

Mirjana Šekarić
Lidija Barjaktarović

FINANSIJSKA MATEMATIKA I AKTUARSTVO

sa zbirkom zadataka

BEOGRAD, 2012.

UNIVERZITET SINGIDUNUM

Prof. dr Mirjana Šekarić
Doc. dr Lidiya Barjaktarović

FINANSIJSKA MATEMATIKA I AKTUARSTVO SA ZBIRKOM ZADATAKA

Beograd, 2012.

FINANSIJSKA MATEMATIKA I AKTUARSTVO SA ZBIRKOM ZADATAKA

Autori:

Prof. dr Mirjana Šekarić

Doc. dr Lidija Barjaktarović

Recenzenti:

Prof. dr Milan Milosavljević

Prof. dr Olivera Nikolić

Prof. dr Luka Filipović

Izdavač:

UNIVERZITET SINGIDUNUM

Beograd, Danijelova 32

www.singidunum.ac.rs

Za izdavača:

Prof. dr Milovan Stanišić

Priprema za štampu:

Novak Njeguš

Dizajn korica:

Aleksandar Mihajlović

Godina izdanja:

2012.

Tiraž:

600 primeraka

Štampa:

Mladost Grup

Loznica

ISBN: 978-86-7912-397-8

Copyright:

© 2012. Univerzitet Singidunum

Izdavač zadržava sva prava.

Umnožavanje pojedinih delova ili celine ove publikacije nije dozvoljeno.

PREDGOVOR

Finansijska i aktuarska matematika predstavljaju dve grane primenjene matematike bazirane na promenama vrednosti novca u vremenu. S obzirom na to da su spojene u jednu celinu, izvršeno je znatnije redukovanje gradiva na najvažnije oblasti, a u skladu sa programom Naučno nastavničkog veća Univerziteta Singidunum.

Udžbenik Finansijska matematika i aktuarstvo sa zbirkom zadataka je koncipiran na sledeći način:

- ♦ U prvom delu udžbenika će biti obrađeni elementi finansijske matematike, koja se bavi rešavanjem problema kojima se računa interes (prost ili složen). Metode koje koristi su brojne, ali se posebno izdvajaju: diskont, anuitet, interna stopa prinosa, itd. Takođe, obezbeđuje finansijsku ocenu pribavljanja i plasmana novčanih sredstava, kao i osnovu za donošenje odluke kada je optimalno vreme zamene sredstava za rad, odnosno, investicije u proširenje kapaciteta. Istovremeno omogućava svojim metodama pravilan izbor projekata u koje treba investirati. Shodno tome, ovde su obrađeni elementarni pojmovi u finansijskim transakcijama, prost interesni račun, potrošački krediti, eskontovanje menice, složen interesni račun, relativna i konformna kamatna stopa, faktor aktuelizacije, faktor dodajne vrednosti, amortizacija zajmova i merenje rizika u donošenju investicionih odluka.

Ovaj deo udžbenika je pripremljen od strane doc. dr Lidije Barjaktarović.

- ♦ U drugom delu udžbenika će biti obrađeni elementi aktuarske matematike, koji se primenjuju u osiguranju imovine i lica, odnosno, određuje obaveze između osiguranika i osiguravajućeg društva. Bazira se na računu verovatnoće i principu ekvivalencije po kome zbir svih uplata svedenih na jedan rok mora biti jednak zbiru svih isplata svedenih na isti rok.

U skladu sa tim, ovde su obrađeni osnovni aktuarski principi, aktuarske osnove osiguranja imovine i drugih neživotnih osiguranja, aktuarske osnove osiguranja kapitala, aktuarske osnove osiguranja rente i veštačenja gubitka zarade i izdržavanja.

Ovaj deo udžbenika je pripremljen od strane prof. dr Mirjane Šekarić.

- ♦ U trećem delu udžbenika je zbirka zadataka iz finansijske matematike i aktuarstva, sa rešenjima.

Ovaj deo udžbenika je pripremljen od strane prof. dr Mirjane Šekarić i doc. dr Lidije Barjaktarović.

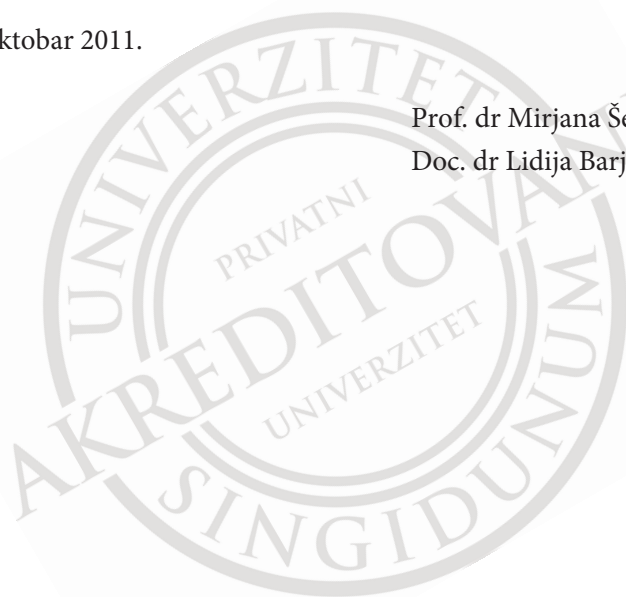
Udžbenik Finansijska matematika i aktuarstvo sa zbirkom zadataka je namenjen pre svega studentima Departmana poslovne ekonomije Univerziteta Singidunum. Udžbenik je takođe namenjen svima onima koji imaju interes za problematiku finansijske i aktuarske matematike u svakodnevnom poslovanju.

Autori će sa zahvalnošću prihvatiti sve sugestije i dobronamerne kritike koje bi mogle doprineti unapređenju kvaliteta udžbenika, koji će u svojim narednim izdanjima još bolje da ispuni svrhu kojoj je namenjen.

Beograd, oktobar 2011.

Prof. dr Mirjana Šekarić

Doc. dr Lidija Barjaktarović



I DEO - FINANSIJSKA MATEMATIKA

1. ELEMENTARNI POJMOVI U FINANSIJSKIM TRANSAKCIJAMA	3
2. PROST INTERESNI RAČUN	6
2.1. IZRAČUNAVANJE INTERESA	6
2.2. INTERESNI RAČUN OD STO, VIŠE STO I NIŽE STO	9
2.3. POTROŠAČKI KREDITI	12
2.4. ESKONTOVANJE MENICA	14
2.5. DEVIZE I DEVIZNA ARBITRAŽA	16
3. SLOŽENI INTERES	19
3.1. FAKTOR AKUMULACIJE (IZRAČUNAVANJE KRAJNJE VREDNOSTI KAPITALA)	19
3.1.1. DEKURZIVNO RAČUNANJE INTERESA	19
3.1.2. ANTICIPATIVNO RAČUNANJE INTERESA	22
3.1.3. FAKTOR AKUMULACIJE PRI NEPREKIDNOM UKAMAČIVANJU	24
3.1.4. RELATIVNA I KONFORMNA KAMATNA STOPA	25
3.2. DISKONTNI I ESKONTNI FAKTOR U SLOŽENOM INTERESU	27
3.3. FAKTOR DODAJNIH ULOGA	29
3.3.1. ZBIR KRAJNJIH VREDNOSTI ULOGA U SLUČAJU ANTICIPATIVNOG ULAGANJA	29
3.3.2. ZBIR KRAJNJIH VREDNOSTI ULOGA U SLUČAJU DEKURZIVNOG ULAGANJA	31
3.3.3. ULAGANJE ČEŠĆE OD OBRAČUNAVANJA INTERESA	32
3.4. FAKTOR AKTUELIZACIJE	33
3.4.1. SADAŠNJA VREDNOST NIZA DEKURZIVNIH ULOGA	34
3.4.2. SADAŠNJA VREDNOST NIZA ANTICIPATIVNIH ULOGA	35
3.5. OTPLATA ZAJMOVA I KREDITA	36
3.5.1. AMORTIZACIJA ZAJMA PRI DEKURZIVNOM RAČUNANJU INTERESA	37
3.5.2. AMORTIZACIJA ZAJMA JEDNAKIM OTPLATAMA	39
3.5.3. AMORTIZACIJA ZAJMA PROMENLJIVIM OTPLATAMA	41
3.6. KONVERZIJA ZAJMA	44
3.6.1. PLAĆANJE ANUITETA SE POKLAPA SA PROMENOM USLOVA OTPLAĆIVANJA ZAJMA	44

3.6.2. PLAĆANJE ANUITETA SE NE POKLAPA SA PROMENAMA USLOVA OTPLAĆIVANJA ZAJMA	45
4. POJEDINOSTI IZ FINANSIJSKE MATEMATIKE - MERENJE RIZIKA U DONOŠENJU INVESTICIONIH ODLUKA	47
4.1. NETO SADAŠNJA VREDNOST	48
4.2. PERIOD OTPLATE	50
4.3. METODA INTERNE STOPE PRINOSA	52

II DEO - AKTUARSTVO

1. AKTUARSKA MATEMATIKA	57
1.1. POJAM I PREDMET AKTUARSKE MATEMATIKE	57
1.2. ZAKON VELIKIH BROJEVA	58
1.3. MATEMATIČKE OSNOVE OSIGURANJA – TEORIJA VEROVATNOĆE	59
2. RAČUNSKE OSNOVE OBRAČUNA TARIFA U OSIGURANJU LICA	61
2.1. TABLICE SMRTNOSTI	61
2.2. VEROVATNOĆA ŽIVOTA I SMRTI ZA JEDNO LICE	63
2.3. VEROVATNOĆA I SREDNJE TRAJANJE ŽIVOTA	65
2.3.1. VEROVATNOĆA TRAJANJA ŽIVOTA	65
2.3.2. SREDNJE TRAJANJE ŽIVOTA	66
2.4. KOMUTATIVNI BROJEVI	67
2.4.1. KOMUTATIVNI BROJEVI ZA ŽIVA LICA	68
2.4.2. KOMUTATIVNI BROJEVI ZA UMRLA LICA	69
3. OSIGURANJE UPLATOM MIZE	71
3.1. OSIGURANJE LIČNE RENTE	71
3.2. NEPOSREDNA DOŽIVOTNA LIČNA RENTA	71
3.2.1. ANTICIPATIVNA RENTA (RENTA POČETKOM GODINE)	71
3.2.2. DEKURZIVNA RENTA (RENTA NA KRAJU GODINE)	73
3.3. ODLOŽENA ŽIVOTNA RENTA	74
3.3.1. ANTICIPATIVNA RENTA	74
3.3.2. DEKURZIVNA RENTA	75
3.4. NEPOSREDNA PRIVREMENA LIČNA RENTA	76
3.4.1. ANTICIPATIVNA RENTA	76
3.4.2. DEKURZIVNA RENTA	77
3.5. ODLOŽENA PRIVREMENA LIČNA RENTA	78
3.5.1. ANTICIPATIVNA RENTA	78
3.5.2. DEKURZIVNA RENTA	79
3.5. OSIGURANJE LIČNE RENTE UPLATOM PREMIJE	80
3.6.1. RENTA RASTE IZ GODINE U GODINU ZA IZNOS RENTE KOJA SE PLAĆA U PRVOJ GODINI	80
3.6.2. PLAĆANJE RENTE U RATAMA	82

4. OBRAČUNA TARIFA ZA OSIGURANJE KAPITALA	84
4.1. OSIGURANJE KAPITALA ZA SLUČAJ DOŽIVLJENJA	84
4.2. OSIGURANJE KAPITALA ZA SLUČAJ SMRTI	85
4.2.1. DOŽIVOTNO OSIGURANJE KAPITALA ZA SLUČAJ SMRTI	85
4.2.2. ODLOŽENO OSIGURANJE KAPITALA ZA SLUČAJ SMRTI	86
4.2.3. PRIVREMENO OSIGURANJE KAPITALA ZA SLUČAJ SMRTI	88
4.2.4. ODLOŽENO PRIVREMENO OSIGURANJE KAPITALA ZA SLUČAJ SMRTI	89
4.3. MEŠOVITO OSIGURANJE KAPITALA	90
4.4. OSIGURANJE STALNOM GODIŠNJOM PREMIJOM	91
4.4.1. IZRAČUNAVANJE GODIŠNJE DOŽIVOTNE PREMIJE	91
4.4.2. IZRAČUNAVANJE GODIŠNJE PRIVREMENE PREMIJE	92
5. OSIGURANJE NA DVA ŽIVOTA	96
5.1. VEROVATNOĆA ŽIVOTA I SMRTI DVA LICA	96
5.2. DOŽIVOTNA ZAJEDNIČKA RENTA	99
6. OBRAČUN BRUTO PREMIJE	100

III DEO - ZBIRKA ZADATAKA

1. FINANSIJSKA MATEMATIKA	105
2. PRIMERI IZ PRAKSE	144
3. AKTURARSTVO	149

PRILOG

FINANSIJSKE TABLICE	162
TABLICE SMRTNOSTI	212

LITERATURA	215
-------------------	------------



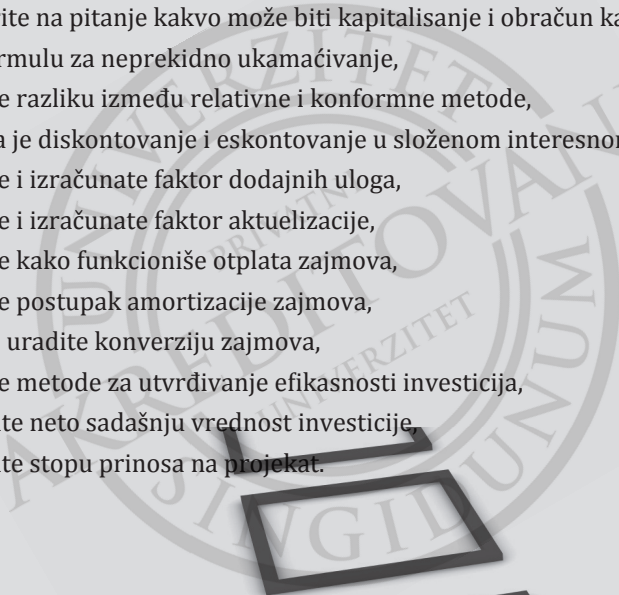
I
DEO

FINANSIJSKA MATEMATIKA



KADA PROČITATE OVAJ DEO TREBALO BI DA:

- ✓ Odgovorite na pitanje koji su elementarni pojmovi u finansijskim transakcijama,
- ✓ Znaete šta je prost interesni račun,
- ✓ Primenite prost interesni račun kod svih metoda - od sto, više sto i niže sto,
- ✓ Izračunate interes i ostale elemente interesnog računa,
- ✓ Objasnite šta su kamatni broj i kamatni ključ (divizor),
- ✓ Izračunate interes kod potrošačkog kredita,
- ✓ Objasnite šta je eskont,
- ✓ Izračunate eskont prilikom eskontovanja menica,
- ✓ Znaete šta je složen interesni račun,
- ✓ Odgovorite na pitanje kakvo može biti kapitalisanje i obračun kamate,
- ✓ Znaete formulu za neprekidno ukamačivanje,
- ✓ Objasnite razliku između relativne i konformne metode,
- ✓ Znaete šta je diskontovanje i eskontovanje u složenom interesnom računu,
- ✓ Objasnite i izračunate faktor dodajnih uloga,
- ✓ Objasnite i izračunate faktor aktuelizacije,
- ✓ Objasnite kako funkcioniše otplata zajmova,
- ✓ Objasnite postupak amortizacije zajmova,
- ✓ Znaete da uradite konverziju zajmova,
- ✓ Objasnite metode za utvrđivanje efikasnosti investicija,
- ✓ Izračunate neto sadašnju vrednost investicije,
- ✓ Izračunate stopu prinosa na projekat.



1.

ELEMENTARNI POJMOVI U FINANSIJSKIM TRANSAKCIJAMA

„Finansijska matematika, kao grana primenjene matematike bavi se rešavanjem problema kojima se računa interes na interes gde po principu ekvivalencije zbir svih uplata sredstava na isti rok mora biti jednak zbiru svih isplata takođe svedenih na isti rok. Princip ekvivalencije omogućuje kvantifikaciju kategorija ekonomičnosti i rentabilnosti. Svojim metodama: diskontom, anuitetom, metodom interne stope i dr. finansijska matematika daje finansijsku ocenu kako nabavke tako i plasmana finansijskih sredstava. Isto tako određuje kako najpovoljnije trajanje tako i optimalno vreme zamene sredstva za rad. Pored toga svojim metodama omogućuje pravilan izbor kod alternativno mogućih ulaganja.”
(Ralević, R.)¹

U svakodnevnom poslovanju između dužnika (kupaca, korisnika kredita, korisnika usluga) i poverioca (prodavaca, banaka, isporučilaca usluga) nastaju kreditni odnosi. Kao što je poznato, reč **kredit** potiče od latinske reči *credere*, što znači **poveriti nekome, dati u zajam, verovati, uzdati se**. Praktično to znači da poverilac ima poverenje u dužnika da će izvršiti preuzetu obavezu (platiti na vreme, isporučiti robu ili uslugu u ugovorenom roku).

Interes ili kamata je naknada koju dužnik plaća poveriocu za koršćenje pozajmljene sume novca za određeno vreme.² Interes se ugovara između dužnika i poverioca na taj način što se određuje koliko će novčanih jedinica (dinara, evra ili neke druge konvertibilne valute) dužnik platiti poveriocu na ime interesa na svakih 100 novčanih jedinica pozajmljene sume novca za svaku godinu dokle god se koristi pozajmljeni novac.

Kapital (K) ili glavnica (G) je pozajmljena suma na koju se računa interes. **Interesna stopa (p)** je kamata koja se plaća na svakih 100 novčanih jedinica pozajmljene sume za godinu dana. **100** označava stalni broj. Oznakom **i** se obeležava kamata ili interesni račun na pozajmljenu sumu uz datu interesnu stopu i za određeno vreme, koje može biti izraženo u godinama (**g**), mesecima (**m**) ili danima (**d**).

1 Ralević, R., Finansijska i aktuarska matematika, Savremena administracija, Beograd, 1973., str. III

2 **Kamata je cena upotrebe kapitala.** U tržišnoj privredi njena visina je određena odnosom ponude i tražnje za zajmovnim (kamatonosnim) kapitalom. Obračun interesa se vršio korišćenjem finansijskih tablica pre pojave kompjutera. U prilogu udžbenika su finansijske tablice, kako bi pomogle u savladavanju osnova finansijske matematike.

Osnovna razlika između procentnog³ i interesnog računa je u tome što se kod interesnog računa pojavljuje vreme. Znači, kamata na pozajmljenu sumu zavisi od visine kapitala i od vremena na koje se pozajmljeni kapital koristi. Shodno tome, kamate⁴ kod interesnog računa su direktno proporcionalne veličini kapitala i dužini vremena korišćenja tog kapitala.

Znači, osnovna proporcija procentnog računa je:

$$G : P = 100 : p$$

gde je:

G – glavnica,

P – prinos ili prihod koji se ostvaruje,

p – procenat.

Dok kod prostog interesnog računa osnovna proporcija glasi:

$$K : i = 100 : pg$$

gde je:

K – kapital (ili glavnica),

i – interes ili kamata,

p – procenat,

g – vreme izraženo u broju godina.

3 Podsećanja radi **procenat je stoti deo neke veličine**. Na primer 10% od 1.000 je 100, odnosno, 1.000 je neophodno podeliti sa 100 (kako bi se dobio 1% od 1.000) i dobijeni količnik pomnožiti sa 10. Shodno tome, **promil je hiljaditi deo neke veličine**. Na primer 10‰ od 1.000 je 10, odnosno 1.000 je neophodno podeliti sa 1.000 (kako bi se dobio 1‰ od 1.000) i dobijeni količnik pomnožiti sa 10.

4 Komponente kamate su: bazni i promenljivi (margina) deo. Bazni deo reprezentuje referentnu kamatnu stopu, koja može biti u slučaju dinarskih kredita i depozita referentna stopa Narodne banke Srbije ili BE-LIBOR, odnosno, u slučaju kredita i depozita sa valutnom klauzulom ili devizno EURIBOR ili LIBOR. Promenljivi deo u slučaju kredita (se dodaje na bazni deo) u sebi sadrži troškove pribavljanja sredstava (margina plasiranja inokreditora), rizik zemlje (ukoliko su sredstva od ino-banke iz inostranstva), porez (ukoliko ne postoji međudržavni sporazum o izbegavanju dvostrukog oporezivanja između Srbije i zemlje kreditora), obavezna rezerva (definiše Narodna banka Srbije), troškovi preuzetog kreditnog rizika po plasmanu (zavisi od kreditnog rejtinga korisnika kredita) i zarada kreditora po konkretnom poslu. Promenljivi deo u slučaju depozita/štednje (oduzima se od baznog dela) u sebi sadrži trošak obavezne rezerve (definiše Narodna banka Srbije) i profitnu marginu banke.

Kamata može biti fiksna i promenljiva.

Ukoliko poverilac želi da neutrališe efekte inflacije može koristiti postupak revalorizacije. **Revalorizacija predstavlja aktuelizaciju, prevrednovanje ili svođenje elemenata realne aktive u bilansu stanja i rashoda u bilansu uspeha na njihove tekuće** (realne, sadašnje ili tržišne) **vrednosti putem množenja sa odgovarajućim koeficijentom revalorizacije** (indeksom cena). Njime se eliminišu efekti opadanja kupovne moći novca iz pozicija bilansa stanja i bilansa uspeha konvertovanjem u novčane jedinice iste kupovne moći svih pozicija bilansa stanja i uspeha.

U domaćoj praksi se sve više koristi ugovaranje promenljivih kamatnih stopa, gde banke na dnevnom, odnosno, mesečnom nivou vrše preračun svih svojih pozicija u bilansu stanja i uspeha (kako se ne bi obezvređile).

Opširnije o kamatnom riziku pogledati: Barjaktarović, L., Upravljanje rizikom, Univerzitet Singidunum, Beograd, 2009., str.8-12

Interes može biti prost (običan) interes ili složen interes (interes na interes). Prost interes je interes koji se svake godine računa na isti pozajmljeni kapital. Složen interes je interes koji se u svakom period računa na uvećani kapital, odnosno, osnova za obračun interesa se uvećava interesom iz prethodnog perioda. Inače, dodavanje interesa kapitalu se naziva **kapitalisanje**. Kapitalisanje može biti godišnje (kada se uz kamatnu stopu navodi **p.a.** što je skraćenica za *per annum*), polugodišnje (kada se uz kamatnu stopu navodi **p.s.** što je skraćenica za *per semestre*), kvartalno ili tromesečno (kada se uz kamatnu stopu navodi **p.q.** što je skraćenica za *per quartale*) i mesečno (kada se uz kamatnu stopu navodi **p.m.** što je skraćenica za *per mensem*).

Anticipativan obračun znači da se kapitalisanje i pripisivanje interesa vrši početkom perioda (u slučaju kada banka odobrava kredit), odnosno, **dekurzivan** obračun znači da se kapitalisanje i pripisivanje interesa vrši krajem perioda (u slučaju oročenja novčanih sredstava – depozita kod banke). Shodno tome, ulaganja početkom perioda se nazivaju anticipativnim, a ulaganja krajem perioda se nazivaju dekurzivnim.

Prilikom rešavanja problema može biti poznat čist kapital (K), kapital uvećan za interes ($K+i$) i kapital umanjen za interes ($K-i$). U skladu sa tim, mogu se pojaviti sledeće vrste interesnog računa:

1. **Interesni račun od sto**, ako je poznat čist kapital (K).
2. **Interesni račun na sto (više sto)**, ako je poznat uvećani kapital ($K+i$).
3. **Interesni račun u sto (niže sto)**, ako je poznat umanjeni kapital ($K-i$).

Takođe, interes se može računati na jedan pozajmljeni iznos ili na više pozajmljenih iznosa. Shodno tome, interesna stopa može biti ista ili različita za svaki iznos ponaosob, za celo vreme korišćenja kredita ili oročavanja novčanih sredstava, odnosno, može se i tokom vremena menjati.

Rok ili **valuta** datog kapitala (V^n) jeste dan od kada treba da se računa interes tog kapitala. Što se tiče broja dana u mesecu/ima, može se koristiti stvarni broj dana u mesecu (prema kalendaru), ili se može koristiti pretpostavka da svaki mesec ima 30 dana. Shodno tome, godina može imati 360, odnosno, 365 dana, što se naznačuje uz interesnu stopu kao: (30, 360), (k , 360) i (k , 365). U prvom slučaju to znači da se računa da mesec ima 30 dana a godina 360 dana. Druga opcija znači da se dani u mesecu računaju po kalendaru, a godina ima 360 dana (tzv. *francuski način*). Dok treća opcija znači da se dani u mesecu računaju po kalendaru, a godina ima 365 dana (tzv. *engleski način*). Primena jedne od navedenih opcija zavisi od ustaljenih običaja koji postoje kod pojedinih trgovačkih ili bankarskih poslova.

Ukoliko dužnik ne vrati pozajmljeni novac ili ne isporuči robu (ili uslugu) na vreme, poverilac može da mu obračuna **zateznu kamatu** na vremenski period od momenta kada je trebalo da se obaveza izmiri do trenutka kada je zaista izmirena. Poverilac ima pravo da primeni zakonsku zateznu kamatu (koju definiše zakonodavac) ili ugovorenu zateznu kamatu. U praksi se dešava da poverilac primenjuje zateznu kamatu koja mu više odgovara.

