajna promenljiva X je neprekidnog tipa ako postoji funkcija φ, $x \in R$ takva da je za svako $a,b \in R$ $a<b$ (mogu biti i beskonačni)

$$P(X \in (a,b)) = \int_a^b \varphi(x)dx.$$

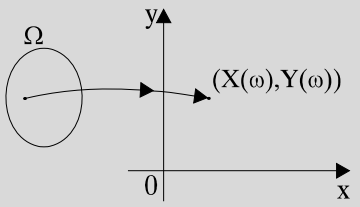
Funkcija φ se zove ***gustina raspodele verovatnoća*** slučajne promenljive X.

Iz definicije sledi da je $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1.$

13.5.2. Višedimenzionalne slučajne promenljive

Ponekad smo u situaciji da nas u okviru jednog istog eksperimenta interesuje više karakteristika vezanih za ishod eksperimenta. Na primer, ako regrutna komisija slučajno bira jednog regruta i registruje njegovu visinu V, težinu T i broj cipela C, tada imamo da su V, T i C slučajne promenljive, a ako ih posmatramo zajedno kao uređenu trojku imamo trodimenzionalnu slučajnu promenljivu. Ako posmatramo samo visinu i težinu, tada imamo dvodimenzionalnu slučajnu promenljivu.

Definicija 7.
Ako su $X=X(\omega)$ i $Y=Y(\omega)$ dve slučajne promenljive definisane nad istim skupom Ω mogućih ishoda, tada je uređeni par (X,Y) ***dvodimenzionalna slučajna promenljiva.***



Slika 4.

Na analogan način se mogu definisati i trodimenzionalne,...,
n-dimenzionalne slučajne promenljive.

I ove višedimenzionalne slučajne promenljive mogu biti diskretnog i neprekidnog tipa. Ovde ćemo opisati samo slučajne promenljive diskretnog tipa:

(X,Y) je diskretnog tipa ako postoji prebrojiv skup tačaka u ravni $R_{X,Y}=\{(x_i,y_j), i,j=1,2,...\}$, takav da je

$$P\{(X,Y)\in R_{X,Y}\}=1.$$

Zakon raspodele verovatnoća za pojedine tačke određuje se na isti način kao i za jednodimenzionalnu slučajnu promenljivu

$$p(x_i,y_j)=P\{\omega \mid X(\omega)=x_i \wedge Y(\omega)=y_j\} \quad i,j=1,...$$

i obično se zadaje tabelarno:

X / Y	x_1	x_2	. . .	x_n	. . .
y_1	$p(x_1,y_1)$	$p(x_2,y_1)$	. . .	$p(x_n,y_1)$	$p(y_1)$
y_2	$p(x_1,y_2)$	$p(x_2,y_2)$	. . .	$p(x_n,y_2)$	$p(y_2)$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
Y_m	$p(x_1,y_m)$	$p(x_2,y_m)$	. . .	$p(x_n,y_m)$	$p(y_m)$
. . .	$p(x_1)$	$p(x_2)$	. . .	$p(x_n)$	1

Jasno, pri tome mora biti $\sum_{i,j} p\left(x_i, y_j\right) = 1.$

13.5.3. Marginalne i uslovne raspodele

Ako nam je data dvodimenzionalna slučajna promenljiva (X,Y) sa raspodelom verovatnoća $p(x_i,y_j)$ i ako nas interesuje raspodela verovatnoća samo za jednu od ove dve slučajne promenljive, mi tada možemo izvršiti odgovarajuće sabiranje po vrstama i dobijamo raspodelu za Y, odnosno po kolonama i dobijamo raspodelu za X. Ove raspodele se nazivaju marginalne raspodele. Dakle,

$$p(x_i)=P\{X=x_i\}=p(x_i,y_1)+p(x_i,y_2)+...+p(x_i,y_m)$$

odnosno

$$q(y_j)=P\{Y=y_j\}=p(x_1,y_j)+p(x_2,y_j)+...+p(x_n,y_j)$$

Ukoliko nas interesuje raspodela jedne slučajne promenljive, recimo X, pretpostavljajući da je Y uzela neku vrednost y_j tada se dobija uslovna raspodela verovatnoće za X pod uslovom $Y=y_j$ i tada imamo

$$p\left(x_i\left(y_j\right)\right)=P\left\{X=x_i\left(Y=y_j\right\}=\frac{p\left(x_i,y_j\right)}{p\left(y_j\right)}\right. \qquad \text{i=1,2,...n}$$

Slično, ako hoćemo uslovnu raspodelu za Y ako je X uzelo vrednost x_i, tada imamo:

$$\mathrm{p}\left(\mathrm{y_j}\middle|\mathrm{x_i}\right)=\mathrm{P}\left\{\mathrm{Y}=\mathrm{y_j}\middle|\mathrm{X}=\mathrm{x_i}\right\}=\frac{\mathrm{p}\left(\mathrm{x_i},\mathrm{y_j}\right)}{\mathrm{p}\left(\mathrm{x_i}\right)} \qquad \text{j=1,2,...m}$$

Dakle da pojasnimo ako želimo raspodelu slučajne promenljive X pod uslovom da je slučajna promenljiva Y uzela naprimer vrednost y_2 , ovu raspodelu ćemo dobiti iz druge vrste predhodne dvodimenzionalne tabele jer se y_2 pojavljuje u drugoj vrsti

	x_1	x_2		x_n	
y_2	$p(x_1,y_2)$	$p(x_2,y_2)$		$p(x_n,y_2)$	$p(y_2)$

Da bih u ovoj vrsti imali raspodelu verovatnoća za slučajno promenljivu X to ćemo očigledno celu vrstu morati da podelimo sa njenim zbirom $p(y_2)$ (uz uslov da je ta vrednost različita od 0).

Tako dobijamo $X\mid Y=y_2$: $\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_n \\ \frac{p(x_1,y_2)}{p(y_2)} & \frac{p(x_2,y_2)}{p(y_2)} & \dots & \frac{p(x_n,y_2)}{p(y_2)} \end{pmatrix}$

Na sličan način se dobijaju raspodele $Y|X=x_i$.

13.5.4. Nezavisnost slučajnih promenljivih

Za dve slučajne promenljive X i Y možemo vezati događaje $\left\{\mathrm{X}\in\mathrm{S}_1\right\}$ i $\left\{\mathrm{Y}\in\mathrm{S}_2\right\}$, za proizvoljne $\mathrm{S}_1,\mathrm{S}_2\subseteq\mathrm{R}$. Slučajne promenljive X i Y su nezavisne ako su događaji $\left\{\mathrm{X}\in\mathrm{S}_1\right\}$ i $\left\{\mathrm{Y}\in\mathrm{S}_2\right\}$ nezavisni za svako $\mathrm{S}_1,\mathrm{S}_2\subseteq\mathrm{R}$. Slučajne promenljive (X,Y) diskretnog tipa su nezavisne ako i samo ako je $\mathrm{p}\left(\mathrm{x_i},\mathrm{y_j}\right)=\mathrm{p}\left(\mathrm{x_i}\right)\mathrm{q}\left(\mathrm{y_j}\right)$ i = 1,2,…

Primeri :

1.Data je dvodimenzionalna slučajna promenljiva (X,Y) raspodelom verovatnoća:

X / Y	1	2	3	4	q(y) ↓
0	1/24	1/24	1/24	1/12	5/24
1	1/24	1/12	1/6	1/24	8/24
3	1/8	1/6	1/8	1/24	11/24
p(x) →	5/24	7/24	8/24	4/24	1

Naći marginalne raspodele, uslovnu raspodelu za X | Y=0 i za Y | X=2 i ispitati da li su X i Y nezavisne.

Očigledno je kad saberemo vrednosti po vrstama marginalna raspodela za Y je:

$$q(y):\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 5/24 & 8/24 & 11/24 \end{pmatrix}$$

a kad saberemo po kolonama dobijamo marginalnu raspodelu za X:

$$p(x):\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5/24 & 7/24 & 8/24 & 4/24 \end{pmatrix}$$

Uslovna raspodela X | Y=0 se dobija posmatrajući vrstu

X	1	2	3	4	q(0)
Y=0	1/24	1/24	1/24	1/12	5/24

i deleći sa 5/24 dobijamo

X | Y=0	1	2	3	4
	1/5	1/5	1/5	2/5

Analogno za Y | X=2 posmatramo kolonu

Y	X=2
0	1/24
1	1/12
3	1/6
p(2)	7/24

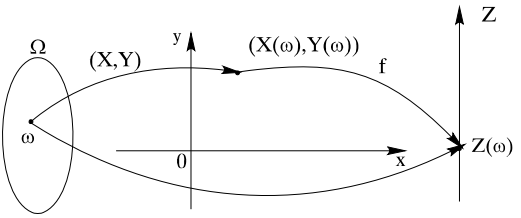
i deleći sa 7/24 dobijamo

Y | X=2	0	1	3
	1/7	2/7	4/7

Ove slučajne promenljive nisu nezavisne jer, na primer

$$p(x=1, y=0)=1/24 \neq 5/24 \cdot 5/24.$$

Slično kao i u jednodimenzionalnom slučaju i ovde se mogu posmatrati funkcije slučajnih promenljivih. Tako, ako je data dvodimenzionalna slučajna promenljiva (X,Y) raspodelom $p(x_i,y_j)$ i data je funkcija dva argumenta f(x,y) treba odrediti raspodelu slučajne promenljive Z=f(X,Y) (na primer Z=X+Y, Z=X·Y,...). Situacija se može predstaviti sledećom skicom



Slika 5.

2. Naći raspodelu za slučajnu promenljivu a) X·Y; b) X+Y iz prethodnog primera.

a) X·Y uzima vrednosti 0, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12 i pri tome imamo da se 0 dobija kao 0·1, 0·2, 0·3 i 0·4, pa je verovatnoća broja 0 - $p(0)=\frac{5}{24}$. Na isti način dobijamo i ostale verovatnoće, odnosno raspodelu

$$Z=X\cdot Y:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 4 & 6 & 9 & 12 \\ \frac{5}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & \frac{7}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{8} & \frac{1}{24} \end{pmatrix}$$

b) X+Y uzima vrednosti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 i verovatnoće su:

Iz 1=0+1 $\quad p(1)=p(1,0)=\frac{1}{24}$

2=0+2 i 2=1+1 pa je $p(2)=p(2,0)+p(1,1)=\frac{1}{24}+\frac{1}{24}=\frac{1}{12}$

3=0+3 i 3=1+2 pa je $p(3)=p(3,0)+p(2,1)=\frac{1}{24}+\frac{1}{12}=\frac{1}{8}$

4=0+4, 4=3+1 i 4=1+3 pa je $p(4)=p(4,0)+p(3,1)+p(1,3)=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{9}{24}$

5=1+4 i 5=3+2 $p(5)=p(4,1)+p(2,3)=\frac{1}{24}+\frac{1}{6}=\frac{5}{24}$

6=3+3 $p(6)=p(3,3)=\frac{1}{8}$

7=4+3 $p(7)=p(4,3)=\frac{1}{24}$

pa je

$$X+Y:\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & \frac{1}{8} & \frac{9}{24} & \frac{5}{24} & \frac{1}{8} & \frac{1}{24}\end{pmatrix}.$$

13.5.5. Numeričke karakteristike slučajnih promenljivih

Prvo pitanje koje možemo postaviti vezano za slučajnu promenljivu je koja je ta vrednost koja je "najočekivanija". Ako uzmemo da smo izabrali prostu slučajnu promenljivu sa vrednostima u tačkama $x_1,\ldots, x_k$ i ako organizujemo eksperiment u kome se n_1 put dobija $x_1,\ldots, n_k$ puta dobija x_k, tada je srednja vrednost ove "slučajne promenljive" pri ovom eksperimentu

$$\frac{n_1x_1+n_2x_2+\ldots+n_kx_k}{n_1+\ldots+n_k}=\frac{n_1}{n}x_1+\ldots+\frac{n_k}{n}x_k.$$

Naravno, ako n uvećavamo, tada se $\frac{n_i}{n}$ grupiše oko određenog broja (verovatnoće za x_i) i dobijamo "srednju vrednost" za slučajnu promenljivu X sa raspodelom

$$X:\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \ldots & x_k\\ p(x_1) & p(x_2) & \ldots & p(x_k)\end{pmatrix}$$

$$EX = x_1 p(x_1) + \ldots + x_k p(x_k).$$

Ova srednja vrednost se zove matematičko očekivanje slučajne promenljive X. Ova definicija se proširuje i na proizvoljne slučajne promenljive diskretnog tipa:

$$E(X)=\sum x_i \cdot p(x_i)$$

Međutim, ova veličina može da zavisi od promene rasporeda članova, pa se zahteva da gornji red i apsolutno konvergira, tj. matematičko očekivanje slučajne promenljive X je data formula ako i samo ako konvergira red

$$\sum |x_i| p(x_i),$$

tj. ako red apsolutno konvergira i ne zavisi od preuređenja članova. Inače, matematičko očekivanje ne mora obavezno da postoji.

Proširenje na slučajne promenljive neprekidnog tipa vrši se na prirodan način: ako je slučajna promenljiva X zadata sa gustinom raspodele $\varphi(x)$, onda je

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \varphi(x) dx$$

i kaže se da E(X) postoji ako i samo ako postoji

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \cdot \varphi(x) dx.$$

Osnovne osobine matematičkog očekivanja:

1) Ako je X=c=const. onda je E(X)=c;
2) Ako je $X \geq 0$ onda je $E(X) \geq 0$;
3) Ako je $X \geq Y$ onda je $E(X) \geq E(Y)$;
4) Ako E(X) i E(Y) postoje, tada je $E(c_1X+c_2Y)=c_1E(X)+c_2E(Y)$, c_1=const, c_2=const;
5) $E(X \cdot Y)=E(X) \cdot E(Y)$ ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive.

Matematičko očekivanje se može interpretirati i kao ulog koji lica koja igraju neku kockarsku igru treba da uplate da bi igra bila "poštena".

Primer :

Osoba A baca kocku i isplaćuje osobi B 1 dinar ako padne broj 1, 2 dinara ako padne broj 2,..., 6 dinara ako padne broj 6. Koliko treba osoba A da uplati pre bacanja da bi igra bila poštena?

Osoba A treba da uplati 3,5 dinara - onoliko koliko se "očekuje" da će dobiti a to je upravo matematičko očekivanje slučajne promenljive X

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \dots & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \dots + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3{,}5$$

13.5.6. Disperzija slučajne promenljive

Matematičko očekivanje je "neka srednja vrednost" za slučajnu promenljivu; osim toga, ta vrednost nam ne govori mnogo o toj slučajnoj promenljivoj kao što pokazuje sledeći primer:

Primeri :

1. Osoba A i osoba B bacaju novčić; ako padne grb – osoba A plaća dinar osobi B, ako padne lik – osoba B plaća osobi A dinar. Koliko je matematičko očekivanje dobitka u ovoj igri?

Slučajna promenljiva kojom može da se opiše ova igra je

$$X: \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ i } E(X)=0.$$

2. Istu igru igraju osoba C i osoba D, samo što isplaćuju jedna drugoj po 20 dinara. Kakvo je sada matematičko očekivanje?

Slučajna promenljiva koja opisuje ovu igru je

$$Y: \begin{pmatrix} 20 & -20 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ i } E(Y)=0.$$

Dakle, u oba slučaja matematičko očekivanje je 0, ali druga igra je daleko manje "bezazlena" od prve. Šta je različito? Šta matematičko očekivanje nije "izmerilo"? Očigledno, matematičko očekivanje nije izmerilo veličine razlikovanja slučajne promenljive od samog matematičkog očekivanja. To merimo pomoću disperzije slučajne promenljive. Odnosno, bilo bi prirodno to meriti na sledeći način: formirati novu slučajnu promenljivu $|X - E(X)|$ i naći njeno matematičko očekivanje. Međutim, kako nije zgodno raditi sa apsolutnim vrednostima, to se formira slučajna promenljiva

$$(X-E(X))^2$$

i njeno matematičko očekivanje se zove disperzija i označavaće se sa

$$\sigma^2(X)=E((X-E(X))^2).$$

Pozitivna vrednost iz $\sqrt{\sigma^2(X)}$ zove se standardna devijacija.

Posle lakog računa izlazi

$$\sigma^2(X)=E(X^2)-(E(X))^2.$$

Osnovne osobine disperzije su:

1) $\sigma^2(X)\geq 0$;
2) $\sigma^2(X)=0$ ako i samo ako je $X=c$;
3) $\sigma^2(cX)=c^2\sigma^2(X)$ $c=const$;
4) Funkcija po c $E(X-c)^2$ ima minimum za $c=EX$ (to je $\sigma^2(X)$);
5) $\sigma^2(X+Y)=\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)$ ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive.

Napomena: U primeru je $\sigma^2(X)=1$, $\sigma^2(Y)=400$.

Među numeričke karakteristike neke slučajne promenljive često se ubrajaju i momenti slučajne promenljive (momenti reda r):

$m_r = \sum_{i=1}^{n} x_i^r \cdot p(x_i)$ - u diskretnom slučaju

$m_r = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r \cdot \varphi(x)dx$ - u neprekidnom slučaju

(m_r postoji u diskretnom slučaju ako $\sum |x|^r p(x_i)$ postoji, i m_r postoji u neprekidnom slučaju ako $\int_{-\infty}^{+\infty} |x^r| \varphi(x)dx$ postoji). Pri tome je m_1 - matema-tičko očekivanje a disperzija je izražena sa

$$\sigma^2(X)=m_2-m_1^2$$

(ovo je tzv. centralni moment drugog reda).

Inače, centralni momenti reda r se definišu na sledeći način:

$$\mu_r = E(X - E(X))^r$$

Pri tome μ_3 meri asimetričnost slučajne promenljive (u slučaju simetričnosti neparni centralni momenti su jednaki nuli). Koeficijent asimetrije se definiše na sledeći način:

$$k_a = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

Merenje spljoštenosti slučajne promenljive se meri koeficijentom koji se zove eksces:

$$k_e = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

13.5.7. Funkcija raspodele slučajne promenljive

Zadavanjem ove funkcije mi najčešće obezbeđujemo bolji pregled raspodele verovatnoća na čitavoj realnoj pravoj

$$F(x) \overset{\text{def.}}{=} P(-\infty, x),\ x \in R\ .$$

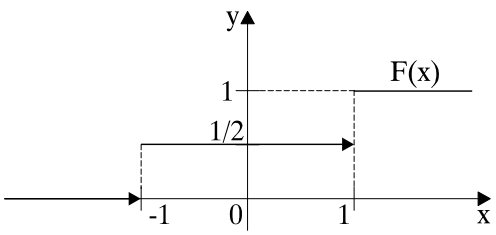
Iz same definicije proizilaze *osnovne osobine ove funkcije:*

1) Funkcija F(x) je neopadajuća, tj. za $x_1<x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$;
2) $F(-\infty)=0$ i $F(+\infty)=1$;
3) Za proste slučajne promenljive F(x) je "stepenasta" funkcija;
4) Za neprekidne slučajne promenljive je $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$, odnosno $F'(x)=\varphi(x)$

Primeri:

1.

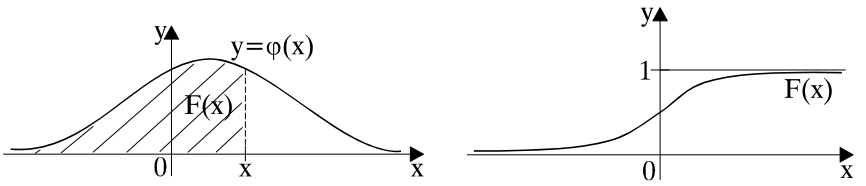
$$X: \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$



Slika6 .

2. Ako je $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ gustina raspodele verovatnoća, tada $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt$, pa dobijamo

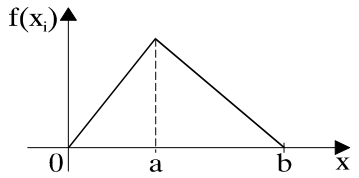
$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad F(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$



Slika 7.

3. Gustina raspodele ima oblik trougla

$$f(x)=\begin{cases}0 & x>b \text{ i } x<0\\ \frac{2x}{ab} & 0\le x\le a\\ \frac{2x}{ab-b^2}+\frac{2}{b-a} & a\le x\le b\end{cases}$$



Slika 8.

Naći funkciju raspodele.
F(x)=0 za x<0

$$F(x)=\int_0^x\frac{2t}{ab}dt=\left.\frac{t^2}{ab}\right|_0^x=\frac{x^2}{ab} \qquad x<a$$

$$F(x)=\frac{a^2}{ab}+\int_a^x\left(\frac{2t}{ab-b^2}+\frac{2}{b-a}\right)dt=\frac{a}{b}+\left(\frac{t^2}{ab-b^2}+\frac{2t}{b-a}\right)\Bigg|_a^x=$$

$$=\frac{a}{b}+\frac{x^2}{ab-b^2}+\frac{2x}{b-a}+\frac{a^2}{-ab+b^2}-\frac{2a}{b-a}=\frac{x^2-a^2}{ab-b^2}+2\frac{x-a}{b-a}+\frac{a}{b}\qquad a\le x\le b$$

F(x)=1 x>b

$$\frac{b^2-a^2}{ab-b^2}+2+\frac{a}{b}=\frac{-(b-a)(b+a)}{b(a-b)}+\frac{a}{b}+2=\frac{a-b-a}{b}+2=1$$

4. Slučajna promenljiva X ima raspodelu verovatnoća (funkciju gustine raspodele)

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right) & x\in(0,a)\\ 0 & x\notin(0,a)\end{cases}$$

Naći funkciju raspodele F(x) i izračunati $P\left(\frac{a}{2}<X<a\right)$.

Kako je $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ dobijamo:

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{x}{2}\left(2-\frac{x}{a}\right) & 0\le x\le a\\ 1 & x>a\end{cases}$$

$$P\left(\frac{a}{2}<X<a\right)=F(a)-F\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

13.5.8. Slučajne promenljive koje se najčešće koriste

13.5.8.1. *Slučajna promenljiva sa binomnom raspodelom*

Ako je verovatnoća realizacije događaja A pri nekom eksperimentu p(A)=p $\left(p(\overline{A})=q=1-p\right)$ i ako se taj eksperiment u neizmenjenim uslovima ponavlja n-puta, nezavisno svaki put, tada možemo konstatovati koliko se puta u tih n

eksperimenata događaj A pojavio. Očigledno je da su vrednosti toga broja 0,1,...,n. Pri tome se mogu izračunati verovatnoće svih tih brojeva (to su verovatnoće da je se A pojavio odgovarajući broj puta) i na taj način dobijamo sledeće brojeve

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots & n \\ \binom{n}{0} q^n & \binom{n}{1} pq^{n-1} & & \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & & \binom{n}{n} p^n \end{pmatrix}$$

Dakle, ovde su verovatnoće povezane sa binomnim koeficijentima $\binom{n}{k}$ i zato se ova slučajna promenljiva zove slučajna promenljiva sa ***binomnom raspodelom***. Označava se sa B(n,p) njena raspodela, a ona sama se obično označava sa S_n. Njeno matematičko očekivanje je $E(S_n)=np$ a disperzija $\sigma^2(Sn)=npq$.

Primeri :

1. Verovatnoća da će strelac puškom pogoditi avion u brišućem letu je p=0,001. Kolika je verovatnoća da će 100 strelaca nezavisno pucajući jedan od drugog istovremeno na avion
a) tačno 4 puta pogoditi avion;
b) broj pogodaka nije veći od 4.

P(A)=0,001 q=0,999. Pucanje 100 strelaca može se shvatiti kao ponavljanje eksperimenta 100 puta u neizmenjenim uslovima pa je prema tome

a) $P(S_{100}=4)=\binom{100}{4}\cdot 0{,}001\cdot 0{,}999$

b) Broj pogodaka nije veći od 4 je

$$p = P(S_{100}=0) + \dots + P(S_{100}=4) = \sum_{k=0}^{4}\binom{100}{k}\cdot 0{,}001^k \cdot 0{,}999^{100-k}$$

2.Verovatnoća da će strelci pogoditi vozilo u pokretu je 0,6. Jedan od 20 strelaca puca na neprijateljsko vozilo. Kolika je verovatnoća da će ga pogoditi ne manje od 4 puta?

Raspodela je ponovo binomna sa p=0,6 q=0,4 n=20.

$$p = \sum_{k=4}^{20} P\{S_{20}=k\} = \sum_{k=4}^{20}\binom{20}{k}\cdot 0{,}6^k \cdot 0{,}4^{20-k}$$

13.5.8.2. *Slučajna promenljiva sa geometrijskom raspodelom*

Neka je A događaj kao u prethodnom slučaju (sa verovatnoćom p se odigrava a sa verovatnoćom q=1-p se ne odigrava). Neka se ogled izvodi do prvog pojavljivanja događaja A i neka je slučajna promenljiva G broj eksperimenata. Očigledno G može uzeti vrednosti 1,2,...,n,... a pripadajuće verovatnoće su p, qp, q^2p,..., $q^{n-1}p$,... Slučajna promenljiva G se zove slučajna promenljiva sa geometrijskom raspodelom, pri čemu je matematičko očekivanje

$$E(G)=\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}p=\frac{1}{p}$$

a disperzija

$$\sigma^2(G)=\sum_{n=1}^{\infty} n^2q^{n-1}p=\frac{1-p}{p^2}.$$

13.5.8.3. *Slučajna promenljiva sa Puasonovom raspodelom*

Slučajna promenljiva S_∞ koja uzima vrednosti 0,1,...,n,.... sa verovatnoćom

$$P(S_\infty = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{n!},$$

gde je $\lambda>0$, se naziva slučajna promenljiva sa Puasonovom raspodelom.

Koristi se kao aproksimacija za slučajnu promenljivu sa binomnom raspodelom kada je $np \le 10$ (i tada se stavlja da je $\lambda=np$). Vrednosti joj se zadaju tabelarno.

$$E(S_\infty)=\lambda \quad \text{i} \quad \sigma^2(S_\infty)=\lambda.$$

Primer:

Drugi način rešavanja primera 1: Kako je p=0,001 n=100 np=0,1<10,
a) primenjujemo Puasonovu aproksimaciju:

$$p_k=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}\approx\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \quad k=0,1,2,\ldots \quad n\to\infty$$

pa imamo

$$p(S_{100}=4)\approx\frac{e^{-0,1}\cdot 0,1^4}{4!}=\frac{0,1^4}{4!\cdot\sqrt[10]{e}}\approx 0,000004$$

b) $p \approx 0,999996$ (dato tablicom).

13.5.8.4. *Slučajna promenljiva sa normalnom raspodelom*

Ova slučajna promenljiva je jedna od najverovatnijih i "najčešćih" u primenama. Neprekidnog je tipa i ima ***normalnu (Gausovu) raspodelu*** verovatnoća sa parametrima m i σ^2 a njena gustina je

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Obeležavamo njenu raspodelu sa N(m, σ^2). Njeno matematičko očekivanje je m a disperzija joj je σ^2 (što su i njene karakteristike). Standardizovani oblik normalne raspodele je normalna raspodela N(0,1). Vrednosti verovatnoća za ovu slučajnu promenljivu se zadaju tabelarno, jer funkcija $e^{-\frac{x^2}{2}}$ nema primitivnu funkciju među elementarnim funkcijama. Vrednosti verovatnoća za slučajnu promenljivu X sa raspodelom N(m, σ^2) se izračunavaju isto iz tablica za N(0,1) "standardizacijom" ove slučajne promenljive, tj. uvođenjem smene

$$Z = \frac{X - m}{\sigma}$$

koja ima raspodelu N(0,1). Na taj način je

$$P(a \le X \le b) = P\left(\frac{a-m}{\sigma} \le \frac{X-m}{\sigma} \le \frac{b-m}{\sigma}\right).$$

Primer:

Slučajna promenljiva X je raspoređena po normalnom zakonu sa m=40 i σ^2=200. Naći verovatnoću $30 \le X \le 80$.

a=30, b=80, m=40, $\sigma = 10\sqrt{2}$ pa je

$$P(a \le X \le b) = \left[\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)\right] = \left[\Phi\left(\frac{80-40}{10\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{30-40}{10\sqrt{2}}\right)\right] =$$

$$= \left[\Phi\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right) + \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] = \Phi(2{,}8) + \Phi(0{,}71) \cong 0{,}49744 + 0{,}26115 = 0{,}75859$$

(Zbog neparnosti funkcije Φ i iz tablice III).

Ovde je važno napomenuti da je

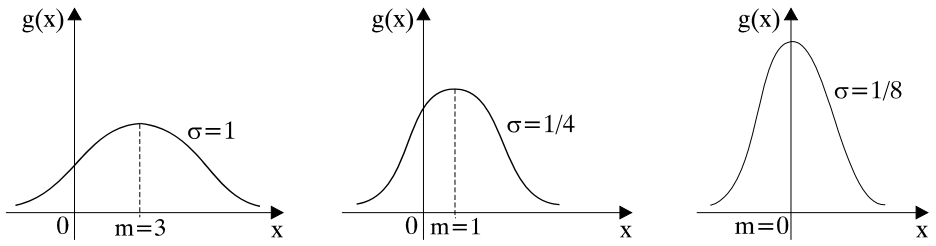
$$P(m-\sigma \le X \le m+\sigma) \approx 0{,}67$$

$$P(m-2\sigma \le X \le m+2\sigma) \approx 0{,}95$$

i $$P(m-3\sigma \le X \le m+3\sigma) \approx 0{,}99$$

odakle i potiče empirijsko pravilo "tri sigme" koje se pojavljuje u statistici: "između m-3σ i m+3σ su skoro svi elementi populacije".

Kriva $\varphi(x)$ se naziva Gausova kriva i ona je simetrična oko prave x=m. Ako je σ veći broj ona je "šira" a ako je σ manji broj ona je uža, kao što pokazuje sledeća slika:



Slika 9.

Normalna raspodela se koristi i kao aproksimacija za izračunavanje vrednosti slučajne promenljive sa binomnom raspodelom na sledeći način: ako je np≥10, tada je:

$$P\left(\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} = x\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{npq}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

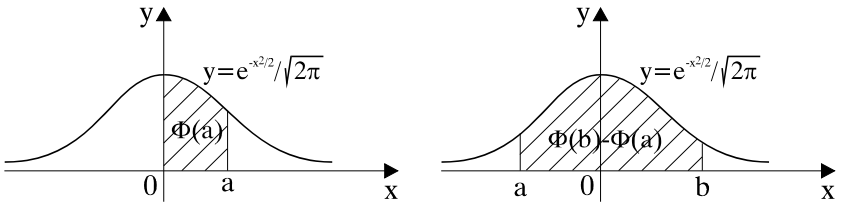
odnosno

$$P\left(a \le \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \le b\right) \approx \Phi(b) - \Phi(a)$$

gde je Φ(x) - Laplasova funkcija, tj.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Funkcija Φ(x) ima sledeće osobine: Φ(0)=0, Φ(+∞)=0,5, Φ(-x)=-Φ(x). Geometrijska interpretacija izraza Φ(a), odnosno Φ(b)-Φ(a) data je sledećom slikom



Slika10.

Ove vrednosti, kao što smo napomenuli, date su tabelarno.