2.

PROST INTERESNI RAČUN

Prost interes je interes koji se svake godine računa na isti pozajmljeni kapital. U praksi se mogu pojaviti sledeće vrste interesnog računa:

1. Interesni račun od sto, ako je poznat čist kapital (K),
2. Interesni račun na sto (više sto), ako je poznat uvećani kapital ($K+i$),
3. Interesni račun u sto (niže sto), ako je poznat umanjeni kapital ($K-i$).

2.1. IZRAČUNAVANJE INTERESA

Interes (kamata) je naknada za korišćenje pozajmljenih tuđih sredstava, koja se uglavnom pozajmljuju posredstvom novca ili u novčanom obliku. Izračunava se kao procenat od iznosa pozajmljenih ili na upotrebu datih sredstava.

Praktično, najprostiji slučaj je da odredimo koliki će interes (i) doneti kapital od K dinara za **1 godinu** uz interesnu stopu $p\%$. K, p i g su poznate veličine, a $i=?$

Krećemo od proporcije:

$$K : i = 100 : pg$$

iz koje izračunavamo i kao:

$$i = \frac{K * p * g}{100}.$$

Obzirom da je $g=1$, godišnji interes je:

$$i = \frac{K * p}{100}.$$

Ukoliko želimo da izračunamo interes za jedan mesec, onda dobijeni interes za jednu godinu delimo sa 12:

$$i = \frac{K * p}{100} \div 12 = \frac{K * p}{100} * \frac{1}{12} = \frac{K * p}{1200},$$

a za m meseci biće:

$$i = \frac{K * p * m}{1200}.$$

Shodno tome, ukoliko želimo da izračunamo interes za jedan dan, onda dobijeni interes za jednu godinu delimo sa 360 ili 365 dana, u zavisnosti od toga za šta se odlučio poverilac u datom momentu.

ili

$$i = \frac{K * p}{100} \div 360 = \frac{K * p}{100} * \frac{1}{360} = \frac{K * p}{36000}$$

$$i = \frac{K * p}{100} \div 365 = \frac{K * p}{100} * \frac{1}{365} = \frac{K * p}{36500}$$

a za d dana biće:

$$i = \frac{K * p * d}{36000}, \text{ odnosno, } i = \frac{K * p * d}{36500}.$$

Jednačine interesa možemo izraziti i u obliku osnovnih proporcija:

$K : i = 100 : pg$, za vreme dato u godinama,

$K : i = 1200 : pm$, za vreme dato u mesecima,

$K : i = 36000 : pd$, za vreme dato u danima a godina ima 360 dana,

$K : i = 36500 : pd$, za vreme dato u danima a godina ima 365 dana.



1. Koliko će interesa BS Procesor d.o.o. Beograd platiti za pozajmljenih 30.000 dinara za 5 godina sa 5% Banca Intesi a.d. Beograd?

Ovde je: $K=30.000$, $g=5$, $p=5$, $i=?$

$$i = \frac{30.000 * 5 * 5}{100} = 7.500 \text{ dinara.}$$

BS Procesor će platiti 7.500 dinara interesa Banca Intesi a.d. Beograd po osnovu korišćenja 30.000 dinara kredita.

2. Koliko će interesa Com trade d.o.o. Beograd platiti za pozajmljenih 200.000 dinara za 8 meseci uz 6% Uni Credit banci a.d. Beograd?

Ovde je: $K=200.000$, $m=8$, $p=6$, $i=?$

$$i = \frac{200.000 * 6 * 8}{1200} = 8.000 \text{ dinara.}$$

Com trade će platiti 8.000 dinara interesa Uni Credit banci po osnovu korišćenja 200.000 dinara kredita.

3. Polimark d.o.o. Beograd raspolaže sa 700.000 dinara novčanog depozita koji može da oroči u periodu od 23.05.-16.09.2010. godine sa 5% p.a. (k,360) kod Raiffeisen bank a.d. Beograd. Koliko interesa će Polimarku doneti 700.000 dinara?

Ovde je: $K=720.000$, $p=5$, $d=23.05-16.09$, $i=?$

Prvo krećemo od izračunavanja dana oročenja. Prilikom određivanja broja dana po kalendaru, prvi dan se ne uzima u obzir, dok se poslednji dan računa. Shodno tome, imamo:

u maju	8 dana (31-23=8)
u junu	30 dana
u julu	31 dan
u avgustu	31 dan
<u>u septembru</u>	<u>16 dana</u>
Ukupno:	116 dana, odnosno, $d=116$

$$i = \frac{700.000 * 5 * 116}{36000} = 11.277,78 \text{ dinara.}$$

Polimarku će depozit od 700.000 dinara, oročen na 116 dana kod Raiffeisen bank a.d. Beograd, doneti interes od 11.277,77 dinara.

U privrednom poslovanju je vreme uglavnom izraženo u danima. Stoga, interes računamo pomoću kamatnog broja i kamatnog ključa (divizora). Praktično imenilac i brojilac formule za interes delimo sa p , odnosno,

$$i = \frac{K * p * d}{36000} = \frac{\frac{K * p * d}{p}}{\frac{36000}{p}} = \frac{K * d}{D} = \frac{\text{kamatni broj}}{\text{kamatni ključ}}$$

Kamatni broj je proizvod kapitala i broja dana, a kamatni ključ ili divizor (D) je jednak količniku 36000 i interesne stope p . Ukoliko se računa da godina ima 365 dana, tada je divizor jednak količniku 36500 i interesne stope p . Bitno je uočiti da će interes računat pomoću divizora $36000/p$ dati veći interes od divizora računatog pomoću $36500/p$.

Na kraju možemo zaključiti da ostale elemente interesnog računa izvodimo iz osnovnih proporcija, odnosno, rešavamo ih po nepoznatoj veličini ukoliko su ostali elementi dati.

Ukoliko je vreme dato u godinama, osnovna proporcija glasi:

$$K : i = 100 : pg.$$

$$\text{Tako da je: } K = \frac{100 * i}{p * g}, g = \frac{100 * i}{K * p}, p = \frac{100 * i}{K * g}.$$

Isti princip rešavanja nepoznate veličine važi za ostale proporcije (ukoliko je vreme dato u mesecima ili danima).

2.2. INTERESNI RAČUN OD STO, VIŠE STO I NIŽE STO

Interesni račun od sto koristimo onda kada je poznat iznos kapitala (K), što smo primenjivali u prethodnim primerima za izračunavanje interesa.

$K : i = 100 : pg$, ako je vreme dato u godinama;

$K : i = 1200 : pm$, ako je vreme dato u mesecima;

$K : i = 36000 : pd$, ako je vreme dato u danima, a računa se da godina ima 360 dana.

Interesni račun više sto koristimo kada je poznata uvećana vrednost kapitala, odnosno, interesni račun niže sto koristimo kada je poznata umanjena vrednost kapitala. Polazna osnova za interesni račun više i niže sto jeste osobina proporcije po kojoj se zbir ili razlika članova leve strane proporcije odnosi prema zbiru ili razlici članova desne strane proporcije kao što se prvi član leve odnosi prema prvom članu desne strane proporcije, odnosno, drugi član leve prema drugom članu desne strane proporcije.

Prema tome, proporcije interesnog računa više sto bile bi sledeće:

$$\begin{aligned}(K+i):(100+p*g) &= K:100, & \text{za vreme dato u godinama} \\ (K+i):(100+p*g) &= i:p*g\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(K+i):(1200+p*m) &= K:1200, & \text{za vreme dato u mesecima} \\ (K+i):(1200+p*m) &= i:p*m\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(K+i):(36000+p*d) &= K:36000, & \text{za vreme dato u danima.} \\ (K+i):(36000+p*d) &= i:p*d\end{aligned}$$

Takođe je za izračunavanje interesa moguće koristiti kamatni broj i kamatni ključ (**D**), ukoliko je vreme dato u danima. U prvom koraku iz proporcija za izračunavanje interesa za vreme dato u danima, rešavamo interes kao nepoznatu veličinu, a onda levu i desnu stranu jednakosti delimo sa **p**.

$$i = \frac{(K+i)*p*d}{36000+p*d} = \frac{\frac{(K+i)*p*d}{p}}{\frac{36000+p*d}{p}} = \frac{(K+i)*d}{\frac{36000}{p}+d} = \frac{(K+i)*d}{D+d}$$

$$\text{gde je } D = \frac{36000}{p}.$$

Analogno navedenom postupku dobili bismo proporcije koje se odnose na interesni račun niže sto.

$$\begin{aligned}(K-i):(100-p*g) &= K:100, & \text{za vreme dato u godinama} \\ (K-i):(100-p*g) &= i:p*g\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(K-i):(1200-p*m) &= K:1200, & \text{za vreme dato u mesecima} \\ (K-i):(1200-p*m) &= i:p*m\end{aligned}$$

$(K-i):(36000-p*d)=K:36000$, za vreme dato u danima, odnosno,
 $(K-i):(36000-p*d)=i:p*d$ interes možemo izračunati korišćenjem
 kamatnog ključa (ili divizora).

$$i = \frac{(K-i)*p*d}{36000-p*d} = \frac{\frac{(K-i)*p*d}{p}}{\frac{36000-p*d}{p}} = \frac{(K-i)*d}{\frac{36000}{p}-d} = \frac{(K-i)*d}{D-d}$$

gde je $D = \frac{36000}{p}$.

1. Laguna d.o.o. Beograd, kao dužnik Marfin banke a.d. Beograd, je po odbitku 2,75% za 2 meseca primilo 295.200 dinara. Izračunati koliki je dug i koliki je interes.

$$i = \frac{(K-i)*p*m}{1200-p*m} = \frac{295.200*2,75*2}{1200-2,75*2} = 1.359,2 \text{ dinara}$$

$$K = 295.200 + 1.359,2 = 296.559,2 \text{ dinara.}$$

Dug Lagune d.o.o. Beograd prema Marfin bank a.d. Beograd je 296.559,2 dinara, a interes koji će platiti Marfin bank a.d. Beograd za 2 meseca je 1.359,2 dinara.

2. Bambi a.d. Požarevac je zajedno sa 6% za 60 dana vratio Komercijalnoj banci a.d. Beograd 500.500 dinara. Izračunati koliko će dinara na ime interasa doneti dva puta toliki kapital Komercijalnoj banci a.d. Beograd za 3 godine uz istu stopu.

$$i = \frac{(K+i)*p*d}{36000+p*d} = \frac{500.500*6*60}{36000+6*60} = 4.955 \text{ dinara}$$

$$K = 500.500 - 4.955 = 495.545 \text{ dinara}$$

Bambi Požarevac je pozajmio od Komercijalne banke 495.545 dinara na koje je platio interes od 4.955 dinara.

$$i = \frac{495.545*2*3*6}{100} = 178.392,2 \text{ dinara}$$

Komercijalnoj banci će iznos od 495.545 dinara (koji će plasirati u kredite drugim komitentima) doneti interes od 178.392,2 dinara za 3 godine.



2.3. POTROŠAČKI KREDITI

Potrošački krediti su standardni deo ponude poslovnih banaka segmentu stanovništva, ali i trgovaca čiji su proizvodi namenjeni građanima. Omogućavaju građanima da kupe automobile, aparate za domaćinstava, nameštaj, građevinski materijal, turistički aranžman ili nešto drugo.

Prilikom podizanja kredita **interes se obračunava unapred intersnim računom od sto pomoću kamatnog koeficijenta**.⁵ U prvom mesecu interes se računa na ceo dug, a u ostalim mesecima osnovica je iznos duga umanjen za prethodne mesečne otplate. Shodno tome, interes u prvom mesecu je:

$$i_1 = \frac{K * p}{1200},$$

gde je:

K oznaka za kredit,

p je godišnja stopa, a

m je broj jednakih mesečnih otplate.

Interes u drugom mesecu je

$$i_2 = \left(K - \frac{K}{m} \right) * \frac{p}{1200} = K \left(1 - \frac{1}{m} \right) * \frac{p}{1200} = \frac{K * p}{1200} \left(1 - \frac{1}{m} \right),$$

gde je $\frac{K}{m}$ prva otplata.

Interes u trećem mesecu se računa na iznos duga umanjen za dve otplate ($2 * \frac{K}{m}$), odnosno,

$$i_3 = \left(K - 2 * \frac{K}{m} \right) * \frac{p}{1200} = \frac{K * p}{1200} \left(1 - \frac{2}{m} \right).$$

Interes za m -ti mesec je

$$i_m = \frac{K * p}{1200} \left(1 - \frac{m-1}{m} \right).$$

⁵ Kamatni koeficijent daje ukupnu kamatu na kredit od 100 novčanih jedinica odobren na m meseci uz $p\%$ godišnje uz jednake mesečne otplate.

Ukupan interes i je zbir ovako izračunatih mesečnih interesa

$$i = \frac{K * p}{1200} \left[1 + \left(1 - \frac{1}{m} \right) + \left(1 - \frac{2}{m} \right) + \left(1 - \frac{3}{m} \right) + \dots + \left(1 - \frac{m-1}{m} \right) \right]$$

$$i = K * \frac{p * (m+1)}{2400}, \text{ odnosno, } i = K * k$$

gde je $k = \frac{p * (m+1)}{24}$ kamatni koeficijent za kredit od 100 novčanih jedinica.⁶

Prosečna mesečna rata se dobija kada se ovako dobijenim interesom uveća glavnica kredita i dobijeni zbir podeli brojem meseci.

$$b = \frac{K + i}{m}$$

Petru Petroviću je odobren potrošački kredit za kupovinu nameštaja u iznosu od 100.000 dinara sa kamatnom stopom 12% p.a. i rokom otplate šest meseci. Izračunati kolika je prosečna mesečna rata Petru Petroviću po ovom potrošačkom kreditu.

Ukupan interes koji Petar Petrović plaća je

$$i = \frac{K * p * (m+1)}{2400} = \frac{100000 * 12 * (6+1)}{2400} = 3500 \text{ dinara.}$$

Mesečna otplata koju Petar Petrović plaća je

$$\frac{K}{m} = \frac{100000}{6} = 16666,67 \text{ dinara.}$$

Prosečna mesečna rata koju Petar Petrović plaća je

$$b = \frac{K + i}{m} = \frac{100000 + 3500}{6} = 17250 \text{ dinara.}$$



⁶ Postupak izvođenja krajnje formule interesa je zasnovan na zbiru prirodnih brojeva.

2.4. ESKONTOVANJE MENICA

U svakodnevnom poslovanju se dešava da dužnici ne izvršavaju svoje obaveze na vreme (na dan dospeća obaveze ili o roku).⁷ Poverioci da bi se zaštitili od ne-naplate potraživanja često od dužnika uzimaju menice. Takođe, ukoliko im nedostaju novčana sredstva za servisiranje svojih obaveza poverioci **prodaju menice pre roka dospeća** (ranije) tj. **vrše eskont kod poslovne banke** (kupca). Suma koju banka (kupac) plaća podnosiocu menice (poveriocu) na eskont se zove **eskontovana suma** i **ona je manja od nominalne vrednosti menice** (vrednosti na koju glasi menica) **za interes (eskont)** od dana eskontovanja do roka dospeća menice.

Eskont može biti komercijalni i racionalni.

Komercijalni eskont je interes (eskont) računat interesnim računom od sto na nominalnoj vrednosti menice za vreme od dana eskontovanja do dana dospeća. Ukoliko obeležimo sa:

K_n - nominalnu vrednost menica,

K_0 - eskontovanu vrednost menice u trenutku $t=0$,

d - broj dana od trenutka $t=0$ do dospeća menice $t=n$ i

p - eskontnu stopu, tada se eskont po definiciji može izraziti sledećom formulom:

$$E = \frac{K_n * n}{D},$$

gde je:

$$D = \frac{36000}{p} \text{ i } K_0 = K_n - E \Rightarrow K_0 = K_n - \frac{K_n * n}{D} = \frac{K_n (D - n)}{D} \dots$$

Možemo zaključiti da je **eskontovana vrednost (aktuelna ili sadašnja vrednost) menice umanjena za vrednost eskonta od dana eskontovanja do dana dospeća menice**.

Racionalni eskont je interes (eskont) racionalne aktuelne vrednosti menice. Ukoliko obeležimo sa K_0 aktuelnu racionalnu vrednost menice, sa n broj dana, sa $p/100$ intenzitet interesa, sa K_n nominalnu vrednost menice i sa E racionalni eskont, tada se eskont po definiciji može izraziti sledećom formulom:

⁷ Ukoliko se obaveza podmiruje o roku tj. na dan dospeća, kupac (dužnik) plaća prodavcu (poveriocu) tačno onoliko koliko je obaveza. U tom slučaju se plaća njena nominalna vrednost tj. vrednost od 100%. Ukoliko se obaveza podmiruje posle dospeća tj. kasnije, kupac (dužnik) plaća prodavcu (poveriocu) uvećanu nominalnu vrednost obaveze za interes po osnovu kašnjenja. Obračunava se interes od dana dospeća do dana obračuna (plaćanja) obaveze, odnosno, dodaje se nominalnoj vrednosti. U slučaju izdatih menica, kada dužnik ne izvrši obavezu na vreme, vrši prolongaciju, odnosno, zamenu menice novom menicom i plaćanjem interesa za naredna tri meseca. U praksi često dužnici izdaju menicu bez ispisane (blanko) valute plaćanja dospeća, tako da ne vrše zamenu menica.

$$E = \frac{K_0 * n}{D} \text{ i } K_n = K_0 + \frac{K_0 * n}{D},$$

odakle je

$$K_0 = \frac{D * K_n}{D + n},$$

što posle zamene daje

$$E = \frac{D * K_n}{D + n} * \frac{n}{D} = \frac{n * K_n}{D + n}.$$

Ukoliko uporedimo formule za oba eskonta menice, odnosno imenioce, možemo uočiti da je **komercijalni eskont veći od racionalnog eskonta menice**.

U praksi se dešava da banka eskontovane menice eskontuje kod neke druge banke, odnosno, vrši **reeskontovanje menica**. Uglavnom se reeskontuje više menica ali se može reeskontovati i jedna menica.⁸

1. Hemofarm a.d. Vršac se 06.06.2009. godine obratio svojoj poslovnoj banci Raiffeisen bank a.d. Beograd za eskont menice od 50.000 dinara Unifarma d.o.o. Novi Sad koja dospeva 06.09.2009. Raiffeisen bank a.d. Beograd je prihvatila da realizuje eskont po stopi od 9% p.a. Izračunati eskontovanu sumu koju je primio Hemofarm a.d. Vršac.



Prvo računamo broj dana od dana eskontovanja do dana dospeća menice, što iznosi 92 dana.

u junu	24	(30-6)
u julu	31	
u avgustu	31	
<u>u septembru</u>	<u>6</u>	
Ukupno	92 dana	

Potom računamo divizor, koji u našem slučaju iznosi 4.000, odnosno,

$$D = \frac{36000}{9} = 4000.$$

U sledećem koraku računamo eskont po formuli:

$$E = \frac{K_0 * n}{D} = \frac{50000 * 92}{4000} = 1150 \text{ dinara.}$$

⁸ Prolongacija reeskonta znači u stvari novi reeskont menica iz čije se reeskontovane vrednosti isplaćuje jedan deo dospelih menica u reeskontu.

Eskontovana suma po formuli iznosi:

$$K_0 = K_n - E = 50000 - 1150 = 48850 \text{ dinara.}$$

Hemofarm je po odbitku eskonta od 1.150 dinara primio eskontovanu sumu od 48.850 dinara.

2. Telefonija a.d. Beograd je 10.04.2009. godine eskontovala menicu Telekoma a.d. Beograd sa rokom dospeća 09.06.2009. godine kod Uni credit banke a.d. Beograd. Izračunati na koju sumu glasi menica ako je eskontna stopa 6%p.a., a Telefonija je 10.04.2009. godine po odbitku eskonta primila 7.940. dinara.

U prvom koraku računamo broj dana od dana eskontovanja do dana dospeća menice, što iznosi 60 dana.

u aprilu	20 dana
u maju	31 dan
u junu	9 dana
Ukupno	60 dana

U drugom koraku računamo divizor, koji u našem slučaju iznosi 6.000,

$$\text{odnosno, } D = \frac{36000}{6} = 6000.$$

U trećem koraku računamo eskont po formuli za umanjeni kapital, od-

$$\text{nosno, } E = \frac{(K_n - E) * n}{D - n} = \frac{7940 * 60}{6000 - 60} = 80,20 \text{ dinara.}$$

I na kraju, utvrđujemo nominalnu vrednost menice po formuli

$$K_n = K_0 + E = 7940 + 80,20 = 8020,20 \text{ dinara.}$$

Znači, Telefonija je eskontovala Telekomovu menicu nominalne vrednosti 8.020,20 dinara.

2.5. DEVIZE I DEVIZNA ARBITRAŽA

Devize su sva potraživanja izražena u stranoj valuti i efektivni strani novac, osim zlatnika i srebrenjaka. Devize mogu biti konvertibilne i nekonvertibilne u zavisnosti od toga da li se mogu slobodno koristiti i u drugim zemljama (*konvertibilne* - npr. evro, dolar, švajcarski franak ili britanska funta) ili samo u zemljama izdavaocima istih (*nekonvertibilne* - npr. rublja, kuna, dinar ili lev).

Takođe, devize su predmet trgovanja na berzama, odnosno, predstavljaju instrument u portfelju kompanija. Shodno tome, imaju svoju cenu. **Kurs** je cena strane, valute, odnosno cena po kojoj se jedna nacionalna valuta zamenjuje za drugu valutu. Ukoliko kurs deviza pokazuje koliko se jedinica domaće valute plaća za jednu ili sto jedinica strane valute onda govorimo o **direktnom deviznom kursu**. Analogno tome, ukoliko kurs deviza pokazuje koliko se jedinica strane valute dobija za jednu jedinicu ili sto jedinica domaće valute onda govorimo o **indirektnom deviznom kursu**.

Takođe, se razlikuje kurs za efektivu (gotov novac) i devize (bezgotovinski novac ili transfere). Kurs za efektivu je uvek viši od kursa za devize. Takođe, u okviru kursne liste se mogu uočiti tri kursa za devize – kupovni, srednji i prodajni kurs. U našoj praksi, banke imaju različite kurseve za devize (kupovinu, prodaju i realizaciju naloga), efektivu (kupovinu i prodaju gotovine, odnosno, keša) i kredite (puštanje kredita u tečaj i vraćanje rate kredita).

Kupovni kurs se primenjuje kada kompanija ili pojedinac kupuje određenu količinu deviza. Prodajni kurs se primenjuje kada kompanija ili pojedinac prodaju određenu količinu deviza. Srednji kurs je obračunska kategorija i može se koristiti za izračunavanje provizija ili za iskazivanje bilansnih pozicija kompanija.

Isto tako, se u praksi može vršiti **konverzija** valuta, odnosno, zamena jedne valute za drugu, kada kompanijama ili pojedincima za realizaciju naloga treba valuta koju nemaju ali će je kupiti prodajom druge valute koju imaju u banci, odnosno, konverzijom.⁹

I na kraju bi trebalo imati u vidu da banke, kao arbitražeri,¹⁰ procenjuju koji im je najpovoljniji način isplate duga ili naplate potraživanja, s obzirom na to da svoje transakcije obavljaju u kratkom i dugom roku, i imaju pristup i domaćim i inostranim tržištima. **Arbitraža**, znači procenjivanje koji je najpovoljniji način za obavljanje nekog posla. U slučaju izmirivanja obaveza (duga), arbitražom se bira način da se sa što manje jedinica sopstvene valute isplati jedna ili sto jedinica duga. Dok se u slučaju naplate potraživanja bira takav način kojim će se za jednu ili sto jedinica potraživanja dobiti najviše jedinica sopstvene valute.

9 Napomena: da bi se kursevi deviza mogli upoređivati moraju se svesti na isti rok dospeća. Najčešće se za taj rok uzima rok po viđenju.

10 Reč arbitraža potiče od latinske reči *arbitrare* što znači prosuđivati.



1. Alfa banka a.d. Beograd je izvršila doznaku Jeep Commerce d.o.o. iz Beograda u vrednosti 2.650 dolara (USD) u korist Steel Company Ltd. New York dana 15.05.2009. godine. Jeep Commerce d.o.o. nije imao dolare na računu, nego ih je kupio od Alfa banke iz dinara. Izračunati koliko je Jeep Commerce uplatio dinara Alfa banci za kupovinu 2.650 dolara.¹¹

Kursna lista Alfa banke a.d. Beograd na dan 15.05.2009. je sledeća:

Dolar	Kupovni kurs	Srednji kurs	Prodajni kurs
Dinar	85	90	95

Jeep Commerce je uplatio Alfa banci 251.750 dinara, odnosno,

$$X = 2650 * 95 = 251750.$$

2. Jeep Commerce d.o.o. iz Beograda ima obavezu ka ino-partner Steel Company Ltd. New York u iznosu od 2.650 dolara dana 16.05.2009. godine. Jeep Commerce se obraća Alfa banci da izvrši plaćanje u korist ino-partnera, ali sa deviznog računa u švajcarskim francima (CHF). Alfa banka vrši konverziju švajcaraca u dolare. Izračunati koliko je švajcarskih franaka Jeep Commerce utrošeno za plaćanje 2.650 dolara.¹²

Kursna lista Alfa banke a.d. Beograd na dan 16.05.2009. je sledeća:

	Kupovni kurs	Srednji kurs	Prodajni kurs
Dolar/dinar	85	90	95
Švajcarski franak/dinar	80	85	90

U prvom koraku računamo koliko je dinara neophodno za kupovinu dolara po prodajnom kursu, a potom dobijeni broj delimo sa kupovnim kursom za švajcarske franke, i dobijamo da je za kupovinu 2.650 dolara neophodno prodati 3.146,87 švajcarskih franaka.

$$X = 2650 * 95 \div 80 = 3.146,87$$

Jeep Commerce d.o.o. Beograd je prodao 3.146,87 švajcarskih franaka da bi kupio 2.650 dolara kojima je platio obavezu ka ino-partneru.

11 Primer je pojednostavljen - nije uključena provizija banke i troškovi ino-banaka vezani za realizaciju naloga. Pretpostavka je da Alfa banka a.d. Beograd ima račun kod iste banke gde ima i Američki partner Jeep Commerce d.o.o. Beograd.

12 Korišćene iste pretpostavke i pojednostavljenja kao u prvom primeru za devize i deviznu arbitražu.

3.

SLOŽENI INTERES

Složen interes je interes koji se u svakom periodu računa na uvećani kapital, odnosno, **osnova za obračun interesa se uvećava interesom iz prethodnog perioda**. U praksi se zbog toga složeni interesni račun naziva interes na interes, odnosno, složeni interes možemo posmatrati kao ponavljanja obračuna prostog intreresa sa uvećanjem početne vrednosti kapitala za interes iz prethodnog obračunskog perioda.

3.1. FAKTOR AKUMULACIJE

(IZRAČUNAVANJE KRAJNJE VREDNOSTI KAPITALA)

Faktor akumulacije je krajnja vrednost jedne novčane jedinice na kraju n -te godine uz $p\%$. Kao što smo već rekli u uvodnom delu, interes (kamata) na kapital se može obračunati dekurzivno i anticipativno.

Dekurzivan obračun znači da se kapitalisanje i pripisivanje interesa vrši krajem perioda, što je najčešći slučaj kod oročenja novčanih sredstava (depozita). Ulaganja krajem perioda se nazivaju dekurzivnim.

Anticipativan obračun znači da se kapitalisanje i pripisivanje interesa vrši početkom perioda, što je najčešći slučaj sa kreditima. Ulaganja početkom perioda se nazivaju anticipativnim.

Obračun interesa se može vršiti primenom relativne i konformne kamatne stope, u diskretnom i kontinuelnom vremenu.

3.1.1. DEKURZIVNO RAČUNANJE INTERESA

Sadašnja vrednost K_0 je vrednost kapitala koja se daje pod interes. Dok je, krajnja vrednost kapitala ili uvećani kapital za interes na interes K_n , vrednost na koju je narastao kapital dat pod interes na interes za određeni period.

Krajnju vrednost kapitala (K_n), pod pretpostavkom da su nam poznati kapital koji se daje pod interes (K_0), vremenski period – n godina, $p\%$ (p.a.) i godišnje kapitalisanje (ako je računanje interesa dekurzivno), računamo u iteracijama za svaku godinu do n -te godine.

Interes za prvu godinu obračunat prostim interesnim računom se dodaje postojećem kapitalu, tako da je kapital na kraju prve godine:

$$K_1 = K_0 + \frac{K_0 * p}{100} = K_0 * \left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Potom se u drugoj godini ponovo ukamaćuje K_1 , uz isti procenat, pa će iznos kapitala na kraju druge godine biti:

$$K_2 = K_1 + \frac{K_1 * p}{100} = K_1 * \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_0 * \left(1 + \frac{p}{100}\right) * \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_0 * \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2.$$

Na kraju treće godine će ukamaćeni kapital iznositi:

$$K_3 = K_2 + \frac{K_2 * p}{100} = K_2 * \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_0 * \left(1 + \frac{p}{100}\right) * \left(1 + \frac{p}{100}\right) * \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_0 * \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3.$$

Analogno tome krajnja vrednost kapitala K_n na kraju n -te godine uz $p\%$ godišnje i dekurzivno godišnje kapitalisanje iznosi:

$$K_n = K_{n-1} * \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_0 * \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Dobijenu formulu možemo skratiti tako što ćemo uvesti interesni činilac r , koji je jednak zbiru u zagradi, odnosno,

$$r = \left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

Tako, jednačina krajnje vrednosti kapitala postaje:

$$K_n = K_0 * r^n$$

gde r^n predstavlja **faktor akumulacije**, odnosno, krajnju vrednost jedne novčane jedinice (dinara, evra ili druge valute) na kraju n -te godine uz $p\%$.

Ukoliko se **kapitalisanje** vrši m puta godišnje (u toku jedne godine), onda p postaje m puta manje a n postaje m puta veće, što izražavamo sledećom jednačinom:

$$K_{mn} = K_0 * \left(1 + \frac{p}{100 * m}\right)^{mn}.$$

Takođe, vrednost krajnjeg kapitala (K_n) se može izračunati pomoću **prvih finansijskih tablica**, ako se ima u vidu da je

$$r = \left(1 + \frac{p}{100}\right) = I_p^1,$$

odnosno,

$$r^n = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = I_p^n,$$

onda je

$$K_n = K_0 * I_p^n$$

ili

$$K_{mn} = K_0 * I_{\frac{p}{m}}^{mn}$$

ako se interes koji donosi K_0 novčanih jedinica uz $p\%$ kapitališe m puta godišnje.

Sagledavajući formulu krajnjeg kapitala možemo uočiti da kod složenog interesnog računa **kapital raste eksponencijalno**, kao funkcija od vremena n . Dok kod prostog interesnog računa kapital raste linearno.

Faktor akumulacije se može izračunati iz gore navedenih formula, ako su ostale veličine poznate.

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = \frac{K_n}{K_0}$$

gde je $\frac{p}{100} = i \Rightarrow (1+i)^n = \frac{K_n}{K_0}$.

U sledećem koraku koristimo korenovanje kako bi izračunali i .

$$1+i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} \Rightarrow i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1.$$

Iz dobijene jednakosti možemo izračunati kamatnu stopu p na sledeći način:

$$\frac{p}{100} = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 \Rightarrow p = 100 * \left(\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 \right).$$

Takođe, ukoliko nam je nepoznato vreme ukamaćivanja onda ćemo ga izračunati logaritmovanjem izraza za izračunavanje i .

$$n \log(1+i) = \log \frac{K_n}{K_0} \Rightarrow n = \frac{\log K_n - \log K_0}{\log(1+i)}.$$

Kamata I za n -godina se može izračunati iz osnovne jednakosti krajnjeg kapitala (K_n) kao:

$$I = K_n - K_0 = K_0 * r^n - K_0 = K_0 * (r^n - 1)$$



Na koji iznos će narasti kapital Marka Markovića od 100.000 dinara uz kamatnu stopu 10%p.a. i godišnje kapitalisanje u roku od 5 godina?

Ovde je $K_0 = 100.000$, $p = 10\% \text{ p.a.}$, $m = 1$, $n = 5$, $K_n = ?$

$$K_n = 100000 * \left(1 + \frac{6}{100}\right)^5 = 161510$$

Kapital Marka Markovića će za 5 godina narasti na 161.510 dinara.

3.1.2. ANTICIPATIVNO RAČUNANJE INTERESA

Početna vrednost K_0 je vrednost kapitala koja se daje pod intreres. Dok je, krajnja vrednost kapitala ili uvećani kapital za interes K_n , vrednost na koju je narastao kapital dat pod interes na interes za određeni period.

Krajnju vrednost kapitala (K_n), pod pretpostavkom da su nam poznati kapital koji se daje pod interes (K_0), vremenski period – n godina, q (p.a.) kamatna stopa (ako je računanje interesa anticipativno), računamo u iteracijama za svaku godinu do n -te godine.

Početnu vrednost kapitala (K_0) na početku obračunskog perioda je razlika vrednosti uvećanog početnog kapitala na kraju prvog obračunskog perioda (K_1) i interesa na uvećanu vrednost kapitala u prvom obračunskom periodu (K_1), obračunatog anticipativno (unapred):

$$K_0 = K_1 - \frac{K_1 * q}{100} = \frac{K_1 * 100 - K_1 * q}{100} = K_1 * \frac{(100 - q)}{100}$$

odakle je

$$K_1 = K_0 * \frac{100}{100 - q}.$$

Analogno tome, vrednost kapitala na kraju drugog obračunskog perioda (K_2) računamo na sledeći način:

$$K_1 = K_2 - \frac{K_2 * q}{100} = \frac{K_2 * 100 - K_2 * q}{100} = K_2 * \frac{(100 - q)}{100}$$

odakle je

$$K_2 = K_1 * \frac{100}{100 - q} \Rightarrow K_2 = K_0 * \left(\frac{100}{100 - q} \right)^2.$$

Vrednost kapitala na kraju trećeg obračunskog perioda (K_3) bi iznosila:

$$K_3 = K_0 * \left(\frac{100}{100 - q} \right)^3.$$

Shodno tome, krajnja vrednost kapitala bi na kraju n -te godine (K_n) iznosila:

$$K_n = K_0 * \left(\frac{100}{100 - q} \right)^n.$$

Dobijenu formulu možemo uprostiti tako što ćemo uvesti faktor akumulacije ρ , koji je jednak

$$\rho = \left(\frac{100}{100 - q} \right) \Rightarrow \rho^n = \left(\frac{100}{100 - q} \right)^n.$$

Znači, faktor akumulacije predstavlja krajnju vrednost jedne novčane jedinice (dina-
ra, evra ili druge valute) uložene pod interes na interes anticipativno uz $q\%$.

Tako, jednačina krajnje vrednosti kapitala (K_n) postaje:

$$K_n = K_0 * \rho^n \text{ ili } K_n = K_0 * I_q^n.$$

Ukoliko se **kapitalisanje** vrši m puta godišnje (u toku jedne godine), onda q postaje m puta manje a n postaje m puta veće, što izražavamo sledećom jednačinom:

$$K_{mn} = K_0 * I_{q/m}^{mn} \Rightarrow K_{mn} = K_0 * \left(\frac{100m}{100m - q} \right)^{mn}.$$



Petar Petrović ulaže kapital od 4.000 evra na 4 godine uz godišnju stopu 4%. Na koliki iznos će narasti kapital Petra Petroviću, ako je anticipativno računanje interesa?

Ovde je $K_0=4000$, $n=4$, $m=1$, $q=4$, $Kn=?$

$$K_4 = K_0 * \left(\frac{100}{100 - q} \right)^n = 4000 * \left(\frac{100}{100 - 4} \right)^4 = 4709,51 \text{ evra}$$

Kapital Petra Petrovića će narasti za 4 godine na 4.709,51 evra.

3.1.3. FAKTOR AKUMULACIJE PRI NEPREKIDNOM UKAMAĆIVANJU

U prethodnim poglavljima smo videli kako se krajnja vrednost kapitala (K_n) izračunava kada se vreme tretira kao diskretna veličina (dani, meseci, kvartali, polugodišta i godine). Iako je vreme kontinuelna veličina.

Posmatranje vremena u kontinuitetu nalaže da se odredi granična krajnja vrednost kapitala (K_{mn}), kada $m \rightarrow \infty$.¹³

$$K_{mn} = K_0 \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{100m} \right)^{mn} = K_0 \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{p}{100m} \right)^m \right]^n$$

U prvom koraku se određuje granična vrednost (limes) izraza u srednjoj zagradi.

Uvodi se smena:

$$\frac{p}{100m} = \frac{1}{K},$$

¹³ Polazna formula za faktor akumulacije pri neprekidnom ukamaćivanju je formula za krajnju vrednost kapitala pri m kapitalisanja u toku n godina dekurzivnim računanjem interesa.

odnosno,

$$m = \frac{p * K}{100},$$

što se menja u srednjoj zagradi.

Na osnovu činjenice, kako $m \rightarrow \infty$, onda i $K \rightarrow \infty$, sledi da je

$$K_{mn} = K_0 \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \left(1 + \frac{1}{K} \right)^{\frac{p * K}{100}} \right|^n = K_0 \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \left| \left(1 + \frac{1}{K} \right)^K \right|^{\frac{p}{100}} \right\}^n.$$

Kako je $\lim_{K \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{K} \right)^K = e \approx 2,78$,

zamenom u prethodnoj jednačini dobijamo formulu za neprekidno ukamaćivanje

$$K_n = K_0 \left| e^{\frac{p}{100}} \right|^n = K_0 * e^{\frac{n * p}{100}} \rightarrow K_n = K_0 * e^{\frac{n * p}{100}}.$$

Prema tome $e^{\frac{np}{100}}$ predstavlja **faktor akumulacije pri neprekidnom ukamaćivanju**.

3.1.4. RELATIVNA I KONFORMNA KAMATNA STOPA

Relativna kamatna stopa se dobija deobom nominalne godišnje stope sa brojem kapitalisanja. Znači, relativnu kamatnu stopu možemo iskazati sledećom jednakošću:

$$R_s = p * \frac{d}{365} \text{ za običnu godinu, odnosno}$$

$$R_s = p * \frac{d}{366} \text{ za prestupnu godinu.}$$

Na **primer**, godišnjoj stopi od 8% za 90 dana u prestupnoj godini, koju Komercijalna banka a.d. Beograd plaća na depozite svojih klijenata pravnih lica, odgovarala bi relativna stopa od 1,97%, koju smo dobili primenom formule:

$$R_s = p * \frac{d}{366} = 8 * \frac{90}{366} = 1,97 \cdot$$

Problemi u vezi primene relativne kamatne stope se javljaju kada postoji veći broj kapitalisanja u toku godine, odnosno, u tom slučaju se kamate ponovo zajedno ukamaćuju i time se iskazuju na kraju godine veće kamate, nego kada se ukamaćenje vrši samo jednom.

Na **primer**, Marko Marković danas ulaže 5.000 evra uz 10%p.a. kod Pro credit banke a.d. Beograd. Izračunati koliko će biti stanje Markovog uloga za 10 godina, ako je kapitalisanje: a) polugodišnje, i b) godišnje.

$$K_{20} = 5000 * I_5^{20} = 13266,49 \text{ evra}$$

$$K_{10} = 5000 * I_{10\%}^{10} = 12968,71 \text{ evra.}$$

Proizilazi da polugodišnje kapitalisanje Marku Markoviću obezbeđuje veći interes, odnosno,

$$K_{20} \succ K_{10} \text{ to jest } K_{mn} \succ K_n.$$

Ukoliko želimo da Marko Marković dobije isti interes nezavisno od kapitalisanja tj. $K_{mn} = K_n$ primenjujemo konformnu kamatnu stopu.

„Interesna stopa sa kojom ulog od K novčanih jedinica pri m -puta godišnjem kapitalisanju daje isti efekat na kraju n -te godine kao i isti taj ulog od K -novčanih jedinica pri godišnjem kapitalisanju, zove se konformna kamatna stopa „(Rašeta, J.).¹⁴

Znači, iz definicije konformne kamatne stope proizilazi jednakost:

$$K_0 * (1+i)^n = K_0 * (1+i_c)^{mn}.$$

14 Citirana definicija preuzeta iz udžbenika Rašeta, J., Finansijska i aktuarska matematika, Univerzitet Singidunum, Beograd, 2008. , str. 57

Levu i desnu stranu možemo skratiti sa K_0 , što nam omogućava da lakše izračunamo konformnu kamatnu stopu:¹⁵

$$\begin{aligned}(1+i)^n &= (1+i_c)^{mn} \rightarrow \sqrt[n]{(1+i)^n} = \sqrt[n]{(1+i_c)^{mn}} \rightarrow \\ \rightarrow (1+i) &= (1+i_c)^m \rightarrow (1+i_c) = \sqrt[m]{(1+i)} \rightarrow i_c = \sqrt[m]{(1+i)} - 1.\end{aligned}$$

Imajući u vidu da je $i_c = \frac{p_c}{100}$, mi to zamenjujemo u prethodnoj jednakosti i dobijamo:

$$\frac{p_c}{100} = \sqrt[m]{(1+i)} - 1 \rightarrow p_c = 100 * (\sqrt[m]{(1+i)} - 1).$$

Komercijalna banka a.d. Beograd plaća na oročeni depozit Petra Petrovića od 1.000 evra godišnju kamatnu stopu od 6%. Izračunati polugodišnju konformnu kamatnu stopu.

$$p_c = 100 * \left(\sqrt[2]{1 + \frac{6}{100}} - 1 \right) = 2,9563\%$$

Polugodišnja konformna kamatna stopa je 2,9563%.



3.2. DISKONTNI I ESKONTNI FAKTOR U SLOŽENOM INTERESU

U složenom interesu sa izračunavanjem početnog (K_0) i krajnjeg kapitala (K_n), su povezani pojmovi eskontovanje i diskontovanje. Ukoliko želimo da izračunamo krajnju vrednost kapitala (K_n), kada znamo početnu vrednost kapitala (K_0) koristimo **eskontni faktor**, odnosno,

$$r^n = I_p^n.$$

¹⁵ Odnos konformne i relativne kamatne stope može se sagledati iz jednakosti: $(1+i) = (1+i_c)^m$. Dalje sređivanje jednakosti će ukazati da je proporcionalna ili relativna kamatna stopa veća od konformne kamatne stope.

Ukoliko želimo da izračunamo početni kapital (K_0) kada je dat krajnji kapital (K_n) koristimo **diskontni faktor**, odnosno,

$$r^{-n} = II_p^n.$$

Eskontni i diskontni faktor su povezani relacijom:

$$II_p^n \Rightarrow \frac{1}{I_p^n}.$$

Podsećanja radi polazna jednakost za krajnji kapital (K_n) je:

$$K_n = K_0 * r^n = K_0 * I_p^n,$$

što predstavlja **diskontovanje kapitala**.

Ukoliko iz gornje jednakosti izračunavamo početnu vrednost kapitala (K_0) kao:

$$K_0 = K_n * r^{-n} = K_n * II_p^n,$$

vršimo **eskontovanje kapitala**.



1. *Koliko danas treba Marko Marković da uloži u Pro credit banku a.d. Beograd, koja plaća 6% p.a. i godišnje kapitalisanje da bi posle 5 godina primio 6.691,13 evra (depozit sa pripisanom kamatom)?*

Ovde je $K_n=6.691,13$; $p=6$, $n=5$, $m=1$, $K_0=?$

$$K_0 = 6691,13 * II_6^5 = 5000 \text{ evra}$$

Marko Marković bi trebalo danas da uloži 5.000 evra kako bi za 5 godina ostvario 6.691,13 evra na ime kamate od Pro credit banke a.d. Beograd.

2. *Koliko vredi danas iznos (depozit sa pripisanom kamatom) od 5.000 evra, Petra Petrovića, kada on dospeva za 15 godina sa 3,5%p.a. i godišnje kapitalisanje kod Komercijalne banke a.d. Beograd?*

Ovde je $K_n=5.000$, $p=3,5\%p.a.$, $n=15$, $m=1$, $K_0=?$

$$K_0 = 5000 * II_{3,5}^{15} = 2984,45 \text{ evra}$$

Petar Petrović je danas uložio 2.984,45 evra kod Komercijalne banke a.d. Beograd. Za 15 godina će njegov depozit sa kamatom iznositi 5.000 evra kod Komercijalne banke a.d. Beograd.

3.3. FAKTOR DODAJNIH ULOGA

U prethodnim poglavljima trećeg dela smo posmatrali slučajeve stanja jednog uloga (depozita, kapitala), odnosno njegovu inicijalnu (K_0) ili krajnju vrednost (K_n), što u praksi nije čest slučaj. Obično se dešava da su uplate (ili isplate) uloga u stalnim ili promenljivim iznosima, u pravilnim ili promenljivim vremenskim razmacima, koji mogu a i ne moraju biti isti kao razmak kapitalisanja. Ulaganje, kao što smo već rekli može biti anticipativno (početkom perioda ulaganja) i dekurzivno (krajem perioda ulaganja).

Faktor dodajnih uloga koristimo radi izračunavanja zbira krajnjih vrednosti periodičnih plaćanja (uplata ili isplata) učinjenih početkom ili krajem obračunskog perioda, pri dekurzivnom ili anticipativnom obračunu kamate.

3.3.1. ZBIR KRAJNJIH VREDNOSTI ULOGA U SLUČAJU ANTICIPATIVNOG ULAGANJA

Praktično ukoliko želimo da odredimo količinu vrednosti **zbira uloga** (u) ako se **početkom svake godine** u toku n godina ulaže po **jedna novčana jedinica** godišnje uz $p\%$ (p.a.) interes na interes **pri godišnjem kapitalisanju**, tada ćemo je računati po godinama, kako sledi.

Prvi ulog od u novčanih jedinica će na kraju n -te godine iznositi: $u * r^n$. Drugi ulog će zajedno sa interesom na interes da naraste na: $u * r^{n-1}$, jer se kapitališe na $(n-1)$ godinu. Treći ulog će narasti na: $u * r^{n-2}$, jer se kapitališe na $(n-2)$ godine, i tako redom. Poslednji ulog koji se ulaže početkom n -te godine biće samo godinu dana pod interesom na interes (tj.1 kapitalisanje), pa će njegova vrednost iznositi: $u * r$. Shodno tome, zbir svih uloga sa interesom na interes (S_n) računamo na sledeći način:

$$S_n = u * r^n + u * r^{n-1} + u * r^{n-2} + \dots + u * r \rightarrow \\ S_n = u * r + u * r^2 + u * r^3 + \dots + u * r^n.$$

Množenjem ove jednačine sa r dobijamo sledeće:

$$S_n * r = u * r^2 + u * r^3 + u * r^4 + \dots + u * r^{n+1}.$$

Ukoliko prvobitnu jednačinu oduzmemo od druge (pomnožene sa r) jednačine imamo:

$$S_n * r - S_n = u * r^2 + u * r^3 + u * r^4 + \dots + u * r^{n+1} - (u * r + u * r^2 + u * r^3 + \dots + u * r^n) \rightarrow$$

$$S_n * (r - 1) = u * r^{n+1} - u * r \rightarrow S_n * (r - 1) = u * r * (r^n - 1) \rightarrow S_n = \frac{u * r * (r^n - 1)}{(r - 1)}.$$

Pošto je u našem primeru u jednako jednoj novčanoj jedinici obrazac postaje:

$$S_n = \frac{r * (r^n - 1)}{(r - 1)},$$

što predstavlja **zbir uloga** od jedne novčane jedinice sa interesom na interes u toku n godina uz $p\%$ (p.a.). **Faktor dodatnih uloga** je izraz

$$\frac{r * (r^n - 1)}{(r - 1)} = III_p^n.$$

Ukoliko faktor dodatnih uloga zamenimo **III finansijskim tablicama** u jednačini zbira uloga dobijamo:

$$S_n = u * III_p^n.$$

Ukoliko se u toku godine vrši **m-puta** godišnje **kapitalisanje** formula zbira krajnjih vrednosti uloga u slučaju **anticipativnog ulaganja** glasi:

$$S_{mn} = u * III_{p/m}^{mn}.$$



Janko Petrović ulaže svake godine u Aik banku a.d. Niš po 500 evra. Kolikom sumom će na kraju pete godine raspolagati Janko Petrović u Aik banci, ako se vrši godišnje kapitalisanje složenim interesom uz 4%p.a.?

Ovde je: $u=500$, $p=4\%$, $n=5$, $m=1$, $S_n=?$

$$S_5 = 500 * III_4^5 = 2.816,49 \text{ evra}$$

Janko Petrović će na kraju pete godine raspolagati sumom od 2.816,49 evra.

3.3.2. ZBIR KRANJJIH VREDNOSTI ULOGA U SLUČAJU DEKURZIVNOG ULAGANJA

Ukoliko želimo da odredimo količinu **vrednosti zbira uloga** (u) ako se **krajem svake godine** u toku n godina ulaže po u novčanih jedinica uz $p\%$ (p.a.) složenog intesa pri godišnjem kapitalisanju, tada ćemo je računati po godinama kako sledi.

Prvi ulog od u novčanih jedinica uložen na kraju n -te godine, odnosno, na dan poslednjeg uloga iznositi: $u * r^{n-1}$. Drugi ulog koji se ulaže na kraju druge godine pod složeni interes na $(n-2)$ godine, će imati krajnju vrednost: $u * r^{n-2}$. Vrednost trećeg uloga uloženog na kraju treće godine, će imati krajnju vrednost: $u * r^{n-3}$. Analogno tome, vrednost poslednjeg uloga uloženog na kraju n -te godine će biti jednaka u , s obzirom na to da se ne kapitališe. Shodno tome, zbir svih uloga sa interesom na interes pri anticipativnom ulaganju S'_n računamo na sledeći način:

$$S'_n = u * r^{n-1} + u * r^{n-2} + u * r^{n-3} + \dots + u.$$

Množenjem ove jednakosti sa r dobijamo sledeće:

$$r * S'_n = u * r^n + u * r^{n-1} + u * r^{n-2} + \dots + u * r.$$

Ukoliko prvodobijenu jednačinu oduzmemo od druge jednačine (pomnožene sa r) imamo:

$$r * S'_n - S'_n = u * r^n + u * r^{n-1} + u * r^{n-2} + \dots + u * r - (u * r^{n-1} + u * r^{n-2} + u * r^{n-3} + \dots + u) \rightarrow$$

$$S'_n * (r - 1) = u * r^n - u \rightarrow S'_n * (r - 1) = u * (r^n - 1) \rightarrow S'_n = \frac{u * (r^n - 1)}{(r - 1)}.$$

S'_n je **zbir svih uloga** složenog interesnog računa pri **dekurzivnom ulaganju**. Ukoliko koristimo **III finansijske tablice**, S'_n možemo napisati u sledećem obliku:

$$S'_n = u * \left(1 + III_p^{n-1}\right).$$

Ukoliko se u toku godine vrši **m-puta** godišnje **kapitalisanje** formula zbira krajnjih vrednosti uloga u slučaju dekurzivnog ulaganja glasi:

$$S'_{mn} = u * \left(1 + III_{p/m}^{(n-1)*m}\right).$$



Marko Petrović ulaže krajem svake godine kod NBG Vojvođanske banke a.d. Novi Sad po 10.000 evra na složen interes uz godišnje kapitalisanje u toku 10 godina sa 4%p.a. Izračunati stanje svih Markovih uloga na dan poslednjeg uloga kod Vojvođanske banke.