Drugi način za rešavanje primera 19:

$$p = P(4 \le S_{20} \le 20) = P\left(\frac{4-12}{\sqrt{20 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}} \le \frac{S_{20}-12}{\sqrt{20 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}} \le \frac{20-12}{\sqrt{20 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}} \right) \approx$$

$$\approx P\left(-3{,}65 \le \frac{S_{20}-12}{\sqrt{20 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}} \le 3{,}65 \right) = 2 \cdot \Phi(3{,}65) = 2 \cdot 0{,}49987 = 0{,}99974$$

13.5.8.5. *Slučajna promenljiva sa χ^2 raspodelom*

Ako su slučajne promenljive $X_1,...,X_n$ nezavisne i svaka sa normalnom raspodelom N(0,1), tada je slučajna promenljiva

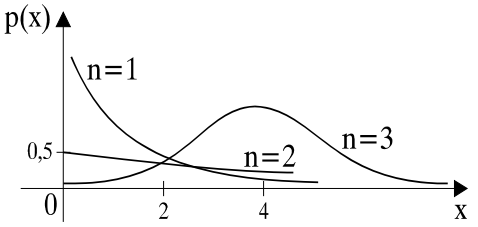
$$\chi^2_n = X^2_1 + X^2_2 + ... + X^2_n$$

neprekidnog tipa koja zavisi od parametra n (n=1,2,...). Raspodela za ovu slučajnu promenljivu se zove χ^2 raspodela sa n stepeni slobode. Ovaj broj stepeni slobode govori koliko međusobno nezavisnih slučajnih promenljivih ulazi u χ^2_n. Ako među slučajnim promenljivima $X_1,...,X_n$ imamo k veza, tada se broj stepeni slobode smanjuje za k, tj. tada bi imali

$$\chi^2_{n-k} = X^2_1 + ... + X^2_n.$$

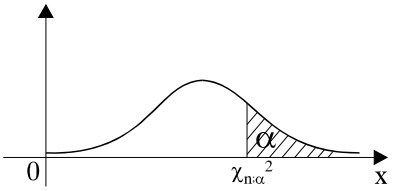
Obzirom da je izraz za gustinu raspodele slučajne promenljive χ^2 dosta komplikovan (za n=1,2,3 dat je grafik te funkcije na slici 40), to se verovatnoće vezane za χ^2 raspodelu zadate tabelarno. Te verovatnoće su date za broj stepeni slobode n=1,...,30 i za dati broj α, $0<\alpha<1$ (obično se zadaju za α=0,01, α=0,05,..., α=0,80), tj. iz tablice III očitavamo broj $\chi^2_{n;\alpha}$ i taj broj ustvari je veličina koju će slučajna promenljiva χ^2_n premašiti sa verovatnoćom α, tj.

$$P\left\{\chi_n^2 \geq \chi_{n;\alpha}^2\right\} = \alpha .$$



Slika 11.

Ovo je prikazano i sledećom slikom (za naš broj n)



Slika 12.

- Parametri χ^2 - raspodele su:

$$E(\chi^2) = n \ , \quad \sigma^2(\chi^2) = \sqrt{2n}$$

Za n>30 se obično uzima da je χ^2_n slučajna promenljiva sa približno normalnom raspodelom N(n,2n).

Napomenimo da ako su χ^2_n i χ^2_m nezavisne slučajne promenljive, tada je

$$\chi^2_n + \chi^2_m = \chi^2_{n+m}.$$

13.5.8.6. *Slučajna promenljiva sa Studentovom raspodelom*

Ako su X sa normalnom raspodelom N(0,1) i χ^2_n nezavisne slučajne promenljive, tada je slučajna promenljiva neprekidnog tipa data sa

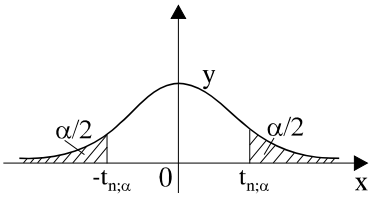
$$t_n = \frac{X}{+\sqrt{\frac{\chi_n^2}{n}}}$$

naziva Studentova t-raspodela sa n stepeni slobode.

I ovde je izraz za gustinu raspodele dosta komplikovan, pa se verovatnoće zadaju tabelarno, zapravo i ovde se zadaju brojevi u tablicama $t_{n;\alpha}$, gde je $0<\alpha<1$, gde je α verovatnoća da će $|t_n|$ premašiti broj $t_{n,\alpha}$, tj.

$$P\{|t_n| \geq t_{n,\alpha}\}=\alpha,$$

ili kako to izgleda na slici:



Slika 13.

y - grafik funkcije gustine t-raspodele.

- • Parametri Studentove raspodele su:

$$E(t)=0\ , \qquad \sigma^2(t)=\frac{n}{n-2}$$

Napomenimo da kad $n\to\infty$ ova slučajna promenljiva teži normalnoj (za $n\geq 120$ to je već približno N(0,1) a može se uzeti i za $n>30$ da je dosta dobra aproksimacija ove raspodele raspodela N(0,1)).

13.5.8.7. *Slučajna promenljiva sa Fišerovom raspodelom*

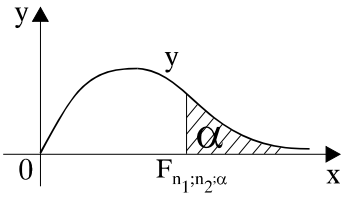
Ako su slučajne promenljive $\chi^2_{n_1}$ i $\chi^2_{n_2}$ nezavisne, tada se slučajna promenljiva

$$F_{n_1;n_2}=\frac{\chi^2_{n_1}/n_1}{\chi^2_{n_2}/n_2}$$

zove Fišerova sa n_1 stepeni slobode u brojiocu i n_2 stepeni slobode u imeniocu. Izraz za gustinu je i ovde komplikovan ali je komplikovano i tabelarno zadavanje zbog dva parametra n_1 i n_2. U tabelama se zadaju vrednosti $F_{n_1;n_2;\alpha}$ (najčešće za α=0,05 i α=0,01) za koje je

$$P\left\{F_{n_1;n_2}\geq F_{n_1;n_2;\alpha}\right\}=\alpha$$

Dakle, to je broj koji $F_{n_1;n_2}$ premašuje sa verovatnoćom α (slika 14).



Slika 14.

y - grafik funkcije gustine Fišerove raspodele.

••• Parametri Fišerove raspodele su:

$$E(F)=\frac{n_1}{n_2-2}\ (n_2>2)\ ,\qquad \sigma^2(F)=\frac{2n_1(n_1+n_2-2)}{(n_1-2)^2(n_2-4)}$$

Pored ovih pomenutih koriste se i brojne druge slučajne promenljive, od kojih ćemo neke samo navesti sa nekim njihovim karakteristikama:

– Uniformna slučajna promenljiva U sa

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & \text{za } a\le x\le b\\ 0 & \text{za } x<a \text{ i } x>b\end{cases}$$

$$E(U)=\frac{a+b}{2}\qquad \sigma^2(U)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

– Eksponencijalna slučajna promenljiva ε sa

$$\varphi(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & \text{za } x\ge 0\\ 0 & \text{za } x<0\end{cases}$$

$$E(\varepsilon)=\frac{1}{\lambda}\qquad \sigma^2(\varepsilon)=\frac{1}{\lambda^2}$$

13.5.9. *Korelacija dve slučajne promenljive*

Korelacija je veza izme|u dve slučajne promenljive. Obično se posmatra linearna veza, a stepen linearne zavisnosti dve slučajne promenljive X i Y meri se koeficijentom linearne korelacije ρ_{xy} koji se izračunava na sledeći način:

$$\rho_{x,y} = \frac{E\big((X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))\big)}{+\sqrt{\sigma^2(X) \cdot \sigma^2(Y)}} = \frac{E(XY) - E(X) \cdot E(Y)}{+\sqrt{\sigma^2(X) \cdot \sigma^2(Y)}}$$

Ovaj koeficijent ima sledeće osobine:

(1) $|\rho_{x,y}| \leq 1$;

(2) Ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive, onda je $\rho_{x,y} = 0$ (obrnuto ne mora važiti);

(3) $|\rho_{x,y}| = 1$ ako i samo ako je $Y = \alpha X + \beta$; pri tome je za $\alpha > 0$, $\rho = 1$, a za $\alpha < 0$, $\rho = -1$.

13.5.10. Zakoni velikih brojeva. Centralna granična teorema

Prvo ćemo navesti jednu dosta jednostavnu nejednakost poznatu kao *Čebiševljeva nejednakost:*

Ako slučajna promenljiva X ima konačno matematičko očekivanje kvadrata od X, tj. $E(X^2)$ je konačno, tada za svako $\varepsilon > 0$ važi Čebiševljeva nejednakost:

$$P\{X \geq \varepsilon\} \leq \frac{E(X^2)}{\varepsilon^2}$$

ili u drugačijem obliku

$$P\left\{\left|X - E(X)\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{\sigma^2(X)}{\varepsilon^2}.$$

Pomoću ove nejednakosti može se dokazati sledeća

Teorema 2.
Ako su $X_1, X_2, \ldots$ nezavisne slučajne promenljive sa istom raspodelom i konačnom disperzijom, tj. $E(X_k) = a$ $k = 1,2,\ldots$, $\sigma^2(X_k) = \sigma^2$ $k = 1,2,\ldots$, onda niz aritmetičkih sredina

$$\overline{X_n} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \quad n = 1,2,\ldots$$

teži ka a kad $n \to \infty$ u sledećem smislu:

$$\text{za svako } \varepsilon > 0 \quad P\left\{\left|\overline{X_n} - a\right| \geq \varepsilon\right\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Ako je n veće, $\overline{X_n}$ je sve bliže konstanti a i slučajnost nestaje kod aritmetičkog niza slučajnih promenljivih. Ovaj zakon je *jedan od zakona velikih brojeva.*
Sledeća teorema je poznata kao *centralna granična teorema*.

Teorema 3.
Ako su $X_1,X_2,...$ nezavisne slučajne promenljive sa istom raspodelom i konačnom disperzijom, tj. $E(X_k)=a$ $k=1,2,...$ i $\sigma^2(X_k)=\sigma^2$ $k=1,2,...$, onda standardizovani oblik njihovog zbira $S_n=X_1+X_2+...+X_n$, tj. raspodela slučajne promenljive

$$S_n^* = \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{\sigma^2(S_n)}} = \frac{S_n - an}{\sqrt{n\sigma^2}} = \frac{X_1 - a}{\sigma\sqrt{n}} + \ldots + \frac{X_n - a}{\sigma\sqrt{n}}$$

teži, kad $n\to\infty$, normalnoj raspodeli N(0,1) (raspodela za S_n je $N(na,n\sigma^2)$).

Napominjemo da ni ovaj rezultat nije najopštiji već analogan važi i za proizvoljne slučajne promenljive i sa ne obavezno istom raspodelom (ali sa nekim drugim uslovima, i u tim izmenjenim uslovima ćemo imati da zbir ima normalnu raspodelu).
I ova teorema govori o važnosti normalne raspodele.

13.5.11. Regresija

U primenama teorije verovatnoće od interesa su aproksimacije slučajne promenljive Y sa nekom funkcijom R(X) od slučajne promenljive X.
Najčešće se traži funkcija R(x), $x\in R$, takva da $E(Y-R(X))^2$ bude minimum, naravno za svako X=x. Može se dokazati da će ovo biti dostignuto kada je R(x) uslovno matematičko očekivanje od Y za X=x, tj.

$$R(x)=E(Y \mid X=x).$$

Ova kriva R(x) se naziva regresiona kriva Y po X i za slučajne promenljive diskretnog tipa ona je

$$R(x_i)=E(Y \mid X=x_i) \quad i=1,2,...$$

a za slučajne promenljive neprekidnog tipa

$$R(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\varphi_2(y|x)dy \quad x \in R.$$

ZADACI

1. Neprovidna kesa sadrži 30 kuglica: 10 crvenih, 8 plavih i 12 neobojenih. Iz kese se izvlači, na sreću, jedna kuglica. Kolika je verovatnoća da će se izvući obojena kuglica?

Rešenje:

Označimo sa A događaj " izvučena crvena kuglica" i sa B " izvučena plava kuglica". Tada događaj $A+B$ označava " izvučena obojena kuglica". Pošto su događaji A i B neudruživi, to je:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{10}{30}+\frac{8}{30}=0,6$$

2. U lutriji ima 1000 srećaka, od kojih 1 srećka dobija zgoditak 500 dinara, 10 srećaka zgoditke po 100 dinara, 50 srećaka zgoditke po 20 dinara, 100 srećaka zgoditke po 5 dinara, ostale srećke su bez zgoditaka.. Kolika je verovatnoća dobijanja zgoditka ne manjeg od 20 dinara za 1 kupljenu srećku?

Rešenje:

Neka je događaj A_1 "zgoditak od 20 dinara", A_2 zgoditak od 100 dinara, A_3 "zgoditak od 500 dinara", događaj A"zgoditak ne manji od 20 dinara", to je $A=A_1+A_2+A_3$ i uzimajući u obzir neudruživost događaja A_1, A_2, i A_3 imamo:

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{50}{1000}+\frac{10}{1000}+\frac{1}{1000}=0,061$$

3. Bačeni su novčić i kocka . Neka je A događaj " pao je grb" i B " pala 3 na kocki" . Odrediti $P(A\cup B)$

Rešenje:

$$A=\{G1,G2,G3,G4,G5,G6\},\ \text{pa je}\ P(A)=\frac{6}{12}$$

$$B=\{G3,C3\},\ \text{pa je}\ P(B)=\frac{2}{12}$$

$A \cap B = \{G3\}$, pa je $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$

$P(A \cup B) = \frac{6}{12} + \frac{2}{12} - \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$

4. Kolika je verovatnoća da se iz 32 karte izvuče ili crvena karta ili dama? Pošto se ovde događaji udružuju, jer crvena karta obuhvata i dve dame (AB), to je verovatnoća:

Rešenje:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{9}{16}$$

5. U kesi se nalazi 60 cedulja na kojima su redom ispisani prirodni brojevi od 1 do 60. Ako izvučemo iz kese jednu cedulju, kolika je verovatnoća da broj koji smo izvukli nije deljiv ni sa 3, ni sa 4, ni sa 5?

Rešenje:

Ovde je $m = \{1, 2, 3....59, 60\}$;

A: broj deljiv sa 3

B: broj deljiv sa 4

C: broj deljiv sa 5

$A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, ...57, 60\} = 20; B = \{4, 8, 12, 16, 20...56, 60\} = 15;$

$C = \{5, 10, 15, 20....60\} = 12;\ \ P(A \cap B) = \{12, 24, 36, 48, 60\} =$

$= 5$; $V(A \cap C) = \{15, 30, 45, 60\} = 4$

$P(B \cap C) = \{20, 40, 60\} = 3;\ P(A \cap B \cap C) = \{60\} = 1;$

$P(A \cup B \cup C) = \frac{20}{60} + \frac{15}{60} + \frac{12}{60} - \frac{5}{60} - \frac{4}{60} - \frac{3}{60} + \frac{1}{60} = \frac{3}{5}$

$P(\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ je tražena verovatnoća.

6. Ukolektivu ima 63 muškarca i 37 žena. Među muškarcima se nalazi 42% pušača, i 58% nepušača, dok među ženama ima 14% pušača i 86% nepušača.

Događaj da je slučajnim izborom odabrana osoba mučkarac obeležimo sa A i da puši sa B.

Izračunaj verovatnoće sledećih događaja

a) $P(AB)$; b) $P(\overline{A}B)$; c) $P(A\overline{B})$; d) $P(\overline{AB})$

Rešenje:

a) $P(AB)=\frac{63}{100}\cdot\frac{42}{100}=0,2646;$

b) $P(\overline{A}B)=\frac{37}{100}\cdot\frac{14}{100}=0,0518;$

c) $P(A\overline{B})=0,3654;$

d) $P(\overline{AB})=0,3182;$

7. Ako se iz jednog špila od 32 karte i drugog od 52 karte izvuče po jedna karta, kolika je verovatnoća da će to biti 2 keca?

Rešenje:

Ovde se događaj D realizuje kroz dva nezavisna događaja, A i B, jer izvlačenje keca iz špila od 32 karte ničim ne utiče na izvlačenje keca iz špila od 52 karte, pa su verovatnoće ovih događaja:

$$P(A)=\frac{4}{32}=\frac{1}{8};\quad P(B)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13};\quad P(D)=P(AB)=\frac{1}{104}$$

8. Kolika je verovatnoća da se dve kocke, numerisane od 1-6, bace prvi put dva jednaka broja, drugi put zbir 5, treći put zbir 9?

Rešenje:

Od ranije znamo da kod dve kocke $m=6^2=36$. Ovde se događaj D realizuje kroz tri nezavisna događaja A,B,C, jer realizacijom jednog od njih ničim se ne utiče na realizaciju ostala dva događaja, pa je verovatnoća očekivanog događaja D:

$$P(D)=P(ABC)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{486}$$

9. Iz špila od 52 karte izvučene su, na sreću, tri karte (bez vraćanja). Kolika je verovatnoća da među njima neće biti nijednog keca?

Rešenje:

Pošto ima 52 karte, od kojih su 4 keca, to pri izvlačenju prve karte imamo za događaj

$A: m = 48,\ n = 52,$ pa je:

$$P(A) = \frac{48}{52}.$$

Pri uslovu da prva izvučena karta nije kec imamo za $(B)_A: m_1 = 47,\ n_1 = 51,$ pa je:

$$P(B)_A = \frac{47}{51}.$$

Analogno je $P(C)_{AB} = \frac{46}{50}$, pa će tražena verovatnoća biti:

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{48}{52} \cdot \frac{47}{51} \cdot \frac{46}{50} = \frac{4324}{5525} = 0,783.$$

10. Ispitni program sadrži 100 pitanja. Student je došao na ispit znajući 85 pitanja. Na ispitu se izvlači tri pitanja. Kolika je verovatnoća da student zna sva 3 pitanja?

Rešenje:

A_1 događaj da student zna da odgovori na I pitanje

A_2 događaj da student zna da odgovori na II pitanje

A_3 događaj da student zna da odgovori na III pitanje

$D = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ $\quad A_1, A_2, A_3$ zavisni događaji

$$P(D) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 \cdot A_2) = \frac{85}{100} \cdot \frac{84}{99} \cdot \frac{83}{98} = \frac{83 \cdot 84 \cdot 85}{98 \cdot 99 \cdot 100}$$

11. Pet strelaca gađaju po jednom i nezavisno jedan od drugog isti cilj. Verovatnoća da pogode cilj strelci je:
I – 0,90 II – 0,80 III- 0,95 IV- 0,90 V- 0,85
Naći verovatnoću da je cilj pogođen jednom.

$A_1 -$ cilj je pogodio I

$A_2 -$ cilj je pogodio II

$A_3 -$ cilj je pogodio III

$A_4 -$ cilj je pogodio IV

$A_5 -$ cilj je pogodio V

Rešenje:

Ako je događaj D značio da se cilj pogodi bar jednom, D^c će značiti da se ne pogodi ni jednom.

$D^c = A_1^c \cdot A_2^c \cdot A_3^c \cdot A_4^c \cdot A_5^c;$ događaji su nezavisni:

$$P\left(D^c\right) = P\left(A_1^c\right) \cdot P\left(A_2^c\right) \cdot P\left(A_3^c\right) \cdot P\left(A_4^c\right) \cdot P\left(A_5^c\right)$$

$$P\left(D^c\right) = 0,10 \cdot 0,20 \cdot 0,5 \cdot 0,10 \cdot 0,15 = 0,010 \cdot 0,100 \cdot 0,15 = 0,001000 \cdot 0,15 = 0,00015$$

$$P(D) = 1 - 0,00015 = 0,99985$$

12. Radnik kontroliše rad tri mašine. Verovatnoće da u toku jednog dana neće biti popravka prve, druge i treće mašine su:

$p_1 = 0,90; \quad p_2 = 0,95; \quad p_3 = 0,80$

Naći verovatnoću da će na svim mašinama biti potrebna popravka u toku istog dana, za slučaj kada mašine rade nezavisno jedna od druge.

Rešenje:

$A_1 -$ potrebna popravka na I mašini

$A_2 -$ potrebna popravka na II mašini

$A_3 -$ potrebna popravka na III mašini

$D = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$

$$P(D) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0,10 \cdot 0,05 \cdot 0,20 = 0,0200 \cdot 0,05 = 0,0010$$

13. Uzmimo slučajnu veličinu X koja se javlja pri bacanju kocke:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \ldots . & & & & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Matematičko očekivanje je $E(X) + \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} \cdot p_i$

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{1}{6} \cdot 21 = \frac{21}{6}$$

14. Naći srednju vrednost Puasonove slučajne veličine koja postiže vrednosti

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & ....n... \\ p_0 & p_1 & p_2 & ...p_n.. \end{pmatrix}$$

Rešenje:

$$p_n = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \qquad \lambda > 0$$

$$X = \sum_{J=0}^{\infty} j \cdot I_{Aj}$$

$$E_X = \sum_{0}^{\infty} j \cdot P_j = \sum_{0}^{\infty} j \cdot \frac{\lambda^j}{j!} \cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot \sum_{0}^{\infty} \frac{\lambda^J}{(J-1)!} =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \sum_{0}^{\infty} \frac{\lambda^{J-1} \cdot \lambda}{(J-1)!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot \sum_{0}^{\infty} \frac{\lambda^{J-1}}{(J-1)!} = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e = \lambda$$

$$E_X = \lambda$$

15. Neka se u kutiji nalazi 15 žetona, od kojih 6 belih i 9 crvenih. Sukcesivno se izvlače dva žetona, kolika je verovatnoća da u prvom izvlačenju bude beo, a u drugom crvenižeton.

Rešenje:

Označavajući izvlačenje belog žetona kao nastajanje događaja A a izvlačenje crvenog kao događaj B i kako su događaji nezavisni onda je:

$$P(A)=\frac{6}{15}=\frac{2}{5},\ P(B)=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$$

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{6}{25}$$

- ako su događaji A i B zavisni, tj. Ako nastajanje događaja B zavisi od ostvarenja događaja A (odnosno da li je u prvom pokušaju izvučen beli ili crveni žeton koji se ne vraća) tada je:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B/A)=\frac{6}{15}\cdot\frac{9}{14}=\frac{9}{35}$$

16. U kutiji se nalazi 10 numerisanih cedulja i slučajno se izvlači šest puta po jedna sa vraćanjem.

a. Kolika je verovatnoća da se četiri puta izvuče cedulja, čija je numeracija broj deljiv sa 5
b. Koji je očekivani broj takvih cedulja

Rešenje:

Neka je A događaj izvlačenja cedulje sa numeraciom broj 5 tj. 10, onda je

$$p=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

X je slučajna veličina i predstavlja broj javljanja posmatranog događaja, znači

$$P(X=4)=\binom{6}{4}\cdot\frac{1}{5^4}\cdot\frac{4^2}{5^2}=\frac{48}{3125}=0,01537=1,54\%$$

očekivani broj izvlačenja date cedulje je $E(X)=n\cdot p=6\cdot\frac{1}{5}=\frac{6}{5}$

što znači samo jedna cedulja.



KLJUČNI POJMOVI:

- SLUČAJNI DOGAĐAJI
- VEROVATNOĆA
- USLOVNA VEROVATNOĆA
- NEZAVISNOST DOGAĐAJA
- SLUČAJNA PROMENLJIVA
- MATEMATIČKO OČEKIVANJE
- DISPERZIJA

VIII - GLAVA

ELEMENTI STATISTIKE

SADŽAJ OVOG POGLAVLJA JE:

- **OSNOVNI STATISTIČKI POJMOVI, POPULACIJA, OBELEŽJE I UZORAK**
- **PRIKUPLJANJE I PRIKAZ PODATAKA**
- **STATISTIČKA ANALIZA – MERE SREDNJIH VREDNOSTI, ODSTUPANJA I OBLIK**
- **PROST SLUČAJNI UZORAK**
- **INTERVALI POVERENJA**
- **TESTIRANJE HIPOTEZA**

C I L J E V I U Č E N J A

Kada ovo poglavlje proučite znaćete:

1. Koje su mogućnostima statističkih istraživanja i zaključivanja.
2. Razliku između populacije i uzoraka.
3. Kako se ocenjuju parametri raspodela
4. Šta su intervali poverenja.
5. Kako se testiraju hipoteze.

14. UVOD U STATISTIKU

Pod statistikom podrazumevamo:

- deskriptivnu statistiku – prikupljanje, obrada i prikazivanje podataka;
- statističku analizu – dobijanje numeričkih pokazatelja i donošenje odluka o posmatranim masovnim pojavama i njihovim zakonitostima i karakteristikama;
- statističku teoriju – razvoj novih statističkih metoda.

Statistika se danas koristi u svim oblastima i delatnostima a statističke metode se u velikoj meri koriste u prirodnim i društvenim naukama.

Možemo reći da predmet proučavanja statistike čine pojave koje se masovno ispoljavaju sa različitim intenzitetima u pojedinim individualnim slučajevima.

Skup svih pojedinačnih elemenata koji su iste vrste ograničeni na nekom prostoru i u nekom vremenu čine ***statistički skup ili populaciju***. Ovaj skup može biti konačan i beskonačan (prebrojiv i neprebrojiv). Elementarne jedinice (element populacije) mogu biti nosioci jedne ili više pojava koje se zajedno posmatraju.

Kvantitativne (i kvalitativne) karakteristike elementa statističkog skupa (popu-lacije) zovemo ***obeležjima***. Na istoj populaciji mogu se posmatrati jedno, dva ili više obeležja. Skoro uvek je cilj da se vidi kako su obeležja raspoređena na datom statističkom skupu. Očigledno je da ovaj cilj nije lako ostvarljiv, jer je ponekad za to potrebno mnogo vremena, ponekad je to jako skupo a ponekad i nemoguće. Zato se u statistici za određivanje rasporeda pojedinog obeležja ne posmatra uvek cela populacija već najčešće samo jedan njen deo a onda se na tom delu populacije napravi odgovarajući zaključak pa se zatim to što smo zaključili za ovaj deo populacje proglasi da važi za celu populaciju.

Deo populacije koji se posmatra naziva se ***uzorak***. Osnovni zadatak statistike je da na osnovu uzorka donese što je moguće tačniji sud o celoj populaciji. Ovde se prirodno postavlja pitanje da li je takvo zaključivanje korektno? U statistici se smatra da jeste pod određenim uslovima:

- da je uzorak reprezentativan, odnosno da su svi elementi populacije imali podjednaku šansu da uđu u uzorak
- i da su u uzorku uzeti elementi na potpuno slučajan način.

14.1. STATISTIČKO POSMATRANJE, PRIKUPLJANJE I PRIKAZIVANJE PODATAKA

Kako je već rečeno na nekom statističkom skupu se uočava obeležje (obeležja) koje se posmatra i čiju strukturu želimo da upoznamo. Posmatranje statističkog skupa može biti potpuno ili delimično.

Potpuno posmatranje statističkog skupa obuhvata sve elemente statističkog skupa u datom trenutku (takav je na primer popis stanovništva) i ovaj vid posmatranja se naziva ***statistički popis***. U potpuno posmatranje spada i izveštajni metod koji neprekidno prati neki događaj koji se odigrava u toku vremena.

Delimično statističko posmatranje je najčešći oblik statističkog posmatranja i sprovodi se na delu populacije koji se naziva uzorak. Uzorci se u principu dele na slučajne i nepotpune slučajne uzorke. Isto tako uzorci se dele po obimu na velike (više od 30 jedinica) i male.

U bilo kom od statističkih posmatranja mora se raditi sa jednoobraznim statističkim upitnicima koji sadrže jasna i nedvosmislena pitanja na koja se moraju dobijati odgovori, kratki, jasni, nedvosmisleni i svima razumljivi. Na ovaj način se eliminišu ili svode na najmanju meru greške koje su redovan pratilac statističkih posmatranja, a kojih može biti više vrsta. Zbog mogućnosti nastajanja grešaka obično se izvodi i kontrola statističkog istraživanja.

Dobijeni statistički materijal se dalje razvrstava (šifrira), prebrojava, klasifikuje i grupiše svaka jedinica obuhvaćena istraživanjem. Dalje se ovi grupisani podaci prezentiraju u obliku statističkih tabela i grafikona.

Rezultati statističke obrade podataka po obeležjima i po vremenu se nazivaju ***statističkim serijama***. One se prikazuju tabelama i grafikonima. Statističke tabele su skupovi brojeva raspoređenih u pravouganu šemu.

Grafički prikaz satističkih podataka može biti različit: ***dijagrami*** i ***kartogrami***. Dijagrami grafički predstavjaju podatke pomoću tačaka, linija, površina, zapremina. Kartogrami izražavaju statističke podatke na geografskim kartama.

14.2. O STATISTIČKIM SERIJAMA

Onovne vrste statistikih serija su serije ***struktura i vremenske serije***. Serije struktura se dele na ***numeričke i atributivne serije***.

Numeričke serije pokazuju raspodelu pojedinih numeričkih vrednosti obeležja po broju elemenata statističkog skupa koji je posmatran (broj i frekvencija).

Numerički podaci se mogu podeliti u nekoliko kategorija, prema tome kakve su skale u kojima se ti podaci dobijaju. Tako na primer podaci o broju dece u nekoj porodici su diskretni i obavezno celi brojevi. Podaci o visini ljudi su neprekidnog karaktera (bez obzira što ćemo ih mi zbog načina merenja prikazivati u diskretnom obliku). Isto tako postoje podaci koji se mere ali u njihovoj skali merenja nemamo kao karakterističnu nultu vrednost već je ista dogovorno odabrana (primer merenja temperature po Celzijusovoj i Farenhajtovoj skali) Pored ovih postoje i tako zvani racio podaci koji imaju fiksiranu nultu poziciju, takav podatak je recimo novac ako na primer neko ima nula dinara onda to znači da on nema para. Sa ovim podacima se može računati i mi ćemo se uglavnom u dajem baviti sa njima.

Atributivne serije pokazuju raspored pojedinih atributa po broju elemenata populacije (atribut i frekvencija).

Vremenske serije pokazuju veličinu pojave u vremenu. Mogu biti ***momentne i intervane***.

Momentne serije prikazuju stanje pojave u nizu uzastopnih momentnih vremena.

Intervalne serije prikazuju kretanje pojave u nizu uzastopnih vremenskih intervala.

Statistička serija obično sadrži apsolutne brojeve stanja, a može sadržati i relativne brojeve, relativne frekvencije.

Numeričke serije se dele na numeričke serije sa prostom ***distribucijom frekvencije*** (ovde se svakoj vednosti pridružuje broj njenih pojavljivanja – frekvencija) i na ***intervalne distribucije frekvencija*** (gde se numeričke vrednosti obeležja poklapaju intervalno, to jest svakom intervalu se pridružuje broj pojavljivanja, frekvencija obeležja u tom intervalu).

U praksi se pitanje broja intervala i širine inervala određuje pomoću Stardžesovog pravila:

Broj intervala K se određuje formulom $K = 1 + 3,3 \log N$

gde je N – broj posamtranih jedinica, a širina intervala C se određuje na sledeći način

$$C = \frac{X_{max} + X_{\min}}{K}$$

gde je najveća vrednost obeležja u posmatranom skupu $X_{\max}$ a $X_{\min}$ najmanja vrednost obeležja.

Klase u principu nisu razgraničene (imaju susedne jednu zajedničku tačku) to se primenjuje pravilo da se granična (zajednička) tačka pridružuje klasi u kojoj je njena najmanja vrednost.

Primer:

Broj ugostiteljskih objekata po opštinama bio je:

5	20	15	35	48	17	38	39
7	19	20	40	46	28	35	41
9	17	19	38	39	31	42	29
10	16	30	42	50	42	25	19

Grupisati podatke u obliku intervalne numeričke serije.

Broj intervala	Širina intervala	Donja granica prvog intervala
k = 1+3.3log32	i = $\frac{x_{\max} - x_{min}}{k}$	$x_0 = x_{\min} - \frac{i}{2}$
k = 1+3,3*1.50515	i = $\frac{50-5}{5.96699}$	$x_0 = 5 - \frac{7.54}{2}$
k = 1+4,96699	i = 7.54	$x_0 = 1.23$
k = 5.96699	i ≈ 8	$x_0 \approx 1$

k ≈ 6

Broj grupnih intvervala je 6. Maksimalan broj ugostiteljskih radnji je x_{max} je 50, minimalan broj x_{min} je 5. Širina grupnog intervala i ≈ 8 . Donja granica grupnog intervala je $x_0 \approx 1$.

Na osnovu izračunatih vrednosti parametara k, i, x_0 možemo i napraviti tabelu grupisanja opstina prema broju ugostiteljskih radnji.