Ovde je $u=5.000$, $n=10$, $m=1$, $p=4$, $S'_{10}=?$

$$S'_{10} = 5000 * (1 + III_4^9) = 60030,54 \text{ evra}$$

Zbir svih Markovih uloga složenog interesnog računa pri dekurzivnom računanju će na dan poslednjeg uloga iznositi 60.030,54 evra.

3.3.3. ULAGANJE ČEŠĆE OD OBRAČUNAVANJA INTERESA

U praksi se može desiti da **ulaganje bude češće od perioda obračunavanja interesa**. U tom slučaju se zbir krajnje vrednosti uloga (S_{vmn}) izračunava *upotrebom konformne kamatne stope* p_c (u formuli za zbir vrednosti anticipativnih uloga), na sledeći način:

$$S_{vmn} = u * r_c * \frac{r_c^{vmn} - 1}{r_c - 1}.$$

Pri tome je $r_c = 1 + \frac{p_c}{100}$ odnosno,

$$S_{vmn} = u * III_{p_c}^{vmn}.$$

Trebalo bi imati u vidu da je v - broj uloga u obračunskom period, n - broj godina, a m - broj kapitalisanja godišnje.



Početkom svakog meseca Maja Marković je ulagala u Erste banku a.d. Novi Sad po 1.200 dolara. Izračunati stanje Majinih uloga zajedno sa pripadajućom kamatom, primenom složenog interesnog računa, krajem 20-te godine pri godišnjem kapitalisanju po stopi od 16%.

Ovde je: $u=1.200$, $n=20$, $m=1$, $v=12$, $p=16$, $p_c=?$, $S_{vmn}=?$

$$p_c = 100 * \left(\sqrt[12]{1 + \frac{16}{100}} - 1 \right) = 1,2445138\%$$

$$S_{12*20} = 1200 * III_{1,2445138}^{12*20} \rightarrow S_{40} = 1802198,40 \text{ dolara}$$

Zbir svih Majinih uloga sa pripadajućom kamatom će krajem 20-te godine kod Erste banke iznositi 1.802.198,40 dolara.

Teoretski se može desiti da **ulaganje** bude **ređe od računanja interesa**. Tada je praktičnije izračunavanje krajnje vrednosti do određene skadence pojedinačnih uloga, sa **I finansijskim tablicama**, a zatim te vrednosti sabirati.

Takođe, može se u praksi desiti da **ulozi** budu **promenljivi** tj. da rastu ili opadaju po aritmetičkoj ili geometrijskoj progresiji ili bez ikakve utvrđene pravilnosti. Isto tako, ulaganje se može ali i ne mora poklapati sa obračunavanjem interesa.

U slučaju da su ulozi promenljivi bez ikakve utvrđene pravilnosti, izračunavanje krajnje vrednosti za promenljive uloge se obavlja simultanim izračunavanjem za svaki ulog posebno, a onda se pojedinačni rezultati diskontuju ili eskontuju na isti vremenski trenutak.

Kada anticipativni ulozi rastu ili opadaju u **aritmetičkoj progresiji**, zbir konačnih vrednosti uloga S_n^+ na kraju n -te godine se računa po formuli:

$$S_n^+ = u * III_p^n + d * \frac{100}{p} * (III_p^n - n * I_p^1),$$

gde je u – visina uloga, d – novčana razlika između prethodnog i narednog uplaćenog (isplaćenog) uloga, n – broj godina, p – kamatna stopa, I – prve finansijske tablice i III – treće finansijske tablice.¹⁶

I na kraju kada anticipativni ulozi rastu ili opadaju u geometrijskoj progresiji, zbir konačnih vrednosti uloga S_n^q , na kraju n -te godine se računa po formuli:

$$S_n^q = u * I_p^1 * \frac{I_p^n - I_{p_1}^n}{I_p^1 - I_{p_1}^1},$$

gde je u – visina uloga, p_1 – stopa rasta uloga, p – stopa obračuna interesa i I – prve finansijske tablice.¹⁷

3.4. FAKTOR AKTUELIZACIJE

Faktor aktuelizacije koristimo da izračunamo zbir vrednosti uloga koji dospevaju za n uzastopnih godina svedenih na sadašnji vremenski trenutak. Znači, faktor aktuelizacije koristimo u obrnutom postupku od primene faktora dodajnih uloga, kada računamo zbir konačnih vrednosti uloga na kraju n -te godine.

16 Postupak izvođenja formule zbirne vrednosti uloga sa aritmetičkom progresijom na kraju n -tog perioda se može videti iz izvora: Kočović, J., Finansijska matematika, Ekonomski fakultet, Beograd, 2006., str. 102-106.

17 Postupak izvođenja formule zbirne vrednosti uloga na kraju n -tog perioda sa geometrijskom progresijom na kraju n -tog perioda se može videti iz izvora: Kočović, J., cit. delo, str. 107-108.

„Faktor aktuelizacije predstavlja zbir sadašnjih (diskontovanih) vrednosti n uloga od jedne novčane jedinice, koji su ulagani u obračunskim periodima u toku n godina uz interesnu stopu $p\%$ (Rašeta, J.)”.¹⁸

Kao što smo rekli ulozi mogu biti ulagani na početku perioda (anticipativno) i krajem perioda (dekurzivno). Shodno tome, možemo izračunati sadašnju vrednost niza dekurzivnih, odnosno, anticipativnih uloga.

3.4.1. SADAŠNJA VREDNOST NIZA DEKURZIVNIH ULOGA

„Sadašnja vrednost niza dekurzivnih uloga je ona vrednost koja izražava zbir diskontovanih uloga procenjen jedan period pre ulaganja prvog uloga. Datum procene naziva se epoha procene (Kočović, J.)”.¹⁹

Ako sa $u_1, u_2, u_3 \dots u_n$ odgovarajući ulozi, odnosno, tokovi plaćanja (isplate ili uplate) krajem 1, 2, ..., n -te godine uz $p\%$ (p.a.) i godišnje kapitalisanje. Neophodno je izračunati sadašnju (diskontovanu) vrednost niza tih uloga (C_0), po principu ekvivalencije.

$$C_0 = \frac{u_1}{r} + \frac{u_2}{r^2} + \frac{u_3}{r^3} + \dots + \frac{u_n}{r^n} \text{ gde je } r = 1 + \frac{p}{100}.$$

Ako su ulozi jednaki, odnosno, $u_1 = u_2 = u_3 = \dots = u_n = u$, inicijalna jednakost bi se mogla prikazati na sledeći način:

$$C_0 = \frac{u}{r} + \frac{u}{r^2} + \frac{u}{r^3} + \dots + \frac{u}{r^n} \rightarrow C_0 = \frac{u * (r^n - 1)}{r^n * (r - 1)}.$$

Faktor aktuelizacije je $\frac{r^n - 1}{r^n * (r - 1)}$ od jedne novčane jedinice uz $p\%$ za n perioda.

Takođe, sadašnju vrednost zbira više (n) periodičnih jednakih (uplata ili isplata) uloga (C_0) možemo izračunati i preko **II finansijskih tablica**, odnosno,

$$C_0 = u * (II_p^1 + II_p^2 + \dots + II_p^n).$$

Imajući u vidu da je: $II_p^1 = IV_p^1$,²⁰ sadašnju vrednost zbira više (n) periodičnih jednakih (uplata ili isplata) uloga (C_0) možemo napisati kao:

$$C_0 = u * IV_p^n.$$

18 Cit.definicija: Rašeta, J., cit. delo, str.69

19 Cit.definicija: Kočović, J., cit. delo, str. 109

20 Postupak dokazivanja da je $II_p^1 = IV_p^1$ može se videti iz izvora: Kočović, J., cit.delo, str. 111-112.

Kolika je sadašnja vrednost niza od 24 uloga po 50.000 dolara EFT d.o.o. Beograd uplaćivanih krajem godine kod Komercijalne banke a.d. Beograd uz stopu $p=4\%$ p.a.?

$$C_0 = 50000 * IV_4^{24} = 76234,82 \text{ dolara}$$

Sadašnja vrednost 24 uloga EFT-a je 76.234,82 dolara.



3.4.2. SADAŠNJA VREDNOST NIZA ANTICIPATIVNIH ULOGA

„Sadašnja vrednost niza anticipativnih uloga jednaka je zbiru diskontovanih vrednosti uloga kvantifikovanih na dan prvog uloga (Kočović, J.)”.²¹

Ukoliko se u toku n godina (početkom godine) ulaže po u novčanih jedinica uz $p\%$ (p.a.) i godišnje kapitalisanje, neophodno je izračunati sadašnju vrednost tih uloga (C_0).

$$C_0 = u + \frac{u}{r} + \frac{u}{r^2} + \frac{u}{r^3} + \dots + \frac{u_n}{r^{n-1}} \rightarrow C_0 = u * \left(1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \dots + \frac{1}{r^{n-1}} \right) \rightarrow$$

$$C_0 = u * \left(1 + II_p^1 + II_p^2 + \dots + II_p^{n-1} \right) \rightarrow C_0 = u * \left(1 + IV_p^{n-1} \right).$$

Kolika je sadašnja vrednost niza od 24 uloga po 50.000 evra Telenora a.d. Beograd uplaćivanih početkom godine uz stopu $p=4\%$ p.a. kod Societe General banke a.d. Beograd?

$$C_0 = 50000 * \left(1 + IV_4^{23} \right) = 792842,08 \text{ evra}$$

Sadašnja vrednost 24 uloga Telenora je 792.842,08 evra.



U praksi se može desiti da ulozi budu odloženi, odnosno, da se posle d godina u toku narednih n godina vrši uplata ili isplata jednakih uloga (u) uz interesnu stopu $p\%$ (p.a.) anticipativno ili dekurzivno.

U skladu sa tim formula za sadašnju vrednost odloženih dekurzivnih uloga (C_0^d) je:²²

$$C_0^d = u * IV_p^n * II_p^d.$$

²¹ Cit.definicija: Kočović, J., cit. delo, str. 114

²² Postupak izvođenja formule za sadašnju vrednost odloženih dekurzivnih uloga može se videti iz izvora: Kočović, J., cit. delo, str. 116-118.

Formula za sadašnju vrednost odloženih anticipativnih uloga ($C_0^{d'}$) je:²³

$$C_0^{d'} = u * (1 + IV_p^{n-1}) * II_p^d.$$

3.5. OTPLATA ZAJMOVA I KREDITA

Zajam i kredit u našem jeziku imaju isto značenje, odnosno, pozajmljivanje. Nekada se pojam kredit koristio za kratkoročna bankarska pozajmljivanja (kredite), a zajam se koristio za dugoročne kredite. Stoga, ćemo u daljem tekstu koristiti reč kredit.²⁴

Kredit je dužničko-poverilački odnos, zasnovan na ustupanju prava raspolaganja novcem od strane poverioca (kreditora, zajmodavca, banke) **dužniku** (korisniku kredita, zajmoprimcu) **na određeno vreme i pod određenim uslovima**. Znači, dužnik koristi i vraća pozajmljena novčana sredstva u određenom vremenskom periodu uvećana za složeni interes (kamatu).

Primenom finansijske matematike se kvantitativno utvrđuju obaveze iz kredita i način njihovog vraćanja. Način odobravanja i puštanja kredita u tečaj može biti odjednom, a može i u tranšama (ili ratama). Otplata ili **amortizacija kredita** znači **postepeno vraćanje kredita prema unapred utvrđenom planu otplate**, odnosno, amortizacije. Takođe, način otplate kredita može biti u:

- ♦ jednakim ili promenljivim otplatama (ili ratama, kojima se vraća glavnica) koje rastu ili opadaju po aritmetičkoj, odnosno, geometrijskoj progresiji, s tim da se interes plaća posebno; i
- ♦ anuitetima (koji sadrže otplatu, odnosno, deo glavnice, i interes). Anuiteti mogu biti stalni, a mogu se i menjati po zakonu aritmetičke ili geometrijske progresije.

Predmet naše analize će biti amortizacija kredita jednakim anuitetima, jer je takav način otplate kredita povoljniji za dužnika. U tom slučaju teret amortizacije kredita se ravnomerno deli na ceo period amortizacije. Ukoliko bi se dužnik opredelio za amortizaciju kredita jednakim otplatama, to bi značilo veliko opterećenje (velikim anuitetima) u vremenu kada podiže kredit. Proizilazi da je otplata iznos kojim se delimično otplaćuje dug.

23 Postupak izvođenja formule za sadašnju vrednost odloženih anticipativnih uloga može se videti iz izvora: Kočović, J., cit. delo, str. 119-120.

24 Reč kredit potiče od latinske reči *credo*, što znači verovati.

3.5.1. AMORTIZACIJA ZAJMA PRI DEKURZIVNOM RAČUNANJU INTERESA

Ukoliko dužnik otplaćuje kredit u **jednakim anuitetima**, on vrši plaćanje anuiteta (***a***) **krajem svakog perioda amortizacije**. S obzirom na to da je je kredit (***K***) jednak zbiru svih diskontovanih anuiteta na dan isplate kredita (***n*** – vreme otplaćivanja kredita), to će diskontovana vrednost na dan isplate anuiteta koji se plaća biti:

$$\frac{a}{r} \text{ krajem prve godine,}$$

$$\frac{a}{r^2} \text{ krajem druge godine,}$$

$$\frac{a}{r^3} \text{ krajem treće godine,}$$

.....

$$\frac{a}{r^n} \text{ krajem } n\text{-te godine.}$$

Kredit (*K*) je jednak zbiru svih sadašnjih vrednosti anuiteta:

$$K = \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \frac{a}{r^3} + \dots + \frac{a}{r^n}.$$

Ukoliko ovu jednačinu pomnožimo sa interesnim činiocem ***r*** (koji se izračunava primenom formule $r = 1 + \frac{p}{100}$) dobijamo:

$$K * r = a + \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \frac{a}{r^3} + \dots + \frac{a}{r^{n-1}}.$$

Ukoliko prvu jednakost oduzmemo od drugodobijene jednakosti imamo:

$$K * r - K = a + \frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \frac{a}{r^3} + \dots + \frac{a}{r^{n-1}} - \left(\frac{a}{r} + \frac{a}{r^2} + \frac{a}{r^3} + \dots + \frac{a}{r^n} \right) \rightarrow K * r - K = a - \frac{a}{r^n} \rightarrow$$

$$K * (r - 1) = a * \left(1 - \frac{1}{r^n} \right) \rightarrow K = a * \frac{1 - \frac{1}{r^n}}{r - 1} \rightarrow K = a * \frac{r^n - 1}{r^n * (r - 1)} \rightarrow K = a * IV_p^n.$$

Ukoliko dobijenu jednakost za kredit rešimo po **anuitetu (*a*)** biće:

$$a = K * \frac{r^n * (r - 1)}{r^n - 1} \rightarrow a = K * V_p^n.$$

Faktor povraćaja ili **anuitetni faktor** je $\frac{r^n * (r-1)}{r^n - 1} = V_p^n$ što predstavlja **recipročnu vrednost faktora aktuelizacije**, odnosno, $\frac{1}{V_p^n} = V_p^n$.

Znači, faktor povraćaja je vrednost dekurzivnih anuiteta na kredit od jedne novčane jedinice, obračunat za n razdoblja uz dekurzivnu kamatnu stopu.

Pošto smo izračunali iznos anuiteta (a), pristupamo sačinjavanju **plana otplate (amortizacije) kredita**, koji se vrši prema sledećoj šemi:

Period otplaćivanja (n) (npr. godine)	Iznos duga (K) (kredit)	Interes (i)	Otplata (b)	Anuitet (a)
1	$K=K_1$	$i_1=K_1p/100$	$b_1=a-i_1$	a
2	$K_2=K_1-b_1$	$i_2=K_2p/100$	$b_2=a-i_2$	a
3	$K_3=K_2-b_2$	$i_3=K_3p/100$	$b_3=a-i_3$	a
...			...	...
$n-1$	$K_{n-1}=K_{n-2}-b_{n-2}$	$i_{n-1}=K_{n-1}p/100$	$b_{n-1}=a-i_{n-1}$	a
n	$K_n=K_{n-1}-b_{n-1}$	$i_n=K_n p/100$	$b_n=a-i_n=K_n$	a

Evidentno je da se otplata (b) računa kao razlika između anuiteta (a) i interesa (i). Takođe, razlika između ostatka duga u poslednjoj godini (K_n) i otplate u poslednjoj godini (b_n) jednaka je nuli.²⁵



Kredit Mlekare Šabac a.d. Šabac od 2.000.000 evra kod Hypo banke a.d. Beograd se amortizuje u jednakim godišnjim anuitetima u toku 10 godina uz 6%p.a. i godišnje kapitalisanje. Izračunati koliki je anuitet Mlekare Šabac po ovom kreditu. Potom izraditi plan otplate (amortizacije) kredita.

Ovde je $K=2.000.000$, $n=10$, $m=1$, $p=6$, $a=?$

$$a = K * V_p^n = 2000000 * V_6^{10} = 271735,92 \text{ evra.}$$

²⁵ Ukoliko se kredit amortizuje u jednakim anuitetima, otplate čine geometrijsku progresiju količnika $(1+i)$. Opširnije o zakonu otplate pogledati izvor: Kočović, J., cit. delo, str. 149-150.

Godišnji anuitet Mlekare Šabac je 271.735,92 evra po kreditu od 2 miliona evra koji koristi kod Hypo banke Beograd.

Plan amortizacije kredita Mlekare Šabac kod Hypo banke Beograd je sledeći:

n	Dug (K) u EUR	Interes (i) u EUR	Otplata (b) u EUR	Anuitet (a) u EUR
1	2.000.000,00	120.000,00	151.735,92	271.735,92
2	1.848.264,08	110.895,84	160.840,00	271.735,92
3	1.687.424,00	101.245,44	170.490,48	271.735,92
4	1.516.933,52	91.016,01	180.719,90	271.735,92
5	1.336.213,62	80.172,80	191.563,10	271.735,92
6	1.144.650,52	68.679,03	203.056,89	271.735,92
7	941.593,63	56.495,62	215.240,30	271.735,92
8	726.353,33	43.581,20	228.154,72	271.735,92
9	498.198,61	29.891,20	241.844,00	271.735,92
10	256.354,61	15.381,28	256.354,63	271.735,92

3.5.2. AMORTIZACIJA ZAJMA JEDNAKIM OTPLATAMA

U praksi se može desiti da **kredit** bude **sa različitim** (nejednakim) **anuitetima**, ali **jednakim otplatama**. Kod izrade ovakvog plana otplate kredita polaznu osnovu čini otplata (b) koja je jednaka količniku kredita i broja godina, odnosno perioda, korišćenja kredita što se može izraziti formulom na sledeći način:

$$b = \frac{K}{n}.$$

Anuiteti (a) opadaju po aritmetičkoj progresiji, tj. svaki sledeći anuitet je manji za godišnji interes na otplatu ($\frac{bp}{100}$).²⁶ Proizilazi da je:

$$a_1 = b * \left(1 + \frac{n * p}{100} \right) \text{ prvi anuitet,}$$

$$a_2 = a_1 - \frac{b * p}{100} \text{ drugi anuitet,}$$

²⁶ Opširnije o aritmetičkoj progresiji anuiteita kod otplate kredita jednakim otplatama, a različitim anuitetima pogledati sledeći izvor: Kočović, J., cit. delo, str. 162-163.

$$a_3 = a_1 - 2 * \frac{b * p}{100} \text{ treći anuitet,}$$

...

$$a_n = a_1 - (n-1) * \frac{b * p}{100} \text{ n-ti anuitet.}$$

Shodno tome, amortizacioni plan kredita se može prikazati na sledeći način:

Period otplaćivanja (n)	Dug (K)	Interes (i)	Otplata (b)	Anuitet (a)
1	$K_1 = K$	$i_1 = Kp/100$	K/n	$a_1 = i_1 + b$
2	$K_2 = K_1 - b$	$i_2 = K_2p/100$	K/n	$a_2 = i_2 + b$
3	$K_3 = K_2 - b$	$i_3 = K_3p/100$	K/n	$a_3 = i_3 + b$
...	...	...	...	...
n	$K_n = K_{n-1} - b$	$I_n = K_n p/100$	K/n	$a_n = i_n + b$

Evidentno je da ukupan zbir otplata ($\sum b$) jednak inicijalno puštenom kreditu u tečaj (K). Zatim, ukupan zbir plaćenog interesa ($\sum i$) i otplata ($\sum b$) odgovara zbiru ukupno plaćenih anuiteta ($\sum a$). I na kraju, dug u poslednjoj godini otplate kredita (K_n) je jednak otplati u poslednjoj godini (b_n).



Kredit Novitasa d.o.o. Šabac kod Banca Intesa a.d. Beograd, u iznosu od 150.000 evra treba amortizovati u jednakim godišnjim otplatama (nejednakim anuitetima) u toku 5 godina (godišnjim kapitalisanjem) i sa 5%p.a. Izračunati kolika je otplata Novitasa. Potom izraditi plan amortizacije.

Ovde je $K=150.000$, $p=5\%$, $n=5$, $m=1$, $b=?$

$$b = \frac{K}{n} = \frac{150000}{5} = 30000 \text{ evra}$$

Godišnja otplata Novitasa doo Šabac po kreditu iznosi 30.000 evra.

Plan amortizacije Novitasovog kredita u evrima kod Banca Intesa a.d. Beograd je sledeći:

<i>n</i>	Kredit (<i>K</i>)	Interes (<i>i</i>)	Otplata (<i>b</i>)	Anuitet (<i>a</i>)
1	150.000,00	7.500,00	30.000,00	37.500,00
2	120.000,00	6.000,00	30.000,00	36.000,00
3	90.000,00	4.500,00	30.000,00	34.500,00
4	60.000,00	3.000,00	30.000,00	33.000,00
5	30.000,00	1.500,00	30.000,00	31.500,00
<i>Ukupno</i>		22.500,00	150.000,00	172.500,00

3.5.3. AMORTIZACIJA ZAJMA PROMENLJIVIM OTPLATAMA

U praksi se može desiti da budu promenljive i otplate i aniteti. Ukoliko **otplate opadaju ili rastu po aritmetičkoj progresiji**, tada prvu otplatu (b_1) računamo po formuli:²⁷

$$b_1 = \frac{K}{n} \pm \frac{(n-1)}{2} * d.$$

Pošto otplate opadaju ili rastu po aritmetičkoj progresiji, znači da je razlika između svake dve vremenske sukcesivne otplate (d) ista. K je oznaka odobrenog kredita, n je period korišćenja kredita (godine), $+$ se koristi kada otplata opada, a $-$ se koristi kada otplata raste. Anuitet (a) je jednak zbiru otplate (b) i interesa (i). Interes (i) se računa množenjem kamatne stope ($p/100$) na dug (K), odnosno, ostatak duga (K_c).

Imlekov kredit kod Komercijalne banke a.d. Beograd od 200.000 evra, se amortizuje u roku od 5 godina (godišnjim kapitalisanjem), uz stopu od 6%p.a., godišnjim dekurzivnim otplatama koje konstantno rastu za 5.000 evra. Izračunati kolika je prva godišnja otplate. Potom izraditi amortizacioni plan.

Ovde je $K=200.000$, $n=5$, $m=1$, $p=6\%$, $d=5.000$, $b_1=?$

$$b_1 = \frac{K}{n} \pm \frac{(n-1)}{2} * d = \frac{200000}{5} - \frac{(5-1)*5000}{2} = 30000 \text{ evra}$$

Imlekova prva godišnja otplata kredita je 30.000 evra.



²⁷ Opširnije o amortizaciji zajma promenljivim otplatama koje rastu ili opadaju po aritmetičkoj progresiji pogledati sledeći izvor: Kočović, J., cit. delo, st. 165-166.

Amortizacioni plan Imlekovog kredita kod Komercijalne banke u evrima je:

Na kraju godine (n)	Dug i ostatak duga (K)	Interes (i)	Otplata (b)	Anuitet (a)
0	200.000,00			
1	170.000,00	12.000,00	30.000,00	42.000,00
2	135.000,00	10.200,00	35.000,00	45.200,00
3	95.000,00	8.100,00	40.000,00	48.100,00
4	50.000,00	5.700,00	45.000,00	50.700,00
5	0	3.000,00	50.000,00	53.000,00
		39.000,00	200.000,00	239.000,00

Takođe, **otplate** mogu **opadati** ili **rasti po geometrijskoj progresiji**. Pošto količnik (q) između svake dve sukcesivne otplate ostaje isti kažemo da otplate opadaju, odnosno, rastu po geometrijskoj progresiji.²⁸

Rast otplate (q) se izražava formulom

$$q = 1 + \frac{p_1}{100},$$

gde je p_1 stopa rasta otplate. Tada je prva otplata (b_1) jednaka

$$b_1 = K * \frac{q-1}{q^n - 1}.$$

Pad otplate (q) se izražava formulom

$$q = 1 - \frac{p_1}{100},$$

gde je p_1 stopa pada otplate.

Tada je prva otplata (b_1) jednaka

$$b_1 = K * \frac{1-q}{1-q^n}.$$

Ostali elementi amortizacionog plana (anuitet, interes, ostatak duga) se utvrđuju na bazi već ranije pomenutih jednakosti.

28 Opširnije o amortizaciji zajma promenljivim otplatama koje rastu ili opadaju po geometrijskoj progresiji pogledati sledeći izvor: Kočović, J., cit. delo, str. 169-171.



Nectar d.o.o. iz Bačke Palanke koristi kredit kod NBG Vojvođanske banke a.d. Novi Sad u iznosu od 200.000 evra, sa rokom otplate 5 godina (godišnjim kapitalisanjem) i kamatnom stopom od 10%p.a. Kredit treba amortizovati godišnjim dekurzivnim otplatama koje konstantno rastu za 5%. Izračunati koliko iznosi prva otplata Nectarovog kredita. Potom izraditi amortizacioni plan.

Ovde je $K=200.000$, $p=10\%$, $n=5$, $m=1$, $p_1=5\%$, $b_1=?$

$$b_1 = K * \frac{q-1}{q^n - 1} = 200000 * \frac{1,05-1}{1,05^5 - 1} = 36.195 \text{ evra.}$$

Nectarova prva godišnja otplata je 36.195 evra.

Amortizacioni plan Nectarovog kredita u evrima kod NBG Vojvođanske banke je:

Na kraju godine (n)	Dug i ostatak duga (K)	Interes (i)	Otplata (b)	Anuitet (a)
0	200.000,00			
1	163.805,00	20.000,00	36.195,00	56.195,00
2	125.800,00	16.380,50	38.005,00	54.385,50
3	85.895,00	12.580,00	39.905,00	52.485,00
4	43.995,00	8.589,50	41.900,00	50.489,50
5	0	4.399,50	43.995,00	48.395,50
		61.949,50	200.000,00	261.950,50

U praksi je moguće da se vrši i zaokruživanje anuiteta, radi jednostavnijeg obračuna dugoročnih kredita. Mogući načini su: anuitet se izražava u procentu od kredita, neposredno se određuje zaokruženi iznos anuiteta i ugovara se način zaokruživanja anuiteta. Ovo neće biti predmet naših daljih analiza.²⁹

Možemo zaključiti, nezavisno od izabranog načina amortizacije kredita, da je ostatak duga (K_c) posle plaćenih c anuiteta jednak razlici odobrenog kredita (K) i otplaćenog dela kredita (O_c).

²⁹ Opširnije o izradi amortizacionog plana sa zaokruženim anuitetima pogledati sledeći izvor: Ralević, R., cit. delo, str. 82-85.

3.6. KONVERZIJA ZAJMA

Konverzija kredita je svaka promena uslova otplaćivanja kredita. Praktično može se promeniti ili interesna stopa ili vreme otplaćivanja kredita ili jedno i drugo ili konsolidovanje (spajanje) dva ili više kredita u jedan kredit, što rezultira promenom anuiteta kojim se kredit otplaćuje. Do promene uslova otplate kredita dolazi zbog promene uslova na finansijskom tržištu. Inače, konverzija kredita se vrši sporazumno, na predlog dužnika ili poverioca uz pristanak druge strane.

Dva slučaja konverzije kredita su karakteristična sa matematičkog aspekta:

1. dan promene uslova otplaćivanja kredita se poklapa sa danom otplaćivanja anuiteta,
2. dan promene uslova otplaćivanja kredita se ne poklapa sa plaćanjem anuiteta.

U oba slučaja se mora utvrditi ostatak duga, koji u odnosu na izmenjene (nove) uslove predstavlja novi dug.³⁰

3.6.1. PLAĆANJE ANUITETA SE POKLAPA SA PROMENOM USLOVA OTPLAĆIVANJA ZAJMA

Ukoliko se uslovi otplaćivanja kredita (K) promene na dan kada je dan plaćanja anuiteta (a), prvo se računa ostatak duga (R_{n-c}) na dan promene uslova prema prvobitnim uslovima otplaćivanja kredita. Potom se ostatak duga prilagođava novim uslovima otplaćivanja kredita (n_1 – produženo ili skraćeno vreme otplaćivanja kredita, p_1 – interesna stopa posle konverzije kredita, a_1 – anuitet posle konverzije kredita).

Anuitet prema početnim uslovima kredita se izračunava poznatom formulom

$$a = K * V_p^n.$$

Pošto smo izračunali anuitet, nalazimo ostatak duga: $R_{n-c} = a * IV_p^{n-c}$.

I na kraju, određujemo novi anuitet: $a_1 = R_{n-c} * V_{p_1}^{n-c+n_1}$.



Kredit za rekonstrukciju stana Petra Jovanovića kod Komercijalne banke a.d. Beograd, u iznosu od 45.000 evra se amortizuje 20 godina polugodišnjim jednakim anuitetima. Interes je 5% p.a., uz polugodišnje kapitalisanje. Posle 25 plaćenih anuiteta, Komercijalna banka menja uslove kredita i smanjuje interesnu stopu za 1% (p.a.) i produžava rok otplate kredita za 2 godine. Izračunati novi Petrov anuitet.

³⁰ U slučaju da dužnik otplaćuje više dugova i posle izvesnog vremena hoće da ih svede na jednu obavezu onda je potrebno u jednom (istom) trenutku izračunati vrednost svakog od tih dugova, da bi se spojile vrednosti tih dugova. Taj trenutak može da se poklapa sa trenutkom plaćanja anuiteta po prethodnim obavezama ili se razlikuje od njega.

Ovde je $K=45.000$, $n=20$, $m=2$, $p=5$, $a=?$, $R_{n-c}=?$, $p_1=p-1$, $n_1=n-c+2$, $a_1=?$

Petrov anuitet prema početnim uslovima kredita je:

$$a = K * V_{p/m}^{mn} = 45000 * V_{2,5}^{40} = 1729,63 \text{ evra.}$$

Ostatak Petrovog kredita u momentu promene uslova je:

$$R_{40-25} = a * IV_{2,5}^{40-25} = 1729,63 * IV_{2,5}^{15} = 21415,20 \text{ evra.}$$

Novi Petrov anuitet je:

$$a_1 = R_{40-25} * V_2^{15+4} = 21415,20 * V_2^{19} = 1365,90 \text{ evra.}$$

3.6.2. PLAĆANJE ANUITETA SE NE POKLAPA SA PROMENAMA USLOVA OTPLAĆIVANJA ZAJMA

Ukoliko se uslovi otplaćivanja kredita (K) ne promene na dan kada je dan plaćanja anuiteta (a), onda za iznalaženja novog anuiteta (a_1), ostatak duga (R_{n-c}) treba izračunati prema prvobitnim uslovima otplate kredita na dan plaćanja poslednjeg anuiteta i uvećati ga za prost interes (30,360) za period od dana plaćanja poslednjeg anuiteta do dana promene uslova. Zbir interesa i ostatka duga biće novi dugi koji treba dalje otplaćivati prema novim uslovima (n_1 – produženo ili skraćeno vreme otplaćivanja kredita, p_1 – interesna stopa posle konverzije kredita, a_1 – anuitet posle konverzije kredita) koji daju i novi anuitet.

Anuitet prema prvobitnim uslovima kredita izračunavamo formulom:

$$a = K * V_p^n.$$

Pošto smo izračunali anuitet, nalazimo ostatak duga po kreditu pošto je plaćen poslednji anuitet:

$$R_{n-c} = a * IV_p^{n-c}.$$

U sledećem koraku ostatak duga po kreditu uvećavamo prostim interesnim računom za period od dana plaćanja poslednjeg anuiteta do dana promene uslova:

$$R_{n-c+d} = R_{n-c} + \frac{R_{n-c} * p * d}{36000}.$$

I na kraju utvrđujemo novi anuitet:

$$a_1 = R_{n-c+d} * V_{p_1}^{n_1}.$$



Kredit za kupovinu automobila Maje Marković kod Raiffeisen banke a.d. Beograd, u iznosu od 20.000 evra se amortizuje za 8 godina u jednakim polugodišnjim anuitetima uz 6%p.a. i polugodišnje kapitalisanje. Tri meseca posle osmog plaćenog anuiteta interesna stopa se smanjila za 1%p.a., a Maja se obavezala da će ostatak duga isplatiti za narednih 10 godina jednakim godišnjim anuitetima. Izračunati novi Majin anuitet.

Ovde je $K=20000$, $n=8$, $m=2$, $p=6$, $a=?$, $R_{n-c+90d}=?$, $p_1=p-1$, $n_1=10$, $m_1=1$, $a_1=?$

Majin anuitet prema prvobitno odobrenim uslovima kredita je:

$$a = K * V_3^{16} = 20.000 * V_3^{16} = 1592,22 \text{ evra.}$$

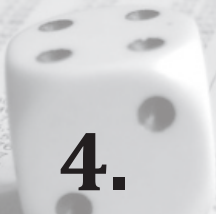
Ostatak duga posle plaćenog osmog anuiteta je:

$$R_{16-8} = a * IV_3^{16-8} = 1592,22 * IV_3^8 = 11176,89 \text{ evra.}$$

Ostatak duga na dan promene uslova tj. 90 dana od plaćenog osmog anuiteta je:

$$R_{8+90dana} = 11176,89 + \frac{11176,89 * 90 * 6}{36000} = 11344,54 \text{ evra.}$$

Majin novi anuitet je: $a_1 = 11344,54 * V_5^{10} = 1469,17 \text{ evra.}$



4.

POJEDINOSTI IZ FINANSIJSKE MATEMATIKE - MERENJE RIZIKA U DONOŠENJU INVESTICIONIH ODLUKA

U svakoj kompaniji se donose finansijske odluke, kao deo finansijskog menadžmenta kompanije, koje se mogu podeliti na:

1. **investicione** (odluke o budžetiranju ili projekti kapitalnog ulaganja), i
2. odluke o **finansiranju**.

Kompanija mora da odluči koliko sredstava i u koju imovinu će uložiti, odnosno, investirati (1) i kako će prikupiti neophodan novac (2).

Ukoliko je vrednost projekta veća od zahtevanog ulaganja, tada je projekat finansijski privlačan. Efikasan finansijski menadžer vodi svoju kompaniju prema ulaganjima u projekte koji povećavaju vrednost više nego što ulaganje zahteva. Drugim rečima, finansijski menadžer pomaže kompaniji da **uloži u projekte koji vrede više nego što koštaju**.

Prirodni finansijski cilj korporacije je maksimizacija sadašnje tržišne vrednosti kompanije. Maksimizacija vrednosti kompanije maksimizira vrednost imovine vlasnika kompanije, njenih osnivača ili akcionara.

Kapitalne investicije ponekad apsorbuju „značajne„ količine gotovine, a takođe imaju i dugoročne posledice. Imovina u koju se investira danas (kupovina, adaptacija, rekonstrukcija, itd.), može da odredi poslovanje kompanije u godinama koje slede. Iskustvo nam govori da mnogi kapitalni projekti (npr. izgradnja tunela La Manš je koštala oko 18 milijardi dolara, razvoj naftnih i plinskih polja u Rusiji uključuje trošak od oko 12 milijardi dolara, troškovi istraživanja i razvoja plinsko-električnog motora Toyot-u su koštali oko 6 milijardi dolara, itd.)³¹ zahtevaju velike investicije u nematerijalnu imovinu. Znači, bilo koja investicija realizovana u svrhu ostvarivanja dodatnog budućeg gotovinskog toka (prihoda), može se nazvati kapitalnim investicionim projektom, bez obzira da li je reč o ulaganju u materijalnu ili nematerijalnu imovinu. Vlasnici kompanije žele da kompanija ulaže u svaki projekat čija je vrednost veća od njegovog troška.

Razlika između vrednosti projekta i njegovog troška se naziva neto sadašnja vrednost. Menadžment kompanije će najbolje ostvarivati ciljeve svojih akcionara ukoliko investira u **projekte sa pozitivnom neto sadašnjom vrednošću**.

Ovo poglavlje započinjemo analizom kako izračunati neto sadašnju vrednost jednostavnog investicionog projekta. Takođe, ćemo analizirati i druge kriterijume (npr. period povraćaja, interna stopa prinosa, itd.) koje kompanije koriste pri evaulaciji (oceni) projekata.

31 Opširnije o investicionim odlukama pogledati sledeći izvor: Brealey, R., Myers, S., Marcus, A., Osnove korporativnih financija, 5.izdanje, McGraw-Hill Companiea, Inc., Copyright: Mate d.o.o. Zagreb, 2007., str. 178-203.

Umesto izračunavanja neto sadašnje vrednosti projekta, kompanije ponekad upoređuju očekivanu stopu prinosa na ulaganje u projekat sa stopom prinosa koju bi akcionari mogli da ostvare ulažući u imovinu jednakog rizika. Kompanije prihvataju samo one projekte koji će ostvariti stopu prinosa veću od one koju bi akcionari mogli ostvariti sami. U oba slučaja postoje određeni nedostaci koje je bitno sagledati pre donšenja odluke.

Nakon toga ćemo se pozabaviti složenijim problemima, poput izbora investiranja u jedan od više ponuđenih projekata, s obzirom na to da u velikom broju slučajeva kompanija nema dovoljno novca za ulaganja u više projekata.

4.1. NETO SADAŠNJA VREDNOST

Neto sadašnja vrednost je klasična metoda za ocenu investicionih projekata. Objektivni izbor kriterijuma na osnovu koga se vrši selekcija investicionih projekata je glavna pretpostavka za korišćenje metode (npr. prosečna cena kapitala kompanije, stopa prinosa koju vlasnici mogu očekivati investirajući na tržištu kapitala, itd.).

Stopa prinosa koju vlasnici mogu očekivati investirajući u imovinu istog rizika ili prosečna cena kapitala, se koristi kao **diskontna stopa** pomoću koje se očekivani godišnji neto novačni tok od eksploatacije projekta u ekonomskom veku njegovog trajanja svodi na sadašnju vrednost i na taj način postaje uporediv sa iznosom sadašnje vrednosti kapitalnog izdatka u sam projekat. Znači, **neto sadašnja vrednost predstavlja razliku između sadašnje vrednosti (očekivanih) novčanih prihoda i sadašnje vrednosti novčanih rashoda projekta**.

Diskontna stopa ili oportunitetni trošak kapitala je očekivana stopa prinosa koje se kompanija odriče radi investiranja u projekat.

Matematički neto sadašnju vrednost (NSV ili NPV – *Net Present Value*) izražavamo sledećom formulom:

$$NPV = \sum_{t=1}^n \frac{P_t - C_t}{(1+k)^t} - C_0$$

gde su:

P_t - godišnji novčani prihodi (primanja),

C_t - godišnji kapitalni troškovi (izdaci),

C_0 - inicijalni kapitalni izdatak,

k - diskontna stopa.

Dalje formulu možemo prikazati na sledeći način:

$$NPV = \frac{P_1 - C_1}{(1+k)} + \frac{P_2 - C_2}{(1+k)^2} + \dots + \frac{P_n - C_n}{(1+k)^n} - C_0$$

Ukoliko razliku $P_t - C_t$ označimo sa q_t jednačina neto sadašnje vrednosti postaje:

$$NSV = \sum_{t=1}^n \frac{q_t}{(1+k)^t} - C_0.$$

Ukoliko pretpostavimo da investicija koja je predmet evaluacije ostvaruje u određenom vremenskom period iste godišnje iznose vrednosti q , odnosno,

$$q_1 = q_2 = q_3 = \dots = q_n = q.$$

Sadašnja vrednost investicije (SV) se može predstaviti kao zbir diskontovanih vrednosti jedne novčane jedinice u datom vremenu pomnoženo sa vrednošću q :

$$SV = q * \left(\frac{1}{1+k} + \frac{1}{(1+k)^2} + \dots + \frac{1}{(1+k)^n} \right)$$

$$SV = q * \frac{(1+k)^n - 1}{k * (1+k)^n}.$$

S obzirom na to da je $r = 1+k$, formula za sadašnju vrednost se može izraziti na sledeći način:

$$SV = q * \frac{r^n - 1}{k * r^n}.$$

U opštem slučaju investicija bi bila opravdana ako je $SV > C_0$, odnosno, menadžeri povećavaju bogatstvo akcionara prihvatajući sve projekte čija je vrednost veća od njihovog troška. Znači, trebalo bi **da prihvataju sve projekte sa pozitivnom neto sadašnjom vrednošću** tzv. „**zlatni standard**” investicionih kriterijuma i jedini kriterijum konzistentan sa maksimizacijom vrednosti kompanije.³²

Trebalo bi imati u vidu da je kalkulacija neto sadašnje vrednosti tačna onoliko koliko su tačne projekcije novčanih tokova.

Ukoliko kompanija treba da bira između međusobno isključivih projekata onda će izračunati neto sadašnju vrednost za svaki projekat ponaosob i **izabrati onaj sa najvećom neto sadašnjom vrednošću projekta**. Podrazumeva se da se **projekti upoređuju na**

32 Dokaz ovog stava može se videti u izvoru: Kočović, J., cit. delo, str. 133.

istoj osnovi, odnosno, u istom vremenskom trenutku. Shodno tome, NSV obezbeđuje korektno pravilo za izbor između međusobno isključivih projekata.

Analizirajući formulu za sadašnju vrednost investicije možemo uočiti da ona zavisi od sledećih faktora:

- ♦ Razlike između ukupnih godišnjih prihoda i kapitalnih izdataka (**q**) ili kvazi renta,
- ♦ Predviđenog veka trajanja investicije (**n**), odnosno, trajanja opreme,
- ♦ Stope aktualizacije (**k**) koja se koristi kod obračuna ili interesne stope kojom se kvazi renta svodi na sadašnju vrednost.

Shodno tome, kada je diskontna stopa jednaka nuli, NSV je jednaka razlici algebarske sume diskontovanih neto prihoda i početnog izdatka (troška):

$$NSV = \sum_{t=1}^n R_t - C_0 .$$

Takođe, iz osnovne formule NSV možemo uočiti obrnutu zavisnost sadašnje vrednosti investicije od veličine diskontne stope (**k**). Ako je pomenuta stopa veća utoliko će sadašnja vrednost biti manja i obrnuto.³³

Znači, metoda neto sadašnje vrednosti uzima u obzir:

- ♦ ceo vek trajanja projekta, odnosno, sva primanja i sva izdavanja,
- ♦ vremenske preferencije kompanija, zato što buduća primanja i izdavanja svodi na njihovu sadašnju vrednost na početku veka trajanja projekta.

Ukoliko govorimo o nedostacima metode neto sadašnje vrednosti, možemo reći da se oni ogledaju u tome što:

- ♦ meri samo apsolutne efekte projekta na stvaranje materijalne osnove,
- ♦ postoje problemi oko realnog izbora diskontne stope i procene rizika.

Na kraju, možemo konstatovati da metoda neto sadašnje vrednosti daje menadžerima jednostavnu instrukciju: „Maksimiziraj neto sadašnju vrednost”.

4.2. PERIOD OTPLATE

Period otplate je vremenski period neophodan da novčani tokovi projekta vrate (isplate) početno ulaganje. **Pravilo perioda otplate** kaže da projekat treba prihvatiti ako je očekivani period povraćaja kraći od nekog zadatog prikladnog perioda. Predstavlja jednostavnu i brzu iskustvenu metodu.

³³ Dokaz ovog stava može se videti u izvoru: Kočović, J., cit. delo, str. 137.

U praksi se koristi:

a) **prosečni period otplate**, koji možemo izraziti sledećom formulom:

$$\text{Procenjeni period otplate} = \frac{\text{Inicijalni kapitalni izdatak}}{\text{Prosečni godišnji neto novčani tok}}$$

$$\text{PPO} = \frac{C_o}{\text{PNNT}}$$

b) **stvarni period otplate**, koji označava vreme koje je neopohodno da se kapitalni izdatak u neki projekat nadoknadi iz planirane dinamike neto novčanog toka u veku trajanja projekta.

Na **primeru** projekta migracije na novo softversko rešenje u Piraeus banci a.d. Beograd, ćemo odrediti stvarni i prosečni period otplate. Piraeus banka a.d. Beograd se odlučila da kupi novo softversko rešenje Antegre d.o.o. Beograd – BiWeb. Projekat zahteva investiciju u softver od 800.000 evra, a očekuje se neto tok gotovine po godinama u sledećim iznosima: 220.000 evra, 200.000 evra, 180.000 evra, 160.000 evra i 140.000 evra.



$$\begin{aligned} \text{Prosečni godišnji neto novčani tok} &= \\ &= (220000 + 200000 + 180000 + 160000 + 140000) / 5 = 900000 / 5 = 180000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Procenjeni} &= \frac{\text{Inicijalni kapitalni izdatak}}{\text{Prosečni godišnji neto novčani tok}} = \frac{800000}{180000} = 4,44 \\ \text{period otplate} & \end{aligned}$$

Stvarni period otplate projekta migracije utvrđujemo na opisan način:

Godina (n)	Godišnji neto novčani tok (EUR)	Ostatak ulaganja u projekat (EUR)
0	800.000	800.000
1	220.000	580.000
2	200.000	380.000
3	180.000	200.000
4	160.000	40.000
5	140.000	0

Proizilazi da je stvarni period otplate projekta migracije na novo softversko rešenje u Piraeus banci a.d. Beograd iznosi 4,28 (4+28% od 5-te godine), što je kraće od 4,44 godina koliko iznosi prosečni period otplate.

Ipak, rangiranje projekata je objektivnije na bazi stvarnog perioda otplate, pošto on uvažava vremenski raspored neto novčanog toka od eksploatacije projekta i na taj način implicitno priznaje vremensku determinantu novca.

Metod otplate je vremenski koncept koji pokazuje brzinu otplate investicije i ne izražava rentabilnost projekta. Takođe, ne uzima u obzir ni vremensku vrednost novca. Osnovni razlog atraktivnosti kriterijuma perioda otplate je njegova jednostavnost i razumljivost za menadžere različitih profila. Može pomoći u jednostavnijem delu analize projekta.³⁴

U praksi se period otplate koristi kada je kapitalna investicija mala ili kada su efekti projekta toliko očigledni da je nepotrebna formalna analiza. Na primer, ako se očekuje da će projekat donositi stalne novčane tokove sledećih deset godina, a period otplate je samo dve godine, projekat gotovo sigurno ima pozitivnu neto sadašnju vrednost.

4.3. METODA INTERNE STOPE PRINOSA

Interna stopa prinosa je diskontna stopa pri kojoj je neto sadašnja vrednost (NSV) projekta jednaka nuli. Projekat treba prihvatiti ako je interna stopa prinosa veća od oportunitetnog troška kapitala.

Ukoliko je oportunitetni trošak kapitala manji od stope prinosa na projekat, tada je NSV projekta koji se posmatra pozitivan. Ukoliko je trošak kapitala viši od stope prinosa na projekat, tada je NSV negativan. Proizilazi, da **pravilo interne stope prinosa i NSV su jednaki u slučaju gde nema zavisnosti između projekata**. Međutim, u slučaju međusobno isključivih projekata metoda interne stope prinosa se ne može koristiti.

Pošto smo definisali metodu interne stope prinosa, sada prelazimo na izračunavanje interne stope prinosa. Neka su $P_1, P_2, \dots, P_h$ novčana primanja (uplate) u trenucima $t_1, t_2, \dots, t_h$ i neka su $C_1, C_2, \dots, C_k$ izdaci (isplate) u trenucima $t_1, t_2, \dots, t_k$.

U skladu sa definicijom interna stopa prinosa je:

$$P_1(1+i)^{-t_1} + P_2(1+i)^{-t_2} + \dots + P_h(1+i)^{-t_h} = C_1(1+i)^{-t_1} + C_2(1+i)^{-t_2} + \dots + C_k(1+i)^{-t_k}$$

Uvažavajući srednji rok plaćanja

$$i = {}^{t_p-t_c} \sqrt[\frac{P_1 + P_2 + \dots + P_h}{C_1 + C_2 + \dots + C_k}]{} - 1 \quad i = \frac{P}{100}$$

³⁴ Menadžeri ponekad računaju **diskontni period otplate**. To je broj godina pre nego što sadašnja vrednost očekivanih novčanih tokova postane jednaka ili veća od početnog ulaganja.

odavde je

$$i = 100 * \left({}^{t_p - t_c} \sqrt[t_p - t_c]{\frac{P_1 + P_2 + \dots + P_h}{C_1 + C_2 + \dots + C_k}} - 1 \right)$$

gde su srednji rokovi plaćanja t_p i t_c :

$$t_p = \frac{P_1 t_1 + P_2 t_2 + \dots + P_h t_h}{P_1 + P_2 + \dots + P_h} \text{ i } t_c = \frac{C_1 t_1 + C_2 t_2 + \dots + C_k t_k}{C_1 + C_2 + \dots + C_k}.$$

Na kraju, trebalo bi još jednom naglasiti koja je razlika između interne stope prinosa i oportunitetnog troška kapitala. **Interna stopa prinosa meri profitabilnost projekta**, i u tom smislu zavisi od novčanih tokova projekta. **Oportunitetni trošak kapitala je standard od koga zavisi da li ćemo projekat prihvatiti ili ne**, i jednak je prinosu koji se može ostvariti na tržištu kapitala na investicijama istog rizika.