Broj ugostiteljskih objekata xi	Broj opština fi	Razredna sredina xi	Kumulanta rastuća k	Kumulanta opadajuća k	Relativna frekvencija %	Kumulanta rastuća u %
1-9	3	5	3	32	9.38	9.38
10-18	5	14	8	29	15.62	25.00
19-27	6	23	14	24	18.75	43.75
28-36	6	32	20	18	18.75	62.50
37-45	9	41	29	12	28.13	90.62
46-54	3	20	32	3	9.37	100.00
Ukupno	∑fi=32	/	/	/	100.00	/

14.3. STATISTIČKE TABELE, POLIGONI I HISTOGRAMI

Podaci koji se prikupljaju za neko obeležje, bilo da su iz čitave populacije ili uzorka, moraju se srediti da bi njihova upotreba bila celishodna.

Neka neko obeležje uzima vrednosti $x_1,x_2,...,x_k$ i neka je pri tome $x_1<x_2<...<x_k$. Ukupan broj elemenata u ovom posmatranom skupu je N a neka se $x_1,x_2,...,x_k$ redom pojavljuju $f_1,...f_k$ puta. Brojevi $f_1,...f_k$ se zovu frekvencije vrednosti obeležja i pri tome je jasno da je

$$f_1+f_2+...+f_k=N.$$

Brojevi $\frac{f_1}{N}=r_1,\ldots,\frac{f_k}{N}=r_k$ se zovu relativne frekvencije za koje očigledno važi $r_1+...+r_k=1$.

Ovi brojevi se najčešće daju u obliku sledeće tabele

X	x_1	x_2	x_3	. . .	x_k	$\sum$
f_i	f_1	f_2	f_3	. . .	f_k	N
r_i	r_1	r_2	r_3	. . .	r_k	1

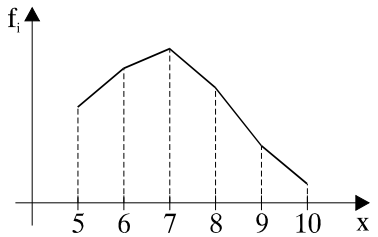
Ova tabela se zove ***statistička tabela.***
Ovi brojevi mogu biti dati i u Dekartovom koordinatnom sistemu - na apscisnoj osi se daju vrednosti obeležja a na ordinati se nanose frekvencije. Ako se pri tome susedne tačke spoje dobije se ***poligon raspodele učestanosti*.**
Ako je broj podataka veliki i broj vrednosti obeležja veliki, tada se najčešće obeležja posmatraju u klasama i frekvencije se posmatraju na intervalu=klasi,

pa kad se nacrta u Dekartovom koordinatnom sistemu na apscisnoj osi se nanesu klase a na ordinatnoj osi frekvencije, dobije se ***histogram*** učestanosti za datu raspodelu.

Primeri :

1. 30 studenata je polagalo statistiku i dobijene ocene su date tabelom:

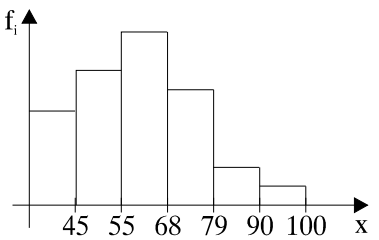
X	5	6	7	8	9	10	$\sum$
f_i	5	7	8	6	3	1	30
r_i	1/6	7/30	4/15	1/5	1/10	1/30	1



Slika 1.

2. 30 studenata je polagalo pismeni ispit iz matematike i dobijeni su sledeći bodovi:

X	0-44	45-55	56-68	69-79	80-90	91-100	$\sum$
f_i	5	7	9	6	2	1	30
f_{r_i}	5/30	7/30	9/30	6/30	2/30	1/30	1



Slika 2.

14.4. MERE

Statističke serije opisane u prethodnom delu se kao što smo videli prikazuju tabelarno i grafički. Iz ovih pokazatelja mi možemo, često dobro uočiti pravilnosti koje poseduju posmatrane pojave. Da bi videli detaljnije pojavu i njene zakonitosti koristimo:

(1.) mere centralne tendencie (srednje vrednosti)
(2.) mere odstupanja
(3.) mere oblika.

Ove se vrednosti pojavljuju kao pokazatelji rasporeda frekvencija i cele populacije i tada ih zovemo parametri populacije a u slučaju uzorka statistika uzorka.

14.4.1. Srednje vrednosti

Srednje vrednosti možemo podeliti na dve grupe: ***računske srednje vrednosti i pozicione srednje vrednosti***.
Karakteristike računskih srednjih vrednosti su da na njihovu vrednost utiču sve elementarne jedinice da je veća od najmanje a manja od najveće elementarne jedinice, a ako su sve vrednosti iste onda je i ona ta ista vrednost.
Postoje brojne srednje vrednosti koje se mogu računati: ***aritmetička sredina, geometrijska sredina, harmonijska sredina, sredina kvadrata, sredina kubova***, ... Najčešće se posmatraju prve tri.
Pozicione srednje vrednsti se ne izražavaju matematičkim formulama iz svih vrednosti posmatranih elementarnih jedinica, već se određuju iz dela istih prema svojoj poziciji u posmatranom skupu.
Pozicione vrednosti su ***medijana i modus (mod***).
Sve ove srednje vrednosti imaju svoju ulogu u određenim segmentima statističkih analiza.

Aritmetička sredina

Koriste se tri obrasca za izračunavanje aritmetičke sredine m:

1. Ako su $x_1,....x_n$ negrupisani podaci, tada je $m = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

2. Ako su podaci grupisani i imamo prostu distribuciju frekvencija datu tabelom

vrednosti	x_1	x_2	...	x_r
frekvencije	f_1	f_2	...	f_r

tada je $m = \dfrac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_r f_r}{f_1 + f_2 + \cdots + f_r} = \dfrac{\sum_{i=1}^{r} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{r} f_i}$

Napomenimo da se u literaturi sreće i naziv ponderisana aritmetička sredina za aritmetičku sredinu grupisanih podataka.

3. U slučaju intervalno prikazanih podataka datih tabelom:

intervali	$[x_1, x_2)$	$[x_2, x_3)$	...	$[x_{r-1}, x_r]$
frekvencije	f_1	f_2	...	f_{r-1}

aritmetička sredina se računa po obrascu

$$m = \frac{x_{S1} \cdot f_1 + x_{S2} \cdot f_2 + \ldots + x_{Sr-1} \cdot f_{r-1}}{f_1 + f_2 + \ldots + f_{r-1}}$$

gde je $x_{si} = \dfrac{x_{i+1} + x_i}{2}$, dakle sredina i-tog intervala.

Aritmetička sredina je dobar pokazatelj za veliki broj serija koje su grupisane oko te srednje vrednosti i koje nisu mnogo simetrične. Postoje situacie u kojima ta sredina može dati iskrivljenu sliku o seriji mada one nisu česte.

Primer:

Naći aritmetičku sredinu za sledeće podatke

(a)

2,2,3,2,4,6,6,2,3,5,4

(b)

x_i	2	3	4	5	6
f_i	1	3	8	9	2

(c)

intervali	$[0,2)$	$[2,4)$	$[4,6)$	$[6,8)$	$[8,10]$
frekvencije	3	8	12	7	5

Po definiciju aritmetičke sredine imamo rešenje:

(a)

$$m = \frac{2+2+3+2+4+6+6+2+3+5+4}{11} = \frac{39}{11} = 3,545$$

(b)

$$m = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \ldots + x_r \cdot f_r}{f_1 + f_2 + \ldots + f_r} = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 8 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 2}{1 + 3 + 8 + 9 + 2} = \frac{106}{23}$$

(c)

$$m = \frac{x_{S1} \cdot f_1 + x_{S2} \cdot f_2 + \ldots + x_{Sr-1} \cdot f_{r-1}}{f_1 + f_2 + \ldots + f_{r-1}} = \frac{1 \cdot 3 + 3 \cdot 8 + 5 \cdot 12 + 7 \cdot 7 + 9 \cdot 5}{3 + 8 + 12 + 7 + 5} = \frac{181}{35}$$

Geometrijska sredina

Geometrijska sredina se dobija kao n-ti koren svih n vrednsti obeležja koje moraju biti veće od nule. Slično kao u prethodnom slučaju imamo tri obrasca:

1. Za proste negrupisane podatke geometrijska sredina *G* je

$$G = \sqrt[N]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_N}$$

2. Za grupisane podatke date tabelom

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_r
f_i	f_1	f_2	$\cdots$	f_r

$$G = \sqrt[\sum_{i=1}^{r} f_i]{x_1^{f_1} \cdot x_2^{f_2} \cdot \ldots \cdot x_r^{f_r}}$$

3. za intervalne date podatke

intervali	$[x_1, x_2)$	$[x_2, x_3)$	...	$[x_{r-1}, x_r]$
frekvencije	f_1	f_2	...	f_{r-1}

$$G = \sqrt[\sum_{i=1}^{r} f_i]{x_{S1}^{\,f_1} \cdot x_{S2}^{\,f_2} \cdot \ldots \cdot x_{Sr-1}^{\,f_{r-1}}} \quad \text{gde su} \quad x_{Si} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

Inače ove vrednsoti se relativno lako računaju logaritmovanjem i izračunavanjem *log G* pa zatim antilogaritmovanjem dobijamo vrednost za *G*. Na primer da to uradimo za prvi obrazac za negrupisane podatke (analogno se radi i za ostale):

$$\log G = \frac{1}{N}(\log x_1 + \log x_2 + \ldots + \log x_N) = V \quad \Rightarrow \quad G = 10^V$$

Primer:

Cena jednog proizvoda u toku jedne godine je povećana za 10%, sledeće za 18%. Koliko je prosečno povećanje cena?

Prosečno povećanje cena se računa preko geometrijske sredine

$G = \sqrt{1{,}10 \cdot 1{,}18} \approx 1{,}13$

dakle ono je 13% godišnje (a ne 14% što je aritmetička sredina povećanja)

Odnos između geometrijske i aritmetičke sredine je

$$G \leq m$$

a jednakost je jedino u slučaju svih istih vrednosti.

Harmonijska sredina

Ova sredina izračunava se za vrednosti različite od nule. Koristi se kod obrnuto proporcionalnih veličina. Kao u prethodnim slučajevima imamo tri vrste obrazaca za harmonijsku sredinu H:

1. Za proste negrupisane podatke $x_1, x_2, \ldots x_n$

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{x_i}}$$

2. Za grupisane podatke date tabelom

x_1	x_2	$\cdots$	x_r
f_1	f_2	$\cdots$	f_r

$$H = \frac{f_1 + f_2 + \ldots + f_r}{\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} + \ldots + \frac{f_r}{x_r}} = \frac{\sum_{i=1}^{r} f_i}{\sum_{i=1}^{r} \frac{f_i}{x_i}}$$

3. Za intervalno date podatke tabelom

intervali	$[x_1, x_2)$	$[x_2, x_3)$	...	$[x_{r-1}, x_r]$
frekvencije	f_1	f_2	...	f_{r-1}

$$H = \frac{f_1 + f_2 + \ldots + f_{r-1}}{\frac{f_1}{x_{S1}} + \frac{f_2}{x_{S2}} + \ldots + \frac{f_{r-1}}{x_{Sr-1}}} = \frac{\sum_{i=1}^{r} f_i}{\sum_{i=1}^{r} \frac{f_i}{x_i}}$$

$$gde\ je\ \ x_{Si} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

Harmonijska sredina je manja ili jednaka od geometrijske to jest važi:

$$H \le G \le m$$

(a jednakost je jedino ako su sve vrednosti iste)

Primer:

Dva radnika rade na dve iste mašine isti proizvod. Jedan proizvod naprave za 20 minuta, a drugi za 30 minuta. Koliki je prosek izrade proizvoda?

Prosečno vreme ovde treba računati po harmonijskoj sredini

$$H = \frac{2}{\frac{1}{20} + \frac{1}{30}} = \frac{2}{\frac{5}{60}} = \frac{120}{5} = 24$$

dakle, prosečno vreme izrade je 24 minuta, a ne preko aritmetičke sredine

$$m = \frac{20 + 30}{2} = 25$$

Napomena: Za intervalno date podatke, vrednosti za aritmetičku, geometrijsku i harmonijsku sredinu se računaju kao da su sve vrednosti iz datog intervala jednake srednjoj vrednosti iz datog intervala!
Odavde sledi da se primer (c) koji je dat posle aritmetičke sredine

intervali	$[0,2)$	$[2,4)$	$[4,6)$	$[6,8)$	$[8,10]$
frekvencije	3	8	12	7	5

Praktično zamenjuje sa sledećim primerom za grupisane podatke

x_i	1	3	5	7	9
f_i	3	8	12	7	5

Pozicione srednje vrednosti

Ove vrednosti se određuju pozicijom, mestom vrednosti u seriji.

Medijana

Vrednost sredine serije podataka koje su poređane po veličini je ***medijana***

1. Ako su podaci negrupisani i poređani po veličini $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$

onda je medijana $M_e = x_{n+1} \qquad n-\text{neparan broj}$

$$M_e = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2} \qquad n-\text{paran broj}$$

2. Prethodni obrasci važe i za grupisane podatke s tim što je važno napomenuti da se za grupisane podatke za prostu distribuciju frekvencija medijana određuje kumulativna frekvencija (kumuliranjem frekvencija ''ispod''). U tom kumulativu odredi se broj u kome se sadrži $\frac{m}{2}$. Naspram $\frac{m}{2}$ nalazi se vrednost medijane.

3. Ako je serija data u intervalnom obliku sasvim zadovojavajuća vrednost za medijanu(mada se može raditi i drugačije) se dobija kada se iz intervalnog oblika pređe na oblik grupisanih podataka sa sredinama intervala kao vrednostima na intervalu i onda se medijana pronalazi kao u predhodnom slučaju.

Primeri:

1. Neko je brojao putnike (na šalteru za kartu na autobuskoj stanici u intervalu od jednog minuta) i rezultati su dati tabelom:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f_i	150	300	250	120	60	30	20	10	2

Naći medijanu. Tabela kumulativne frekvencije je:

x_i	f_i	Kumulativne frekvencije
0	150	150
1	300	450
2	250	700
3	120	820
4	60	880
5	30	910
6	20	930
7	10	940
8	2	922

$$\sum f_i = 150+300+250+120+60+30+20+10+2 = 942$$

paran broj to je

$$M_e = \frac{x_{\frac{942}{2}} + x_{\frac{942}{2}+1}}{2} = \frac{x_{471} + x_{472}}{2} = \frac{2+2}{2} = 2$$

jer se i 471 i 472 član nalazi među 250 dvojki (nula ima 150, jedinica 300).

2. Neka je dat intervalni raspored serije

intervali	$[0,2)$	$[2,4)$	$[4,6)$	$[6,8)$	$[8,10)$	$[10,12)$	$[12,14]$
frekvencije	5	10	18	30	17	8	6

Ovaj intervalni raspored se prebacuje u običan raspored sa sredinama i dobija se sledeća tabela

x_i	1	3	5	7	9	11	13
f_i	5	10	18	30	17	8	6

A odavde se lako vidi da je medijana jednaka 7.

Modus (mod)

Mod je vrednost u seriji koji ima najveću frekvenciju. Serija može imati samo jedan mod unomodalna, ili može imati više modova polimodalna.

Kod intervalnih serija postoji modalni interval sa najvećom frekvencijom koji sadrži vrednost modusa, ta vrednost se izračunava po obrascu :

$$M_o = x + i\frac{(f_2 - f_1)}{(f_2 - f_1) + (f_2 - f_3)}$$

x- donja granica modalnog intervala
i- širina modalnog intervala
f_1- frekvenicija predhodnog intervala
f_2– frekvencija modalnog intervala
f_3- frekvencija narednog intervala

Primer:

Dat je raspored domaćinstava prema mesečnoj potrošnji jednog artikla:

potrošnja	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14
Br.domaćinstava	8	10	21	19	15	6

Izračunati najčešću potrošnju prehrambenih proizvoda po domaćinstvu.

U ovoj seriji modalni interval sa najvećom frekvencijom je od 6 do 8, pa su vrednosti sledeće:
x=6, i=2, f_1=10, f_2=21, f_3=19

$$M_o = 6 + 2\frac{(21-10)}{(21-10)+(21-19)}$$

M_o=7,692
Najčešća potrošnja prehrambenog proizvoda po domaćinstvu je 7,692 kilograma.

14.4.2. Mere odstupanja i centralni momenti

Ove mere su mere odstupanja među članovima serije, ili kako se to još češće naziva ***mere varijabiliteta***. Možemo ih podeliti na ***pozicione mere varijacije i računske mer***e. Od pozicionih ćemo posmatrati ***razmak varijacije***, a od računskih ćemo posmatrati ***srednje apsolutno odstupanje, srednje kvadratno odstupanje (varijansa) i disperziju.***
Ove mere spadaju u apsolutne mere odstupanja. Koriste se i relativne mere (vrednost obeležja iskazuje se u relativnim brojevima) odstupanja koje su pogodne u nekim situacijama.

DEFINICIJA

Razmak varijacije R je razlika između maksimalne i minimalne vrednosti u seriji dakle $R = x_{\max} - x_{\min}$

Srednje apsolutno odstupanje se definiše za negrupisane podatke $x_1,...x_n$ formulom

$$S_{AO} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - m|$$

a za grupisane podatke (analogno i za intervalne podatke,)

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_r
f_i	f_i	f_2	$\cdots$	f_r

Formulom $$S_{AO} = \frac{1}{\sum_{1}^{r} f_1} \cdot \sum_{i=1}^{r} f_i |x_i - m|$$

U statitici za mere odstupanja od aritmetičke sredine koristi srednje ***kvadratno odstupanje:***

Za negrupisane podatke $x_1,...x_n$ $\overline{S}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(x_i - m)^2$

ili $\overline{S}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i^{\,2} - m^2$

Za grupisane podatke:

$$\overline{S}_n^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{r} f_i} \sum_{i=1}^{m} f_i \left(x_i - m\right)^2 \quad \text{ili} \quad \overline{S}_n^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \sum_{1}^{2} f_i x_i^{\,2} - m^2$$

(Za intervalne podatke se koristi isti obrazac samo umesto x_i se uzima sredina intervala x_{Si}).

Srednje kvadratno odstupanje se obeležava sa σ^2 i zove se još i v***arijansa*** a kvadratni koren iz srednjeg kvardatnog odstupanja σ i zove ***se standardana deviacija***. Inače izrazi za računanje srednjeg kvadratnog odstupanja zovu se još i ***centralni momenti drugog reda***. U statistici se koriste još i centralni momenti reda 1,2,3,4, a koji se definišu izrazima:

Za negrupisane podatke, $x_1, \ldots x_n$, $\quad M_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^k \qquad k = 1, 2, \ldots$

odnosno za grupisane podatke $\quad M_k = \frac{1}{\sum_{1}^{r} f_i} \sum_{i=1}^{2} f_i \left(x_i - m\right)^k$

definišu se i obični momenti $m_k = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i^{\,k}$ za negrupisane podatke $x_1, \ldots x_n$

odnosno $m_k = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot x_i^{\,k}$ za grupisane podatke

(očigleno je ako je $m = 0, \quad M_k = m_k$)

Srednje kvadratno odstupanje se dobija i iz formule $\overline{S}^2 = m_2 - m_1^{\,2}$

Kao relativna mera varijacije koristi se količnik srednjeg kvadratnog odstupanja i kvadrata aritmetičke sredine

$$V^2 = \frac{\overline{S}^2}{m^2} = \frac{\sigma^2}{m^2} \quad \text{ili što je još češće } V = \frac{\sigma}{m}$$

koji je relativan broj i zove se ***koeficijent varijacije*** i ponekad se izražava u %

14.4.3. Mere oblika

Kao mere oblika koriste se momenti trećeg i četvrtog reda i njihovi odnosi sa σ^3 i σ^4 . Dakle ***asimetrija*** se meri koeficijentom:

$$\alpha_3 = \frac{M_3}{\sigma^3} = \frac{\frac{1}{n}\sum_1^r f_i(x_i - m)^3}{\sigma^3}$$

a ***spljoštenost*** se meri koeficijentom:

$$\alpha_4 = \frac{M_4}{\sigma^4} = \frac{\frac{1}{n}\sum_1^r f_i(x_i - m)^4}{\sigma^4}$$

Ako je $\alpha_3 = 0$ raspored je simetričan;

$\alpha_3 > 0$ imamo asimetriju u desno;

$\alpha_3 < 0$, imamo asimetriju u levo.

Što je vrednost α_3 veća (po apsolutnoj vrednosti) to je asimetrija veća. Smatra se da je asimetrija umerena ako je $-2 < \alpha_3 < 2$.

Što se koeficijenta α_4 tiče smatra se da je raspored normalan ako je $\alpha_4 = 3$;

Ako je $\alpha_4 > 3$ to je veća koncentracija vrednsti oko aritmetičke sredine;

$\alpha_4 < 3$ to su vrednosti razbacanije oko aritmetičke sredine nego što je to slučaj kod normalnog rasporeda.

14.5. IZBOR SLUČAJNOG PROSTOG UZORKA

Ako je data jedna populacija, nju možemo shvatiti kao skup mogućih ishoda pri nekom eksperimentu Ω, a njeni elementi su tada "elementarni događaji" ω. Kada se svakom elementu populacije pridruži broj, tj. njegovo obeležje, to obeležje je jedna slučajna promenljiva $X=X(\omega)$, $\omega \in \Omega$. Ako izaberemo slučajno n elemenata populacije $\omega_1,...,\omega_n$, mi dobijamo jednu slučajnu n-dimenzionalnu promenljivu

$$(X(\omega_1),...X(\omega_n))$$

koju možemo označiti i sa $(X_1,...,X_n)$. Ova n-dimenzionalna slučajna promenljiva se zove slučajni uzorak obima n. Ako sve promenljive $X_1,...,X_n$ imaju istu

raspodelu kao i obeležje X na celoj populaciji, tada se ovaj slučajni uzorak naziva prost ili samo ***uzorak*.**
Uzorak mora da bude reprezentativan (reprezentativnost uzorka se manifestuje tako što je postupak njegovog dobijanja nezavisan od obeležja koje posmatramo)
Važno pitanje vezano za uzorak je i njegov obim.
Odgovor na ovo pitanje je veoma važan jer premali uzorak će dati "lošu" ocenu a preveliki uzorak može biti skup, a takođe nam oduzima i vreme. U svakoj konkretnoj situaciji u zavisnosti od željene tačnosti ocene može se dobiti veličina traženog uzorka. To ocenjivanje prevazilazi obim ovog kursa.

14.6. OCENE PARAMETARA

Osnovni problem statistike je da na osnovu uzorka $(X_1,...,X_n)$ zaključi kakva je raspodela obeležja X:$(p(t_i))$, i=1,2,..., odnosno $\varphi(x)$ $-\infty<x<+\infty$.
Ako još na osnovu nekih drugih razmatranja znamo da obeležje ima neki određeni tip raspodele (a to je često slučaj), tada treba samo odrediti parametre te raspodele.
Opišimo u kratkim crtama taj problem:
Treba odrediti nepoznati parametar θ obeležja X. Za uzorak $(X_1,...,X_n)$ biramo statistiku

$$\theta_n=f(X_1,...,X_n)$$

pomoću koga ocenjujemo parametar θ.
Naravno, $(X_1,...,X_n)$ je n-dimenzionalna slučajna promenljiva a kada uzmemo uzorak $(x_1,...,x_n)$ mi iz uzorka dobijemo broj

$$v_n=f(x_1,...,x_n)$$

u koji možemo imati veće ili manje poverenje. Ovako dobijena vrednost zove se još i tačkasta ocena parametra θ.
U matematičkoj statistici postoji razrađena teorija kako izabrati statistiku θ_n da bi "poverenje" u ocenu parametra θ bilo što veće.
Obično se zahteva da ocena θ_n parametra θ bude "centrirana", tj. da naša funkcija ima osobinu da je

$$E(\theta_n)=\theta.$$

Pri tome se od dve centrirane ocene θ_n^1 i θ_n^2 parametra θ smatra boljom ona čija je disperzija manja.
Naravno, određivanje statistika koje najbolje ocenjuju nepoznate parametre prevazilazi okvir ovog kursa i time se ovde nećemo baviti.

14.7. INTERVALI POVERENJA

Ako treba oceniti nepoznati parametar θ zadatak se može i ovako postaviti: Naći vrednosti θ_1 i θ_2 tako da je

$$P\{\theta_1<\theta_2\}=1 \text{ i } P\{\theta_1<\theta<\theta_2\}=\beta.$$

Naravno, θ_1 i θ_2 se dobijaju kao statistike iz uzorka $x_1,...,x_n$ a β je zadata verovatnoća. Interval $[\theta_1,\theta_2]$ se zove interval poverenja a β se zove nivo poverenja. Obično se želi da interval bude manji, a β što veće (oprečni zahtevi). Izlaz se traži u povećanju obima uzorka. Kada se uzorak uzme tada se dobijaju brojevi v_1 i v_2 i naš interval postaje određeni interval $[v_1,v_2]$. Naš parametar θ "upada" ili ne u ovaj interval, a β ne treba shvatiti kao verovatnoću da će se θ naći u tom intervalu, već β treba shvatiti da ako napravimo više uzoraka tada u približno 100β% ovaj interval prekriva parametar θ.

Interval poverenja za nepoznatu verovatnoću p:

Kod elemenata populacije se događaj A realizuje sa nepoznatom verovatnoćom P(A)=p. U uzorku od n elemenata broj realizacija događaja A je slučajna promenljiva S_n sa binomnom raspodelom. Pri tome na slučajna promenljiva $\frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$ ima približno normalnu raspodelu N(0,1), odakle je

$$P\left\{\left|\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right| \le Z_\beta\right\} = \beta$$

pa sledi da je interval poverenja za nepoznatu verovatnoću p interval između manjeg i većeg rešenja jednačine po p:

$$\left(n^2 + n\cdot z_\beta^2\right)p^2 - \left(2n\cdot S_n + n\cdot z_\beta^2\right)p + S_n^2 = 0$$

S_n - broj "povoljnih" događaja za nepoznatu verovatnoću od n mogućih

z_β - broj dobijen iz tablice za normalnu raspodelu takav da je $\phi\left(z_\beta\right)=\frac{\beta}{2}$.

Taj interval je

$$\left[\frac{n}{n+z_\beta^2}\left(\frac{S_n}{n}+\frac{z_\beta^2}{2n}-z_\beta\sqrt{\frac{S_n(n-S_n)}{n}+\frac{z_\beta^2}{4n^2}}\right),\frac{n}{n+z_\beta^2}\left(\frac{S_n}{n}+\frac{z_\beta^2}{2n}+z_\beta\sqrt{\frac{S_n(n-S_n)}{n}+\frac{z_\beta^2}{4n^2}}\right)\right]$$

Naravno, kad se uzme uzorak dobijaju se dva broja koji ne moraju obavezno biti u [0,1] mada je verovatnoća sigurno u intervalu [0,1].

Primer:

U jednom pogonu proizvedeno je u toku jednog radnog dana 80 proizvoda i nađeno je da su 4 od njih defektna. Naći 95% interval poverenja za nepoznatu verovatnoću p=P{proizvod je defektan}.

U ovom slučaju n=80 a S_n=4. z_β dobijamo iz tablice: Nalazimo $\frac{\beta}{2} = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475$

$\phi(z_\beta) = 0{,}475 \Rightarrow z_\beta = 1{,}96$ (U tablici nalazimo broj 47500 levo je 1,9 iznad je 6, dakle z_β=1,96 i postavljamo jednačinu

$(80^2+80\cdot 1{,}96)p^2-(2\cdot 80\cdot 4+80\cdot 1{,}96^2)p+16=0$, odnosno $0{,}0196 \le p \le 0{,}1216$

Interval poverenja za matematičko očekivanje m u slučaju poznate disperzije σ^2:

$$m \in \left[\overline{x_n} - z_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x_n} + z_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

gde je:

z_β: $\phi(z_\beta) = \frac{\beta}{2}$, $\overline{x_n}$ - sredina uzorka.

Primer :

Pretpostavimo da je disperzija $\sigma^2 = 4$ pri proizvodnji jedne vrste proizvoda u njihovoj težini. Ako je iz jedne serije uzet uzorak n=200 komada i nađeno da je prosečna težina u tom uzorku $\overline{X}_{200} = 2{,}1kg$ odrediti:

a) 98% interval poverenja za težinu proizvoda;

b) 90% interval poverenja za težinu proizvoda.

a) Ovde je n=200 $\overline{X}_n = 21$.

z_β određujemo iz tablice $\frac{\beta}{2} = 0{,}49000$ $(\beta = 0{,}98)$. U tablici imamo da je $z_{0{,}48983}$=2,32 i $z_{0{,}49010}$=2,33 a nama treba broj $z_{0{,}49000}$. Taj broj dobijamo iz sledeće proporcije:

0,00027:0,01=0,00017:x,

odakle je $x = \frac{0{,}00017 \cdot 0{,}01}{0{,}00027} \approx 0{,}06$, pa je z_β=2,32+0,006=2,326 i kada ove vrednosti uvrstimo u obrazac dobijamo interval poverenja

$$m \in (1{,}77;2{,}43).$$

b) Interval iznosi (1,87;2,33).

Napomena: Dužina intervala poverenja, koja iznosi $2z_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, nije slučajna veličina već je sve manja sa povećanjem obima uzorka n, a naravno ona se smanjuje ako nivo poverenja β smanjujemo.

***Interval poverenja za matematičko očekivanje m kad disperzija σ^2 nije poznata*:**

$$m \in \left[\overline{x_n} - t_{n-1;1-\beta} \frac{\overline{S_n}}{\sqrt{n-1}},\ \overline{x_n} + t_{n-1;1-\beta} \frac{\overline{S_n}}{\sqrt{n-1}} \right].$$

Primeri:

1. Meteorološka stanica je u desetogodišnjem praćenju ustanovila da su na jednom planinskom mestu godišnje visine snežnog pokrivača iznosile: 0,90; 1,10; 1,20; 1,05; 1,30; 0,85; 1,15; 1,00; 0,95; 1,25.

Odrediti 90% interval poverenja za E(X)=m.

Ovde je n=10, β=0,9 pa iz tablice V čitamo broj $t_{9;0,10}$=1,833. Određujemo

$$\overline{x_{10}} = \frac{1}{10}(0{,}90 + 1{,}1 + 1{,}2 + 1{,}05 + 1{,}3 + 0{,}85 + 1{,}15 + 1{,}00 + 0{,}95 + 1{,}25)$$

$$\overline{x_{10}} = 1{,}075$$

zatim određujemo

$$\sigma_{10}^2 = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} x_k^2 - \overline{x_{10}}^2 = \frac{1}{10}\left(0{,}90^2 + 1{,}1^2 + \ \ldots\ + 1{,}25^2\right) - 1{,}085625 = 0{,}090625$$

Dakle, 90% interval poverenja je

$$m \in \left[1,075 - 1,833 \cdot \sqrt{\frac{0,090625}{9}},\ \ 1,075 + 1,833 \cdot \sqrt{\frac{0,090625}{9}} \right],$$

odnosno približno

$$\mathrm{m} \in \left[0{,}8911,\ \ 1{,}2789 \right].$$

Interval poverenja za nepoznatu disperziju σ^2:

- jednostrani

$$\left[0,\ \ \frac{\mathrm{n} \cdot \overline{\mathrm{S_n}}^2}{\chi^2_{\mathrm{n}-1;\beta}} \right]$$

- dvostrani

$$\left[\frac{\mathrm{n} \cdot \overline{\mathrm{S_n}}^2}{\chi_{\mathrm{n}-1;\frac{1-\beta}{2}}},\ \ \frac{\mathrm{n} \cdot \overline{\mathrm{S_n}}^2}{\chi_{\mathrm{n}-1;\frac{1+\beta}{2}}} \right].$$

2. Neka obeležje X ima normalnu raspodelu N(m,σ^2). Uzorak obima n=16 daje sledeće rezultate

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{16} \mathrm{x_k} = 36 \ \text{ i } \ \sum_{\mathrm{k}=1}^{16} \mathrm{x_k^2} = 96{,}5\,.$$

Naći dvostrani i jednostrani interval poverenja za σ^2 za β=90%.
U oba slučaja treba prvo naći

$$\overline{\mathrm{x}_{16}} = \frac{36}{16} = 2{,}25 \ \text{ i } \ \overline{\mathrm{S}_{16}}^2 = \frac{1}{16} \sum_{\mathrm{k}=1}^{16} \mathrm{x_k^2} - \overline{\mathrm{x}_{16}}^2 = \frac{1}{16} 96{,}5 - 5{,}025 = 1{,}00625$$

Iz tablice nalazimo

$$\chi^2_{15;0,90} = 8{,}547$$

i 90% jednostrani interval poverenja je

$$\left[0,\ \ \frac{16 \cdot 1{,}00625}{8{,}547} \right] \cong \left[0,\ \ 1{,}8837 \right] \cdot$$

Isto tako iz tabele nalazimo

$$\chi^2_{15;\frac{1-0,9}{2}} = \chi^2_{15;0,05} = 24,996 \text{ i } \chi^2_{15;\frac{1+0,9}{2}} = \chi^2_{15;0,95} = 7,697$$

i imamo 90% dvostrani interval poverenja

$$\left[\frac{16 \cdot 1,00625}{24,996}; \frac{16 \cdot 1,00625}{7,667}\right] \cong [0,6441; 2,200] \cdot$$

Napomena 1: Vrednost $\chi^2_{15;0,95}$ je dobijena "linearnom ekstrapolacijom". Naime, u tablici imamo vrednosti

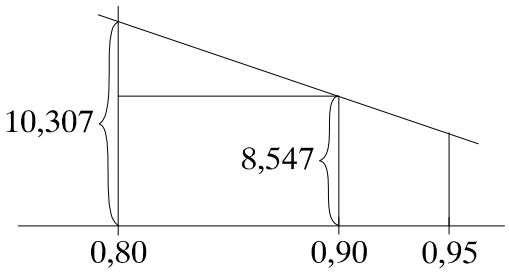
$$\chi^2_{15;0,80} = 10,307 \quad i \quad \chi^2_{15;0,90} = 8,547$$

Kako treba dobiti $\chi^2_{15;0,95}$ rezultat dobijamo koristeći se slikom 45 i računamo:

$$\frac{10,307 - 8,547}{10} = 0,176$$

$$\chi^2_{15;0,95} = \chi^2_{15;0,90} - 5 \cdot 0,176 = 8,547 - 0,880 = 7,667.$$

Napomena 2: Obim uzorka n se određuje tako što se unapred zada veličina intervala poverenja a izvrši se procena vrednosti nepoznatih statistika i parametara koji se u dužini intervala nalaze.



Slika 3.

14.8. TESTIRANJE STATISTIČKIH HIPOTEZA

Rešavanje osnovnog problema statistike - kakva je raspodela populacije na osnovu uzorka za neko obeležje se često vrši tako što se pretpostavi da obeležje ima neku raspodelu i ta pretpostavka se zove ***statistička hipoteza.*** Postupak verifikacije neke statističke hipoteze se zove ***statistički test***. Dakle, uzorak obima n je u principu jedna n-dimenzionalna slučajna promenljiva $(X_1,...,X_n)$.
Funkcija

$$\theta_n=f(X_1,...,X_n)$$

kojom ocenjujemo parametar θ se naziva ***statistika***. Ako se pretpostavka (hipoteza) odnosi na parametre raspodele, onda se test zove ***parametarski*** a u suprotnom ***neparametarski***.
Pri testiranju hipoteze važno je ustanoviti postupak, odnosno kriterijum na osnovu koga ćemo na osnovu uzorka istu prihvatiti ili odbaciti. U tom smislu hipoteze je pogodno ovako klasifikovati:
Ako hipoteza određuje u potpunosti neku raspodelu onda se ona naziva prosta a u protivnom se naziva složena.
Obično se testira jedna prosta hipoteza H_0 koja se još zove i ***nulta hipoteza***. ***Suprotna hipoteza*** H_1 nultoj hipotezi H_0 se zove još i ***alternativna hipoteza*** koja može biti i prosta i složena. Pri tome mi možemo ovde napraviti dve vrste grešaka: ***greška prvog tipa*** je da odbacimo H_0 ako je ona faktički tačna ***i greška drugog tipa*** je prihvatanje H_0 ako ona nije tačna. Naravno, cilj je uvek minimiziranje verovatnoća ovih grešaka ali se time ovde ne bavimo, ali konstatujmo da se uvećanjem obima uzorka ove verovatnoće po pravilu smanjuju.
U okviru ovog kursa ćemo se baviti jedino testiranjem hipoteza o raspodelama statističkih podataka odnosno vršićemo proveru da li je dato obeležje u okviru nekog statističkog skupa raspoređenom po određenom zakonu.

14.9. PIRSONOV χ^2 TEST

Ovaj test spada u klasu tzv. neparametarskih testova i služi za proveru nulte hipoteze

- H_0: obeležje X ima jednu potpuno određenu raspodelu ($p(x_i)$, i=1,2,... ili $\varphi(x)$, $-\infty<x<+\infty$ u zavisnosti od tipa slučajne promenljive X), protiv alternativne hipoteze
- H_1: obeležje X nema tu raspodelu.

Za uzorak se ovde zahteva da ima obim $n \geq 50$. Test ćemo izložiti po koracima:
Skup brojeva R, gde X može imati n vrednosti, delimo na r ($r \geq 2$) disjunktnih podskupova $S_1,...,S_r$. Pretpostavljajući da je H_0 tačna izračunamo koliko će teorijski od n vrednosti $(x_1,...,x_n)$ "pasti" u svaki od podskupova S_i (biće ih M_i) sa verovatnoćama $p_i = P_{H_0}\left(X \in S_i\right)$, i=1,...,r i $E(M_i)=np_i$. Iz uzorka $(x_1,...,x_n)$ konstatujemo koliko se članova nalazi u svakom od S_i i te brojeve označimo sa $m_1,m_2,...,m_r$ ($m_1+m_2+...+m_r=n$). Pri tome je očigledno statistika

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(M_k - np_k\right)^2}{np_k}$$

χ^2 statistika sa r-1 stepeni slobode koja za date brojeve m_i ima određenu vrednost:

$$\chi_{r-1}{}^2 = \sum_{k=1}^{r} \frac{\left(m_i - np_i\right)^2}{np_i}.$$

Za zadati prag značajnosti α određujemo iz tablica broj $\chi^2_{r-1;\alpha}$ i upoređujemo ga sa "našim" brojem χ^2_{r-1}:
ako je $\chi^2_{r-1} < \chi^2_{r-1;\alpha}$ ne odbacujemo hipotezu H_0
ako je $\chi^2_{r-1} \geq \chi^2_{r-1;\alpha}$ onda H_0 odbacujemo.

Ovde je važno napomenuti:

1) da prilikom podele skupa R_X na disjunktne skupove treba voditi računa da u svakom S_i iz uzetog uzorka bude najmanje 5 članova (tj. $m_i \geq 5$, i=1,...,r), s' tim što eventualno neki od krajnjih intervala ne moraju imati ovo svojstvo.
2) Ako smo iz uzetog uzorka $(x_1,...,x_n)$ za našu raspodelu izračunali (ocenili) s parametara, tada broj stepeni slobode u χ^2-raspodeli iznosi r-s-1.
3) Ako je r-s-1>30 tada ocenu broja $\chi^2_{r-s-1;\alpha}$ vršimo iz tablice za normalnu raspodelu (imajući u vidu da za n>30 i χ^2-raspodela aproksimira sa normalnom raspodelom N(n,2n).

Primeri:

1. Registrovan je broj ljudi pred šalterom pošte u jednakim vremenskim razmacima

x_i broj ljudi	0	1	2	3	4	5	6	7
n_i broj intervala	120	160	125	60	30	10	4	1

Koristeći Pirsonov χ^2 test ispitati da li je ovo Puasonova raspodela pri nivou značajnosti 5%.

n=510

$$\lambda = \frac{160+250+180+120+50+24+7}{510} = \frac{791}{510} \approx 1{,}5$$

Iz tablice 1 za λ=1,5 nalazimo verovatnoće

$p_1 \cong 0{,}2515$	$np_1 \cong 130{,}9$
$p_2 \cong 0{,}3193$	$np_2 \cong 163{,}8$
$p_3 \cong 0{,}2273$	$np_3 \cong 115{,}9$
$p_4 \cong 0{,}1209$	$np_4 \cong 62{,}8$
$p_5 \cong 0{,}0528$	$np_5 \cong 26{,}9$
$p_6 \cong 0{,}0196$	$np_6 \cong 10{,}0$
$p_7 \cong 0{,}0086$	$np_7 \cong 4{,}4$

$$\chi^2 = \frac{10{,}9^2}{130{,}9} + \frac{3{,}8^2}{162{,}8} + \frac{9{,}1^2}{115{,}9} + \frac{2{,}8^2}{62{,}8} + \frac{3{,}1^2}{26{,}9} + \frac{0{,}6^2}{4{,}4} \cong$$

$$\cong 0{,}9 + 0{,}1 + 0{,}7 + 0{,}15 + 0{,}30 + 0{,}08 \cong 2{,}23 < 9{,}48$$

znači nemamo razloga da odbacimo hipotezu.

2. Data je tablica sa statističkim podacima:

I	(0,3)	(3,6)	(6,9)	(9,12)	(12,15)	(15,18)	(18,21)	(21,24)	(24,27)	(27,30)
n_x	1	3	4	6	11	10	7	5	2	1

Proračunati Pirsonovim χ^2 testom da li je ova raspodela normalna.

n=50 ($n=\sum n_x$). Tabela sa sredinama ima obik (srednju vrednost uzimamo kao predstavnika intervala):

X	1,5	4,5	7,5	10,5	13,5	16,5	19,5	22,5	25,5	28,5
$w_x = \frac{n_x}{n}$	0,02	0,06	0,08	0,12	0,22	0,2	0,14	0,1	0,04	0,02

Radi lakšeg računa izvršimo zamenu promenljive po formuli X=3T-1,5, odnosno $T = \frac{X + 1,5}{3}$ i zapišimo raspodelu za T i T^2:

T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
w_T	0,02	0,06	0,08	0,12	0,22	0,2	0,14	0,1	0,04	0,02

T^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
w_{T^2}	0,02	0,06	0,08	0,12	0,22	0,2	0,14	0,1	0,04	0,02

i računajmo

$E(T)=1\cdot 0,02+2\cdot 0,06+ \ldots +10\cdot 0,02=5,5$

$E(T^2)=1\cdot 0,02+4\cdot 0,06+ \ldots +100\cdot 0,02=34,1$

Dakle

$E(X)=3E(T)-1,5=15$

$\sigma^2(X)=9\sigma^2(T)=9(E(T^2)-(E(T))^2)=9\cdot(34,1-5,5^2)=9\cdot(34,1-30,25)=9\cdot 3,85$

$$\sigma(X) = \sqrt{9\cdot 3,85} \cong 5,9$$

Sada tražimo pripadajuće teorijske verovatnoće:

$$p_1 = P(-\infty < X < 3) = P\left(-\infty < \frac{X-15}{5,9} < \frac{3-15}{5,9}\right) = P\left(-\infty < \frac{X-15}{5,9} < -2,03\right) =$$

$$= \Phi(-2,03) - \Phi(-\infty) = -\Phi(2,03) + \Phi(+\infty) = 0,5 - 0,47726 \approx 0,02$$

$$p_2 = P(3 < X < 6) = P\left(\frac{3-15}{5,9} < \frac{X-15}{5,9} < \frac{6-15}{5,9}\right) = P\left(-2,03 < \frac{X-15}{5,9} < -1,186\right) =$$

$$= \Phi(-1,186) - \Phi(-2,03) = \Phi(2,03) - \Phi(1,186) \approx 0,04$$

$p_3 \approx 0,09 \quad p_4 \approx 0,15 \quad p_5 \approx 0,20 \quad p_6 \approx 0,20$

$p_7 \approx 0,15 \quad p_8 \approx 0,09 \quad p_9 \approx 0,04 \quad p_{10} \approx 0,02$

Sada tražimo teorijske vrednosti:

$np_1=50\cdot 0,02=1 \quad np_2=2 \quad np_3=4,5 \quad np_4=7,5 \quad np_5=10$

$np_6=10 \quad np_7=7,5 \quad np_8=4,5 \quad np_9=2 \quad np_{10}=1$

Prva dva razreda i poslednja dva razreda spajamo u po jedan razred i dobijamo

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{8} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} = \frac{1^2}{3} + \frac{0,5^2}{4,5} + \frac{1,5^2}{7,5} + \frac{1^2}{10} + \frac{0}{10} + \frac{0,5^2}{7,5} + \frac{0,5^2}{4,5} + \frac{0}{3} = 0,875$$

Iz tablice za χ^2 raspodelu čitamo

$$\chi^2_{8-2-1;0,05} = 14,067$$

i kako je 0,875<14,067 nemamo razloga da odbacimo hipotezu.

ZADACI

1. Anketirano je 30 kupaca u prodavnicama „C Marketa“ o prosečnoj dnevnoj potrošnji vekni hleba. Dobijeni su sledeći podaci:

1 3 4 2 5 1 6 2 2 2 4 5 3 2 6
2 2 3 1 1 1 3 6 4 2 1 2 3 2 1

a) Srediti podatke u rastući niz
b) Formirati distribuciju apsolutnih i relativnih frekvencija u procentima
c) Prikazati grafički distribuciju apsolutnih frekvencija

Rešenje:

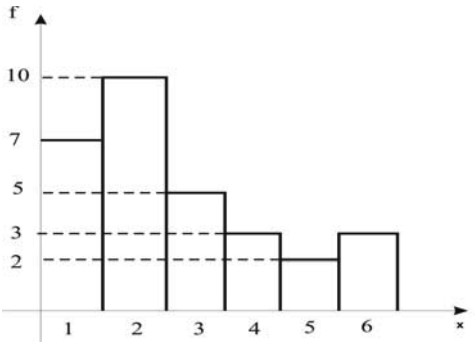
a)

1 1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2 2 2
2 2 3 3 3 3 3 4 4 4 5 5 6 6 6

b)

x	f_i	f_r	$f_r\%$
1	7	0,23	23
2	10	0,33	33
3	5	0,17	17
4	3	0,10	10
5	2	0,07	7
6	3	0,10	10
$\sum$	30	≈ 1	100

c)



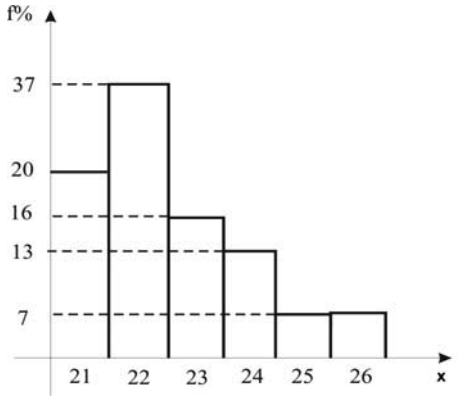
2. Praćenjem dnevne prodaje svog novog proizvoda na 30 prodajnih mesta proizvođač je došao do sledećih rezultata:

22 21 24 22 26 21 26 23 22 23 22 25 23 22 24
22 21 23 22 21 21 23 25 24 22 21 22 24 22 22

a) Formirati distribuciju apsolutnih frekvencija.
b) Formirati distribuciju relativnih frekvencija u procentima i predstaviti je grfički.
c) Formirati distribuciju kumulativnih frekvencija i odrediti na koliko je prodajnih mesta prodato 24 i manje proizvoda.

Rešenje:

x	f_i	f_r	$f_r\%$	$K.f$
21	6	0,20	20	6
22	11	0,37	37	17
23	5	0,16	16	22
24	4	0,13	13	26
25	2	0,07	7	28
26	2	0,07	7	30
$\sum$	30	≈ 1	100	



Iz distribucije kumulatvnih frekvencija vidimo da da su 24 i manje proizvoda prodata na 26 prodajnih mesta.

3. Pogon za kontrolu pakovanja kafe preduzeća „Grand“ kontroliše mašinu za punjenje kafe u pakovanje od 2 kg. Kontrola 20 pakovanja dala je sledeće rezultate:

2,02 1,89 1,92 1,84 1,90 1,97 1,95 1,94 1,93 2,01
2,01 1,97 1,95 1,90 1,94 1,96 1,99 1,99 1,97 1,94

a) Izračunati prosečnu količinu kafe u pakovanju
b) Odrediti medijanu za grupisane podatke
c) Formirati distribuciju frekvencije za intervale klasa 1,80-1,89; 1,90-1,99; 2,00-2,09 i izračunati prosečnu količinu kafe u jednom pakovanju koristeći

u izračunavanju sredine klasnih intervala. Uporediti prosečne vrednosti koje se dobiju pre i posle grupisanja podataka.

Rešenje:

a) $\overline{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{38,99}{20} = 1,949 \text{ kg}$

b) $M_e = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2} = \frac{x_{10} + x_{11}}{2}$

Težina pakovanja	f_i	$K.f$
1,84	1	1
1,89	1	2
1,90	2	4
1,92	1	5
1,93	1	6
1,94	3	9
1,95	2	11
1,96	1	12
1,97	3	15
1,99	2	17
2,01	2	19
2,02	1	20
$\sum$	20	

Iz kumulativnih frekvencija vidimo da je težina desetog i jedanaestog pakovanja 1,95 kg pa će medijana biti:

$$M_e = \frac{1,95 + 1,95}{2} = 1,95$$

c)

Intervali klasa	x	f	$f \cdot x$
1,80-1,89	1,845	2	3,69
1,90-1,99	1,945	15	29,175
2,00-2,09	2,045	3	6,135
$\sum$		20	39

Prosečna težina pakovanja za grupisane podatke će biti:

$$\overline{x} = \frac{\sum f \cdot x}{n} = \frac{39}{20} = 1,95 \text{ kg}$$

Dobijeni rezultati pre i posle grupisanja su približno isti.

4. Kompanija "Samsung" sprovodi akciju povećanja produktivnosti u svom proizvodnom sektoru praćenjem broja proizvedenih monitora za jedan radni sat. Kontrola 20 proizvodnih linija jednog pogona dala je sledeće rezultate.

46 38 42 39 46 43 44 44 38 41
41 41 42 39 38 40 43 38 45 38

a) Izračunati prosečnu proizvodnju monitora za jedan radni sat u ovom pogonu.
b) Odrediti medijanu za negrupisane podatke.
c) Formirati distribuciju frekvencije za intervale klasa 38-40; 41-43; 44-46 i izračunati prosečnu proizvodnju monitora u ovom pogonu koristeći u izračunavanju sredine klasnih intervala. Uporediti prosečne vrednosti koje se dobiju pre i posle grupisanja podataka.

Rešenje:

a) $\overline{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{826}{20} = 41,3 \quad \text{monitora}$

b) $M_e = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2} = \frac{x_{10} + x_{11}}{2}$

$\overset{x_1}{38}\ \overset{x_2}{38}\ \overset{x_3}{38}\ \overset{x_4}{38}\ \overset{x_5}{38}\ \overset{x_6}{39}\ \overset{x_7}{39}\ \overset{x_8}{40}\ \overset{x_9}{41}\ \overset{x_{10}}{41}\ \overset{x_{11}}{41}$

Posle sređivanja podataka u rastući niz dobijamo x_{10} i x_{11} pa je medijana:

$$M_e = \frac{41+41}{2} = 41$$

c)

Intervali klasa	x	f	$f \cdot x$
38-40	39	8	312
41-43	42	7	294
44-46	45	5	225
$\sum$		20	831

Prosečna proizvodnja monitora za grupisane podatke će biti:

$$\overline{x} = \frac{\sum f \cdot x}{n} = \frac{831}{20} = 41,55 \quad \text{monitora}$$

5. Iz podataka intervalne distribucije frekvencija izračunati varijansu (σ^2).

x	0 – 2	3 – 5	6 – 8	9 – 11	12 – 14
f	4	6	13	8	2

Rešenje:

Formiramo tabelu

x	x_{si}	f_i	x_{si}^2	$f_i x_{si}$	$f_i x_{si}^2$
0 – 2	1	4	1	4	4
3 – 5	4	6	16	24	96
6 – 8	7	13	49	91	637
9 – 11	10	8	100	80	800
12 – 14	13	2	169	26	338
$\sum$		33		225	1875

Aritmetička sredina: $m = \dfrac{\sum f_i x_i}{N} = \dfrac{225}{33} = 6,82$

Varijansa:

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{N} - m^2 = \frac{1875}{33} - 6,82^2 = 56,82 - 46,51$$

$$\sigma^2 = 10,31$$

$x_{si} - 7$	f_i	$(x_{si} - 7) f_i$	x_{si}^2	$(x_{si} - 7)^2 f_i$
-6	4	-24	36	144
-3	6	-18	9	54
0	13	0	0	0
3	8	24	9	72
6	2	12	36	72
$\sum$	33	-6		342

a) $m - 7 = -\dfrac{6}{33}, \qquad m = 7 - \dfrac{6}{33} = 6,82$

b) $\sigma^2 = \dfrac{342}{33} - 0,18^2 = 10,31$

6. Na osnovu podataka datih u tabeli:

x	0 – 3	4 – 7	8 – 11	12 – 15
f	4	5	12	7

Izračunati:

a) Aritmetičku sredinu i varijansu
b) Standardnu devijaciju
c) Koeficijent varijacije

Rešenje:

Formiramo tabelu

x	f	x_i	x_i^2	fx_i	fx_i^2
0 – 3	4	1,5	2,25	6,00	9,00
4 – 7	5	5,5	30,25	27,50	151,25
8 – 11	12	9,5	90,25	114,00	1083,00
12 – 15	7	13,5	182,5	94,50	1275,75
$\sum$	28	-	-	242	2519

a) Aritmetička sredina: $m = \frac{f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{242,00}{28} = 8,64$

Varijansa:

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i x_i^{\,2}}{\sum f_i} - m^2 = \frac{2519}{28} = 8,64^2$$

$$\sigma^2 = 89,96 - 74,64 = 15,32$$

b) Standardna devijacija $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{15,32} = 3,91$

c) Koeficijent varijacije $\mathrm{V_x} = \frac{\sigma}{m} = \frac{3,91}{8,64} = 0,45$

7. Dati su podaci u tabeli:

x	30	31	32	33	34	35	36
f_i	3	4	8	12	7	4	2

Izračunati: mod, medijanu, aritmetičku sredinu i varijansu.

Rešenje:

a) Mod je vrednost sa najvećom frekvencijom $M_o = 33$.

Medijana je takođe $M_e = 33$

Brojevi se poređaju po veličini (ukupno ih je 40).

$$30\underbrace{\ldots}_{3}30\ \ 31\underbrace{\ldots}_{4}31\ \ 32\underbrace{\ldots}_{8}32\ \ 33\underbrace{\ldots}_{12}33\ \ 34\underbrace{\ldots}_{7}34\ \ 35\underbrace{\ldots}_{4}35\ \ 36\underbrace{\ldots}_{2}36$$

Pozicija medijane je između dvadesetog i dvadeset prvog elementa u seriji.

$$M_e = \frac{33+33}{2} = 33$$

Aritmetička sredina: $m = \dfrac{\sum f_i x_i}{40} = \dfrac{1316}{40} = 32,9$

Varijansa:

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i x_i^{\,2}}{40} - m^2 = 2,29$$

$$\sigma^2 = 2,29 \quad \Rightarrow \quad \sigma = 1,51$$

b) Tablično rešavanje zadatka:

x_i	f_i	$x_i f_i$	x_i^2	$x_i^2 f_i$
30	3	90	900	2700
31	4	124	961	3894
32	8	256	1024	8192
33	12	396	1089	13068
34	7	238	1156	8092
35	4	140	1225	4900
36	2	72	1296	2592
$\sum$	40	1316	-	43388

$$m = \frac{1316}{40} = 32,9$$

$$\sigma^2 = \frac{43388}{40} - 32,9 = 2,29\ , \quad \sigma = 1,51$$

c) Tablični postupak računanja:

$x_i - 33$	f_i	$(x_i - 33) f_i$	$(x_i - 33)^2$	$(x_i - 33)^2 f_i$
-3	3	-9	9	27
-2	4	-8	4	16
-1	8	-8	1	8
0	12	0	0	0

1	7	7	1	7
2	4	8	4	16
3	2	6	9	18
$\sum$	40	-4	-	92

$$m-33=-\frac{4}{40}=-0,1, \qquad m=33-0,1=32,9$$

$$\sigma^2=\frac{92}{40}-(-0,1)^2=2,3-0,01=2,29\ , \quad \sigma=1,51$$

8. Dati su podaci u tabeli:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f_i	122	120	83	64	50	30	15	10	5	1

Izračunati: aritmetičku sredinu, varijansu i standardnu devijaciju.

x_i	f_i	$x_i f_i$	x_i^2	$x_i^2 f_i$
0	122	0	0	0
1	120	120	1	120
2	83	166	4	332
3	64	192	9	576
4	50	200	16	800
5	30	150	25	750
6	15	90	36	540
7	10	70	49	490
8	5	40	64	320
9	1	9	81	81
$\sum$	500	1037	-	4009

$$m=\frac{1037}{500}=2,074$$

$$\sigma^2=\frac{4009}{500}-2,074^2=3,717\ , \quad \sigma=1,928$$

Tablični postupak računanja I:

$x_i - 1$	f_i	$(x_i - 1) f_i$	$(x_i - 1)^2$	$(x_i - 1)^2 f_i$
-1	122	-122	1	122
0	120	0	0	0
1	83	83	1	83
2	64	128	4	254
3	50	150	9	450
4	30	120	16	480
5	15	75	25	375
6	10	60	36	360
7	5	35	49	245
8	1	8	64	64
$\sum$	500	537	-	2433

$$m - 1 = \frac{537}{500} = 1,074, \qquad m = 1 + 1,074 = 2,074$$

$$\sigma^2 = \frac{2433}{500} - 1,074^2 = 4,866 - 1,153 = 3,717\ , \quad \sigma = 1,928$$

Tablični postupak računanja II:

$x_i - 2$	f_i	$(x_i - 2) f_i$	$(x_i - 2)^2$	$(x_i - 2)^2 f_i$
-2	122	-244	4	488
-1	120	-120	1	120
0	83	0	0	0
1	64	64	1	64
2	50	100	4	200
3	30	90	9	270
4	15	60	16	240
5	10	50	25	250
6	5	30	36	180
7	1	7	49	49
$\sum$	500	37	-	1861

$$m-2=\frac{37}{500}=0,074, \qquad m=2+0,074=2,074$$

$$\sigma^2=\frac{1861}{500}-0,074^2=3,722-0,005=3,717\ , \quad \sigma=1,928$$

9. Dati su podaci u tabeli:

x	30	31	32	33	34	35	36
f_i	3	4	8	12	7	4	2

Izračunati: mod, medijanu, srednju vrednost, srednje kvadratno odstupanje i standardnu devijaciju.

Mod je vrednost sa najvećom frekvencijom $M_o=18,2$.

Medijana je $M_e=17,8$ jer je ukupan broj podataka 101 a 51 po redu je 17,8.

Za računanje ostalih vrednosti formira se tabela

x_i	f_i	$x_i f_i$	x_i^2	$x_i^2 f_i$
15,2	15	228,0	231,04	3465,60
16,3	18	293,4	265,69	4782,42
17,8	22	391,6	316,84	6970,48
18,2	24	436,8	331,24	7949,76
19,3	12	231,6	372,49	4469,88
21,3	10	213,0	453,69	4536,9
$\sum$	101	1794,3	-	32175,04

$$m=\frac{1794,3}{101}=17,766$$

$$\sigma^2=\frac{32175,04}{101}-17,766^2=2,92\ , \quad \sigma=1,71$$

Tablični postupak računanja :

$x_i-18,2$	f_i	$(x_i-18,2)f_i$	$(x_i-18,2)^2$	$(x_i-18,2)^2 f_i$
-3	15	-45,0	9	135
-1,9	18	-34,2	3,61	64,98
-0,4	22	-8,8	0,16	3,52
0	24	0	0	0
1,1	12	13,2	1,21	14,52

3,1	10	31,0	9,61	96,10
$\sum$	101	-43,8	-	314,12

$$m-18=-\frac{23,6}{101}=-0,234, \qquad m=18-0,234=17,766$$

$$\sigma^2=\frac{300,64}{101}-0,234^2=2,977-0,045=2,922\ , \quad \sigma=1,71$$

10. Na osnovu sledeće tabele:

x	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20
f_i	2	4	7	10	14	9	8	3	2

Izračunati: mod, medijanu, aritmetičku sredinu i srednje kvadratno odstupanje.

Rešenje:

Modalni interval je $[10-12]$, tj. $M_o=11$.

Medijalni interval je takođe $[10-12]$ $M_e=x_d+\dfrac{\frac{N}{2}-\sum\limits_{i<M_e} f_i}{f_{M_e}}i$

$x_d=10$ - manja (leva) vrednost medijalnog intervala

$N=59$ - zbir frekvencija

$\sum\limits_{i<M_e} f_i=23$ - zbir frekvencija manjih od medijalnog intervala

$i=2$ - dužina medijalnig intervala

$$M_e=10+\frac{29,5-23}{14}\cdot 2=10,93$$

Srednja vrednost i srednje kvadratno odstupanje računaju se pomoću tabele:

x_i	f_i	$x_i f_i$	x_i^2	$x_i^2 f_i$
3	2	6	9	18
5	4	20	25	100
7	7	49	49	343
9	10	90	81	810
11	14	154	121	1694
13	9	117	169	1521
15	8	120	225	1800
17	3	51	289	867

19	2	38	361	722
$\sum$	59	645	-	7875

$$m = \frac{645}{59} = 10,932$$

$$\sigma^2 = \frac{7875}{59} - 10,932^2 = 13,966\ , \quad \sigma = 3,74$$

Tablični postupak računanja:

$x_i - 11$	f_i	$(x_i - 11) f_i$	$(x_i - 11)^2$	$(x_i - 11)^2 f_i$
-8	2	-16	64	128
-6	4	-24	36	144
-4	7	-28	16	112
-2	10	-20	4	40
0	14	0	0	0
2	9	18	4	36
4	8	32	16	128
6	3	18	36	108
8	2	16	64	128
$\sum$	59	-4	-	824

$$m - 11 = -\frac{4}{59} = -0,068, \qquad m = 11 - 0,068 = 10,932$$

$$\sigma^2 = \frac{824}{59} - (-0,068)^2 = 13,966 - 0,005 = 13,961\ , \quad \sigma = 3,736$$

11. Na osnovu sledeće tabele:

x	6	8	10	11	12	14	15
f	4	5	3	2	5	1	2

Izračunati:

a) Aritmetičku sredinu

b) Standardnu devijaciju

c) Koeficijent asimetrije

d) Koeficijent spljoštenosti

Rešenje:

Formiramo tabelu

x_i	f_i	$f_i x_i$	$x_i - m$	$(x_i - m)^2$	$f_i(x_i - m)^2$	$f_i(x_i - m)^3$	$f_i(x_i - m)^4$
6	4	24	-4	16	64	-256	1024
8	5	40	-2	4	20	-40	80
10	3	30	0	0	0	0	0
11	2	22	1	1	2	2	2
12	5	60	2	4	20	40	80
14	1	14	4	16	16	64	256
15	2	30	5	25	50	250	1250
$\sum$	22	220			172	60	2692

a) $m = \dfrac{\sum f_i x_i}{N} = \dfrac{220}{22} = 10$

b) $\sigma^2 = \dfrac{1}{N}\sum (x_i - m)^2 = \dfrac{172}{22} = 7,82\ , \quad \sigma = 2,80$

c)

$$\alpha_3 = \frac{M_3}{\sigma^3}$$

$$M_3 = \frac{\sum f_i (x_i - m)^3}{N} = \frac{60}{22} = 2,773$$

$$\alpha_3 = \frac{2,773}{21,90} = 0,13$$

d)

$$\alpha_4 = \frac{M_4}{\sigma^4}$$

$$M_4 = \frac{\sum f_i (x_i - m)^4}{N} = \frac{2692}{21,90} = 122,4$$

$$\alpha_4 = \frac{122,4}{61,15} = 2$$

12. Data je intervalna distribucija težine 100 studenata u sledećoj tabeli:

Težina u kg	50-60	60-64	64-68	68-72	72-76	76-80
Broj studenata	7	15	28	24	16	10

Izračunati:

a) Koeficijent asimetrije

b) Koeficijent spoljašnosti

Rešenje:

Formiramo tabelu

x_{si}	f_i	$f_i x_{si}$	$x_{si}-m$	$(x_{si}-m)^2$	$f_i(x_{si}-m)^2$	$f_i(x_{si}-m)^3$	$f_i(x_{si}-m)^4$
58	7	406	-10,28	105,68	739,76	-7604,73	78176,62
62	15	930	-6,28	39,44	591,6	-3715,25	23331,77
66	28	1848	-2,28	5,20	145,6	-331,97	756,89
70	24	1680	1,72	2,95	70,8	121,77	209,44
74	16	1184	5,72	32,72	523,52	2994,53	17128,71
78	10	780	9,72	94,47	944,7	9182,48	89253,70
$\sum$	100	6828			3015,98	646,83	208857,13

a) $$m=\frac{\sum_{i=1}^{r} f_i x_{si}}{N}=\frac{6828}{100}=68,28$$

$$\sigma^2=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r}(x_{si}-m)^2=\frac{3015,98}{100}=30,1598\ ,\quad \sigma=5,4918$$

$$\alpha_3=\frac{M_3}{\sigma^3},\quad \sigma^3=165,63$$

$$M_3=\frac{\sum_{i=1}^{r} f_i(x_{si}-m)^3}{N}=\frac{646,83}{100}=6,47$$

$$\alpha_3=\frac{6,47}{165,63}=0,0391$$

b) $$\alpha_4=\frac{M_4}{\sigma^4}$$

$$M_4=\frac{\sum_{i=1}^{r} f_i(x_{si}-m)^4}{N}=\frac{208857,13}{100}=2088,57\ ,\quad \sigma^4=909,62$$

$$\alpha_4=\frac{2088,57}{909,62}=2,2960$$

Koeficijent α_3 je pozitivan, što ukazuje na blago desnu asimetriju, a koeficijent α_4 je manji od 3 što znači da je raspored više spljošten od normalnog rasporeda.