1. Imperijal gradnja d.o.o. Beograd se bavi gradnjom stambenih i poslovnih objekata u Beogradu. Trenutno razmatra izgradnju kancelarijskog objekta u industrijskoj zoni u Kumodražu. Zemljište bi koštalo 50.000 evra, a izgradnja objekta dodatnih 300.000 evra. Imperijal gradnja predviđa nedostatak kancelarijskog prostora na tržištu, stoga bi zgradu mogla da proda za godinu dana za 400.000 evra. Znači, danas bi investirali 350.000 evra u očekivanju 400.000 evra na kraju godine, odnosno, Imperijal gradnja bi trebalo da prihvati projekat ako je sadašnja vrednost očekivanih 400.000 evra veća od investiranih 350.000 evra. Pretpostavka da je 400.000 evra povraćaja sigurno.

Takođe, Imperijal gradnja ima mogućnost da uloži u jednogodišnji trezorski zapis Ministarstva finansija, koji nosi prinos od 7%p.a. (diskontna stopa ili oportunitetni trošak kapitala). Koliko bi danas Imperijal gradnja trebalo da uloži u trezorske zapise kako bi za godinu dana primila 400.000 evra?

$$\text{Proizilazi: } 400000 * \frac{1}{1,07} = 400000 * 0,9346 = 373832 \text{ evra.}$$

S druge strane, Imperijal gradnja može da odluči da proda svoj projekat pošto je kupila zemljište i platila izgradnju zgrade. Za koliko novca bi Imperijal gradnja mogla da proda svoj projekat?

Odgovor je 373.832 evra (ista kalkulacija kao i u slučaju investiranja u trezorske zapise).



Kolika je NSV?

$$NSV = SV - \text{potrebno ulaganje} = 373832 - 350000 = 23.832 \text{ evra}$$

Imperijal gradnja bi trebalo da prihvati sve alternative sa pozitivnom neto sadašnjom vrednošću, odnosno, sve projekte čija je vrednost veća od njihovog troška (350.000 evra).

2. Imperijal gradnja d.o.o. Beograd je izgradila kancelarijski objekat u Beogradu. Troškovi kupovine zemljišta i izgradnje objekta su iznosili 350.000 evra. Imperijal gradnja je uspela da pronađe zakupca koji je spreman da iznajmi prostor na tri godine uz godišnju rentu od 16.000 evra. Takođe, Imperijal gradnja predviđa da će moći poslovnu zgradu da proda za tri godine za 450.000 evra.

Oportunitetni trošak kapitala je 7%p.a. (mogućnost investiranja u trezorske zapise Ministarstva finansija).

Izračunati sadašnju vrednost (SV) i neto sadašnju vrednost (NSV) novčanih tokova projekta Imperijal gradnje.

$$SV = \frac{C_1}{1+r} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \frac{C_3}{(1+r)^3} = \frac{16000}{1+0,07} + \frac{16000}{(1+0,07)^2} + \frac{466000}{(1+0,07)^3} = 409323 \text{ evra.}$$

$$NSV = C_0 + \frac{C_1}{1+r} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \frac{C_3}{(1+r)^3} = -350000 + \frac{16000}{1+0,07} + \frac{16000}{(1+0,07)^2} + \frac{466000}{(1+0,07)^3} = 59323 \text{ evra.}$$

Možemo zaključiti da se Imperijal gradnji više isplati opcija izdavanja zgrade na tri godine i potom prodaje, nego prvobitna opcija da je prodaju na kraju prve godine (NSV je veća).

3. Imperijal gradnja d.o.o. Beograd je izgradila kancelarijski objekat u Beogradu. Troškovi kupovine zemljišta i izgradnje objekta su iznosili 350.000 evra. Imperijal gradnja je uspela da pronađe zakupca koji je spreman da iznajmi prostor na tri godine uz godišnju rentu od 16.000 evra. Takođe, Imperijal gradnja predviđa da će moći poslovnu zgradu da proda za tri godine za 450.000 evra.

Oportunitetni trošak kapitala je 7%p.a. (mogućnost investiranja u trezorske zapise Ministarstva finansija).

Izračunati internu stopu prinosa za projekat poslovne zgrade Imperijal gradnje.

$$IRR = -350000 + \frac{16000}{1+IRR} + \frac{16000}{(1+IRR)^2} + \frac{466000}{(1+IRR)^3} = 0 \quad IRR = 12,96\%$$

Interna stopa prinosa za projekat poslovne zgrade Imperijal gradnje je 12,96%.

II
DEO

AKTUARSTVO



KADA PROČITATE OVAJ DEO TREBALO BI DA:

- ✓ Znete koji su osnovni aktuarski principi,
- ✓ Objasnite aktuarske osnove osiguranja imovine i drugih neživotnih osiguranja,
- ✓ Objasnite aktuarske osnove osiguranja kapitala,
- ✓ Znete aktuarske osnove osiguranja rente i veštačenja gubitka zarade i izdržavanja.



1.

AKTUARSKA MATEMATIKA

„Aktuarska matematika kao grana primenjene matematike obrađuje matematičke osnove osiguranja života. Određuje obaveze između osiguranika i osiguravajućeg društva. Zasniva se na računu verovatnoće kao i na principu ekvivalencije po kome zbir svih uplata svedenih na jedan rok mora biti jednak zbiru svih isplata svedenih na isti rok. Aktuarska matematika služi izgradnji, proširenju i unapređenju osiguranja života vodeći računa da se svi osiguranici tretiraju jednako pravedno.” (Ralević, R.)³⁵

1.1. POJAM I PREDMET AKTUARSKE MATEMATIKE

Osiguranje je kompleksan sistem i multidisciplinarna nauka koja sadrži pravne, ekonomske, organizacione i aktuarske principe. U današnjim savremenim uslovima nezamislivo je osiguranje u tržišnoj privredi bez matematike rizika, odnosno aktuarstva. Osiguravaju se samo slučajni budući događaji koji se ponavljaju, a poznato je da je slučajni događaj elementarni pojam teorije verovatnoće, matematičke statistike odnosno aktuarstva.

Pratilac funkcionisanja osiguranja je neizvesnost i rizik, koji se međusobno razlikuju. Neizvesnost je dilema nastupanja budućeg stanja u kome verovatnoća nastupanja nema nikakvu ulogu a javlja se kod poželjnih i kod nepoželjnih događaja. S druge strane rizik se odnosi na nepoželjni slučajni događaj koji se ponavlja sa poznatom verovatnoćom.

Aktuarska matematika je oblast matematike kojom se rešavaju računski problemi osiguranja (obračun premija) i to primenom matematičko – statističkih metoda, teorije verovatnoće i rizika, finansijske matematike kao i specijalnim metodama koje se primenjuju isključivo u osiguranju, stohastički modeli.

Aktuarska matematika se rukovodi istim principima kao i finansijska matematika (i to princip ekvivalencije svih isplata i svih uplata svedenih na isti vremenski rok), a razlika je u tome što računi finansijske matematike ne zavise od starosti lica, dok su računi aktuarske matematike životnog osiguranja vezani za starost lica koje se osigurava.

35 Cit.definicija iz izvora: Ralević, R., cit.delo, str. III

Aktuarska matematika uspešno rešava predviđanje nastupanja osiguranih događaja Zakonom velikih brojeva i računom verovatnoće a kao pomoćno sredstvo formiraju se Tablice smrtnosti i Komutativni brojevi.

1.2. ZAKON VELIKIH BROJEVA

Primena zakona velikih brojeva je u pretpostavci da u velikom broju slučajnih pojava njihova srednja vrednost prestaje da bude slučajna veličina, jer se samo u masi ispoljavaju pravilnosti i zakonitosti. Nastupanje događaja pojedinačno i u malom broju predstavlja slučaj, a nastupanje istog događaja u masi se ispoljava kao zakonitost. Na primer, ako uzmemo da u jednoj godini koju posmatramo od konkretne grupe ljudi od devet lica iste starosti umre petoro (55,55%) ne treba izvući zaključak da je verovatnoća smrti za ljude posmatrane starosti 55,55%. Međutim, posmatranjem grupe od 90.000 ljudi iste starosti mogu se formirati verovatnoće smrtnosti lica posmatrane starosti.

Kako deluje zakon velikih brojeva možemo ilustrovati na jednom primeru:



Eksperiment se sastoji od bacanja novčića i pojavljivanja grba na gornjoj strani, pri svakom bacanju. Rezultati su dati u tabeli:

<i>Eksperiment obavio</i>	<i>Broj bacanja</i>	<i>Pojava grba (događaj A)</i>	<i>Relativna učestalost A</i>
<i>B1</i>	<i>6500</i>	<i>3271</i>	<i>50,223%</i>
<i>B2</i>	<i>15000</i>	<i>7609</i>	<i>50,7266%</i>
<i>B3</i>	<i>35000</i>	<i>17530</i>	<i>50,0857%</i>

Broj pojavljivanja grba teži $\frac{1}{2}$ ili 50%.

U osiguranju zakon velikih brojeva ima veliki značaj, zato što za osiguravača ne postoji neizvesnost za ukupan broj pokrivenih rizika nego pravilnost i zakonitost. Isto tako sa većim brojem osiguranih predmeta u masi je veća mogućnost tačnijeg predviđanja budućih osiguranih slučajeva a time i budućih obaveza, na osnovu čega se određuju sredstva za njihovo pokriće.

1.3. MATEMATIČKE OSNOVE OSIGURANJA – TEORIJA VEROVATNOĆE

Deo matematike koji izučava zakonitosti slučajnih pojava je teorija verovatnoće. Osnova za određivanje premija osiguranja je izračunavanje verovatnoće nastupanja štetnih događaja u osiguranju. Njenom primenom u osiguranju na nesrećene slučajeve se ne gleda kao na nepredvidive događaje, već kao na pojave koje se mogu zbog određenih pravilnosti, predvideti.

Po pravilu pojam verovatnoća vezuje se sa realizacijom eksperimenata, pa se ta realizacija naziva događajem. Termin: možda, sigurno, verovatno, nemoguće i sl. izražavaju procenu nastupanja nekog događaja koji se može ili ne mora desiti. Takav događaj naziva se slučajni događaj.

Skup svih mogućih opita (ishoda) naziva se skup mogućih ishoda i obeležava se sa Ω , a elementi ovog skupa nazivaju se elementarni događaji i obeležavaju se sa $\omega_i, i = 1, \dots, n$. Slučajni događaji obeležavaju se velikim slovima A, B, C, Slučajan događaj A je podskup skupa Ω . Ako u skupu Ω svi elementi imaju mogući ishod takav skup je siguran ili izvestan događaj. Prazan skup ($\emptyset$) je nemoguć događaj.

Slučajni događaji su definisani kao podskupovi skupa svih mogućih ishoda Ω . U teoriji verovatnoće, kada se radi sa slučajnim događajima, važe sve relacije između skupova koje su definisane i u matematici. Ako su A i B slučajni događaji tada važi:

1. $A \subset B$ simbol $\subset$ znači pripada

Kada se realizacijom događaja A realizuje događaj B, kažemo da A implicira B, ili da je slučajni događaj A deo slučajnog događaja B.

$$A \subset B \text{ i } B \subset A$$

Ako A implicira B i B implicira A kažemo da su događaji A i B ekvivalentni

$$A=B$$

2. $\overline{A}$ (non A)

Suprotan događaj događaju A je ako i samo ako se on realizuje kada se A ne realizuje. Suprotan slučajni događaj $\overline{A}$ sastoji se od svih elementarnih događaja koji ne pripadaju slučajnom događaju A ali on je komplement slučajnog događaja A.

3. $A \cup B$ ili $A + B$ simbol $\cup$ označava uniju

Slučajni događaj se realizuje ako i samo ako se realizuje bar jedan od slučajnih događaja A i B. Ako su slučajni događaji A i B disjunktivni (slučajni događaji koji se međusobno isključuju) unija slučajnih događaja A i B obeležavaju se kao $A+B$, to je zbir dva slučajna događaja A i B.

4. $A \cap B$ ili $A \cdot B$ simbol $\cap$ označava presek

Slučajni događaj se realizuje ako i samo ako se realizuje i A i B istovremeno. Ako je $A \cdot B = \emptyset$ (prazan skup) slučajni događaji A i B su disjunktivni, odnosno međusobno se isključuju.

5. $A \setminus B$ ili $A - B$

Razlika slučajnih događaja A i B; slučajni događaj se realizuje ako i samo ako se realizuje slučajni događaj A i ne realizuje se slučajni događaj B.

Da bi se utvrdila premija osiguranja a osiguranje uspešno izvršilo svoje funkcije, potrebno je odrediti verovatnoću nastupanja ekonomski štetnih događaja kod osiguranih lica i objekata. Postoji odstupanje na više ili na niže od izračunate verovatnoće ali u velikim serijama pokazuju izvesnu zakonitost pomoću koje se koriguje utvrđena verovatnoća. Cenu rizika određuje stepen verovatnoće nastajanja osiguranog slučaja. Ako je verovatnoća nastupanja štetnog događaja veća i premija je veća a rizik lošiji. Ukoliko je verovatnoća nastupanja štetnog događaja manja i premija je niža, tada je rizik bolji. Uspostavljanje jednakosti između neto premija i rizika koje te premije treba da pokriju, realizovaće se teorijom verovatnoće kroz zakon velikih brojeva.

Klasična verovatnoća predstavlja odnos povoljnih realizacija događaja A i broj mogućih rezultata eksperimenata.

$$p(A) = \frac{m}{n}$$

m je broj povoljnih realizacija događaja A

n je broj eksperimenata.

Klasična verovatnoća ima sledeće osobine:

$$p(A) \geq 0$$

Verovatnoća bilo kog događaja je nenegativan broj, razlomak $\frac{m}{n}$ nikada ne može biti negativna vrednost.

$$p(A) = 0$$

Ako je $m = 0$ događaj je nemoguć.

$$p(A) = 1$$

Ako je događaj A pouzdan, tada je $m = n$.

Vrednost klasične verovatnoće nalazi se u granicama:

$$0 \leq p(A) \leq 1$$

Verovatnoća suprotnog događaja $p(\bar{A})$, čita se non A, jednaka je:

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{m}{n}$$

2.

RAČUNSKE OSNOVE OBRAČUNA TARIFA U OSIGURANJU LICA

2.1. TABLICE SMRTNOSTI

Tehnička osnova za formiranje tarifa u osiguranju života su Tablice smrtnosti koje su formirane na osnovu poznavanja računa verovatnoće. One su osnovni pokazatelj takozvane izravnote verovatnoće smrtnosti na osnovu koje se izračunavaju ostale biometrijske funkcije: verovatnoća doživljenja i kretanja broja živih i umrlih lica u posmatranom skupu. Ovako dobijeni podaci uz upotrebu određene kamatne stope omogućuju da se izračunaju Komutativni brojevi koji se koriste za izračunavanje neto premija u osiguranju života.

Tablice smrtnosti mogu se konstruisati direktnom ili indirektnom metodom. Direktnom metodom prati se život i smrt određenog skupa novorođenih, tako što se ustanovi koliko lica iz toga skupa je ostalo u životu po isteku prve godine života, zatim po isteku druge godine života i tako redom sve do smrti poslednjeg lica iz posmatranog skupa. Ovaj metod iz praktičnih razloga je neizvodljiv pa je u primeni indirektan metod. Indirektan metod posmatra istovremeno više grupa lica razne starosti, zatim utvrđuju verovatnoće smrti za pojedine klase starosti. Dobijeni podaci se primene na fiktivnu grupu za sve godine starosti.

Indirektna metoda:

Neka je I_x oznaka za broj živih lica starih x godina.

Formiraju se u istoj godini sledeće grupe:

1. grupa od 100000 lica starih 10 godina
2. grupa od 100000 lica starih 11 godina
3. grupa od 100000 lica starih 12 godina
- ⋮
- ⋮
90. grupa od 100000 lica starih 99 godina
91. grupa od 100000 lica starih 100 godina
92. grupa od 100000 lica starih 101 godina,

I sve do najstarije grupe lica. Kod poslednjih grupa se uzima u skup toliko lica koliko je moguće, s obzirom na mali broj lica duboke starosti.



U toku jedne (iste) godine verovatnoća smrti je:

6,76 ‰	lica iz 1. grupe
6,786 ‰	lica iz 2. grupe
6,812 ‰	lica iz 3. grupe
⋮	⋮
⋮	⋮
2,166%	lica iz 46 grupe
⋮	⋮
75%	lica iz 89 grupe
100%	lica iz 90 grupe
91 i ostale grupe nisu ni formirane.	

Dobijeni podaci čine moguću tablicu iz koje se dalje izvode drugi podaci potrebni za izračunavanje tarifa u osiguranju života.

Da bi se dobila verovatnoća smrti, potrebno je staviti u odnos broj realizovanih smrtnih slučajeva grupe lica iste starosti u toku jedne posmatrane godine prema celokupnom broju lica koja sačinjavaju grupu.

Ako posmatramo 100.000, 10-godišnjaka i ako je verovatnoća smrti za ta lica 6,76%, to znači da će od 100.000 10-godišnjaka u toku jedne godine umreti 676 lica, znači da će 11 godinu doživeti 99.324 lica.

$l_{10} = 100.000$ (broj živih krajem 10. odnosno početkom 11. godine)

U toku 11.god. umre 6,76% = 676 lica

$l_{11} = 99324$ (broj živih krajem 11. odnosno početkom 12. godine)

U toku 12.god. umre 6,786% = 674 lica

$l_{12} = 98650$ (broj živih krajem 12. odnosno početkom 13. godine)

U toku 13.god. umre 6,812% = 672 lica

itd.

$l_{55} = 63469$ (broj živih krajem 55. odnosno početkom 56. godine)

U toku 56.god. umre 2,166% = 1375 lica

$l_{56} = 62094$

itd.

$l_{98} = 4$ (broj živih krajem 98. odnosno početkom 99. godine)

U toku 99.god. umre 75% = 3 lica

$l_{99} = 1$

U toku 100.god. umre 100% = 1 lica

$l_{100} = 0$ (početkom 101.godine nema živih lica posmatrane grupe)

Svi podaci za l_{10} , l_{11} , l_{12} , ... mogu se naći u Tablici smrtnosti 17 engleskih društava (interes 4 %) u prilogu ove knjige.

2.2. VEROVATNOĆA ŽIVOTA I SMRTI ZA JEDNO LICE

Neka su $l_x, l_{x+1}, l_{x+2}, \dots, l_{x+n}$ ³⁶ oznake za broj živih lica starih $x, x+1, x+2, \dots, x+n$ godina.

U Tablicama smrtnosti se vidi da važi:

$$l_x > l_{x+1} > l_{x+2} > \dots > l_{x+n}$$

Ako označimo sa dx broj lica koja umiru u toku $(x+1)$ -ve godine, tj. između punih x i $x+1$ godina, tada je:

$$dx = l_x - l_{x+1}$$

Koristeći račun verovatnoće, možemo da zaključimo: verovatnoća p_x da će lice staro x godina doživeti $(x+1)$ godinu iznosi:

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

Verovatnoća da će lice staro $(x+1)$ - godinu doživeti $(x+2)$ -godinu je:

$$p_{x+1} = \frac{l_{x+2}}{l_{x+1}} \quad \text{ili} \quad {}_2p_x = \frac{l_{x+2}}{l_x}$$

Verovatnoća da će lice staro n godina doživi $(x+n)$ godina je:

$${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

Ako sa q označimo verovatnoću da se lice staro x godina neće doživeti $x+1$ godinu tj. da će umreti u toku $(x+1)$ -ve godine starosti je:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = 1 - p_x$$

Verovatnoća da lice staro x godina neće doživeti $x+2$ godinu, je:

$${}_2q_x = \frac{l_x - l_{x+2}}{l_x} = 1 - \frac{l_{x+2}}{l_x} = 1 - {}_2p_x$$

Verovatnoća da lice staro n godina neće doživeti $x+n$ godinu, biće:

$${}_nq_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x} = 1 - {}_np_x$$

³⁶ Formule i njihovo izvođenje preuzeto iz sledećeg izvora: Kočović, J., Aktuarske osnove formiranja tarifa u osiguranju lica, Ekonomski fakultet, Beograd, 2006.



1. Kolika je verovatnoća da će lice staro 30.godina:

- a) Doživeti 60 godina života.
- b) Umreti pre nego navršši 60 godina starosti (neće doživeti).
- c) Doživeti 80 godina života.
- d) Umreti pre nego što navršši 80 godina starosti (neće doživeti)?

Rešenje:

$${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

$$a) \quad {}_{30} p_{60} = \frac{l_{30} + l_{30}}{l_{30}} = \frac{l_{60}}{l_{30}} = \frac{55975}{86292} = 0,6487 \text{ ili } 64,8\%$$

$${}_n q_x = 1 - {}_n p_x$$

$$b) \quad {}_{30} q_{60} = 1 - 0,6487 = 0,3513 \text{ ili } 35,13\%$$

$$c) \quad {}_{50} p_{80} = \frac{l_{30} + l_{50}}{l_{30}} = \frac{l_{80}}{l_{30}} = \frac{13290}{86292} = 0,1540 \text{ ili } 15,40\%$$

$$d) \quad {}_{30} q_{80} = 1 - {}_{50} p_{80} = 1 - 0,1540 = 0,846 \text{ ili } 84,6\%$$

2. U jednoj firmi ima 20 radnika sa po 25 godina života, 15 radnika sa po 32 godine, 10 radnika sa po 36 godina, 8 radnika sa po 48 godina i 3 radnika sa po 59 godina. Koliko od ovih radnika će verovatno živeti posle 20 godina?

Rešenje:

Ako sa G označimo broj članova neke grupe lica starosti x godina, onda će broj članova ove grupe koji će verovatno živeti posle n godina biti:

$$G_n = G \cdot {}_n p_x = G \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

$$G_{20} = 20 \cdot \frac{l_{25+20}}{l_{25}} + 15 \cdot \frac{l_{32+20}}{l_{32}} + 10 \cdot \frac{l_{36+20}}{l_{36}} + 8 \cdot \frac{l_{48+20}}{l_{48}} + 3 \cdot \frac{l_{59+20}}{l_{59}}$$

$$G_{20} = 20 \cdot \frac{74435}{89835} + 15 \cdot \frac{67253}{84831} + 10 \cdot \frac{62094}{81814} + 8 \cdot \frac{40374}{71601} + 3 \cdot \frac{15277}{57600}$$

$$G_{20} \approx 41$$

Posle 20 godina će verovatno biti u životu 41 od 56 radnika posmatrane firme.

2.3. VEROVATNO I SREDNJE TRAJANJE ŽIVOTA

2.3.1. VEROVATNO TRAJANJE ŽIVOTA

Za verovatno trajanje života osobe stare x godina, poćićemo od pretpostavke da je događaj verovatan ako mu je verovatnoća jednaka $\frac{1}{2}$, odnosno za l_x lica to će biti onda kada od njih ostane živo l_{x+n} lica, pa ćemo imati:

$$\frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{1}{2} \quad \text{ili} \quad l_{x+n} = \frac{l_x}{2}$$

Koristeći Tablice smrtnosti možemo odrediti ovaj broj, koji će da predstavljati verovatno trajanje života osobe stare x godina.

Koliko je verovatno trajanje života osobe stare od 29 godina?

Rešenje:

$$\begin{aligned} \frac{l_{29+n}}{l_{29}} &= \frac{1}{2} \\ l_{29+n} &= \frac{l_{29}}{2} = \frac{87012}{2} = 43506 \end{aligned}$$

Izračunat broj živih lica je između dve tablične vrednosti (Tablica smrtnosti) $l_{66} = 44693$ i $l_{67} = 42565$. Verovatno trajanje života je između $(66-29)=37$ i $(67-29)=38$ godina, pa je:

$$37 < n < 38$$

Zaokružiti se na manji broj: $29 + n = 66 \Rightarrow n \approx 37$

Verovatnoća trajanja života lica starog 29 godina iznosi približno još 37 godina.



2.3.2. SREDNJE TRAJANJE ŽIVOTA

Pod srednjim trajanjem života podrazumeva se prosečan broj godina koje bi još živela osoba stara x godina. Pretpostavimo da lica umiru početkom posmatrane godine. Od grupe koja čini l_x lica starih x godina, sledeću $(x+1)$ -vu godinu doživeće l_{x+1} lica. Od ovih l_{x+1} lica u posmatranoj godini živi po 1 godinu, drugu godinu proživeće l_{x+2} osobe i tako redom. Pa je $l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \dots$ ukupan broj godina koje prežive sve osobe grupe od l_x lica.

Srednje trajanje života lica bića:

$$e_x = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \dots}{l_x}$$

Ako pretpostavimo da osobe koje umiru u nekoj godini krajem godine, tada bi ukupan broj godina koja proživi l_x lica bilo:

$$l_x + l_{x+1} + \dots$$

A srednje trajanje života je:

$$e'_x = \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \dots}{l_x} = 1 + e_x$$

Umiranje je tokom cele godine, zato što u toku godine ne umiru svi na početku ni na kraju godine, pa iz tog razloga srednje trajanje života nalazi se između krajnjih vrednosti e_x i e'_x , odnosno to je aritmetička sredina e_x i e'_x :

$$e_x^0 = \frac{e_x + e'_x}{2} = \frac{e_x + 1 + e_x}{2}$$

$$e_x^0 = \frac{1}{2} + e_x$$

Koliko iznosi srednje trajanje života osobe stare 36 godina?