13. Na osnovu uzorka optimalne veličine treba oceniti nepoznati prosečan učinak svih radnika firme iz kojeg je izdvojen slučajan uzorak. Ocenu treba izvršiti u intervalu poverenja veličine 5 sa verovatnoćom 95,47% ($z = 2$) čija je varijansa ranije ocenjena $s^2 = 20,72$.

Rešenje:

$$n = \frac{z^2 \cdot s^2}{2,5^2} = \frac{2^2 \cdot 20,72}{2,5^2} = 13,26 = 14$$

Optimalna veličina uzorka je 14 radnika i neka je meren njihov radni učinak u komadima: 24, 29, 15, 27, 17, 29, 19, 20, 24, 23, 25, 21, 34, 25, čijim grupisanjem je dobijen sledeći raspored frekvencija:

Radni učinak:	14-18	18-22	22-26	26-
Broj radnika:	2	3	6	3

iz koje računamo aritmetičku sredinu i standardnu devijaciju koristeći tabelu.

x	f	$x \cdot f$	$x^2 \cdot f$
16	2	32	512
20	3	60	1200
24	6	144	3456
28	3	84	2352
$\sum$	14	320	7520

$$\overline{x} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{320}{14} = 22,86$$

$s^2 = 15,72$ i standardna greška ocene je $15,72/\sqrt{14} = 1,06$
znači interval poverenja statističke ocene nepoznate aritmetičke sredine osnovnog skupa je:

$$22,86 - 2 \cdot 1,06 < \overline{X}_0 < 22,86 + 2 \cdot 1,06$$

$$20,74 < \overline{X}_0 < 24,98$$

Sa 95,47% verovatrnoće, ocenjujemo da je prosečan radni učinak od 21 do 25 komada.

14. U jednom članku je pisalo da su igrači bejzbola bili plaćeni do 150 dolara po autogramu na zimskom sajmu. Pretpostavimo da je u slučajnom uzorku od 80 takvih autograma aritmetička sredina bila 135 dolara po autogramu,a da standardna devijacija skupa iznosi 22 dolara. Konstruišite 95% interval poverenja za odgovarajuću aritmetičku sredinu skupa.
15. Uzorak od 25 porudžbina je pokazao da je prosečno vreme za isporuku proizvoda neke firme 70 sati.Pretpostavimo da je standardna devijacija skupa 16 časova i da je raspodela osnovnog skupa normalna. Konstruišite 95% interval poverenja za prosečno vreme neophodno za isporuku svih porudžbina koje su pristigle u ovu firmu.
16. Menadžer odeljenja u marketu želi da oceni , sa nivoom pouzdanosti od 90%, prosečnu količinu novca koju potroše svi potrošači u ovoj prodavnici. Standardna devijacija potrošenog novca svih mušterija u ovoj radnji je 31 dolar. Koju veličinu uzorka bi trebalo da izabere da bi ocena bila do 3 dolara od aritmetičke sredine skupa?
17. Prema nekom članku , prosečni mesečni račun za struju iznosio je 77 dolara. Ovaj prosek izračunat je na osnovu slučajnog uzorka od 500 takvih računa, pri čemu je standardna devijacija ovog uzorka 26 dolara. Formirajte 99% interval poverenja za prosek svih mesečnih troškova za struju.
18. Uzet je uzorak od 15 boca soka da bi se ocenila prosečna neto masa jedne boce cele proizvodnje. Ako se zna da je raspodela normalna, sa standardnom devijacijom 1,95, oceniti prosečnu neto masu boce soka sa pouzdanošću 95% na osnovu dobijenih rezultata merenja neto mase boca soka u gramima:
    995,2 996,3 996,9 997,5 997,9 998,3 998,5 998,7 999,1 999,4
    999,8 1000,0 1001,3 1001,5 1003,4
    Kolika je tačnost dobijene ocene i kolika je dužina intervala poverenja?
19. Firma koja proizvodi detrdžente želi da oceni prosečnu količinu detrdženta u vrećama od 64 unce uz nivo pouzdanosti od 99%. Firma zna da standardna devijacija količina detrdžena u svim takvim vrećama iznosi 0,20 unci. Koliko veliki uzorak bi trebalo da uzme firma da bi ocena bila do 0,04 unce od aritmetičke sredine skupa?



KLJUČNI POJMOVI:

- POPULACIJA
- UZORAK
- OBELEŽJE
- SREDNJE VREDNOSTI
- SREDNJE KVADRATNO ODSTUPANJE
- INTERVALI POVERENJA
- STATISTIČKA HIPOTEZA

IX - GLAVA

LABORATORIJSKE VEŽBE MAT-LAB

SADŽAJ OVOG POGLAVLJA JE:

Uvod
Vežba 1 Alati i osnovne funkcije
Vežba 2 Matrice -definicija
Vežba 3 M – fajlovi (datoteke)
Vežba 4 Sistemi linearnih algebarskih jednačina
Vežba 5 Grafika
Vežba 6 Simbolička matematika
Vežba 7 Granična vrednost i izvod funkcije
Vežba 8 Integrali
Vežba 9 Primena integrala
Vežba 10 Formiranje distribucije frekvencija

Zadaci za vežbanje
Spisak naredbi i funkcija

MATLAB je softverski paket za rešavanje matematičkih zadataka.

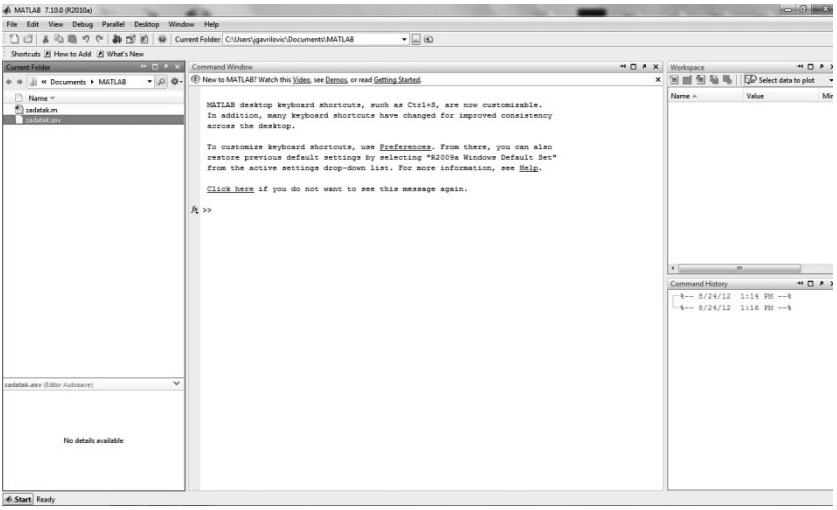
Dostupan u više verzija koje su prilagođene različitim računarskim platformama. Verzije MATLAB-a za različite računarske sisteme se razlikuju donekle samo po korisničkom interfejsu – sve komande se jednako izvršavaju na svim platformama.

Prva, izvorna verzija MATLAB-a, napisana je kasnih sedamdesetih, na univerzitetu New Mexico i Stanford Univerzitetu, sa osnovnom namenom da služi kao pomoćno sredstvo na kursevima iz linearne algebre, i numeričke analize. Današnje mogućnosti MATLAB-a daleko prevazilaze tadašnji originalni "MATrix LABoratory". Ogroman broj ekonomskih i tehničkih disciplina neizostavno zahtevaju korišćenje MATLAB-a. U njemu se vrlo jednostavno mogu kreirati sopstvene funkcije koje daju rešenja na postavljene zahteve.

VEŽBA 1 ALATI I OSNOVNE FUNKCIJE

1.1. Kako početi rad u MATLAB –u

MATLAB se distribuira u komprimovanom formatu na CD-ovima. Instalacijom, datoteke sa ovih CD-ova premeštaju se na disk, dekomprimuju se i instaliraju u Windows-ovom okruženju. Kada je program pozvan, pojavljuje se MATLAB - ov komandni prozor (slika 1. 1).



slika 1. 1

Prvi red predstavlja liniju menija (Menu bar), koja sadrži uobičajene komande.
Ako se na ekranu odmah ne pojavi prozor sa slike 1.1, dobićemo ga ako izaberemo View-Desktop Layout-Default.

Na ekranu se mogu videti manji prozori:
Command window
Command History window
Launch Pad window

Postoje takođe dugmad za dva nova prozora:
Workspace window
Current Directory window

Command window je glavni deo MATLAB-ovog interaktivnog sistema. Iz tog prozora pristupamo MATLAB-ovim komandama i funkcijama.

U radnom prostoru pojavljuje se znak **>>** , koji se naziva ***prompt,*** pored koga se nalazi kursor, vertikalna trepćuća linija, koja predstavlja spremnost računara da primi naredbu. Kada se u radnom delu otkuca naredba i pritisne taster ***Enter***, naredba se odmah izvršava.

Command History window čuva predhodne naredbe koje su bile korišćene u Command window.
Launch Pad window je drugi način da se pristupi MATLAB-u. Treba kliknuti na ikonu na vrhu prozora i otvoriće se osnovni program ili ***toolbox*-**ovi, prema želji korisnika.
Workspace window pokazuje promenljive koje su korišćene tokom rada, odnosno njihovu veličinu i vrstu. Ove informacije mogu biti od velike koristi kasnije u radu.
Current Directory window pokazuje korišćene fajlove.

1.2. Operatori za pomoć u radu

Naredbom ***help*** obezbeđena je pomoć i informacije tokom rada. To je velika pogodnost za korisnike jer je teško memorisati veliki broj funkcija koje su definisane. Postoji nekoliko verzija ove naredbe.

Ako otkucamo ***help*** i pritisnemo taster <***Enter***> na ekranu će se pojaviti spisak oblasti i uputsta za rad.
Na ekranu će se pojaviti spisak svih opcija koje poseduje MATLAB.

```
>> help
HELP topics:
matlab\general     - General purpose commands.
matlab\ops         - Operators and special characters.
```

Da bi se dobilo uputstvo za neku posebnu oblast, operator ili funkciju potrebno je uneti naredbu:

>> help oblast

Otkucati sledeće naredbe ***help*** i videti šta se dobija na ekranu.

```
>> help *
>> help i
>> help sqrt
```

Za ilustrovanje mogućnosti MATLAB-a, priređeni su uzorci raznih programa, koji se mogu pozvati naredbama ***demo***. Aktiviranjem ove naredbe otvara se grafički prozor koji pokazuje meni demonstracionih datoteka.

1.3. Unošenje podataka -brojevi i aritmetički izrazi

Osnovni objekat nad kojim se vrše operacije u MATLAB-u je ***polje brojeva***. Ovo polje brojeva može da se tumači kao matrica u uobičajenom smislu, ali zavisno od komande, može se tumačiti i kao tabela podataka koje treba obraditi.

Pod ***skalarom*** se podrazumeva matrica tipa 1×1. Vektori predstavljaju matrice jedne vrste ili jedne kolone.

MATLAB je jezik izraza. Oni su sačinjeni od konstanti, promenljivih, operatora, specijalnih znakova i funkcija. Operacije i izrazi u MATLAB-u se pišu na uobičajen način, slično kao što pišemo na papiru. Rezultat izvršenja izraza je matrica. MATLAB operiše sa realnim i kompleksnim brojevima. Koristi se uobičajena decimalna notacija sa znakom i decimalnom tačkom. MATLAB može da se koristi za izračunavanje jednostavnih matematičkih izraza. Tada on radi slično kalkulatoru.

MATLAB je veoma strog prema definisanoj sintaksi jezika. Na primer, izostavljena zagrada ili zarez mogu da utiču da ceo program ne funkcioniše. Sa druge stane, velika olakšica u radu je što se na ekranu ispisuje vrsta učinjene greške i olakšava se korisniku da se greške isprave.

```
>> y=sin(x
??? y=sin(x
Error: ")" expected, "end of line" found.
```

MATLAB-ove promenljive mogu imati ***numeričke*** ili ***znakovne*** vrednosti (string).
Znakovni tip podataka sastoji se iz niza ASCII znakova, a unose se pod jednostrukim apostrofima, na primer 'x'.

PRIMER 1: Napisati reč student.

```
>> rec='student'
rec =
student
```

PRIMER 2: Odrediti broj slova u reči student.

```
>> size(rec)
ans =
   1    7
```

U ovom primeru korišćena je naredba ***size***, koja određuje dimenziju unete promenljive.
Napomena: (Odgovor 1 7 označava polje brojeva,tj. u jednom redu ima sedam elementa)
Napomena: U MATLAB-u se znak **=** naziva operatorom dodele. Ovaj operator dodeljuje vrednost promenljivoj

Ime_promenljive= numerička vrednost ili izraz

Imena ***promenljivih*** ili ***funkcija***, moraju početi slovom, iza koga može slediti prizvoljan niz simbola, ali se samo prvih 31 karaktera iz imena pamti.

MATLAB razlikuje ***velika*** i ***mala slova,*** tj. x i X su dve različite promenljive.

Imena matrica obično se pišu velikim slovima, dok imena skalara i vektora malim slovima.

Imena funkcija moraju se pisati malim slovima.

1.4. Aritmetički operatori

Aritmetički izrazi se prave korišćenjem uobičajenih aritmeričkih operacija za koje koristimo sledeće simbole:

+	**sabiranje**
-	**oduzimanje**
*****	**množenje**
/	**deljenje**
^	**stepenovanje**

PRIMER 3: Izračunati vrednost izraza 2+4-6.

```
>> 2+4-6
ans =
    0
```

Iz ovog primera vidimo da MATLAB sam kreira promenljivu pod imenom ***ans*** (answer-odgovor) ukoliko korisnik sam ne dodeli ime promenljivoj ili vrednosti izraza.

PRIMER 4: Izračunati vrednost izraza $x = 2 + \left(2 \cdot 4 - \frac{1}{\pi} \right)$.

```
>> x=2+(2*4-1/pi)
x =
  9.6817
```

Broj π je definisan kao stalna veličina MATLAB-a i dovoljno je ukucati samo ***pi***.

PRIMER 5: Izračunati vrednost izraza $y = 3x$, ako je $x = 3^2$.

```
>> x=3^2;
>> y=3*x
y =
   27
```

Napomena: Ako ne želimo da se rezultat ili međurezultat prikaže na ekranu, na kraju naredbe unesi se znak **;** . Na ovaj način se ubrzava rad na računaru, jer se eliminiše ispisivanje velikog broja, često nepotrebnih međurezultata.

1.5. RelaciJski operatori

Relacijski operatori su binarni operatori i koriste se za poređenje izraza. Rezultat poređenja je ***tačno*** (true) u oznaci 1 ili ***netačno*** (false) u oznaci 0 .

<	**Manje od**
$\leq$	**Manje ili jednako od**
>	**Veće od**
$\geq$	**Veće ili jednako od**
==	**Jednako**
$\sim=$	**Nejednako**

PRIMER 6: Izračunati vrednost izraza 5<3.

```
>> 5<3
ans =
    0
```

PRIMER 7: Izračunati vrednost izraza 5<(7= =8).

```
>> 5<(7= =8)
ans =
    0
```

Zamenimo sada = = sa =

```
>> 5<(7=8)
??? 5<(7=8)

Error: ")" expected, "=" found.
```

Napomena*:* Operator = = često se pogrešno zamenjuje sa =, jer = = predstavlja jednakost, a = je pridruživanje.

U prvom slučaju $7==8$ ima istinitosnu vrednost pogrešno, tj. 0 i zato $5<0$ daje kao rezultat 0.

U drugom slučaju greška se javlja zato što = predstavlja samo operaciju pridruživanja, a ne računanja vrednosti koja ima neku istinitosnu vrednost.

1.6. Osnovne funkcije

Funkcije se pozivaju tako što se iza imena funkcije u maloj zagradi navede argument funkcije.
Neke od elementarnih funkcija koje su ugrađene u MATLAB možemo videti u tabeli. Kao što smo već napomenuli funkcije se pišu malim slovima, a argumente navodimo u zagradama.

abs	apsolutna vrednost
sqrt	kvadratni koren
sin	sinus
cos	kosinus
tan	tangens
cot	kotangens
exp	eksponencijalna funkcija osnove e
log	logaritam osnove e
log10	logaritam osnove 10

PRIMER 8: Izračunati $\sin\frac{\pi}{4}$.

```
>> sin(pi/4)
ans =
   0.7071
```

PRIMER 9: Za $x = 5$ i $y = 59$ izračunati vrednost izraza $z = \ln y + \sqrt{x}$.

```
>> x=5;
>> y=59;
>> z=log(y)+sqrt(x)
z= 6.3136
```

Napomena: Primetimo da vrednosti promenljivih x i y nisu prikazane na ekranu, jer se iza promenljivih nalazi znak ;

PRIMER 10: Izračunati rešenja kvadratne jednačine $x^2 - 2x - 3$.

```
>> % Kvadratna jednačina je oblika ax^2+bx+c :
>> % Rešenja se dobijaju na osnovu formule x1,2 = (-b ± sqrt(b^2 - 4ac)) / 2a :
>> a=1;b=-2;c=-3;
```

```
>> koren=sqrt(b^2-4*a*c);
>> x1=(-b+koren)/(2*a)
x1 =
    3
>> x2=(-b-koren)/(2*a)
x2 =
   -1
```

PRIMER 11: Izračunati vrednost izraza $z = \log_{10} x + |y|$, za vrednosti promenljivih x i y zadatih u predhodnom primeru (primer 9).

```
>> % x i y su vrednosti promenljivih iz predhodnog primera
>> z=log10(x)+abs(y)
z =
  59.6990
```

Napomena: Treba imati u vidu da MATLAB pamti predhodno unete veličine pa ih nije potrebno ponovo definisati, ako nam kasnije trebaju u radu.
Napomena**:** Oznaka % koristi se za pisanje komentara.

1.7. Osnovne konstante u MATLAB - u

ans	Vrednost izraza kada nije pridružen promenljivoj
eps	Dozvoljena tolerancija greške
i , j	Imaginarna jedinica, $\sqrt{-1}$
pi	π =3.14159265.....
Inf	∞, ili rezultat 1/0 (infinity)
NaN	Nije broj, ili rezultat 0/0 –(Not a Number)

Napomena: Prednost rada u MATLAB-u je što deljenje nulom ne dovodi do prekida programa ili greške. Ispisuje se poruka upozorenja i specijalna veličina se ponaša korektno u kasnijim izračunavanjima.

1.10. Izlazni format

Izlazni oblik prikazivanja rezultata može se kontrolisati naredbom ***format***. Ova komanda utiče samo na prikaz na ekranu, a ne na to kako se šta izračunava

ili smešta u memoriju. Postoje različiti izlazni formati: ***format short***, ***format long***, ***format long e***, ***format short e***, ***format rat***.
Ako nije definisan neki drugi format automatski se koristi ***format short***, standardni format sa 4 značajnih cifara.

PRIMER 12: Broj π prikazati koristeći sve prethodne komande.

```
% napomene

% format short ima 4 decimalna mesta

>> format short, pi
ans =
   3.1416
>> format long, pi
ans =
3.14159265358979
>> format long e, pi
ans =3.141592653589793e+000
>> format short e, pi
ans =
 3.1416e+000
>> format rat, pi
ans =
  355/113
```

Napomena*:* Sledeći broj sa kojim budemo radili biće u poslednjem formatu koji smo koristili. Da bi se vratili u uobičajeni format short, dovoljno je otkucati samo naredbu format.

1.12. Brisanje i čuvanje podataka

clear	Briše podatke iz radne memorije
clear x	Briše se promenljiva x
save	Čuva podatke u fajlu na disku za kasniju upotrebu
save ime	Pamti sve veličine iz radnog prostora pod zadatim imenom
quit , **exit**	Ostvaruje se prekid programa
load	Predstvlja obrnutu naredbu od save

VEŽBA 2 MATRICE I DETERMINANTE

2.1. Matrice

Već smo naglasili, da su u MATLAB - u, promenljive ***polja brojeva***, koje mogu da se tumače kao matrice u uobičajenom smislu. Pod skalarom se podrazumeva matrica tipa 1x1. Vektori predstavljaju matrice jedne vrste ili jedne kolone.

Matrica se definiše sa dva indeksa m i n, gde prvi indeks m označava broj vrsta, a drugi, n broj kolona. Elementi se uglavnom unose po vrstama, a zagrade **[** , **]** ograničavaju listu elemenata. U okviru liste elementi se razdvajaju zarezom ili razmakom. Taster **Enter** ili **;** se koriste za odvajanje vrsta matrice.

PRIMER 1: Uneti matricu $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -6 & 8 & 5 \\ 7 & -4 & 2 \end{bmatrix}$.

```
>> A=[1 -2 4; -6 8 5; 7 -4 2]
A =
   1   -2    4
  -6    8    5
   7   -4    2
```

Druga mogućnost upisa je:

```
>> A=[1, -2, 4; -6, 8, 5; 7, -4, 2]
A =
   1   -2    4
  -6    8    5
   7   -4    2
```

Vektori su matrice vrste ili kolone i unose se na isti način. Ako su vrednosti elemenata ekvidistantne (sa istim korakom) koristi se simbol **:**

PRIMER 2: Uneti vektor x=(1, 2, ... , 10).

```
>> x=1:10; x
x =
  1   2   3   4   5   6   7   8   9   10
```

Naredba ***length*** izračunava dužinu vektora.

```
>> length(x)
ans =
1
```

Element matrice A koji se nalazi u preseku i-te vrste i j-te kolone može se dobiti primenom naredbe ***A(i,j)***.

PRIMER 3: Izdvojiti element $a_{2,3}$ .matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$.

```
>> A=[1  2  3 ; 2  -3  1 ; -4  -5  -6] ;
>> A(2 , 3)
ans =
    1
```

Ako želimo da izdvojimo celu vrstu ili kolonu koristimo komande ***A(k,:)***, ***A(:,k)***, gde ***k*** predstavlja traženu vrstu, odnosno kolonu.

Dimenzije matrice određuju se naredbama:
size(A)
[m,n]=size(A).

PRIMER 4: Odrediti dimenzije date matrice A, koristeći naredbu ***size*****.**

```
>> size(A)
ans =
  3    3
```

PRIMER 5: Odrediti dimenzije matrice A koristeći naredbu [m,n]=size(A).

```
>> [m, n]=size(A)
m =
    3
n =
    3
```

2.2. Matrice specijalnih struktura

Naredba ***eye*** daje jediničnu matricu.

PRIMER 6: Formirati matricu X dimenzija 2×3, čiji su elementi na glavnoj dijagonali jednaki 1, a ostali su jednaki 0.

```
>> X=eye(2,3)
X =
   1   0   0
   0   1   0
```

PRIMER 7: Odrediti jediničnu matricu dimenzija date matrice A.

```
>> A=[1 , 2 , 3 ; 2 , -3 , 1 ; -4 , -5 , -6] ; X=eye(size(A))
X =
   1   0   0
   0   1   0
   0   0   1
```

Naredba ***ones*** daje matricu čiji su svi elementi jedinice.

PRIMER 8: Formirati kvadratnu matricu reda 2 čiji su svi elementi jednaki 1.

```
>> X=ones(2)
X =
   1   1
   1   1
```

Naredba ***zeros*** daje matricu čiji su svi elementi nule.

PRIMER 9: Formirati matricu dimenzija 2×3 čiji su elementi jednaki 0.

```
>> X=zeros(2,3)
X =
   0   0   0
   0   0   0
```

Naredbom ***diag(A)*** dobijamo dijagonalnu matricu date matrice A.

PRIMER 10: Napisati matrice ***diag(A).***

```
>> A , X1=diag(A) , X2=diag(diag(A))
A =
   1   2   3
```

```
   2   -3    1
  -4   -5   -6
X1 =
   1
  -3
  -6
```

2.3. Operacije sa matricama

Osnovne operacije sa matricama su:
sabiranje, oduzimanje, množenje, stepenovanje i transponovanje.

2.3.1. sabiranje i oduzimanje matrica

Sabiranje i oduzimanje matrica vrši se tako što se sabiraju, odnosno oduzimaju odgovarajući elementi matrica. Tom prilikom moramo voditi računa da matrice budu istih dimenzija.

PRIMER 11: Sabrati matrice A i B.

```
>> A , B=[2, 3,-4; 1 -1, 1; 3, 2, -1] , C=A+B
A =
   1    2    3
   2   -3    1
  -4   -5   -6
B =
   2    3   -4
   1   -1    1
   3    2   -1
C =
   3    5   -1
   3   -4    2
  -1   -3   -7
```

Sabiranje i oduzimanje je izvodljivo i u slučaju kada je jedan činilac ***skalar***.

PRIMER 12: Od date matrice A oduzeti skalar 1.

```
>> D=A-1
D =
   0    1    2
```

```
   1   -4    0
  -5   -6   -7
```

Napomena: U predhodnom primeru, skalar 1 MATLAB automatski shvata kao matricu istih dimenzija kao što je matrica A čiji su svi elementi jednaki 1.

2.3.2. Množenje matrica

Množenje matrica skalarom se vrši tako što svaki element te matrice pomnožimo vrednošću datog skalara. Za množenje matrica skalarom važi zakon komutacije, tj. $kA = Ak$.

PRIMER 13: Ako je $k = 5$, odrediti matricu $5A$.

Množenje matrica se u obavlja korišćenjem operatora * .

```
>> A , F=5*A
A =
   1    2    3
   2   -3    1
  -4   -5   -6
F=
   5   10   15
  10  -15    5
 -20  -25  -30
```

Množenje dve matrice: Proizvod matrica A={$\left(a_{i,j}\right)_{m\times r}$} i B={$\left(b_{i,j}\right)_{r\times n}$} je nova matrica $C = \left\{\left(c_{i,j}\right)_{m\times n}\right\}$ čiji su elementi $c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{i,k} b_{k,j}$.

PRIMER 14: Pomnožiti matrice A i A1.

```
>> A ;A1=[1, 2 ; 2, -3 ; 1, 6] , P=A*A1
A1 =
   1    2
   2   -3
   1    6
P=
   8   14
  -3   19
 -20  -29
```

PRIMER 15: Pomnožiti matrice A1 i A.

```
>> A1*A
??? Error using ==> *
Inner matrix dimensions must agree.
```

Napomena: Matrično množenje nije komutativna operacija i dimenzije Matrica A i A1 moraju da budu usklađene.

2.3.3. Transponovanje matrica

Transponovanje matrica sa realnim koeficijentima, je zamena vrsta i kolona. Vrši se pomoću operatora ' .

PRIMER 16: Transponovati datu matricu A.

```
>> A , E=A'
A =
    1    2    3
    2   -3    1
   -4   -5   -6
E =
    1    2   -4
    2   -3   -5
    3    1   -6
```

2.3.4. Determinanta matrice

Determinanta kvadratne matrice je broj koji se u MATLAB-u izračunava pomoću naredbe ***det***.

PRIMER 17: Izračunti determinantu kvadratne matrice A.

```
>> A ; D=det(A)
D=
  -27
```

2.3.5. Inverzna matrica

Inverzna matrica date matrice A računa se po obrascu $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adjA$.

U MATLAB-u inverzna matrica A^{-1}, određuje se korišćenjem naredbe ***inv(A)***.

PRIMER 18: Naći inverznu matricu, zadate matrice A.

```
>> A ; inv(A)
  -0.8519   0.1111   -0.4074
  -0.2963  -0.2222   -0.1852
   0.8148   0.1111    0.2593
```

PRIMER 19: Naći inverznu matricu, matrice $S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

```
>> S=[1 2 3 ; 4 5 6 ; 7 8 9]
>> inv(S)
Warning: Matrix is close to singular or badly scaled.
         Results may be inaccurate.
```

Napomena: Kako je matrica S singularna (determinanta matrice je jednaka nuli), inverzna matrica ne postoji.

2.3.6. Deljenje matrica

U matričnom računu operacija deljenja nije definisana, ali u MATLAB - u postoje dve naredbe za deljenja:

**** označava "**deljenje" sa leva,** **/** označava "**deljenje" sa desna.**

Neka je A kvadratna regularna matrica, tada je

$$A \setminus B = A^{-1} * B, \quad A / B = B * A^{-1}.$$

Rezultati se dobijaju direktno, bez računanja inverzne matrice.

PRIMER 20: Rešiti matričnu jednačinu $AX = B$ gde su date matrice.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Da bismo rešili matričnu jednačinu $AX = B$, kako za množenje matrica ne važi zakon komutacije, postupak je sledeći:

$$AX = B$$
$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$IX = A^{-1}B$$
$$X = A^{-1}B$$

U MATLAB–u poslednja jednačina se može napisati pomoću simbola deljenja X=A\B.
Zadati problem može zato rešiti na dva načina.

```
>> A=[1,2;2,2]; B=[1,2;3,4];
>> X=A\B
X =
   2.0000    2.0000
  -0.5000         0
>> X=inv(A)*B
X =
   2.0000    2.0000
  -0.5000         0
```

PRIMER 21: Rešiti matričnu jednačinu $XA = B$ koristeći matrice A i B iz prethodnog primera.

```
>> A;B;
>> X=B*inv(A)
X =
    1    0
    1    1
>> X=A/B
X =
    1    0
   -1    1
```

2.4. Rang matrice

Rang matrice određuje se pomoću operatora ***rank***.