Rešenje:

$$e_x^0 = \frac{1}{2} + \frac{l_{37} + l_{38} + l_{39} + \dots + l_{99}}{l_x}$$

l_x za 36 godina iz Tablice smrtnosti je 81814.

Zbir: $l_{37} + l_{38} + l_{39} + \dots + l_{99}$ iz Tablice smrtnosti je 2426087.

$$e_{36}^0 = \frac{1}{2} + \frac{2426087}{81814}$$

$$e_{36}^0 \approx 30,15$$

Očekivano srednje trajanje života 36.godišnjaka je još 30,15 godina.



2.4. KOMUTATIVNI BROJEVI

Komutativni brojevi su parametri demografske statistike koji se koriste u osiguranju života, odnosno vezani su za živa i umrla lica i obračunske kamatne stope.

Tako imamo osnovne brojeve vezane za živa lica:

l_x broj živih lica starih x godina,

l_{x+1} broj živih lica starih $x+1$ godina,

l_{x+2} broj živih lica starih $x+2$ godina,

$\vdots$

A osnovni brojevi vezani za umrla lica su:

dx broj umrlih lica u toku $(x+1)$ -ve godine,

d_{x+1} broj umrlih lica u toku $(x+2)$ -ge godine,

d_{x+2} broj umrlih lica u toku $(x+3)$ -će godine,

$\vdots$

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

Broj umrlih lica starosti x godina, koja su doživjela starost x godina, a nisu doživjela starost $x+1$, pa je razlika broja lica starosti x godina i broja lica starosti $x+1$ godinu.

Komutativni brojevi su: D_x, N_x, S_x, C_x, M_x i R_x .

2.4.1. KOMUTATIVNI BROJEVI ZA ŽIVA LICA

D_x - broj diskontovanih živih lica starih x godina.

$$D_x = \frac{l_x}{r^x} = l_x \cdot II_p^x$$

$\frac{1}{r^x}$ je sadašnja vrednost - diskontovana vrednost jedinice koja dospeva posle x godina.

Pa je:

$$D_{x+1} = \frac{l_{x+1}}{r^{x+1}} = l_{x+1} \cdot II_p^{x+1} - \text{broj diskontovanih živih lica starih } x+1 \text{ godina}$$

$$D_{x+2} = \frac{l_{x+2}}{r^{x+2}} = l_{x+2} \cdot II_p^{x+2} - \text{broj diskontovanih živih lica starih } x+2 \text{ godina i tako redom.}$$

N_x - zbir brojeva diskontovanih živih lica, počev od starosti x do najdublje starosti ω .

Kako je:

$$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \dots + D_\omega$$

tada važi:

$$N_{x+1} = D_{x+1} + D_{x+2} + \dots + D_\omega$$

ako oduzmemo:

$$N_x - N_{x+1}$$

$$N_x = D_x - N_{x+1}$$

Tada je, S_x - zbir zbirova diskontovanih živih lica počev od starosti x do najdublje starosti ω koju prema tablicama doživi posmatrana grupa lica

$$S_x = N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + \dots + N_\omega$$

a kako je:

$$S_{x+1} = N_{x+1} + N_{x+2} + \dots + N_\omega$$

sledi:

$$S_x - S_{x+1} = N_x$$

tada je:

$$S_x = N_x + S_{x+1}.$$

2.4.2. KOMUTATIVNI BROJEVI ZA UMRILA LICA

C_x - broj diskontovanih umrlih lica u toku $(x+1)$ -ve godine.

Pretpostavka da su sva ta lica umrla u toku godine između svog x -tog i $(x+1)$ rođendana i da se sve isplate po tim smrtnim slučajevima vrše krajem $(x-1)$ godine. Sa dx je obeležen broj umrlih lica između x -te i $(x+1)$ godine, to je diskontovana vrednost tog broja na dan kada du se ta lica rodila uz dati procenat p :

$$C_x = \frac{d_x}{r^{x+1}}$$

ili

$$C_x = d_x \cdot II_p^{x+1}$$

gde je:

$\frac{1}{r^{x+1}}$ ili II_p^{x+1} diskontovana vrednost jednog dinara za $(x+1)$ godinu uz $p\%$

pa je:

$C_{x+1} = \frac{d_{x+1}}{r^{x+2}} = d_{x+1} \cdot II_p^{x+2}$ broj diskontovanih lica umrlih u toku $x+2$ godine.

$C_{x+2} = \frac{d_{x+2}}{r^{x+3}} = d_{x+2} \cdot II_p^{x+3}$ broj diskontovanih lica umrlih u toku $x+3$ godine.

$C_{x+3} = \frac{d_{x+3}}{r^{x+4}} = d_{x+3} \cdot II_p^{x+4}$ broj diskontovanih lica umrlih u toku $x+4$ godine.

M_x - zbir brojeva diskontovanih umrlih lica, počev od onih koja su umrla u toku $(x+1)$ -ve godine.

$$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \dots + C_{\omega-1}$$

ω - označava najdublju starost koju doživi posmatrana grupa lica u tablicama.

Sledi:

$$M_{x+1} = C_{x+1} + C_{x+2} + C_{x+3} + \dots + C_{\omega-1}$$

Oduzimanjem M_x i M_{x+1} dobijamo

$$M_x - M_{x+1} = C_x \text{ pa je: } M_x = C_x + M_{x+1}$$

R_x : zbir zbirova brojeva diskontovanih umrlih lica, počev sa onima koji su umrli u toku $(x+1)$ -be godine starosti.

$$R_x = M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + \dots + M_{\omega-1}$$

Kako je:

$$R_{x+1} = M_{x+1} + M_{x+2} + \dots + M_{\omega-1}$$

Tada je:

$$R_x - R_{x+1} = M_x \text{ Sledi: } R_x = M_x + R_{x+1}$$

Pokazatelji: I_x, p_x, D_x, N_x i S_x su vezani za broj živih lica.

Pokazatelji: d_x, q_x, C_x, M_x i R_x su vezani za broj umrlih lica.

Veza između komutativnih brojeva D_x, C_x, N_x i M_x nam pomaže da na primer pomoću D_x izračunamo C_x ili pak da pomoću N_x izračunamo M_x .

Kako je $C_x = \frac{d_x}{r^{x+1}}$ a $d_x = l_x - l_{x+1}$ zamenom d_x u C_x dobijamo:

$$C_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{r^{x+1}} =$$

$$C_x = \frac{l_x}{r^{x+1}} - \frac{l_{x+1}}{r^{x+1}} = \frac{D_x}{r} - D_{x+1}$$

pa je:

$$C_x = D_x \cdot II_p^1 - D_{x+1}$$

Pomoću ovih formula možemo izračunati M_x , kako je:

$$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \dots$$

To je:

$$M_x = D_x \cdot II_p^1 - D_{x+1} + D_{x+1} \cdot II_p^1 - D_{x+2} + D_{x+2} \cdot II_p^1 - D_{x+3} \dots$$

$$D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \dots = N_x$$

$$D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} \dots = N_{x+1}$$

Pa je:

$$M_x = II_p^1 \cdot N_x - (N_x - D_x)$$

$$M_x = D_x - N_x (1 - II_p^1)$$

3.

OSIGURANJE UPLATOM MIZE

3.1. OSIGURANJE LIČNE RENTE

Osiguranik, da bi obezbedio primanje rente do kraja života ili za period po želji, može da uplati osiguravajućoj kompaniji mizu (jednokratnu premiju) ili da tu premiju plaća u ratama. Kategoriju rente koja je vezana za život jednog lica nazivamo ličnom rentom. Nju osiguranik prima lično.

Isto tako postoji renta nadživljenja ili renta u korist trećeg lica, kojom osiguranik, u slučaju svoje smrti, želi da obezbedi članove svoje porodice. Renta može biti vremenska ako plaćanje rente traje samo jedan određen vremenski period, a ako je doživotno plaćanje, do kraja života osiguranog lica, onda je to doživotna renta.

Primanje rente može biti neposredno, ona počinje da teče odmah po zaključenju osiguranja. A ako od dana zaključivanja osiguranja do početka primanja rente protekne neko određeno vreme (odloženost) takva renta je odložena renta. Isto tako primanje rente može da bude krajem godine (dekurzivna) i početkom godine (anticipativna) renta.

3.2. NEPOSREDNA DOŽIVOTNA LIČNA RENTA

Neposredno doživotna lična renta je takva renta koju osiguranik prima od dana osiguranja do kraja svog života na bazi uplate jednokratne premije (mize). Ova renta se može isplaćivata početkom ili krajem godine.

3.2.1. ANTICIPATIVNA RENTA (RENTA POČETKOM GODINE)

Podimo od opšteg zadatka:

Koliko će iznositi neto miza koju treba da uplati lice staro x godina, da bi po osnovu uplate primilo godišnju rentu od R dinara početkom svake godine, neposredno od dana osiguranja, do kraja života?

Označimo sa a_x neto mizu za 1 dinar ove rente i pretpostavimo da će l_x lica stara x godina osigurati rentu od po 1 dinar. Osiguravajuća kompanija će primiti do l_x lica starih x godina $l_x \cdot a_x$ dinara, a isplatiti:

Početkom 1. godine l_x 1 dinar

Početkom 2. godine l_{x+1} 1 dinar

Početkom 3. godine l_{x+2} 1 dinar

$\vdots$ $\vdots$

Sve uplate moraju biti jednake svim isplatama na dan zaključenja osiguranja, pa će biti:

$$l_x \cdot a_x = l_x + \frac{l_{x+1}}{r} + \frac{l_{x+2}}{r^2} + \dots$$

Ako podelimo levu i desnu stranu sa $\frac{1}{r^x}$ dobićemo

$$\frac{l_x}{r^x} \cdot a_x = \frac{l_x}{r^x} + \frac{l_{x+1}}{r^{x+1}} + \frac{l_{x+2}}{r^{x+2}} + \dots$$

$$D_x \cdot a_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \dots$$

$$D_x \cdot a_x = N_x$$

Sledi da je neto miza za 1 dinar ove rente:

$$a_x = \frac{N_x}{D_x}$$

A neto miza za R dinara neposredne lične rente biće:

$$M = R \cdot a_x$$



Lice staro 37 godina osiguralo je rentu od 10.000,00 dinara koju će da prima od dana osiguranja dokle god je živo. Koliku će neto mizu lice uplatiti za ovo osiguranje ako je renta anticipativna (renta početkom godine)?

Rešenje:

$$a_x = \frac{N_x}{D_x}$$

$$a_{37} = \frac{N_{37}}{D_{37}} = \frac{317922,64}{18986,95}$$

$$a_{37} = 16,744271$$

$$M = R \cdot a_x$$

$$M = 10.000 \cdot 16,744271$$

$$M = 167.442,71$$

3.2.2. DEKURZIVNA RENTA (RENTA NA KRAJU GODINE)

Opšti zadatak:

Koliko iznosi neto miza (M) koju treba da uplati lice staro x godina, da bi po osnovu uplate primilo godišnju rentu od R dinara na kraju svake godine, neposredno od dana osiguranja, do kraja života?

Neto miza za 1 dinar ove rente obeležavamo sa a'_x , ukupna primanja od l_x lica starih x godina su $l_x \cdot a'_x$ dinara.

Sve uplate moraju biti jednake svim isplatama svedenim na isti rok, pa je:

$$l_x \cdot a'_x = \frac{l_{x+1}}{r} + \frac{l_{x+2}}{r^2} + \frac{l_{x+3}}{r^3} + \dots$$

Deljenjem sa r^x dobićemo:

$$\frac{l_x}{r^x} \cdot a'_x = \frac{l_{x+1}}{r^{x+1}} + \frac{l_{x+2}}{r^{x+2}} + \frac{l_{x+3}}{r^{x+3}} + \dots$$

Zamenom u oznakama:

$$\begin{aligned} D_x \cdot a'_x &= D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \dots \\ D_x \cdot a'_x &= N_{x+1} \end{aligned}$$

Sledi, da neto miza za 1 dinar osigurane dekurzivne rente iznosi:

$$a'_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

Miza za R dinara ove rente je:

$$M = R \cdot a'_x$$



Lice staro 30 godina osiguralo je rentu od 10.000,00 dinara koju će da primi od dana osiguranja dokle god je živo. Koliku će neto mizu lice uplatiti za ovo osiguranje ako je renta dekurzivna (renta na kraju godine)?

Rešenje:

$$a'_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

$$a'_{30} = \frac{N_{30+1}}{D_{30}} = \frac{N_{31}}{D_{30}}$$

$$a'_{30} = \frac{453346,30}{26605,43}$$

$$a'_{30} = 17,039616$$

$$M = R \cdot a'_x$$

$$M = 10.000 \cdot 17,039616$$

$$M = 170.396,16 \text{ dinara}$$

3.3. ODLOŽENA ŽIVOTNA RENTA

Karakteristika ove rente je u tome da osiguranik uplaćuje jednokratnu premiju (mizu) kada zaključuje ugovor o osiguranju, a posle izvesnog broja godina počinje da prima rentu. Ako se dogodi da osiguranik umre pre nego što počne da prima rentu, uplaćena premija (miza) u celosti ostaje osiguravajućoj kompaniji. Ukoliko osiguranik umre u toku primanja odložene rente, tada preostali deo mize se koristi za isplatu živim osiguranicima.

I kod ove vrste rente može biti primanje početkom godine (anticipativna renta) ili krajem godine (dekurzivna).

3.3.1. ANTICIPATIVNA RENTA

Lice staro x godina osigurava rentu od R dinara aniticipativno koju treba da prima doživotno, nako isteka k godina od dana osiguranja. Izračunati neto mizu za ovu rentu.

Ako obeležimo neto mizu za 1 dinar ove anticipativne rente sa ${}_k|a_x$ dinara, tada će osiguravajuća kompanija primiti od l_x lica starih x godina:

$$l_x \cdot {}_k|a_x \text{ dinara.}$$

Osiguravajuća kompanija isplaćuje živim osiguranicima:

- ♦ početkom $k+1$ godine l_{x+k} dinara
- ♦ početkom $k+2$ godine l_{x+k+1} dinara
- ♦ početkom $k+3$ godine l_{x+k+2} dinara
- ♦ itd.

Kako moraju biti jednake ukupne uplate sa ukupnim isplatama svedeno na isti rok, tada je neto miza za 1 dinar osigurane odložene životne rente:

$${}_k|a_x = \frac{N_{x+k}}{D_x}$$

a neto miza za R dinara je:

$$M = R \cdot {}_k|a_x$$

Lice staro 38 godina osiguralo je rentu od 10.000,00 dinara da je prima doživotno po isteku 9 godina od dana osiguranja. Koliko će neto mizu da uplati za ovo osiguranje anticipativno?

Rešenje:

$${}_k|a_x = \frac{N_{x+k}}{D_x}$$

$${}_9|a_{38} = \frac{N_{38+9}}{D_{38}} = \frac{N_{47}}{D_{38}} = \frac{164.480,14}{18.079,83}$$

$${}_9|a_{38} = 9,09743$$

$$M = R \cdot {}_k|a_x$$

$$M = 10.000 \cdot 9,09743$$

$$M = 90.974,3 \text{ dinara}$$



3.3.2. DEKURZIVNA RENTA

Za dekurzivnu rentu (renta na kraju $k+1$ -ve godine) mizu za 1 dinar obeležićemo sa ${}_k|a'_x$ dinara, pa je neto miza za 1 dinar osigurane dekurzivne rente:

$${}_k|a'_x = \frac{N_{x+k+1}}{D_x}$$

a miza za rentu od R dinara je:

$$M = R \cdot {}_{k|}a'_x$$



Lice staro 52 godine osiguralo je rentu od 10.000,00 dinara da je prima doživotno po isteku 5 godina od dana osiguranja. Koliku će mizu ovaj osiguranik da uplati za ovo osiguranje dekurzivno?

Rešenje:

$${}_{k|}a'_x = \frac{N_{x+k+1}}{D_x}$$

$${}_5|a'_{52} = \frac{N_{52+5+1}}{D_{52}} = \frac{N_{58}}{D_{52}} = \frac{67.192,181}{8.749,398}$$

$${}_5|a'_{52} = 7,67961$$

$$M = R \cdot {}_{k|}a'_x$$

$$M = 10.000 \cdot 7,67961$$

$$M = 76.796,167 \text{ dinara}$$

3.4. NEPOSREDNA PRIVREMENA LIČNA RENTA

Privremena lična renta je renta koja se prima najviše n puta po ugovoru o osiguranju uz uslov da je osiguranik živ za sve vreme njenog primanja. Ova vrsta rente može se primati na početku godine (anticipativno) ili krajem godine (dekurzivno), isto tako može biti neposredna i odložena.

3.4.1. ANTICIPATIVNA RENTA

Lice staro x godina osigurava rentu o R dinara, da je prima doživotno, ali najviše n godina. Koliko iznosi neto miza za ovo osiguranje?

Ako obeležimo sa ${}_n a_x$ neto mizu za 1 dinar anticipativne rente, osiguravajuća kompanija prima od l_x lica starih x godina:

$$l_x \cdot {}_n a_x \text{ dinara.}$$

a isplaćuje:

- ♦ početkom prve godine l_x dinara
- ♦ početkom druge godine l_{x+1} dinara
- ♦ itd.
- ♦ Početkom n -te godine l_{x+n-1} dinara.

Primenom principa ekvivalencije uplata i diskontovanih isplata, neto miza za 1 dinar jednaka je razlici neto miza za 1 dinar neposredne doživotne lične rente i odložene lične rente.

$${}_n a_x = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

a miza za R dinara jednaka je:

$$M = R \cdot {}_n a_x$$

Lice staro 45 godina osiguralo je rentu od 10.000,00 dinara da je prima doživotno a najviše 15 godina. Koliko iznosi neto miza za ovo osiguranje?

Rešenje:

$${}_n a_x = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

$${}_{15} a_{45} = \frac{N_{45} - N_{45+15}}{D_{45}} = \frac{N_{45} - N_{60}}{D_{45}} = \frac{189.326,69 - 55.414,907}{12.743,15}$$

$${}_{15} a_{45} = 10,508531$$

$$M = R \cdot {}_{15} a_{45}$$

$$M = 10.000 \cdot 10,508531$$

$$M = 105.085,31 \text{ dinara}$$



3.4.2. DEKURZIVNA RENTA

Renta koja se dobije na kraju godine naziva se dekurzivna renta.

Ako sa ${}_n a'_x$ označimo neto mizu za 1 dinar ove osigurane rente je:

$${}_n a'_x = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

Miza za R dinara je:

$$M = R \cdot {}_{|n}a'_x$$



Lice staro 35 godina osiguralo je rentu od 10.000,00 dinara da je prima doživotno a najviše 17 godina. Koliko iznosi neto miza za ovo osiguranje (dekurzivno)?

Rešenje:

$${}_n a'_x = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

$${}_{|17}a'_{35} = \frac{N_{35+1} - N_{35+17+1}}{D_{35}} = \frac{N_{35} - N_{53}}{D_{35}} = \frac{337.858,15 - 103.978,527}{50.927,30}$$

$${}_{|17}a'_{35} = 11,175815$$

$$M = R \cdot {}_{|17}a'_{35}$$

$$M = 10.000 \cdot 11,175815$$

$$M = 111.758,15 \text{ dinara}$$

3.5. ODLOŽENA PRIVREMENA LIČNA RENTA

Odložena privremena lična renta je renta kada lice staro x godina osigura uplatom mize da rentu koju lično prima n godina počinje da prima tek k godina posle osiguranja. Ova renta može biti anticipativna i dekurzivna.

3.5.1. ANTICIPATIVNA RENTA

Lice staro x godina osigurava rentu od R dinara, da je prima po isteku k godina u toku n godina. Koliko iznosi neto miza za ovo osiguranje?

Ako je ${}_{k|n}a_x$ oznaka za neto mizu za 1 dinar ove rente, onda se dobije

$${}_{k|n}a_x = \frac{N_{x+k} - N_{x+k+n}}{D_x},$$

to znači da je jednokratna neto miza za 1 dinar odložene privremene lične rente jednaka razlici neto miza za 1 dinar odložene doživotne rente posle k godina i rente koja se prima posle $k+n$ godina.

Miza za R dinara je:

$$M = R \cdot {}_{k|n}a_x$$

Lice staro 30 godina osigurava rentu od 10.000,00 dinara, da je prima po isteku 10 godina, ali najviše 15 godina. Koliko iznosi neto miza za ovo osiguranje, ako je renta anticipativna?



Rešenje:

$${}_{K|n}a_x = \frac{N_{x+K} - N_{x+K+n}}{D_x}$$

$${}_{10|15}a_{30} = \frac{N_{30+10} - N_{30+10+15}}{D_{30}} = \frac{N_{40} - N_{55}}{D_{30}} = \frac{263.643,62 - 87.924,183}{26.605,43}$$

$${}_{10|15}a_{30} = 6,6046456$$

$$M = R \cdot {}_{K|n}a_x$$

$$M = 10.000 \cdot 6,6046456$$

$$M = 66.046,456 \text{ dinara}$$

3.5.2. DEKURZIVNA RENTA

Označimo sa ${}_{K|n}a'_x$ neto mizu za 1 dinar, sledi da je dekurzivna renta:

$${}_{k|n}a'_x = \frac{N_{x+k+1} - N_{x+k+n+1}}{D_x}$$

Miza za R dinara je:

$$M = R \cdot {}_{k|n}a'_x$$

Lice staro 32 godine osigurava rentu od 10.000 dinara da je prima po isteku 8 godina, ali najviše 25 godina. Koliko iznosi neto miza za ovo osiguranje, ako je renta dekurzivna?



Rešenje:

$${}_{k|n}a'_x = \frac{N_{x+k+1} - N_{x+k+n+1}}{D_x}$$

$${}_{8|25}a'_{32} = \frac{N_{32+8+1} - N_{32+8+25+1}}{D_{32}} = \frac{N_{41} - N_{66}}{D_{32}} = \frac{247.261,06 - 28.623,395}{24.181,75}$$

$${}_{8|25}a'_{32} = 9,0414327$$

$$M = R \cdot {}_{k|n}a'_x$$

$$M = 10.000 \cdot 9,0414327$$

$$M = 90.414,327 \text{ dinara}$$

3.6. OSIGURANJE LIČNE RENTE UPLATOM PREMIJE

Iznos koji se uplaćuje u jednakim vremenskim razmacima (godišnje) i jednakim ili promenljivim iznosim, a radi osiguranja primanja jednokratnog iznosa (kapitala) ili višekratnog iznosa (rente) naziva se premija.

3.6.1. RENTA RASTE IZ GODINE U GODINU ZA IZNOS RENTE KOJA SE PLAĆA U PRVOJ GODINI

Lice staro x godina osiguralo je rentu koja će iz godine u godinu rasti za iznos rente koja se plaća u prvoj godini. Izračunati koliko treba da se uplati neto miza ako se renta u prvoj godini prima: a) doživotno, b) nakon n godina od dana osiguranja?

a) DOŽIVOTNA LIČNA RENTA

Neto miza za 1 dinar ove rente je: $(Ia)_x$ dinara

Osiguravajuća kompanija primaće: $l_x \cdot (Ia)_x$

Isplatiće:

- ♦ početkom prve godine l_x dinara
- ♦ početkom druge godine $2 \cdot l_{x+1}$ dinar
- ♦ početkom treće godine $3 \cdot l_{x+2}$ dinara
- ♦ itd.

Kako su uplate jednake diskontovanim isplatama, i nakon izvođenja³⁷ dobija se miza za 1 dinar ove rente:

$$(Ia)_x = \frac{S_x}{D_x}$$

Renta u prvoj godini je R , u drugoj $2 \cdot R$, itd. Miza za ovu rentu je:

$$(IM)_x = R \cdot (Ia)_x$$

³⁷ Postupak izvođenja videti u sledećem izvoru: Kočović, J., cit. delo, str. 102-105

b) PRIVREMENA LIČNA RENTA

Oznaka neto mize za 1 dinar ove rente je: ${}_{|n}(Ia)_x$

Osiguravajuća kompanija primiće od l_x lica $l_x \cdot {}_{|n}(Ia)_x$ (dinara).

Kako su uplate jednake diskontovanim isplatama i nakon izvođenja, neto miza za 1 dinar ove rente je:

$${}_{|n}(Ia)_x = \frac{S_x - S_{x+n}}{D_x} - n \cdot \frac{N_{x+n}}{D_x}$$

Renta u prvoj godini je R , u drugoj $2 \cdot R$, itd. Miza za ovu rentu je:

$${}_{|n}(IM)_x = R \cdot {}_{|n}(Ia)_x$$

Osoba stara 35 godina osigurava rentu koja će iz godine u godinu rasti za iznos rente koja se plaća u prvoj godini. Izračunati koliko treba da se uplati na ime neto mize, ako je renta u prvoj godini 20.000,00 dinara i ako se prima: a) doživotno; b) u toku 15 godina od dana osiguranja?