PRIMER 23: Naći rang date matrice A.

```
>> A ; r=rank(A)
r =
    3
```

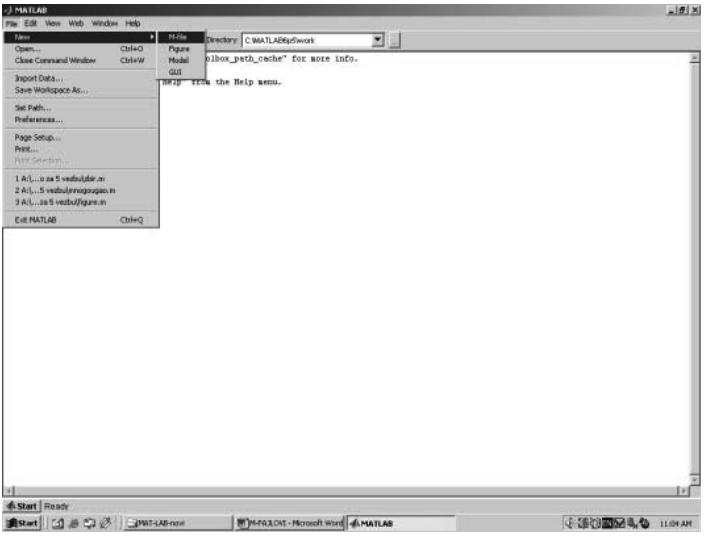
VEŽBA 3 M – FAJLOVI (DATOTEKE)

Svi dosadašnji primeri bili su izvršavani u komandnom prozoru. Nedostatak ovakvog načina rada je gubljenje unetih podataka i svih dobijenih rezultata nakon završetka rada u MATLAB-u. Zato se nameće potreba za formiranjem fajlova u koje se mogu smestiti programi, numerički rezultati, grafici, strukture, itd., a koji će ostati trajno sačuvani i po potrebi biti pozivani od strane korisnika.
Komande se upišu u fajlove, snime i zatim pokrenu. Pokretanjem takvog fajla komande se izvršavaju redom kojim su navedene.
M fajlovi su specifičnost MATLAB-a. To su fajlovi koji sadrže tekst u ASCII kodu i u imenu imaju ekstenziju ***.m***.
Postoje dve vrste M fajlova: ***komandni (script)*** i ***funkcijski (function)***.

3.1. Komandni ili skript fajlovi

Komandni ili skript fajl predstavlja niz MATLAB-ovih komandi snimljenih kao zaseban program, koje se izvršavaju kada se fajl pozove.

Formiranje fajlova vrši se korišćenjem editora teksta koji se u MATLAB programskom paketu pokreće tako što se iz menija **File** komandnog prozora bira komanda **New**, a zatim opcija **Script**. Tada se otvara nov prozor za pisanje programa. Komande se pišu red po red. MATLAB automatski dodeljuje broj novom redu kada se pritisne taster **Enter.** Skript fajl mora biti snimljen da bi se mogao pokrenuti. To se radi naredbom **Save As** iz menija **File,** posle čega bira se mesto gde će se snimiti fajl i ime pod kojim se snima. Pravila za imena su ista kao i za imena promenljivih (počinju slovom, mogu sadržati cifre i imaju najviše 63 znaka). Imena skript fajlova ne mogu biti imena MATLAB-ovih komandi ili imena promenljivih koje definišete.
Fajl se poziva ukucavanjem njegovog imena u komandnoj liniji.
Program se izvršava ukucavanjem **imena fajla** bez ekstenzije i pritiskom na taster **Enter.**



PRIMER 1: Napisati fajl za određivanje zbira kvadrata prvih deset prirodnih brojeva i sačuvati fajl pod imenom **zbir.**

```
%  ime ovog m fajla je zbir
x=1:10;
x=[x.^2];
z=sum(x)
```

Fajl mora da se snimi naredbom **Save As** iz menija **File.** U ovom primeru snima se pod imenom **zbir.**
Svaki put kada nam je potreban ovaj rezultat, dovoljno je samo otkucati reč **zbir,** pod kojim smo upamtili ovaj fajl i pritisnuti taster **Enter.** Kao rezultat dobijamo:

```
z =
  385
```

Napomena: Ukoliko želimo da promenimo vrednosti u fajlu, moramo ga otvoriti, promeniti željene vrednosti i ponovo snimiti ovako izmenjeni fajl.

PRIMER 2: Izmeniti fajl pod imenom **zbir** tako da broj sabiraka bude proizvoljan.

Vrednost promenljive uneti naredbom ***input.***

```
x=input('unesi broj željenih sabiraka ')
y=1:x;
```

```
y=[y.^2];
S=sum(y)
```

Svaki put kada nam je potreban zbir kvadrata proizvoljno mnogo brojeva, dovoljno je samo otkucati reč **zbir** pod kojom smo upamtili ovaj fajl i uneti broj željenih sabiraka.

```
>> zbir
unesi broj željenih sabiraka: 33
x =
   33
S =
     12529
```

3.2. FUNKCIJSKI FAJLOVI

Funkcijski fajl omogućava korisniku MATLAB-a da stvara nove funkcije. Funkcijski fajlovi se pišu i uređuju isto kao i skript fajlovi.

Osnovna osobina funkcijskog fajla je da ima ***ulaz*** i ***izlaz*****.**
Funkcijski fajlovi moraju u prvoj liniji da sadrže naredbu ***function*** .

Naredba je oblika:
function [**izlazni argumenti** ***y1, y2,…] = ime funkcije (*****ulazni argumenti** ***x1, x2,…)***
function ime funkcije (x1, x2,…)
function [y1, y2,…] = ime funkcije

Posle ovoga izraza sledi niz MATLAB - ovih komandi i izraza.

PRIMER 3: Formirati funkcijski fajl u kome se definiše nova funkcija $f(x) = e^x + \sin x$ i zapamtimo ga pod imenom **fi.**

```
% funkcijski fajl
% ime nove funkcije je fi
function y=fi(x)
y=exp(x)+sin(x);
```

Ako želimo da izračunamo vrednost ove funkcije, dovoljno je da pozovemo funkciju fi i definišemo vrednost promenljive, na primer $x = \frac{\pi}{2}$.

```
>> fi(pi/2)
ans =
  5.8105
```

PRIMER 4: Formirati funkcijski fajl u kome se definiše nova funkcija $f(x) = e^x + \sin x$ pod imenom **fa**, a da se vrednost nezavisno promenljive unesi korišćenjem naredbe ***input***

```
% ime nove funkcije je fa
function y=fa
x=input('unesi promenljivu x= ')
y=exp(x)+sin(x);
```

Pozivanjem funkcije fa na postavljeno pitanje dobićemo odgovor:

```
>> fa
unesi promenljivu x=3
x =
    3
ans =
  20.2267
```

PRIMER 5: Formirati funkcijski fajl pod imenom **ime** kojim se određuje broj slova u nekom imenu.

```
% funkcijski fajl ime kojim se određuje broj slova u imenu
function br(x)
x=input('unesi svoje ime:','s')
% oznaka s u naredbi označava da se unose stringovi
n=length(x);
disp(['broj slova u imenu je',num2str(n)])
```

Pozivanjem funkcije ime na postavljeno pitanje dobićemo odgovor:

```
>> ime
unesi svoje ime: ivana
x =
ivana
broj slova u imenu je 5
```

U naredbi **disp**, tekst je definisan kao dvodimenzioni vektor, čija je prva komponenta znak (string), a druga koja kao rezultat programa daje broj koji mora da se naredbom **num2str** prebaci u znak (string).

PRIMER 6: Formirati funkcijski fajl pod imenom **element**, za izračunavanje elemenata matrice dimentija $n \times m$, gde je $a_{ij} = 2ij - i$ za $i = j$, a $a_{ij} = (2ij - i) + \frac{1}{2}$ za $i \neq j$.

```
% izračunavanje elemenata matrice
function a=element(i,j)
if i= =j                % iskazom if ispitujemo prvi uslov,
   a=(2*i*j-i);         % ako je prvi uslov ispunjen izvršava se naredba
else                    %iskazom else ispituje se drugi uslov
   a=(2*i*j-i)+0.5;  % ako je prvi uslov ispunjen izvršava se naredba
end                     %  iskaz uvek počinje sa if a završava sa end
```

Ako želimo da odredimo bilo koji element naše matrice pozvaćemo formirani fajl pod imenom element. Odredimo element (2,3)

```
>> element(2,3)
ans =
  1,5
```

Koristeći formirane fajlove možemo formirati nove funkcijske fajlove.

PRIMER 7 : Formirati funkcijski fajl pod imenom **matrica,** za definisanje matrice prizvoljnog reda $n \times m$, čiji su elementi dati funkcijskim fajlom pod imenom **element.**

```
% formiranje matrice čiji su elementi sinusne funkcije iz fajla pod imenom
    Element a ime novog fajla je matrica

function A=matrica(m,n)
for i=1:m       % FOR je petlja koja određeni broj puta radi istu naredbu
   for j=1:n    % u ovom slučaju m je broj vrsta a n kolona
      A(i,j)=element(i,j);   %  ove tri linije koda kreiraju matrica A dimenzija mxn
   end,end         % svaka petlja se mora završiti sa end
```

Ako želimo da definišemo neku određenu matricu na primer matricu sa 2 vrste i 3 kolone možemo postupiti na sledeći način:

```
>> matrica(2,3)
ans =
   1   0.5   -0.5
   3.5   2.5  1.5
```

VEŽBA 4 REŠAVANJE SISTEMA ALGEBARSKIH JEDNAČINA

Za rešavanje sistema od n linearnih jednačina sa n nepoznatih mogu da se koriste razne metode: ***Gausova , Kramerova, matrična*** isl.

4.1. KRAMEROVA METODA

Kramerova metoda ili ***metoda determinanti***

Promenljive se izračunavaju po formulama

$$x_j = \frac{D_j}{D},\ (D \neq 0,\ \ j = 1,2,...,n),$$

gde je D determinanta tog sistema, a D_j je pomoćna determinanta dobijena tako što su u D koeficijenti uz x_j zamenjeni, redom, slobodnim članovima b_j.

Sistem ima jedinstveno rešenje ako je $D \neq 0$.

PRIMER 1 : Kreirati fajl **Cramer** za rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina koristeći Kramerovo pravilo.

```
% Novi fajl pod imenom Cramer
%Rešavanje sistema AX=B- Cramerovim pravilom
% m,n su dimenzije matrice A
% samo kvadratni sistemi se mogu rešavati ovom metodom
function X=Cramer(A,B)
%određivanje dimenzija matrice A
[m,n]=size(A);
if m ~= n,
  error('Matrica nije kvadratna-ne moze da se primeni Kramerova metoda'),
end
if det(A)==0,
  error('Matrica je singularna-determinanta joj je nula'),
end
for j=1:n,
  C=A; C(:,j)=B; X(j)=det(C)/det(A);
end
X=X';
```

PRIMER 2: Koristeći kreirani fajl Cramer rešiti sistem jednačina

$$2x-4y-z=0$$
$$-x+2y+2z=6$$
$$3x+6y\quad\ =6$$

```
>> A=[2  –4  –1 ; –1  2  2 ; 3  6  0];
>> B=[0 ; 6 ; 6];
>> Cramer(A , B)
ans =
    2
    0
    4
```

PRIMER 3 : Koristeći kreirani fajl Cramer rešiti sistem jednačina

$$-2x+3y+z=1$$
$$x+3y-2z\ \ =1\,.$$
$$x-6y+z\ \ \ =3$$

```
>> A1=[–2 3 1;1 3 –2;1 –6 1]
A1 =
   -2    3    1
    1    3   -2
    1   -6    1
>> B1=[1;1;3]
B1 =
    1
    1
    3
Cramer(A1,B1)
??? Error using ==> cramer
Matrica je singularna
```

Pošto je matrica singularna, znači determinanta sistema je jednaka nuli sistem nema jednoznačno rešenje.

4.2. MATRIČNA METODA

Matričnom metodom, sistem od n linearnih jednačina sa n nepoznatih, mora da se napiše u obliku $AX = B$, gde je A matrica sistema, X matrica nepoznatih, a B matrica slobodnog člana.

Rešenje dobijamo iz jednačine $X = A^{-1}B$, samo ako postoji inverzna matrica A^{-1}, odnosno ako je njena determinanta različita id nule.

PRIMER 4 : Rešiti sistem jednačina matričnom metodom

$$\begin{aligned} -2x + 3y + z &= 1 \\ x + 3y - 2z &= 1 \\ x - 6y + z &= 3 \end{aligned}.$$

```
>> A=[-2 3 1;1 3 -2;1 -6 -1]
A =
   -2    3    1
    1    3   -2
    1   -6   -1
>> B=[1;1;3]
B =
    1
    1
    3
>> X=inv (A)*B
X =
  -2.5000
  -0.5000
  -2.5000
```

PRIMER 5: Rešiti sistem jednačina matričnom metodom i koristeći kreirani fajl Cramer. Uporediti ovako dobijena rešenja.

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 11 \\ 3x + 5y + 2z &= 19 \\ x + 2y + 3z &= 14 \end{aligned}$$

```
>> M=[2, 3, 1 ; 3, 5, 2 ; 1, 2, 3]
M =
    2    3    1
    3    5    2
    1    2    3
>> N=[11 ; 19 ; 14]
N =
   11
   19
   14
>> X1=inv(M)*N
X1 =
   1.0000
   2.0000
   3.0000
>> X2=Cramer(M,N)
X2 =
    1
    2
    3
```

PRIMER 7 : Rešiti sistem jednačina iz primera 3 matričnom metodom

```
>> A1=[–2 3 1;1 3 –2;1 –6 1]
A1 =
   -2    3    1
    1    3   -2
    1   -6    1
>> B1=[1;1;3]
B1 =
    1
    1
    3
>>X= inv(A1)*B1
Warning: Matrix is singular to working precision.
```

VEŽBA 5 GRAFIKA

U MATLAB-u postoji mnogo komandi za crtanje grafika. Izgled grafika može se podešavati proizvoljnim izborom boje, debljine i vrste linija, unošenjem mreže, naslova, komentara i slično. U ovoj vežbi obrađeno je crtanje dvodimenzionih grafika.

5.1. GRAFIČKO PREDSTAVLJANJE FUNKCIJA JEDNE PROMENLJIVE

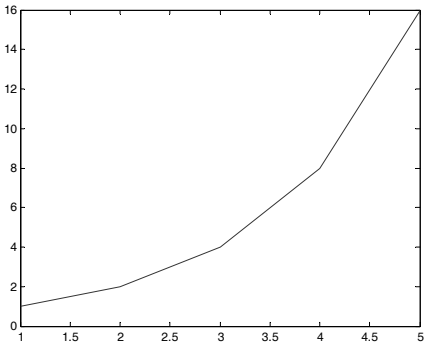
Najjednostavniji način za grafičko predstavljanje, sa linearnom podelom na osama, je korišćenjem naredbe ***plot***. Prilikom crtanja otvara se grafički prozor za koji važe ista pravila kao kod Windows prozora.

Naredba ima oblik ***plot(x,y)***

Argumenti x i y su vektori, koji moraju imati isti broj elemenata.

PRIMER 1: Nacrtati vektor $x = (1,2,4,8,16)$.

```
>> x=[1,2,4,8,16];plot(x)
```

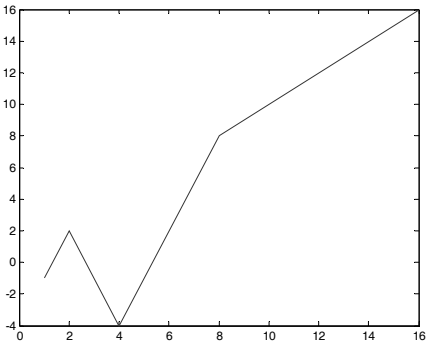


Iz ovog primera možemo videti da je MATLAB za vrednosti nezavisno promenljive x uzeo redni broj elementa, a njihove slike, su vrednosti vektora x, tj. tačke nacrtanog grafika imaju koordinate $(1,1),(2,2),(3,4),(4,8),(5,16)$.

U opštem slučaju naredba ***plot(x)*** crta grafik spajajući tačke (i, x(i)), i=1, 2, 3,…, N, gde je N dužina vektora.

PRIMER 2: Nacrtati vektor dat koordinatama $x = (1,2,4,8,16)$ i $y = (-1,2,-4,8,16)$.

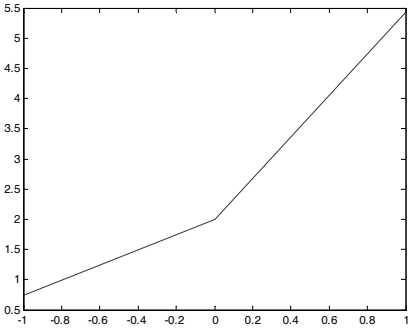
```
>> x=[1,2,4,8,16]; y=[-1,2,-4,8,16]; plot(x,y)
```



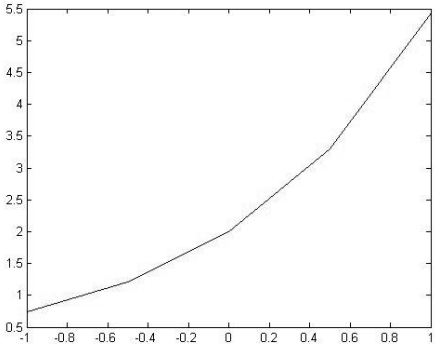
Naredba ***plot*** se koristi i za crtanje funkcija jedne promenljive gde se unapred mora definisati domen promenljive x u kome će funkcija biti nacrtana.

PRIMER 3: Nacrtati funkciju $y = 2e^x$ u domenu $x \in [-1,1]$

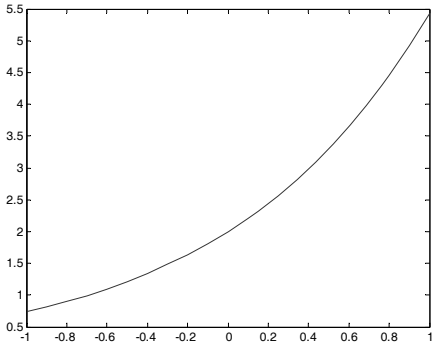
```
>> x=-1:1
x =
   -1    0    1
>> y=2*exp(x)
y =
   0.7358    2.0000    5.4366
>> plot(x,y)
```



```
>> x=-1:.5:1
x =
  -1.0000   -0.5000         0    0.5000    1.0000
>> y=2*exp(x)
y =
   0.7358    1.2131    2.0000    3.2974    5.4366
>> plot(x,y)
```



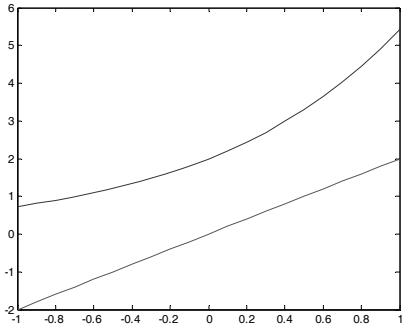

```
>> x=-1:.1:1;
>> y=2*exp(x);
>>plot(x,y)
```



Napomena*:* U prvom slučaju koristili smo domen $[-1,1]$ i MATLAB je za vrednosti nezavisno promenljive x uzeo tri uzastopne vrednosti $-1,0,1$, a funkcija je nacrtana kao izlomljena linija kroz 3 tačke. U drugom i trećem slučaju smo definisali korak $0,5$ i $0,1$, pa je nezavisno promenljiva x imala 5 i 20 vrednosti , a funkcija je nacrtana kao izlomljena linija kroz 5, odnosno 20 tačaka.

PRIMER 4: U istom koordinatnom sistemu nacrtati funkcije $y = 2x$ i $y = 2e^x$, u domenu $x \in [-1,1]$, sa korakom 0.1.

```
>> x=-1:.1:1; y1=2*x ;y2=2*exp(x); plot(x,y1,x,y2)
```



5.2. IZBOR VRSTE I OBLIKA LINIJE

Naredbom ***plot*** u mogućnosti smo da biramo ***izbor oblika*** **i** ***boje linija*****.**

Nareba ima oblik

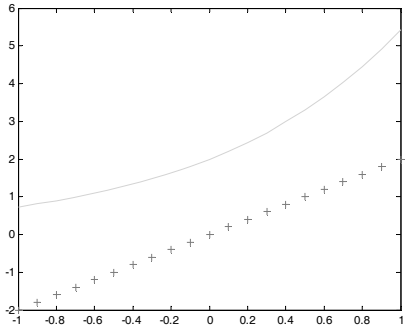
PLOT(X,Y,'VRSTA LINIJE BOJA').

Simbol linije	Opis
.	Tačka
o	Krug
h	h-znak
+	Plus
*****	Zvezda
-	Puna linija
-.	Tačka – crta
:	Tačkasta
--	Isprekidana linija

Simbol boje	Boja
y	Žuta
m	Ljubičasta
s	Cijan
r	Crvena
g	Zelena
b	Plava
k	Crna
w	Bela

PRIMER 5: U predhodnom primeru , proizvoljno, uvedimo oznake za vrstu i boju linije.

```
>> x=-1:.1:1;y1=2*x; y2=2*exp(x);
>> plot(x,y1,'g',x,y2,'m+')
```



5.3. CRTANJE GRAFIKA FUNKCIJA

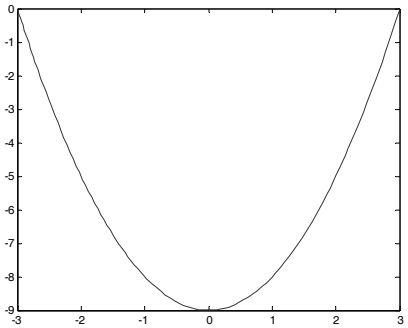
Za crtanje grafika funkcija možemo da koristimo i naredbu ***fplot.***

Nareba ima oblik
fplot(f(x),xmin,xmax)
$f(x)$ je funkcija koju crtamo, x je vektor čiji je prvi element ***xmin***, a poslednji
element ***xmax***.

U naredbi ***fplot*** funkcija se piše pod navodnicima '***f*** '.

PRIMER 6: Nacrtati funkciju $y = x^2 - 9$ u domenu $x \in [-3,3]$.

```
>> y='x^2-9'; fplot(y,[-3,3])
```



5.4. OZNAČAVANJE GRAFIKA I OSA

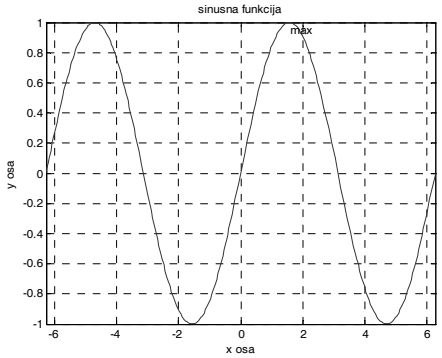
MATLAB nudi mogućnosti označavanja osa, pisanje različitog teksta i razne druge mogućnosti.

Oznaka	Opis
title	naziv grafika
xlabel	naziv x ose
ylabel	naziv y ose
text	naziv teksta na grafiku
gtext	tekst na poziciji označenoj mišem
grid	crtanje linija mreže

Tekst u predhodnim naredbama piše se u ***zagradi pod navodnicima***.
Naredba ***hold on*** zadržava sliku na ekranu. Suprotna njoj je naredba ***hold off*** .
U naredbi ***gtext*** korisnik naknadno sam određuje mišem mesto na koje želi da smesti tekst.

PRIMER 7: Nacrtati funkciju $y = \sin x$ na domenu $x \in [-2\pi, 2\pi]$ i koristeći naredbe iz tabele obeležiti sliku

```
>> y='sin(x)';
>>fplot(y,[-2*pi,2*pi])
>> hold on
>> grid
>> title('sinusna funkcija')
>> xlabel('x osa')
>>ylabel('y osa')
>>gtext('max')
```

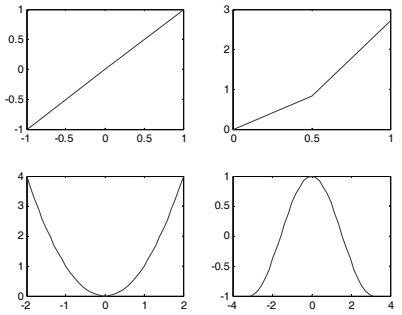


Naredba ***subplot(m, n, p)*** formira više grafika na ekranu. Ekran se deli na $m \times n$ delova, a grafik se crta u p -tom delu ekrana.

PRIMER 8: Koristeći naredbu subplot nacrtati funkcije: $y = x, \quad x \in [-1,1]$;

$y = xe^x, \quad x \in [0,1]; \qquad y = x^2, \quad x \in [-2,2]; \qquad y = \cos x, \quad x \in [-\pi, \pi]$.

```
>> x1=-1:0.001:1; y1=x1;  x2=0:0.05:1; y2=x2.*exp(x2);
>> x3=-2:0.01:2; y3=x3.^2; x4=-pi:pi/16:pi; y4=cos(x4);
>> subplot(2,2,1),plot(x1,y1)
>> subplot(2,2,2),plot(x2,y2)
>> subplot(2,2,3),plot(x3,y3)
>> subplot(2,2,4),plot(x4,y4)
```



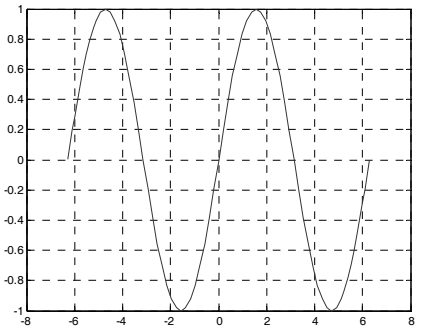
5.5. SKALIRANJE OSA

Ose x i y automatski se postavljaju na osnovu minimalne i maksimalne vrednosti koordinata.

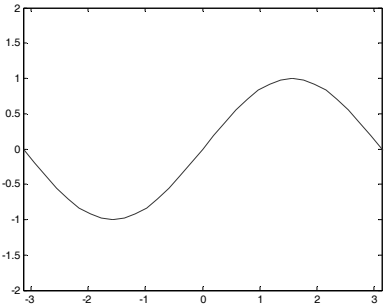
Oznaka	Opis
axis('equal')	Provera se da li je priraštaj po osama isti
axis(xmin,xmax,ymin,ymax)	Zadaju se granice u kojima će biti nacrtan grafik
axis('normal')	Vraćanje na prvobitne dimnezije grafika
axis('axis')	Vraćanje na prvobitno skaliranje
axis	Dobija se informacija o trenutnim dimenzijama

PRIMER 9: Nacrtati funkciju $y = \sin x$ za $-2\pi \le x \le 2\pi$, a zatim postaviti da domen po x osi bude $-\pi \le x \le \pi$, a po y osi bude $-2, 2$.

```
>> x=-2*pi:pi/16:2*pi; y=sin(x);plot(x,y),grid
```




```
>> axis([-pi,pi,-2,2])
```



VEŽBA 6 SIMBOLIČKA MATEMATIKA

Sve matematičke operacije koje smo do sad koristili bile su numeričke. Zadati izrazi sadržali su brojeve i promenljive kojima su predhodno dodeljene numeričke vrednosti. Rezultat takvih operacija je numerička vrednost (broj ili vektor brojeva).

Sa druge strane, mnogi matematički problemi zadati su izrazima koji sadrže simboličke promenljive, koje nemaju numeričku vrednost u trenutku izvršenja. Rezultat takvih operacija je simbolički izraz.

Symbolic Math Toolbox nam omogućava da radimo sa simboličkim promenljivim. Komande i funkcije za simboličke operacije imaju istu sintaksu i stil rada kao komande za numeričke operacije.

6.1. SIMBOLIČKI OBJEKTI I IZRAZI

Simbolički objekti mogu biti promenljive (kojoj nije dodeljena numerička vrednost), brojevi ili izrazi sastavljeni od simboličkih promenljivih i brojeva .

Naredbe za definisanje simboličkih promenljivih su ***sym*** ili ***syms***.

Naredba ima oblik ***ime objekta = sym (' znakovni izraz')***

```
>> a=sym('a')
a=
a
```

PRIMER 1: Napisati 15 kao simboličku, a zatim kao numeričku promenljivu.

```
> s=sym('15')
s =
15
>> s=15
s =
          15
```

Napomena: Rezultat u prvom slučaju je simbolička promenljiva i rezultat se prikazuje na ekranu sa uvlakom, nasuprot drugom rezultatu koji je numerički rezultat i na ekranu se prikazuje bez uvlake.

Naredba ***syms*** koristi se za definisanje više simboličkih objekata.

syms ime promenljive, ime promenljive,.....

PRIMER 2: Napisati simbolički izraz $f = ax^2 + bx + c$.
To možemo učiniti na dva načina:

```
> syms a b c x
>> f=a*x^2+b*x+c
f =
a*x^2+b*x+c
```

```
>> f='a*x^2+b*x+c'
f =
a*x^2+b*x+c
```

Napomena: Za razliku od predhodnog primera gde smo definisali sve ulazne promenljive i dobili simbolički izraz f, u drugom primeru nismo definisali ulazne promenljive i samim time sa simboličkim izrazom f ne možemo vršiti nove operacije u kojima učestvuju promenljive a,b,c,x, jer ih nismo posebno definisali. Na primer ne možemo sabrati izraz f i promenljivu x.

PRIMER 3: Izračunati vrednost izraza $y = \frac{2}{a} + \sqrt{b}$ za $a = 3$ i $b = 4$. Prvo uzeti da su a i b simboličke promenljive, a zatim ih zadati kao numeričke vrednosti.

```
> a=sym(3);b=sym(4);
>> c=2/a+sqrt(b)
c =
8/3
>> a=3;b=4;
>> c=2/a+sqrt(b)
c =
   2.6667
```

Napomena: Ako računamo sa simboličkim promenljivama rezultat je tačna brojna vrednost i vidi se na ekranu bez uvlake, a u drugom slučaju rezultat je približna numerička vrednost.

6. 2. REŠAVANJE JEDNAČINA

Rešavanje jednačina i sistema jednačina vrši se naredbom ***solve.***

Naredba ima oblik :

s=solve(jednačina)
s=solve(jednačina, promenljiva)

PRIMER 4: Rešiti jednačinu $2x-5=0$

```
> syms x
>> y=solve(2*x-5)
y =
5/2
```

Jednačina sadrži jednu ulaznu simboličku promenljivu x, a rešenje je broj, dat kao simbolička promenljiva.

PRIMER 5: Rešiti jednačinu $ax^2+bx+c=0$.

```
>> syms x a b c
>> solve(a*x^2+b*x+c)
ans =
[ 1/2/a*(-b+(b^2-4*a*c)^(1/2))]
[ 1/2/a*(-b-(b^2-4*a*c)^(1/2))]
```

Jednačina sadrži više ulaznih simboličkih promenljivih x,a,b,c, a rešenje je simbolička promenljiva u funkciji ulaznih parametara a,b,c.

6. 3. REŠAVANJE SISTEMA JEDNAČINA

Naredbe imaju oblik :

[r1,r2,...]=solve (jednačina 1, jednačina 2,....)
rezultat=solve(jednačina 1, jednačina 2,..., promenljiva1
promenljiva2,...,)

PRIMER 6: Rešiti sistem jednačina $x+5y=3$ i $2x-y=4$.

```
>> [x,y]=solve( 'x+5*y-3','2*x-y-4')
x =
23/11
y =
2/11
```

Napomena*:* Kako je sistem saglasan i ima jednoznačno rešenje, mi ga vidimo na ekranu kao par simboličkih brojeva.

PRIMER 7: Rešiti sistem jednačina $x+5yz=3$ i $2x-y=4$.

```
>> [x,y]=solve( 'x+5*y*z-3','2*x-y-4')
x =
(20*z+3)/(1+10*z)
y =
2/(1+10*z)
```

Napomena**:** Kako je sistem saglasan, a ima beskonačno mnogo rešenja, mi rešenje vidimo na ekranu kao simboličku promenljivu izraženu u funkciji promenljive z.

PRIMER 8: Odrediti presek kruga $x^2+y^2=41$ i prave $y-x-1=0$.

```
>> syms x y
> [x y]=solve('x^2+y^2-41','y-x-1')
x =
  4
 -5
 y =
  5
 -4
```

6.4. CRTANJE GRAFIKA KRIVE SIMBOLIČKOG IZRAZA

Crtanje grafika simboličkog izraza se radi korišćenjem naredbe e***zplot.***

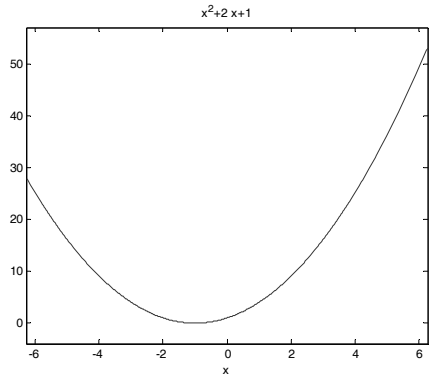
Naredba ima oblik :

ezplpt(S)
ezplpt(S,[xmin,xmax,ymin,ymax])

S je simbolički izraz krive koja se crta. U prvoj naredbi ***ezplot(S)*** grafik se crta u domenu $(-2\pi,2\pi)$, a u drugoj sami zadajemo domen promenljive x i promenljive y.

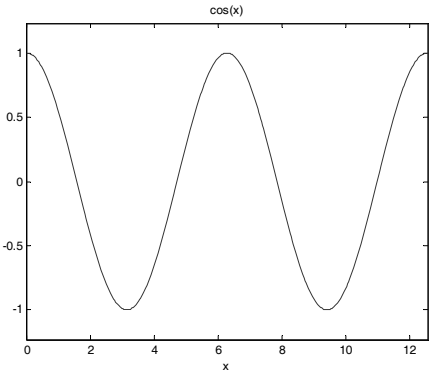
PRIMER 9: Nacrtati grafik funkcije $y = x^2 + 2x + 1$.

```
>> syms x
>> y=x^2+2*x+1;
>> ezplot(y)
```



PRIMER 10: Nacrtati grafik funkcije $y = \cos x$, na intervalu $(0, 4\pi)$

```
>> syms x
>> y=cos(x);
>> ezplot(y,[0,4*pi])
```



VEŽBA 7 GRANIČNA VREDNOST I IZVOD FUNKCIJE

7. 1. Granična vrednost funkcije

Naredbom ***limit*** računa se granična vrednost simbolički zadate funkcije.

Naredba ima oblik

limit(f,a)

gde je f funkcija, a vrednost kojoj teži nezavisno promenljiva x.

PRIMER 1: Naći graničnu vrednost funkcije $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}$.

```
>> syms x
>> limit( (x.^2-1)/(x.^2+2*x-3),1)
ans =
1/2
```

PRIMER 2: Naći graničnu vrednost funkcije $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-1}{x^2+2x-3}$.

```
>> syms x
>> limit( (x.^2-1)/(x.^2+2*x-3),inf)
ans =
1
```

7. 2. Izvod funkcije

Naredbom ***diff*** dobija se izvod simbolički zadate funkcije.

Naredba ima oblik

diff(f) prvi izvod funkcije,
diff(f,n) n-ti izvod funkcije.

PRIMER 3: Naći prvi izvod funkcije $y = x^3 \sin x$.

```
>> y='x.^3*sin(x)';
>> diff(y)
ans =
3*x^2*sin(x)+x^3*cos(x)
>> pretty(ans)
                        2             3
                   3 x  sin(x) + x  cos(x)
```

PRIMER 4: Naći drugi izvod zadate funkcije.

```
>> syms x
>> y=x.^3*sin(x);
>> diff(y,2)
ans =
6*x*sin(x)+6*x^2*cos(x)-x^3*sin(x)
```

7.3. PRIMENE IZVODA

7.3.1. Odeđivanje ekstremnih i prevojnih tačaka

Ekstremne vrednosti funkcije dobijamo kao nule prvog izvoda funkcije, a ***prevojne tačke*** kao nule drugog izvoda funkcije.

Naredba ***double*** pretvara simboličku promenljivu u numeričku, dvostruke preciznosti sa decimalnim zarezom.

PRIMER 5: Odrediti ekstremne i prevojne tačke funkcije $y = e^x(3x - 2x^2)$.

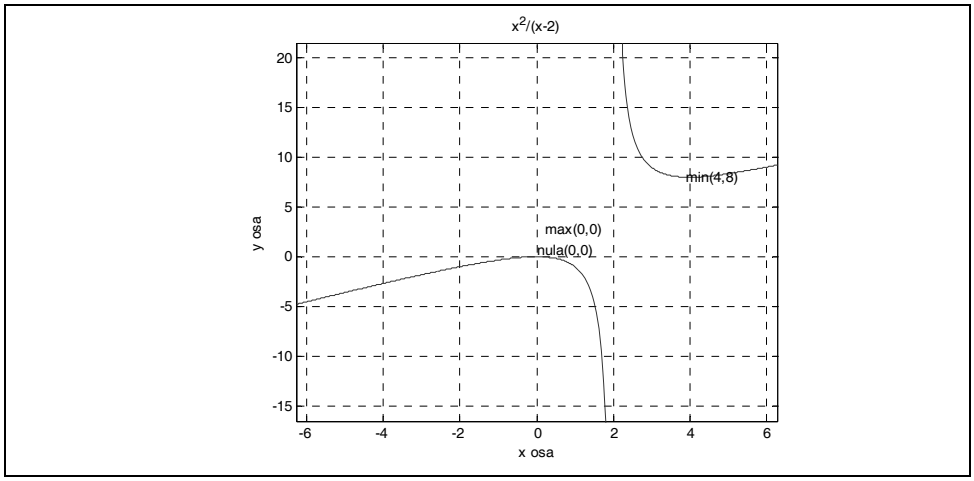
```
>> syms x
>> y=exp(x)*(3*x-2*x.^2) ;
% izracunavanje ekstrema
>> E=diff(y)
E =
exp(x)*(3*x-2*x^2)+exp(x)*(3-4*x)
% nule prvog izvoda
>> xe=solve(E)
xe =
   1
 -3/2
```

```
% prebacivanje simbolickih vrednosti u numericke
>> xed=double(xe)
xed =
   1.0000
  -1.5000
>> y1=exp(1)*(3*1-2*1.^2)
y1 =
   2.7183
>> double(y1)
>> y2=exp(-1.5)*(3*(-1.5)-2*(-1.5).^2)
y2 =
  -2.008
% izracunavanje prevoja
>> P=diff(y,2)
P =
exp(x)*(3*x-2*x^2)+2*exp(x)*(3-4*x)-4*exp(x)
% nule drugog izvoda
>> xp=solve(P)
xp =
 -5/4+1/4*41^(1/2)
 -5/4-1/4*41^(1/2)
% prebacivanje simbolickih vrednosti u numericke
>> xp=double(xp)
xp =
   0.3508
  -2.8508
>> yp1=exp( 0.3508)*(3*( 0.3508)-2* (0.3508).^2)
yp1 =
   1.1451
>> yp2=exp( -2.8508)*(3*( -2.8508)-2* ( -2.8508).^2)
yp 2=
  -1.4338
```

PRIMER 6 : Nacrtati funkciju $y = \frac{x^2}{x-2}$ i tekstom opisati sliku.

```
>> syms x
>> y=x.^2/(x-2);
>> limit(y,2)
ans =
NaN
>> limit(y,inf)
ans =
Inf
>>  solve(y)
ans =
 0
 0
>> ezplot(y)
>> grid, hold on
>> gtext('nula(0,0)')
>> d=diff(y)
d =
2*x/(x-2)-x^2/(x-2)^2
>> s=solve(d)
s =
 0
 4
>> y1=0.^2/(0-2)
y1 =
    0

>> y2=4.^2/(4-2)
y2 =
    8
>> gtext('max(0,0)')
>> gtext('min(4,8)')
>> xlabel('x osa')
>> ylabel('y osa')
```


x2/(x-2)
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
y osa
-6
-4
-2
0
2
4
6
x osa
max(0,0)
nula(0,0)
min(4,8)

VEŽBA 8 INTEGRALI

8.1. Neodređeni integral

Naredbom ***int*** izračunava se neodređeni integral simbolički zadate funkcije.

Naredba ima oblik:
int(f)
int(f,'x') ukoliko je funkcija konstanta i vraća vrednost funkcije u odnosu na promenljivu ***x.***

PRIMER 1 : Izračunati integral $\int \frac{3x+5}{x^2+2x+2}dx$.

```
>> syms x
>> f=(3*x+5)/(x^2+2*x+2);
>> int(f)
ans =
 3/2*log(x^2+2*x+2)+2*atan(x+1)
>> pretty(ans)
                    2
          3/2 log(x  + 2 x + 2) + 2 atan(x + 1)
```

PRIMER 2 : Izračunati integral $\int 5\,dx$.

```
> % broj 5 se mora prebaciti u simboličku promenljivu
>> y=sym('5')
y =
5
>> % sada se može izračunati vrednost integrala
>> int(y,'x')
ans =
5*x
```

PRIMER 3 : Izračunati integral $\int \left(5x^3+3x^2-5\sqrt{x}+9\right)dx$

```
>> syms x
>> f=(5*x^3 + 3*x^2 -5*sqrt(x)) +9
f =
 5*x^3+3*x^2-5*x^(1/2)+9
>> r =int(f)
```

```
r =
 5/4*x^4+x^3-10/3*x^(3/2)+9*x
>> pretty(r)
                          4    3          3/2
                 5/4 x  + x  - 10/3 x    + 9 x
```

PRIMER 4 : Izračunati integral $\int x \sin x dx$

```
>> syms x
>> f=x*sin(x)
f =
int(f)
aus=sin(x)-x*cos(x)
```

8.2. Određeni integral

Određeni integral $\int_a^b f(x)dx$ izračunavamo naredbom

int(f,a,b)

gde su **a** i **b** granice integracije.

PRIMER 5: Izračunati $\int_2^3 \frac{3x^2+3x+12}{x(x-1)(x+2)}dx$.

```
>> syms x
>> f=(3*x^2+3*x+12)/(x*(x-1)*(x+2));
>> int(f,2,3)
ans =
log(8000/729)
```

PRIMER 6 : Izračunati integral $\int_{8}^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

```
>> syms x
>> f=1/x^(1/3)
f =
  1/x^(1/3)
>> r =int(f,8,27)
r= 15/2
```

PRIMER 7 : Izračunati integral $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x+2\sqrt{x-1}}$

```
>> syms x
>> f=1/(x+2*sqrt(x-1))
f =
 1/(x+2*(x-1)^(1/2))
>> r =int(f,1,2)
r =log(4)-1
```

PRIMER 8 : Izračunati integral $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x} dx$

```
>> syms x
>> f=1/sin(x) ^2;
>> r =int(f,pi/4,pi/3)
r =
>>  1-3^(1/2)/3
ans = pretty(r)
r=1-3^1/2/3
```

8.3. Nesvojstveni Integral

Nesvojstvene integrale izračunavamo istom naredbom kao i određene integrale. Oznaka za beskonačnu granicu je ***inf*** (infinity).

PRIMER 9: Izračunati nesvojstveni integral $\int_1^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$.

```
>> syms x
>> y=x*exp(-x.^2);
>> int(y,1,inf)
ans =
1/2*exp(-1)
>> pretty(ans)
                    1/2 exp(-1)
>> double(ans)
ans =
   0.3863
```

PRIMER 10 : Izračunati nesvojstveni integral $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$.

```
>> syms x
>> f= 1/x^2
>> r =int(f,0,1)
r =inf
```

PRIMER 11 : Izračunati nesvojstveni integral $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

```
>> syms x
>> f= 1/(sqrt(1-x^2))
f =
 1/(1-x^2)^1(1/2)
>> r =int(f,0,1)
r =
 pi/2
>> double(r)
ans =
   1.5708
```

PRIMER 12 : Izračunati nesvojstveni integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

```
>> syms x
>> f=1/(1+x^2)
f =
 1/(1+x^2)

>> r =int(f,-inf,inf)
r =
pi
```

VEŽBA 9 INTEGRALI I PRIMENA

9.1. Izračunavanje površina

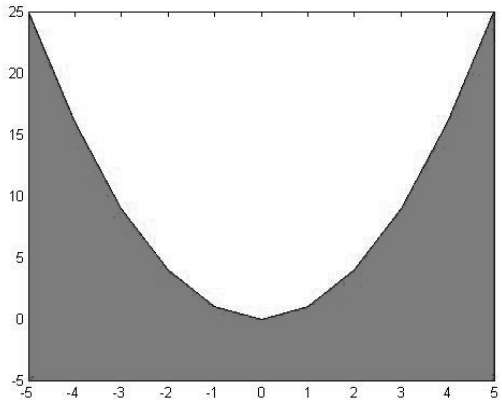
Funkcija ***fill*** se koristi za obelezavanje površine na dobro poznatom objektu.

Naredba ima oblik ***fill(x, y,'boja')***

Funkcija koju posmatramo uzima tri ulazna parametra: dva polja, ovde imenovanih **x** i **y**. Oni sadrže x i y koordinate ivica poligona koje treba popuniti i definišemo ih u obliku
([x_p x x_k],[y_p y y_k]), gde je ***x_p, y_p*** početna tačka ivice poligona, a ***x_k, y_k*** krajnja tačka ivice poligona koji tražimo. Treći parametar je boja koju korisnik odabire da bi popunio objekt.
Naredba ***fill*** će popuniti sav prostor između zadate krive ***y*** i prave koja prolazi kroz tačke, ***(x_p, y_p) , (x_k, y_k).***

PRIMER 1*:* Data je funkcija $y = x^2$ na intervalu $-5 \le x \le 5$. Obeležiti oblast ograničenu datom funkcijom i pravom koja prolazi kroz krajnje tačke zadatog intervala

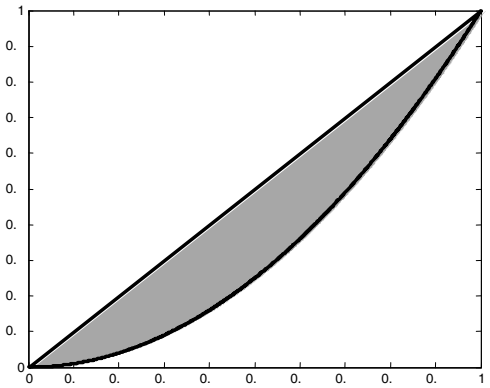
```
>> x=-5:5;
>> xp=-5;yp=-5;
>> xk=5;yk=5;
>> y=x.^2;
>> fill([-5,x,5],[-5,y,-5],'b')
```



Napomena: Površina koju senčimo mora da bude zatvorena.

PRIMER 2: Data je funkcija $y = x^2$ na intervalu $0 \le x \le 1$. Obeležitioblast ograničenu datom funkcijom i pravom koja prolazi kroz krajnje tačke zadatog intervala i izračunati brojnu vrednost površine.

```
>> % domen nezavisno promenljive x je (0,1)
>> x=0:0.001:1;
>> % (xp,yp) je početna tačka zadatog intervala
>> % (xk,yk) je krajnja tačka zadatog intervala
>> xp=0;yp=0;
>> xk=1;yk=1;
>> y=x.^2;
>> fill([0,x,1],[0,y,1],'r')
```



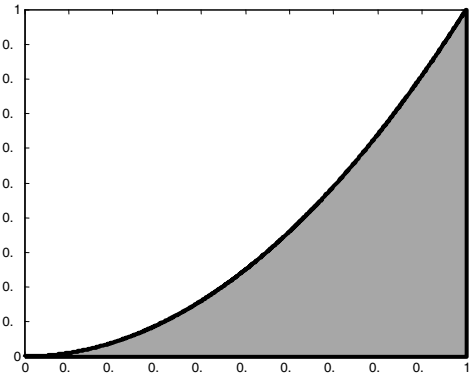
Prava koja prolazi kroz tačke $(0,0)$ i $(1,1)$ ima jednačinu $y = x$, pa tražena površina ima vrednost:

```
>> P=int('x',0,1)-int('x^2',0,1)
P =
1/6
>> double(P)
ans =
   0.1667
```

PRIMER 3: Data je funkcija $y = x^2$ na intervalu $0 \le x \le 1$. Obeležiti oblast ograničenu datom funkcijom i x-osom i izračunati brojnu vrednost te površine.

Napomena: Već smo naglasili da oblast koju računamo mora biti zatvorena. U ovom slučaju mi tražimo oblast koju zahvata polazna funkcuja $y = x^2$ i prava $y = 0$.

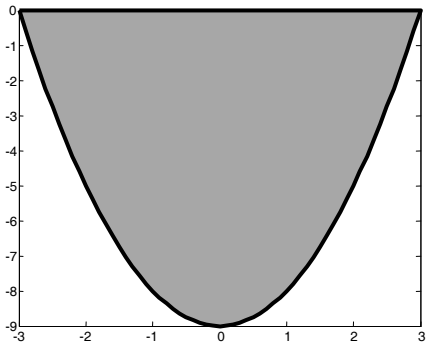
```
>> %domen nezavisno promenljive x
>> x=0:0.001:1;
>> % (xp,yp) je početna tačka zadatog intervala
>> xp=0;yp=0;
>> % (xk,yk) je krajnja tačka zadatog intervala
>> xk=1;yk=0;
>> y=x.^2;
>> fill([0,x,1],[0,y,0],'r')
```




```
>> % tražena površina
>> P=int('x^2',0,1)
P =
1/3
>> double(P)
ans =
   0.3333
```

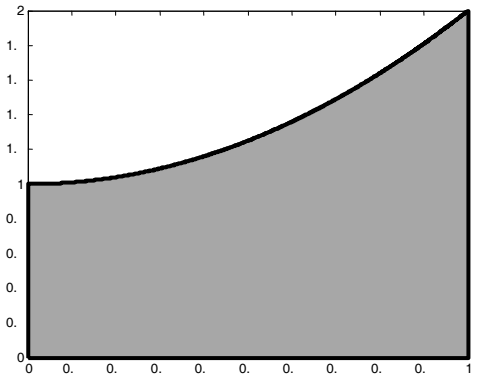
PRIMER 4 : Izračunti površinu ograničenu lukom krive $y = x^2 - 9$ i x osom i obeležiti traženu površinu.

```
>> syms x
>>y=x.^2-9;
% presečne tačke funkcije sa osom x dobijaju se rešavanjem jednačine
 y=0
>> a=solve(y)
a =
[  3]
[ -3]
  % granice integracije su dakle -3 i 3
>>I= int(y,-3,3)
I =
-36
  % površina mora biti pozitivna
>> abs(I)
ans =
 36
>>% obeležavanje oblasti integracije u datom domenu
>> x=-3:0.1:3;
>> y=x.^2-9;
>> fill([-3,x,3],[0,y,0],'r')
```



PRIMER 5: Obeležiti površinu ograničenu funkcijom $y = x^2 + 1$ i x osom na intervalu $0 \le x \le 1$ i izračunati površinu

```
>> x=0:0.001:1;
>> y=x.^2+1;
>> fill([0,x,1],[0,y,0],'g')
```



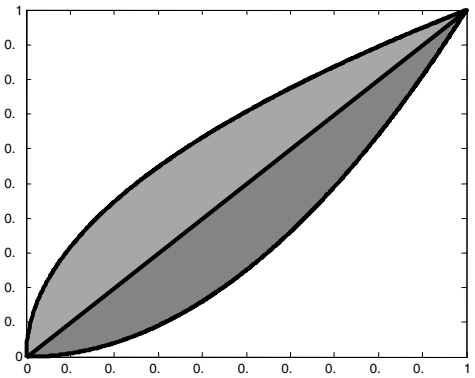

```
>> syms x
>> y=x.^2+1;
>> P=int(y,0,1)
P =
     4/3
>> double(P)
ans =
   1.3333
```

PRIMER 6: Obeležiti površinu ograničenu funkcijama $f_1(x) = x^2$ i $f_2(x) = \sqrt{x}$ i izračunati površinu obeležene figure.

```
>> syms x
>> f1=x.^2;
>> f2=sqrt(x);
>> % računamo presečne tačke krivih
>> f3=f1-f2;
>> x=solve(f3)

x =
```

```
 0
 1
>> % presečne tačke krivih su 0 i 1
>> % vrednosti funkcija u tim tačkama su takođe 0 i 1
>> x=0:0.001:1;
>> fill([0,x,1],[0,x.^2,1],'g',[0,x,1],[0,sqrt(x),1],'r')
```




```
>> % izračunavanje površine
>> syms x
>> f1=x.^2;f2=sqrt(x);
>> P=int(f2,0,1)-int(f1,0,1)
P =
1/3
>> double(P)
ans =
   0.3333
```

VEŽBA 10 FORMIRANJE DISTRIBUCIJE FREKVENCIJA

PRIMER 1: Mašina za pakovanje kafe puni kesice od 100 gr. Za kontrolu kvaliteta pakovanja posmatrano je 50 kesica i dobijeni su sledeći podaci.

102	98	98	97	99	100	100	102	101	
103	99	98	97	100	100	100	99	97	101
102	102	100	101	103	102	100	100	99	98
101	100	100	101	99	98	100	101	102	99
100	102	101	99	98	99	101	100	102	97

a) Srediti podatke u rastući niz.
b) Formirati distribuciju apsolutnih frekvencija i predstaviti grafički.
c) Formirati distribuciju relativnih frekvencija i predstaviti grafički.

a)

```
>> y=[101 102 98 98 97 99 100 100 102 101 103 99 98 97 100 100 100 99 97
101 102 102 100 ...
101 103 102 100 100 99 98 101 100 100 101 99 98 100 101 102 99 100 102
101 99 98 99 101 ...
100 102 97];

>> n=hist(y)
n =
   4    6    0    8   13    0    9    0    8    2

>> n=hist(y,7)
n =
   4    6    8   13    9    8    2
```

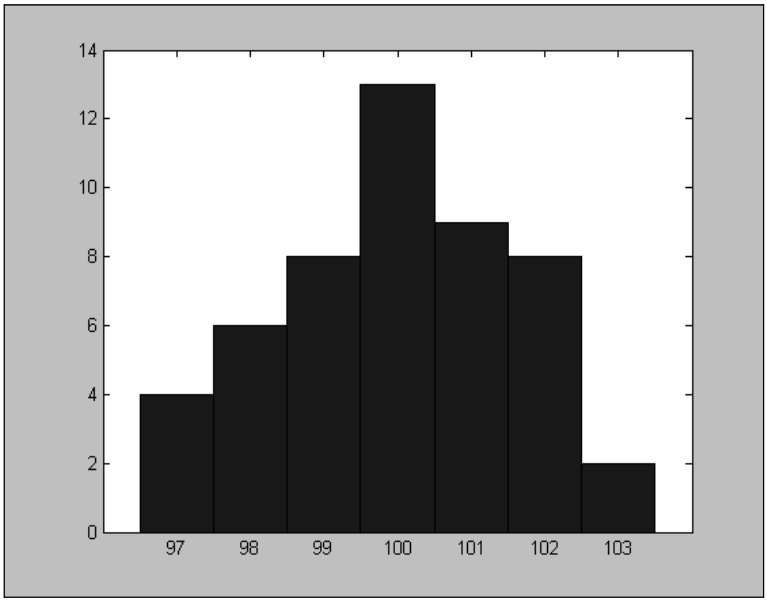
b)

```
>> y=[101 102 98 98 97 99 100 100 102 101 103 99 98 97 100 100 100 99 97
101 102 102 100 ...
101 103 102 100 100 99 98 101 100 100 101 99 98 100 101 102 99 100 102
101 99 98 99 101 ...
100 102 97];
>> n=hist(y)
n =
```

```
   4    6    0    8   13    0    9    0    8    2

>> n=hist(y,7)
n =
   4    6    8   13    9    8    2

>> x=[97:1:103];
>> hist(y,x)
```

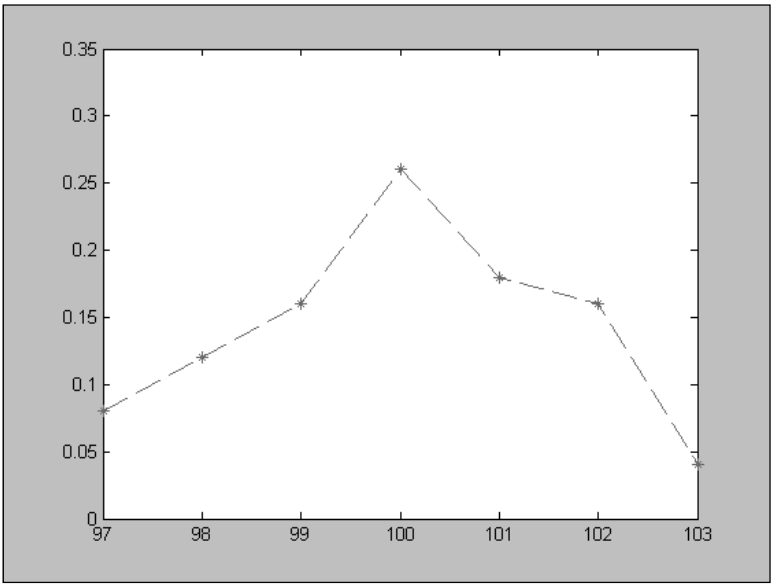


c)

```
>> y=[101 102 98 98 97 99 100 100 102 101 103 99 98 97 100 100 100 99 97
101 102 102 100 ...
101 103 102 100 100 99 98 101 100 100 101 99 98 100 101 102 99 100 102
101 99 98 99 101 ...
100 102 97];
>> z=[50];
>> n=hist(y,7)/z
n =
   0.0800    0.1200    0.1600    0.2600    0.1800    0.1600    0.0400

>> x=[97 98 99 100 101 102 103];
>> y=[0.08 0.12 0.16 0.26 0.18 0.16 0.04];
```

```
>> plot(x,y)
>> plot(x,y,'--r*')
```



PRIMER 3: Anketirani su kupci u prodavnicama XYZ Trade o broju članova u porodici.

1	2	3	4	4	3	2	4	5	1	4	3
2	2	3	4	4	4	5	6	5	4	4	3
1	3	3	4	2	4	3	2	2	4	3	1

a) Srediti podatke u rastući niz.
b) Formirati distribuciju apsolutnih i relativnih frekvencija.
c) Prikazati grafički distribuciju relativnih frekvencija.

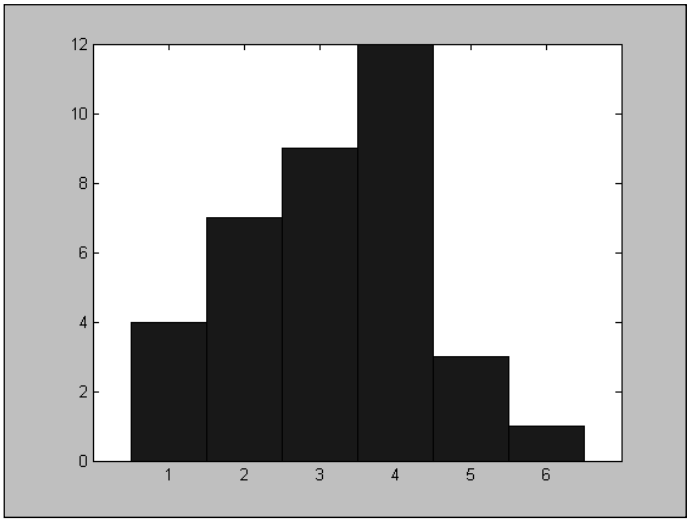
a)

```
>> y=[1 2 3 4 4 3 2 4 5 1 4 3 2 2 3 4 4 4 5 6 5 4 4 3 1 3 3 4 2 4 3 2 2 4 3 1];
>> n=hist(y)
n =
   4    7    0    9    0   12    0    3    0    1

>> n=hist(y,6)
n =
```

```
   4    7    9   12    3    1
>>
b)
>> y=[1 2 3 4 4 3 2 4 5 1 4 3 2 2 3 4 4 4 5 6 5 4 4 3 1 3 3 4 2 4 3 2 2 4 3 1];
>> n=hist(y)
n =
   4    7    0    9    0   12    0    3    0    1

>> n=hist(y,6)
n =
   4    7    9   12    3    1
>> hist(y,6)
>> x=[1:1:6];
>> hist(y,x)
```



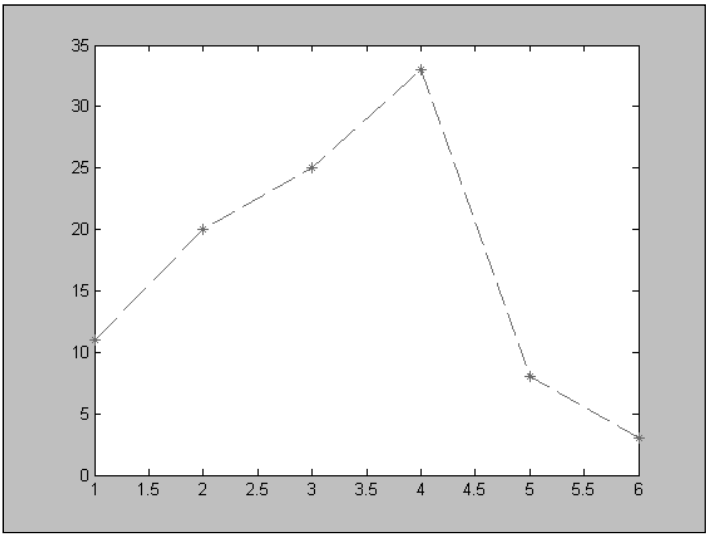

```
>> a=[36];
>> z=n/a
z =
   0.1111    0.1944    0.2500    0.3333    0.0833    0.0278
```

c)

```
>> x=[1 2 3 4 5 6]
x =
```

```
   1    2    3    4    5    6

>> y=[11 20 25 33 8 3]
y =
   11   20   25   33    8    3
>> plot(x,y)
>> plot(x,y,'--r*')
```



PRIMER 4:

a)

```
>> y=[1 2 3 4 4 3 2 4 5 1 4 3 2 2 3 4 4 4 5 6 5 4 4 3 1 3 3 4 2 4 3 2 2 4 3 1];
>> n=hist(y)
n =
   4    7    0    9    0   12    0    3    0    1

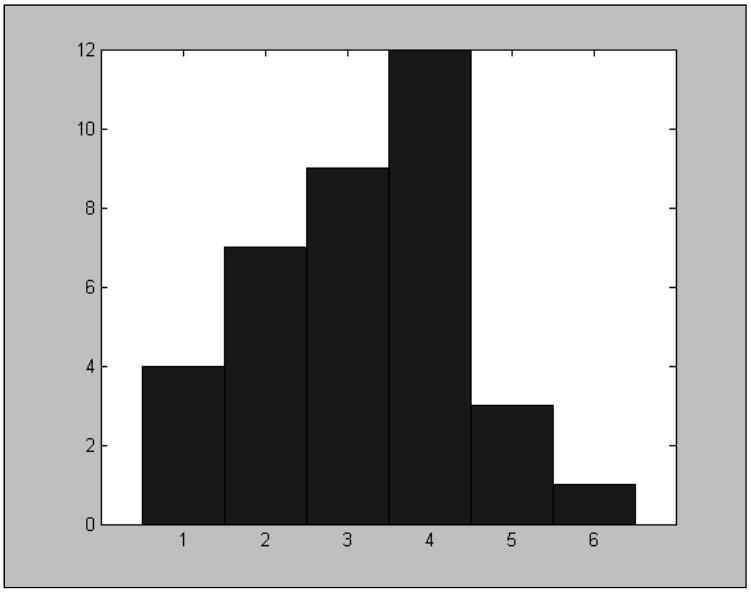
>> n=hist(y,6)
n =
   4    7    9   12    3    1
```

b)

```
>> y=[1 2 3 4 4 3 2 4 5 1 4 3 2 2 3 4 4 4 5 6 5 4 4 3 1 3 3 4 2 4 3 2 2 4 3 1];
>> n=hist(y)
n =
   4    7    0    9    0   12    0    3    0    1

>> n=hist(y,6)
n =
   4    7    9   12    3    1

>> hist(y,6)
>> x=[1:1:6];
>> hist(y,x)
```



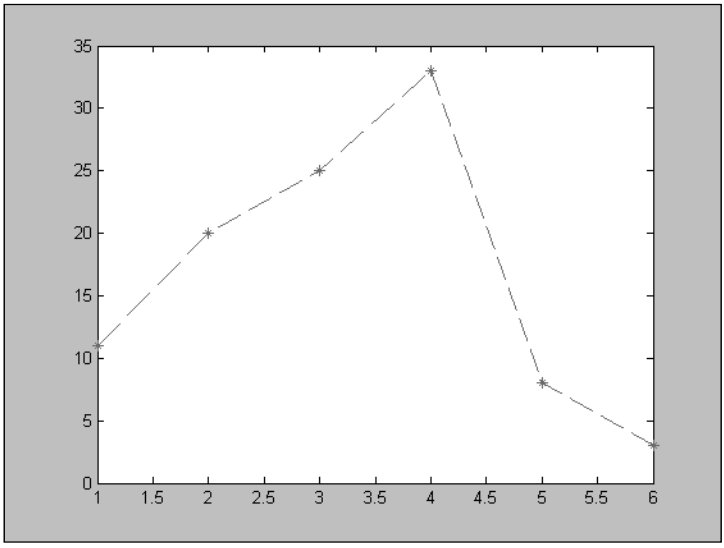

```
>> a=[36];
>> z=n/a
z =
   0.1111    0.1944    0.2500    0.3333    0.0833    0.0278
```

v)

```
>> x=[1 2 3 4 5 6]
x =
    1    2    3    4    5    6

>> y=[11 20 25 33 8 3]
y =
   11   20   25   33    8    3

>> plot(x,y)
>> plot(x,y,'--r*')
```



ZADACI

1. Utvrditi šta je veće e^{π} ili π^{e} ?
(Voditi računa da e nije definisano kao konstanta MATLAB –a, već ga izračunavamo kao vrednost eksponencijalne funkcije za argument $x=1$).

2. Za $x=0$, izračunati $\frac{5}{x}$.

3. Izračunati $x=\frac{0}{0}$.

4. Korišćenjem različitih izlaznih formata napisati broj $\sqrt{2}$.

5. Ako je $a=-18.2, b=6.42,\ c=a/b, d=0.5(cb+2a)$ izračunati vrednost $d-\frac{a+b}{c}+\frac{(a+d)^2}{\sqrt{|abc|}}$.

6. Uneti svoje ime i prezime pa odrediti broj slova u njemu.

7. Dati su elementi $\pi, e, 2$. Formirati matricu 3x3, čiju prvu vrstu čine dati brojevi, drugu vrstu njihovi tangensi, a treću vrstu kvadratni koreni datih brojeva.

8. Koristeći proizvoljnu matricu $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ odrediti:

a) član na mestu (3,1), **b)** drugu vrstu matrice A,
c) determinantu matrice A^2, **d)** transponovanu matricu matrice A^{-1}.

9. Ukucati i objasniti A(:) , A(:,:) , A(1:2,3) , A(:,3:-1:1) , A([1 3],[2 3]).

10. Izračunati $\frac{\left(A^2\right)^T+A^{-1}}{4+\det A}$ koristeći datu matricu $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

11. Izračunati $(A+I)(A-I)$ ako je $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

12. Rešiti matričnu jednačinu $A^2XB=C$ ako je:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0 & 3\\ -2 & 1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}8 & 17\\ 8 & 11\end{bmatrix}.$$

13. Nacrtati funkcije $y=\sin x$ i $y=\cos x$ u domenu od $0,2\pi$.

14. Nacrtati funkciju $y=x^2-5x+6$ u proizvoljnom domenu i opisati je tekstom.

15. Koristeći naredbu subplot nacrtati sledeće funkcije:
$y1=2x\ \ y2=x^3\ \ y3=\sin(x)$; $y4=\sqrt{x}$ za: a) $x\in[0,1]$,b) sa korakom 0,1.

16. Nacrtati funkciju $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$ u domenu x∈ [-2,2] sa korakom 0,01.

17. Napraviti skript fajl za crtanje funkcije $y=\cos x$, na intervalu $(-\pi,\pi)$ pod imenom **funkcija.**

18. Neka je $a_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$. Definisati fajl kojim se rešava nejednačina $a_n<k$, za razne vrednosti parametra k.

19. Formirati funkcijski fajl pod imenom **si** kojim se izračunava funkcija $\dfrac{\sin(x)}{x}$, zatim izračunati $si\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, $si(0)$.

20. Formirati funkcijski fajl pod imenom ime kojim svako unosi svoje ime i prezime, prebrojava broj slova i ako je taj broj manji od 15 određuje vrednost izraza $x=1+\sqrt{3}$, ako je broj slova između 15 i 20 definiše jediničnu matricu 3×3, a ako je veći od 20 izračunava sumu kvadrata prvih 100 prirodnih brojeva.

21. Napravite skrip fajl pod imenom kvadkoreni koji računa realna rešenja jednačine $ax^2+bx+c=0$. Koefcijente a,b,c unosi korisnik, diskriminanta se računa po formuli $d=b^2-4ac$. Ako je:

- $d > 0$ prikazuje poruku „Jednačina ima 2 rešenja“ i izračunava $x_{1,2}$.
- $d = 0$ prikazuje poruku „Jednačina ima 1 rešenje“ i izračunava ga.
- $d < 0$ prikazuje poruku „Jednačina nema rešenje“ .

22. $A \cdot X + X - B = 0$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

23. Rešiti sistem jednačina matričnom metodom i koristeći kreirani fajl

Cramer. Uporediti ovako dobijena rešenja.

$$\begin{aligned} x + 3y - 2z &= 1 \\ 2x - y + z &= 3 \\ x + 2z &= 7 \end{aligned}$$

24. Rešiti jednačinu $x^2 - 2x = 0$.

25. Izračunati $\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2 - 1}$.

26. Izračunati $\lim_{x \to 1} \frac{x}{x^2 - 1}$.

27. Naći prvi izvod funkcije $y = xe^x$.

28. Naći deseti izvod funkcije $y = x^n e^x$.

29. Nacrtati i opisati sliku funkcije $y = xe^x$.

30. Nacrtati i opisati sliku funkcije $y = \frac{x}{x^2 - 1}$.

31. Odrediti sledeće integrale :

a)neodređene $\int \frac{3x+5}{x^2+2x+2} dx$, $\int xe^x \, dx$,

b) određene $\int_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5 + 3\cos^2 x}$,

c) nesvojstvene $\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$, $\int_1^{\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2}dx$.

32. Odrediti sledeće integrale :

a) neodređene $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}\mathrm{d}x$, $\int \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x$.

b) određene $\int_1^e \frac{x^2+1}{2x}dx$, $\int_a^b \left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\right)dx$,

c) nesvojstvene $\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx$, $\int_1^{\infty} \frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}dx$

33. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije $y = \frac{x^2+5x+4}{x}$. Tekstom opisati sliku.

34. Rešiti matričnu jednačinu $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

35. Date su matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Rešiti jednačinu $X + A^2 = AM^{-1}$.

36. Ispitati i grafički prikazati funkciju $y = e^x\left(2x^2 - 3x\right)$. Tekstom opisati sliku.

37. Ispitati i grafički prikazati funkciju $y = \cos^2 x - \cos x$. Tekstom opisati sliku.

38. Rešiti jednačinu $AX + BC = D$, gde je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 11 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

39. Ispitati i grafički prikazati funkciju $y = \dfrac{1-x}{1+x}$. Tekstom opisati sliku.

40. Ispitati i grafički prikazati funkciju $y = \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2+1}}$. Tekstom opisati sliku.

41. Ispitati i grafički prikazati funkciju $y = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^x$. Tekstom opisati sliku.

42. Koristeći naredbu subplot nacrtati funkcije $y = x^n$, $n \in [1,6]$.

43. Odrediti skup svih pozitivnih rešenja jednačine

$$\int_0^a \left(3x^2 + 4x - 5\right)dx = a^3 - 2$$

44. Izračunati površinu figure ograničene linijama $y = x^2$ i $y = \dfrac{3}{4}x^2 + 1$.i grafički predstaviti. Traženu površinu obeležiti.

45. Izračunati površinu figure ograničene linijama $x^2 + 4y^2 = 20$ i $xy = 4$. i grafički predstaviti. Traženu površinu obeležiti.

46. Izračunati površinu figure ograničene linijama $y = x(x-1)(x-2)$ i x osom. i grafički predstaviti. Traženu površinu obeležiti.

47. Izračunati površinu figure ograničene linijom $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$, ordinatom maksimuma i x osom. i grafički predstaviti. Traženu površinu obeležiti.

48. Dokazati da sistem jednačina

$$x+y+z=0$$
$$2x+6y+5z=2$$
$$6x+5y+6z=1$$

ima jedinstveno rešenje, a zatim rešiti sistem matričnom metodom.

49. Odrediti površinu koja je ograničena lukom krive $y=e^{-x}$, njenom asimptotom i tangentom u tački $M\left(-1\,,\,y_0\right)$. i grafički predstaviti. Traženu površinu obeležiti.

50. Rešiti sistema jednačina primenom Kramerovog pravila

$$2x-3y+z=-1$$
$$x+y+z=6$$
$$3x+y-2z=-1$$

51. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije $y=\left(x+2\right)e^{\frac{1}{x}}$.

Tekstom opisati sliku.

52. Rešiti jednačinu $\int\limits_{\ln 2}^{x}\frac{dt}{\sqrt{e^t-1}}=\frac{\pi}{6}$.

53. Izračunati površinu ograničenu krivim linijama $y=\left(x-4\right)^2$, $y=16-x^2$. i grafički predstaviti. Traženu površinu obeležiti.

54. Dat je polinom $P\left(x\right)=x^2+x-9$ i matrica $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -2\\ -2 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 1\end{bmatrix}$.

Odrediti $P\left(A\right)$ i $rang\left(A\right)$.

55. Odrediti najveću i najmanju vrednost funkcije $y=x^2\left(2x-3\right)-12\left(3x-2\right)$ na intervalu $\left[-3,6\right]$. Slika

56. Odrediti najveću i najmanju vrednost funkcije $y=\frac{x}{3}+\frac{3}{x}$ na intervalu $\left[-5,-1\right]$ Slika.

57. Odrediti najveću i najmanju vrednost funkcije $y = 15 - 3\cos x + \cos 3x$ na intervalu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ Slika.

58. Odrediti najveću i najmanju vrednost funkcije $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$ na intervalu $[-5, -1]$ Slika.

SPISAK KOMANDI I FUNKCIJA

KOMANDE ZA UPRAVLJANJE

help	pomoć u radu sa Matlabom.
demo	osnovni demonstracioni programi.
clc	briše se sadržaj komandnog prozora.
clear	briše sve promenljive i funkcije iz memorije.
who	lista tekućih promenljivih.
whos	lista tekućih promenljivih, duža forma .
size	veličina promenljive.
format	izlazni format.
load	učitavanje promenljivih sa diska.
save	snimanje promenljivih na disk.
delete	brisanje fajlova.
home	skok na početak ekrana.
quit	završetak rada.
exit	završetak rada.
pause	pauza do pritiska na neki taster.
disp	prikaz rezultata na ekranu
input	zahteva da korisnik unese podatke

ZNAKOVI, ARITMETIČKI, RELACIJSKI I LOGIČKI OPERATORI

+	plus.
-	minus.
*****	množenje.
.*	množenje element po element.
^	stepenovanje.
.^	stepenovanje element po element.
/	deljenje udesno.
\	deljenje ulevo.
(,)	za pozivanje funkcija i redosled operacija.
[,]	definišu vektore i matrice.
.	decimalni zarez.
...	nastavlja red.
,	razmak između elemenata i argumenata funkcije.
;	kraj reda ili isključuje prikazivanje rezultata.
%	komentar.
=	dodeljivanje vrednosti.
= =	jednakost.
<	manje.

>	veće.
>=	veće ili jednako.
<=	manje ili jednako.
~=	nije jednako.
&	logičko i.
|	logičko ili.
~	logičko ne.

UNAPRED DEFINISANE PROMENLJIVE

ans	rezultat.
pi	$\pi = 3.14.....$
i,j	kompleksna jedinica , $\sqrt{-1}$.
NaN	nije numerička vrednost.
inf	beskonačno.

MATEMATIČKE FUNKCIJE

abs	apsolutna vrednost.
sqrt	kvadratni koren.
sin	sinus.
cos	kosinus.
tan	tangens.
cot	kotangens.
exp	eksponencijalna funkcija osnove e.
log	prirodni logaritam.
log 10	dekadni logaritam.
conj	konjugovano kompleksni broj.
imag	imaginrni deo kompleksnog broja.
real	realni deo kompleksnog broja.
fzero	rešava jednačinu sa jednom promenljivom

CRTANJE I FORMATIRANJE 2 D GRAFIKONA

plot	crta se kriva funkcije.
fplot	crta se kriva funkcije.
subplot	crta se više grafikona na istoj stranici.
hist	formira se histogram.
hold on	drži se otvoren tekući grafik.
hold off	suprotno od hold on.
axis	podešavanje osa.
colormap	podešavaju se boje na grafikonu**.**
grid	dodaje se ili oduzima rešetka na grafikonu.

gtext	dodaje se tekst na grafikon.
text	dodaje se tekst na grafikon.
title	grafikonu se dodaje naslov.
xlabel	dodaje se natpis na osu x.
ylabel	dodaje se natpis na osu y.

KOMANDE ZA UPRAVLJANJE TOKOM PROGRAMA

break	prekidanje izvršavanja petlje.
else	uslovno izvršavanje komandi.
elseif	uslovno izvršavanje komandi.
end	kraj uslovnog iskaza ili petlje.
for	ponavljanje izvršavanja grupe komandi.
if	uslovno izvršavanje komandi.
while	ponavlja izvršavanje grupe komandi.

FUNKCIJE ZA RAD SA POLINIMIMA

roots	izračunava nule polinoma.
poly	izračunava koeficijente polinoma.
conv	množi polinome.
deconv	deli polinome

SIMBOLIČKA MATEMATIKA

diff	diferenciranje.
Int	integraljenje
dsolve	rešavanje obične diferencijalne jednačine
double	pretvara broj simboličkog oblika u numerički.
ezplot	crtanje krive koja predstavlja izraz.
pretty	prikazuje se izraz u matematičkom formatu.
simple	uprošćavanje izraza.
solve	rešavanje jednačina ili sistema jednačina.
subs	promenljive u zadatom izrazu zamenjuje vrednostima.
sym	formira se simbolički objekat.
syms	formira se simbolički objekat.

STATISTIČKE TABLICE

Tablica I - Vrednosti funkcije $y = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$

k \ a	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812
1	0,090484	0,163746	0,222245	0,268128	0,303265	0,329287
2	0,004524	0,016375	0,033337	0,053626	0,075816	0,098786
3	0,000151	0,001091	0,003334	0,007150	0,012636	0,019757
4	0,000004	0,000055	0,000250	0,000715	0,001580	0,002964
5		0,000002	0,000015	0,000057	0,000158	0,000356
6			0,000001	0,000004	0,000013	0,000035
7					0,000001	0,000103

k \ a	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0
0	0,496585	0,449329	0,406570	0,367879	0,135335	0,049787
1	0,347610	0,359463	0,365913	0,367879	0,270671	0,149361
2	0,121663	0,143785	0,164661	0,183940	0,270671	0,224042
3	0,028388	0,038343	0,049398	0,061313	0,180447	0,224042
4	0,004968	0,007669	0,011115	0,015328	0,090224	0,168031
5	0,000695	0,001227	0,002001	0,003066	0,036089	0,100819
6	0,000081	0,000164	0,000300	0,000511	0,012030	0,050409
7	0,000008	0,000019	0,000039	0,000073	0,003437	0,021604
8		0,000002	0,000004	0,000009	0,000859	0,008101
9				0,000001	0,000191	0,002701
10					0,000038	0,000810
11					0,000007	0,000221
12					0,001001	0,000055
13						0,000013
14						0,000003
15						0,000001

Tablica I (nastavak)

k \ a	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,018316	0,006738	0,002479	0,000912	0,000335	0,000123
1	0,073263	0,033690	0,014873	0,006383	0,002684	0,001111
2	0,146525	0,084224	0,044618	0,022341	0,010735	0,004998
3	0,195367	0,140374	0,089235	0,052129	0,028626	0,014994
4	0,195367	0,175467	0,133853	0,091226	0,057252	0,033737
5	0,156293	0,175467	0,160623	0,127717	0,091604	0,060727
6	0,104194	0,146223	0,160623	0,149003	0,122138	0,091090
7	0,059540	0,104445	0,137677	0,149003	0,139587	0,117116
8	0,029770	0,065278	0,103258	0,130377	0,139587	0,131756
9	0,013231	0,036266	0,068838	0,101405	0,124077	0,131756
10	0,005292	0,018133	0,041303	0,070983	0,099262	0,118580
11	0,001925	0,008242	0,022529	0,045171	0,072190	0,097020
12	0,000642	0,003434	0,011262	0,026350	0,048127	0,072765
13	0,000197	0,001321	0,005199	0,014188	0,029616	0,050376
14	0,000056	0,000472	0,002228	0,007094	0,016924	0,032384
15	0,000015	0,000157	0,000891	0,003311	0,009026	0,019431
16	0,000004	0,000049	0,000334	0,001448	0,004513	0,010930
17	0,000001	0,000014	0,000118	0,000596	0,002124	0,005786
18		0,000004	0,000039	0,000232	0,000944	0,002893
19		0,000001	0,000012	0,000085	0,000397	0,001370
20			0,000004	0,000030	0,000159	0,000617
21			0,000001	0,000010	0,000061	0,000264
22				0,000003	0,000022	0,000108
23				0,000001	0,000008	0,000042
24					0,000003	0,000016
25					0,000001	0,000006
26						0,000002
27						0,000001

Tablica II - Vrednosti funkcije $y = \sum_{k=0}^{m} \frac{a^k}{k!} e^{-a}$

m \ a	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812
1	0,995321	0,982477	0,963063	0,938448	0,909796	0,878099
2	0,999845	0,998852	0,996390	0,992074	0,985612	0,977885
3	0,999996	0,999943	0,999724	0,999224	0,998248	0,997642
4	1,000000	0,999998	0,999974	0,999939	0,999828	0,999606
5	1,000000	1,000000	0,999999	0,999996	0,999986	0,999962
6	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	0,999999	0,999997
7	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000

k \ a	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0
0	0,496585	0,449329	0,406570	0,367879	0,135335	0,049787
1	0,844195	0,808792	0,772483	0,735759	0,406006	0,199148
2	0,965858	0,952577	0,937144	0,919699	0,676677	0,423190
3	0,994246	0,990920	0,988542	0,981012	0,857124	0,647232
4	0,999214	0,998589	0,997657	0,996340	0,947348	0,815263
5	0,999909	0,999816	0,999658	0,999406	0,983437	0,916082
6	0,999990	0,999980	0,999958	0,999917	0,995467	0,966491
7	0,999999	0,999999	0,999997	0,999990	0,998904	0,988095
8	1,000000	1,000000	1,000000	0,999999	0,999763	0,996196
9				1,000000	0,995954	0,998897
10					0,999992	0,999707
11					0,999999	0,999928
12					1,000000	0,999983
13						0,999996
14						0,999999
15						1,000000

Tablica II (nastavak)

m \ a	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
0	0,018316	0,006738	0,002479	0,000912	0,000335	0,000123
1	0,091579	0,040428	0,017352	0,007295	0,003019	0,001234
2	0,238105	0,124652	0,061970	0,029636	0,013754	0,006232
3	0,433472	0,265026	0,151205	0,081765	0,042380	0,021228
4	0,628839	0,440493	0,285058	0,172991	0,099632	0,054963
5	0,785132	0,615960	0,445681	0,300708	0,191236	0,115690
6	0,889326	0,762183	0,606304	0,449711	0,313374	0,206780
7	0,948866	0,866628	0,743981	0,598714	0,452961	0,323896
8	0,978636	0,931806	0,847239	0,729091	0,592548	0,455652
9	0,991867	0,968172	0,916077	0,830496	0,716625	0,587408
10	0,997159	0,986205	0,957380	0,901479	0,815887	0,705988
11	0,999084	0,994547	0,979909	0,946650	0,888077	0,803008
12	0,999726	0,997981	0,991173	0,973000	0,936204	0,875773
13	0,999923	0,999202	0,996372	0,987188	0,965820	0,926149
14	0,999979	0,999774	0,998600	0,994282	0,982744	0,958533
15	0,999994	0,999931	0,999491	0,997593	0,991770	0,977964
16	0,999998	0,999980	0,999825	0,999041	0,996283	0,988894
17	0,999999	0,999994	0,999943	0,999637	0,998407	0,994680
18	0,999999	0,999998	0,999982	0,999869	0,999351	0,997573
19	0,999999	0,999999	0,999994	0,999955	0,999748	0,998943
20	1,000000	0,999999	0,999998	0,999985	0,999907	0,999560
21		1,000000	0,999999	0,999995	0,999967	0,999824
22			0,999999	0,999998	0,999989	0,999932
23			1,000000	0,999999	0,999997	0,999974
24				0,999999	0,999999	0,999990
25				1,000000	0,999999	0,999996
26					1,000000	0,999998
27						0,999999
28						1,000000

Tablica III - Vrednosti funkcije $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07152	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26738	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29678	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32380	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774
1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861

3,0	0,49865	3,1	49903	3,2	49931	3,3	49952	3,4	49966
3,5	49977	3,6	49984	3,7	49989	3,8	40993	3,9	49995
4,0	499968								
4,5	499997								
5,0	49999997								

Tablica III a - Vrednosti funkcije $g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2686
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0330	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Tablica IV - χ^2 raspodela $P[\chi_n^2 \geq \varepsilon]=p$

n	p=0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
1	0,000157	0,000628	0,00393	0,0158	0,0642	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	0,0201	0,0404	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086
6	0,872	1,134	1,635	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812
7	1,239	1,564	2,167	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475
8	1,646	2,032	2,733	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090
9	2,088	2,532	3,325	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666
10	2,558	3,059	3,940	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209
11	3,053	3,609	4,575	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725
12	3,571	4,178	5,226	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217
13	4,107	4,765	5,892	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688
14	4,660	5,368	6,571	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141
15	5,229	5,985	7,261	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578
16	5,812	6,614	7,962	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000
17	6,408	7,255	8,672	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409
18	7,015	7,906	9,390	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805
19	7,633	8,567	10,117	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	23,900	27,204	30,114	33,687	36,191
20	8,260	9,237	10,851	12,444	14,578	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566

Tablica IV (nastavak)

n	p=0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
21	8,897	9,915	11,591	13,240	15,445	17,182	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932
22	9,542	10,600	12,338	14,041	16,314	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289
23	10,196	11,293	13,091	14,848	17,187	19,021	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638
24	10,856	11,992	13,848	15,659	18,062	19,943	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980
25	11,524	12,697	14,611	16,473	18,940	20,867	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314
26	12,198	13,409	15,379	17,292	19,820	21,792	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642
27	12,879	14,125	16,152	18,114	20,703	22,710	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963
28	13,565	14,847	16,928	18,939	21,588	23,647	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278
29	14,256	15,574	17,708	19,768	22,475	24,577	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588
30	14,953	16,306	18,493	20,599	23,364	25,508	29,336	34,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892

Tablica V - Studentova raspodela $P[|t_n| \geq \varepsilon] = p$

n	p=0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,999
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169

Tablica V (nastavak)

n	p=0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
∞	0,12566	0,25335	0,38535	0,52440	0,67449	0,84162	1,03643	1,28155	1,64485	1,95996	2,32634	2,56582

Tablica VI a - Fišerova F raspodela $P\{F_{n_1,n_2} \geq F_{n_1,n_2;0,05}\}=0,05$

$n_2 \backslash n_1$	1	2	3	4	5	6	8	10	12	15	20	24	30
1	161	200	216	225	230	234	239	242	244	246	248	249	250
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,85	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38
8	5,23	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,77	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19
17	4,54	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,37	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,10	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65

Tablica VI b - Fišerova F raspodela $P\{F_{n_1,n_2} \geq F_{n_1,n_2;0,01}\} = 0,01$

$n_2 \backslash n_1$	1	2	3	4	5	6	8	10	12	15	20	24	30
1	4050	5000	5400	5620	5760	5860	5980	6060	6110	6160	6210	6235	6260
2	98,5	99,0	99,2	99,2	99,3	99,3	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,5	99,5
3	34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,5	27,3	27,1	26,9	26,7	26,6	26,5
4	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	14,8	14,5	14,4	14,2	14,0	13,9	13,8
5	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,3	10,1	9,89	9,72	9,55	9,47	9,38
6	13,7	10,9	9,78	9,15	8,75	8,47	8,10	7,87	7,72	7,56	7,40	7,31	7,23
7	12,2	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,84	6,62	6,47	6,31	6,16	6,07	5,99
8	11,3	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,03	5,81	5,67	5,52	5,36	5,28	5,20
9	10,6	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,47	5,26	5,11	4,96	4,81	4,73	4,65
10	10,0	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,06	4,85	4,71	4,56	4,41	4,33	4,25
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,74	4,54	4,40	4,25	4,10	4,02	3,94
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,50	4,30	4,16	4,01	3,86	3,78	3,70
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,30	4,10	3,96	3,82	3,66	3,59	3,51
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,14	3,94	3,80	3,66	3,51	3,43	3,35
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,00	3,80	3,67	3,52	3,37	3,29	3,21
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	3,89	3,69	3,55	3,41	3,26	3,18	3,10
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,79	3,59	3,46	3,31	3,16	3,08	3,00
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,71	3,51	3,37	3,23	3,08	3,00	2,92
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,63	3,43	3,30	3,15	3,00	2,92	2,84
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,56	3,37	3,23	3,09	2,94	2,86	2,78
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,51	3,31	3,17	3,03	2,88	2,80	2,72
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,45	3,26	3,12	2,98	2,83	2,75	2,67
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,41	3,21	3,07	2,93	2,78	2,70	2,62
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,36	3,17	3,03	2,89	2,74	2,66	2,58
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,86	3,63	3,32	3,13	2,99	2,85	2,70	2,62	2,54
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,17	2,98	2,84	2,70	2,55	2,47	2,39
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	2,99	2,80	2,66	2,52	2,37	2,29	2,20
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,82	2,63	2,50	2,35	2,20	2,12	2,03

Tablica VII - Slučajni brojevi

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	10	27	53	96	23	71	50	54	36	23	54	31	04	82	98	04	14	12	15	09
2	28	41	50	61	88	64	85	27	20	18	83	36	36	05	56	39	71	65	09	62
3	34	21	42	57	02	59	19	18	97	48	80	30	03	30	98	05	24	67	70	07
4	61	81	77	23	23	82	82	11	54	08	53	28	70	58	96	44	07	39	55	43
5	61	15	18	13	54	16	86	20	26	88	90	74	80	55	09	14	53	90	51	17
6	91	76	21	64	64	44	91	13	32	97	75	31	62	66	54	84	80	32	75	77
7	00	97	79	08	06	37	30	28	59	85	53	56	68	53	40	01	74	39	59	73
8	36	46	18	34	94	75	20	80	27	77	78	91	69	16	00	08	43	18	73	68
9	88	98	99	60	50	65	95	79	42	94	93	62	40	89	96	43	56	47	71	66
10	04	37	59	87	21	05	02	03	24	17	47	97	81	56	51	92	34	86	01	82
11	63	62	06	34	41	94	21	78	55	09	72	76	45	16	94	29	95	81	83	83
12	78	47	23	53	90	34	41	92	45	71	09	23	70	70	07	12	38	92	79	43
13	87	68	62	15	43	53	14	36	59	25	54	47	33	70	15	59	24	48	40	35
14	47	60	92	10	77	88	59	53	11	52	66	25	69	07	04	48	68	64	71	06
15	56	88	87	59	41	65	28	04	67	53	95	79	88	37	31	50	41	06	94	76
16	02	57	45	86	67	73	43	07	34	48	44	26	87	93	29	77	09	61	67	84
17	31	54	14	13	17	48	62	11	90	60	68	12	93	64	28	46	24	79	16	76
18	28	50	16	43	36	28	97	85	58	99	67	22	52	76	23	24	70	36	54	54
19	63	29	62	66	50	02	63	45	52	38	67	63	47	54	75	83	24	78	43	20
20	45	65	58	26	51	76	96	59	38	72	86	57	45	71	46	44	67	76	14	55
21	39	65	36	63	70	77	45	85	50	51	74	13	39	35	22	30	53	36	02	95
22	73	71	98	16	04	29	18	94	51	23	76	51	94	84	86	79	93	96	38	63
23	72	20	56	20	11	72	65	71	08	86	79	57	95	13	91	97	48	72	66	48
24	75	17	26	99	76	89	37	20	70	01	77	31	61	95	46	26	97	05	73	51
25	37	48	60	82	29	81	30	15	39	14	48	38	75	93	29	06	87	37	78	48
26	26	08	02	80	72	83	71	46	30	49	89	17	95	88	29	02	39	56	03	46
27	14	23	98	61	67	70	52	85	01	50	01	84	02	78	43	10	62	98	19	41
28	49	08	96	21	44	25	27	99	41	28	07	41	08	34	66	19	42	74	39	91
29	78	37	06	08	43	63	61	62	42	29	39	68	95	10	96	09	24	23	00	62
30	37	21	34	17	68	68	96	83	23	56	32	84	60	15	31	44	73	67	34	77

LITERATURA

[1] Atlan, C., Trigano, G., Mathematiques appliques à la question, Paris, 1990.

[2] Backović, M. i drugi, Matematički modeli i metodi u ekonomiji, Ekonomski fakultet, Beograd, 2002.

[3] Backović, M. i drugi, Zbirka rešenih zadataka, Ekonomski fakultet, Beograd, 2002.

[4] Cvetković, D., Simić, S., Diskretna matematika, Naučna knjiga, Beograd, 1990.

[5] Demidovič, B. P. i drugi, Zadaci i rešeni primeri iz matematičke analize za fakultete, Tehnička knjiga, Beograd, 1998.

[6] Ivković, Z., Teorija verovatnoće sa matematičkom statistikom, Građevinska knjiga, Beograd, 1998.

[7] Ivović, M. i drugi, Matematika, Ekonomski fakultet, Beograd, 2002.

[8] Ivović, M. i drugi, Zbirka zadataka, Ekonomski fakultet, Beograd, 2002.

[9] Klein, E., Mathematical Methods in theoretical Economics, Academic Press, New York, 1973.

[10] Kočović, J., Finansijska matematika, Ekonomski fakultet, Beograd, 1993.

[11] Ralević, R., Matematika za ekonomiste, treće izmenjeno izdanje, Savremena akademija, Beograd

[12] Takayama, A., Mathematical Economics, The Dryden Press, Ilinois, 1974.

[13] Vukdelija, D. i drugi, Matematika za ekonomiste, Ekonomski fakultet, Subotica, 1995.

[14] Žižović, M., Matematika, Izdavački centar za industrijski menadžment, Kruševac, 2001.

[15] Žižić, M. i drugi, Metodi statističke analize, Ekonomski fakultet, Beograd, 1992.

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

51(075.8)

ЖИЖОВИЋ, Малиша, 1948-
Kvantitativne metode : sa zbirkom zadataka / Mališa Žižović, Olivera Nikolić, Ivana Kovačević. - 8. izd. -
Beograd : Univerzitet Singidunum, 2020 (Beograd : BiroGraf). - X, 498 str. : graf. prikazi, tabele ; 24 cm

Tiraž 1.800. - Bibliografija: str. 498.

ISBN 978-86-7912-647-4

1. Николић, Оливера, 1948- [аутор] 2. Костић Ковачевић, Ивана, 1952- [аутор]
а) Математика

COBISS.SR-ID 17869833

© 2020.

Sva prava zadržana. Nijedan deo ove publikacije ne može biti reprodukovan u bilo kom vidu i putem bilo kog medija, u delovima ili celini bez prethodne pismene saglasnosti izdavača.

www.singidunum.ac.rs

9 788679 126474

Mališa Žižović
Olivera Nikolić
Ivana Kovačević

KVANTITATIVNE METODE

SA ZBIRKOM ZADATAKA



Ovaj udžbenik predstavlja celinu predmeta Kvantitativne metode i integriše udžbenik, zbirku zadataka i praktikum iz ovog predmeta iz prethodnih izdanja. Nadamo se da će pomoći studentima da usvoje metode i postupke iz ovog predmeta, a koji će im omogućiti da lakše i uspešnije ovladaju uže stručnim predmetima u kojima se ova materija koristi za objašnjenje izučavanih pojmova u tim oblastima.

Obzirom da je ovaj koncept novi bićemo zahvalni svim čitaocima koji budu imali neke sugestije da sledeća izdanja budu bolja, odnosno razumljivija.

Ovo izmenjeno i dopunjeno izdanje sadrži veći broj zadataka koji će omogućiti studentima da uspešno savladaju predviđeno gradivo.

Univerzitet Singidunum