Rešenje:

a)

$$(Ia)_x = \frac{S_x}{D_x}$$

$$(Ia)_{35} = \frac{S_{35}}{D_{35}} = \frac{4.974.452,53}{20.927,30}$$

$$(Ia)_{35} = 237,70159$$

$$(IM)_x = R \cdot (Ia)_x$$

$$(IM)_{35} = 20.000 \cdot 237,70159$$

$$(IM)_{35} = 4.754.032 \text{ (dinara)}$$



b)

$$\begin{aligned} {}_{|n}(Ia)_x &= \frac{S_x - S_{x+n}}{D_x} - n \cdot \frac{N_{x+n}}{D_x} \\ {}_{|15}(Ia)_{35} &= \frac{S_{35} - S_{35+15}}{D_{35}} - 15 \cdot \frac{N_{35+15}}{D_{35}} = \frac{S_{35} - S_{50}}{D_{35}} - 15 \cdot \frac{N_{50}}{D_{35}} \\ {}_{|15}(Ia)_{35} &= \frac{4.974.452,53 - 1.392.464,43}{20.927,30} - 15 \cdot \frac{137.165,619}{20.927,30} \\ {}_{|15}(Ia)_{35} &= 171,16341 - 94,44525 = 76,718157 \\ {}_{|n}(IM)_x &= R \cdot {}_{|n}(Ia)_x \\ {}_{|15}(IM)_{35} &= 20.000 \cdot 76,718157 \\ {}_{|15}(IM)_{30} &= 1.534.363 \text{ (dinara)} \end{aligned}$$

3.6.2. PLAĆANJE RENTE U RATAMA

Uobičajeno je da se renta plaća za jednu godinu. Ali iz praktičnih razloga isplata može biti i u kraćim vremenskim razmacima (u praksi je najčešći ovaj vid osiguranja) i to na polugodišnjem, kvartalnom ili mesečnom nivou.

- ♦ polugodišnja premija iznosi $a_x - \frac{1}{2}$
- ♦ kvartalna premija $a_x - \frac{1}{4}$
- ♦ mesečna premija $a_x - \frac{1}{12}$
- ♦ premija u m-tom delu godine $a_x - \frac{1}{m}$

Do premije u ratama dolazimo na osnovu godišnjih premija. Osiguranik plaća osiguravaču rentu u ratama koja predstavlja premiju u ratama, pa će jednokratna premija biti jednaka sadašnjoj vrednosti te rente u ratama.

U opštem obliku, jednokratna premija za doživotnu rentu za lice staro x godina koje bi primalo m puta rentu na početku svakog m – tog dela godine bila bi:

$$a_x^{\left(\frac{1}{m}\right)} = a_x - \frac{m-1}{2 \cdot m}$$

Ukoliko se renta plaća u ratama krajem svakog m – tog dela godine, tada jednokratna premija iznosi:

$$a_x^{(\frac{1}{m})} = a_x - \frac{m+1}{2 \cdot m}$$

Lice ima 45 godina i osiguralo je doživotnu neposrednu ličnu rentu u visini od 10.000,00 dinara tako da je prima početkom svakih šest meseci. Koliko iznosi jednokratna premija ?

Rešenje:

$$a_x^{(\frac{1}{m})} = a_x - \frac{m+1}{2 \cdot m}$$

$$P = 20.000 \cdot 14,607134$$

$$P = 292142,68$$

$$a_x^{(\frac{1}{2})} = a_{45} - \frac{2+1}{2 \cdot 2}$$

$$a_x^{(\frac{1}{2})} = a_{45} - \frac{1}{4}$$

$$a_x^{(\frac{1}{2})} = \frac{N_{45}}{D_{45}} - 0,25 = \frac{189326,69}{12743,15} - 0,25$$

$$a_x^{(\frac{1}{2})} = 14,607134$$



4.

OBRAČUN TARIFA ZA OSIGURANJE KAPITALA

Karakteristika ovog osiguranja je u tome da osiguravajuća kompanija osiguranu sumu isplaćuje korisniku polise jednom, a najviše dva puta.

4.1. OSIGURANJE KAPITALA ZA SLUČAJ DOŽIVLJENJA

Ova vrsta osiguranja kapitala odnosi se na ona osigurana lica koja dožive ugovoreni rok od dana osiguranja, a osiguravajuća kompanija isplaćuje ugovorenu sumu. Ukoliko osiguranici ne dožive taj rok, isplate ostaju osiguravajućoj kompaniji.

Koliku neto mizu mora uplatiti lice staro x godina, koje želi da osigura K dinara kapitala, s tim da mu se ovaj iznos isplati ako doživi n godina starosti?

Neto miza za 1 dinar osiguranog kapitala je:

$${}_nE_x$$

Osiguravajuća kompanija primiće od l_x lica starih x godina:

$$l_x \cdot {}_nE_x \text{ (dinara)}$$

A isplaćuje na kraju n -te godine:

$$l_{x+n} \text{ (dinara)}$$

Poštujući princip ekvivalentnosti uplata i isplata svedenih na isti rok, imamo da je neto miza za 1 dinar osiguranog kapitala:

$${}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

a za K dinara:

$$M = K \cdot {}_nE_x$$

Lice staro 30 godina osiguralo je 200.000,00 dinara da mu se isplati ukoliko doživi 50 godina starosti. Izračunati jendokratnu premiju za ovaj oblik osiguranja.

Rešenje:

$${}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$${}_{20}E_{30} = \frac{D_{30+20}}{D_{30}} = \frac{D_{50}}{D_{30}} = \frac{9.781,919}{26.605,43}$$

$${}_{20}E_{30} = 0,367666$$

$$M = K \cdot {}_nE_x$$

$$M = 200.000 \cdot 0,367666$$

$$M = 73.533,252 \text{ dinara}$$



4.2. OSIGURANJE KAPITALA ZA SLUČAJ SMRTI

Ova vrsta kapitala može biti:

1. doživotno,
2. odloženo,
3. privremeno, i
4. odloženo privremeno.

4.2.1. DOŽIVOTNO OSIGURANJE KAPITALA ZA SLUČAJ SMRTI

Ovo osiguranje podrazumeva da se osigurani kapital isplaćuje krajem godine određenom licu čim smrt osiguranika nastupi.

Osoba stara x godina osigurava K dinara da se isplati naslednicima posle njegove smrti ma kad smrt nastupila. Kolika je neto miza za ovo osiguranje?

Ako sa A_x obeležimo neto mizu za 1 dinar osiguranog kapitala, osiguravajuća kompanija primiće od l_x lica starog x godina uplatu u iznosu od: $l_x \cdot A_x$ dinara, a osiguravajuća kompanija isplaćivaće na kraju godine u kojoj umre osoba za svakog umrlog po 1 dinar. Tako će osiguravajuća kompanija u toku prve godine ako umre d_x osoba isplati na kraju:

- ♦ I godine d_x dinara
- ♦ II godine d_{x+1} dinar
- ♦ III godine d_{x+2} dinara
- ♦ itd.

Princip da su uplate jednake diskontovanim isplatama i nakon izvođenja dolazimo da je neto miza za 1 dinar osiguranog kapitala za slučaj smrti:

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

a za K dinara neto miza je:

$$M = K \cdot A_x$$



Osoba stara 50 godina osigurava 150.000,00 dinara da se isplati naslednicima nakon njegove smrti, bez obzira na vreme nastupanja smrti. Izračunati neto premiju za ovo osiguranje.

Rešenje:

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

$$A_{50} = \frac{M_{50}}{D_{50}} = \frac{4.714,01}{9.781,919}$$

$$A_{50} = 0,48191$$

$$M = K \cdot A_x$$

$$M = 150.000 \cdot 0,48191$$

$$M = 72.286,583 \text{ dinara}$$

4.2.2. ODLOŽENO OSIGURANJE KAPITALA ZA SLUČAJ SMRTI

Kod ovog osiguranja kapitala osiguravajuća kompanija se obavezuje da će isplatiti ugovoreni kapital korisniku koji je naznačen krajem godine u kojoj osiguranik umre, ali pod uslovom da osiguranik umre k godina od dana osiguranja.

Koliku neto mizu mora uplatiti lice staro x godina da bi osiguralo kapital od K dinara koji će se isplatiti naslednicima posle njegove smrti, pod uslovom da osiguranik umre k godina od dana osiguranja?

Obeležimo neto mizu za 1 dinar osiguranog kapitala sa ${}_k|A_x$. Osiguravajuća kompanija primiće od l_x lica starog x godina uplatu u iznosu od: $l_x \cdot {}_k|A_x$ dinara, a isplate osiguravajuće kompanije će biti:

- ♦ na kraju $k + 1$ -ve godine d_{x+k} dinara
- ♦ na kraju $k + 2$ -ge godine d_{x+k+1} dinar
- ♦ na kraju $k + 3$ -će godine d_{x+k+2} dinara
- ♦ itd.

Kako uplate moraju biti jednake zbiru diskontnih isplata i nakon izvođenja³⁸, neto miza za 1 dinar odloženog osiguranja kapitala za slučaj smrti je:

$${}_k|A_x = \frac{M_{x+k}}{D_x}$$

a za K dinara neto miza će biti:

$$M = K \cdot {}_k|A_x$$

Osoba stara 42 godine osigurala je 120.000,00 dinara da se isplati naslednicima posle njegove smrti, u slučaju da se smrt zadesi nakon isteka 15 godina od dana osiguranja. Izračunati neto mizu.

Rešenje:

$${}_k|A_x = \frac{M_{x+k}}{D_x}$$

$${}_{15}|A_{42} = \frac{M_{42+15}}{D_{42}} = \frac{M_{57}}{D_{42}} = \frac{3.652,38}{14.830,58}$$

$${}_{15}|A_{42} = 0,2462736$$

$$M = K \cdot {}_k|A_x$$

$$M = 120.000 \cdot 0,2462736$$

$$M = 29.552,829 \text{ dinara}$$



³⁸ Postupak izvođenja videti u sledećem izvoru: Kočović, J., cit. delo, str. 122

4.2.3. PRIVREMENO OSIGURANJE KAPITALA ZA SLUČAJ SMRTI

Kod ovog osiguranja kapitala naslednicima se isplaćuje K dinara, ali samo ako osiguranik umre u toku n prvih godina od dana osiguranja. Ako umre posle tog perioda, osiguravajuća kompanija zadržava mizu.

Obeležimo neto mizu za 1 dinar osiguranog kapitala sa ${}_nA_x$. Osiguravajuća kompanija prima od l_x lica starog x godina uplatu u iznosu od $l_x \cdot {}_nA_x$ dinara, a isplate osiguravajuće kompanije će biti:

- ♦ na kraju prve godine d_x dinara
- ♦ na kraju druge godine d_{x+1} dinar
- ♦ itd.
- ♦ na kraju n -te godine d_{x+n-1} dinara

Kako uplate moraju biti jednake zbiru diskontnih isplata i nakon izvođenja³⁹, neto miza za 1 dinar odloženog osiguranja kapitala za slučaj smrti je:

$${}_nA_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

a za K dinara neto miza će biti:

$$M = K \cdot {}_nA_x$$



Osoba stara 43 godine osigurala je 150.000,00 dinara da se isplati naslednicima ako osiguranik umre u prvih 15 godina. Ako umre posle toga, osiguravajuća kompanija zadržava mizu. Odrediti jednokratnu premiju.

Rešenje:

$${}_nA_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

$${}_{15}A_{43} = \frac{M_{43} - M_{43+15}}{D_{43}} = \frac{M_{43} - M_{58}}{D_{43}} = \frac{5.764,77 - 3.498,46}{14.104,82}$$

$${}_{15}A_{43} = 0,160676$$

$$M = K \cdot {}_nA_x$$

$$M = 150.000 \cdot 0,160676$$

$$M = 24.101,442 \text{ (dinara)}$$

³⁹ Postupak izvođenja videti u sledećem izvoru: Kočović, J., cit. delo, str. 124

4.2.4. ODLOŽENO PRIVREMENO OSIGURANJE KAPITALA ZA SLUČAJ SMRTI

Odloženo privremeno osiguranje kapitala za slučaj smrti je kada se osigurani kapital isplaćuje korisniku osiguranja samo u slučaju ako osiguranik preživi k godina i umre u toku n narednih godina.

Koliku neto mizu mora uplatiti lice staro x godina da bi osiguralo kapital od K dinara koji će se isplatiti naslednicima posle njegove smrti, ako preživi k godina od dana osiguranja i umre u toku n narednih godina?

Obeležimo neto mizu za 1 dinar osiguranog kapitala sa ${}_{k|n}A_x$. Osiguravajuća kompanija primiće od l_x lica starog x godina uplatu u iznosu od: $l_x \cdot {}_{k|n}A_x$ dinara, a isplate osiguravajuće kompanije će biti:

- na kraju $k+1$ -ve godine d_{x+k} dinara
- na kraju $k+2$ -ge godine d_{x+k+1} dinara
- itd.
- na kraju $k+n$ -te godine $d_{x+k+n-1}$ dinara

Kako uplate moraju biti jednake zbiru diskontnih isplata i nakon izvođenja⁴⁰, neto miza za 1 dinar odloženog osiguranja kapitala za slučaj smrti je:

$${}_{k|n}A_x = \frac{M_{x+k} - M_{x+k+n}}{D_x}$$

a za K dinara neto miza će biti:

$$M = K \cdot {}_{k|n}A_x$$

Osoba stara 41 godinu osigurala je 180.000,00 dinara da se isplati naslednicima ukoliko preživi 15 godina a zatim umre u toku narednih 20 godina. Koliko iznosi neto miza za ovo osiguranje?

Rešenje:

$${}_{k|n}A_x = \frac{M_{x+k} - M_{x+k+n}}{D_x}$$

$${}_{15|20}A_{41} = \frac{M_{41+15} - M_{41+15+20}}{D_{41}} = \frac{M_{56} - M_{76}}{D_{41}} = \frac{8.305,93 - 865,819}{15.589,23}$$

$${}_{15|20}A_{42} = 0,4772597$$

$$M = K \cdot {}_{k|n}A_x$$

$$M = 180.000 \cdot 0,4772597$$

$$M = 85.906,743 \text{ (dinara)}$$



40 Postupak izvođenja videti u sledećem izvoru: Kočović, J., cit. delo, str. 127

4.3. MEŠOVITO OSIGURANJE KAPITALA

Mešovito osiguranje kapitala se najčešće primenjuje u praksi. To je spajanje osiguranja za slučaj dožovljenja sa osiguranjem kapitala za slučaj smrti. Obaveza osiguravajuće kompanije je da isplati kapital ili korisniku u slučaju smrti osiguranika krajem godine u kojoj osiguranik umre ili osiguraniku krajem određenog vremena ako je živ.

Osoba stara x godina osigurava K dinara na n godina da mu se isplati ako doživi n -tu godinu, a ako pre umre da osiguranih K dinara dobiju naslednici. Kolika je neto miza za ovo osiguranje?

Obeležimo neto mizu za 1 dinar osiguranog kapitala sa $A_{x,n}$. Osiguravajuća kompanija prima od l_x osiguranih lica starih x godina:

- $l_x \cdot A_{x,n}$ dinara
- a isplate osiguravajuće kompanije će biti:
- ♦ na kraju prve godine d_x dinara
 - ♦ na kraju druge godine d_{x+1} dinar
 - ♦ itd.
 - ♦ na kraju n -te godine $d_{x+n-1+x+n}$ dinara

Poštujući princip ekvivalencije uplata i diskontovanih uplata i nakon izvođenja, neto miza za 1 dinar osiguranog kapitala:

$$A_{x,n} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

a za K dinara neto miza će biti:

$$M = K \cdot A_{x,n}$$



Lice staro 40 godine osiguralo je sumu od 200.000 dinara da se isplati njemu ako doživi 65 godina starosti ili naslednicima ukoliko umre pre navršenih 65 godina starosti. Izračunati neto mizu.

Rešenje:

$$A_{x,n} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

$$A_{40,25} = \frac{M_{40} - M_{40+25} + D_{40+25}}{D_{40}} = \frac{M_{40} - M_{65} + D_{65}}{D_{40}}$$

$$A_{40,25} = \frac{6.242,42 - 2.411,62 + 3.653,017}{16.382,56} = 0,4568161$$

$$M = K \cdot A_{x:n}$$

$$M = 200.000 \cdot 0,4568161$$

$$M = 93.3636,218 \text{ (dinara)}$$

4.4. OSIGURANJE STALNOM GODIŠNJOM PREMIJOM

Osiguranik, da bi osigurao rentu i kapital uplatom mize, uplate za osiguranje raspodeljuje na više godina u istim iznosima. Nakon smrti osiguranika premije se ne isplaćuju, bez obzira da li je osiguranik plaćao premiju doživotno ili privremeno. Prva premija se plaća na dan osiguranja. Ako se premije plaćaju odmah tada je to neposredna lična premija, a ako ne, to je odložena premija.

Premija može biti:

1. godišnja doživotna, i
2. godišnja privremena.

4.4.1. IZRAČUNAVANJE GODIŠNJE DOŽIVOTNE PREMIJE

a) NEPOSREDNO OSIGURANJE KAPITALA

Naslednicima se isplaćuje osigurana suma (kapital) bez obzira kada osiguranik umre. Ako naznačimo sa $P(A_x)$ premiju koja obezbeđuje 1 dinar kapitala i kako su uplate jednake isplatama i nakon izvođenja biće:

$$P(A_x) = \frac{M_x}{N_x} = \frac{A_x}{a_x} \quad P = K \cdot P(A_x).$$

Osoba stara 42 godine osigurala je 150.000,00 dinara da se isplati naslednicima posle njegove smrti. Odrediti godišnju neto premiju koja se isplaćuje doživotno.

Rešenje:

$$P(A_{42}) = \frac{M_{42}}{N_{42}} = \frac{5.920,13}{231.671,83}$$

$$P(A_{42}) = 0,0255539$$

$$P = K \cdot P(A_{42})$$

$$P = 150.000 \cdot 0,0255539$$

$$P = 3.833,085 \text{ (dinara)}$$



b) ODLOŽENO OSIGURANJE KAPITALA

Naslednicima se isplaćuje osigurana suma, ako osiguranik umre posle k godina.

$$P({}_k|A_x) = \frac{M_{x+k}}{N_x} = \frac{{}_k|A_x}{a_x} \quad P = K \cdot P({}_k|A_x)$$



Lice staro 45 godine osigurava 200.000 dinara da se isplati naslednicima posle njegove smrti ukoliko je smrt nastupila po isteku 20 godina od dana osiguranja. Odrediti godišnju neto premiju koja se isplaćuje doživotno.

Rešenje:

$$P({}_{20}|A_{45}) = \frac{M_{45+20}}{N_{45}} = \frac{M_{65}}{N_{45}} = \frac{2.411,62}{189.326,69}$$

$$P({}_{20}|A_{45}) = 0,0127379$$

$$P = K \cdot P({}_{20}|A_{45})$$

$$P = 200.000 \cdot 0,0127379$$

$$P = 2.547,575 \text{ (dinara)}$$

4.4.2. IZRAČUNAVANJE GODIŠNJE PRIVREMENE PREMIJE

Godišnja privremena premija je takva premija koju osiguranik plaća najviše m godina od dana osiguranja.

a) DOŽIVOTNO OSIGURANJE KAPITALA ZA SLUČAJ SMRTI

Naslednicima se isplaćuje osigurana suma, bez obzira kada osiguranik umre.

$${}_mP(A_x) = \frac{M_x}{N_x - N_{x+m}} = \frac{A_x}{{}_m a_x}$$

$$P = K \cdot {}_mP(A_x)$$



Lice staro 38 godine osigurava 200.000,00 dinara za slučaj smrti ma kada smrt nastupila. Kapital se isplaćuje naslednicima posle smrti osiguranika. Odrediti godišnju premiju koja se plaća najviše 18 godina.

Rešenje:

$${}_{18}P(A_{38}) = \frac{M_{38}}{N_{38} - N_{38+18}} = \frac{M_{38}}{N_{38} - N_{56}}$$

$${}_{18}P(A_{38}) = \frac{6.582,31}{298.935,69 - 80.583,643} = \frac{6.582,31}{218.352,05}$$

$${}_{18}P(A_{38}) = 0,0301454$$

$$P = K \cdot {}_mP(A_x)$$

$$P = 200.000 \cdot 0,0301454$$

$$P = 6.029,080 \text{ (dinara)}$$

b) PRIVREMENO OSIGURANJE KAPITALA ZA SLUČAJ SMRTI (NA n GODINA)

Naslednicima se isplaćuje osigurana suma, ako osiguranik umre u toku prvih n godina (to je period privremenog osiguranja), a ako umre nakon toga osigurana suma se ne isplaćuje nikom (ostaje osiguravajućoj kompaniji).

$${}_mP({}_nA_x) = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+m}}$$

$$P = K \cdot {}_mP({}_nA_x).$$

Lice staro 38 godine osigurava 300.000,00 dinara. Kapital se isplaćuje naslednicima ako osiguranik umre u toku prvih 25 godina. Koliko iznosi premija koja se plaća prvih 15 godina?

Rešenje:

$${}_{15}P({}_{25}A_{38}) = \frac{M_{38} - M_{38+25}}{N_{38} - N_{38+15}} = \frac{M_{38} - M_{63}}{N_{38} - N_{53}}$$

$${}_{15}P({}_{25}A_{38}) = \frac{6.582,31 - 2.722,87}{298.935,69 - 103.978,527} = \frac{3.859,44}{494.957,17}$$

$${}_{15}P({}_{25}A_{38}) = 0,0077975$$

$$P = K \cdot {}_{15}P({}_{25}A_{38})$$

$$P = 300.000 \cdot 0,0077975$$

$$P = 2.339,257 \text{ (dinara)}$$



c) PRIVREMENO OSIGURANJE KAPITALA ZA SLUČAJ DOŽIVLJENJA

Osiguraniku se isplaćuje osigurana suma ako doživi n godina privremenog osiguranja. Godišnja privremena premija za slučaj doživljenja je:

$${}_mP({}_nE_x) = \frac{{}_nE_x}{{}_m a_x}$$

ili

$${}_mP({}_nE_x) = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}}$$

$$P = K \cdot {}_mP({}_nE_x)$$



Lice staro 45 godina osigurava kapital od 200.000,00 dinara. Kapital se isplaćuje osiguraniku ako doživi 25 godina od dana osiguranja. Koliko iznosi premija koja se plaća 15 godina?

Rešenje:

$${}_{15}P({}_{25}E_{45}) = \frac{D_{45+25}}{N_{45} - N_{45+15}} = \frac{D_{70}}{N_{45} - N_{60}}$$

$${}_{15}P({}_{25}E_{45}) = \frac{2.301,431}{189.326,69 - 5.541,907} = \frac{2.301,431}{183.784,78}$$

$${}_{15}P({}_{25}E_{45}) = 0,0125224$$

$$P = K \cdot {}_mP({}_nE_x)$$

$$P = 200.000 \cdot 0,0125224$$

$$P = 2.504,485 \text{ (dinara)}$$

D) MEŠOVITO OSIGURANJE KAPITALA

Osigurana suma se isplaćuje nasljednicima, ako osiguranik umre pre isteka n godina privremenog osiguranja. Osigurana suma se isplaćuje osiguraniku ako doživi n godina od dana ugovaranja osiguranja.

$${}_mP(A_{x,n}) = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+m}}$$

$$P = K \cdot {}_mP(A_{x,n})$$

Lice staro 40 godina osigurava kapital od 150.000,00 dinara. Kapital se isplaćuje naslednicima ako umre u prvih 25 godina ili osiguraniku ako doživi 25 godina od dana osiguranja. Koliko iznosi premija koja se plaća prvih 15 godina?



Rešenje:

$${}_{15}P(A_{40,25}) = \frac{M_{40} - M_{40+25} + D_{40+25}}{N_{40} - N_{40+15}} = \frac{M_{40} - M_{65} + D_{65}}{N_{40} - N_{55}}$$

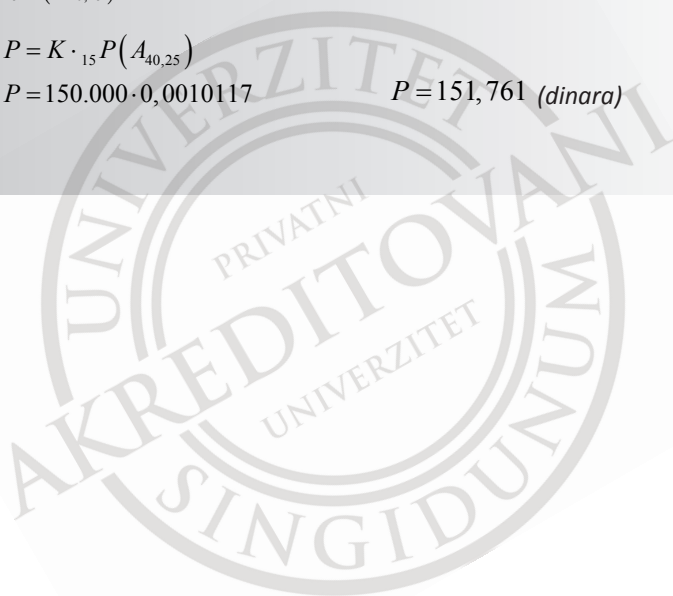
$${}_{15}P(A_{40,25}) = \frac{6.242,42 - 2.411,62 + 3.653,017}{263.643,62 - 87.924,183} = \frac{177.783}{175.719,44}$$

$${}_{15}P(A_{40,25}) = 0,0010117$$

$$P = K \cdot {}_{15}P(A_{40,25})$$

$$P = 150.000 \cdot 0,0010117$$

$$P = 151,761 \text{ (dinara)}$$



5. OSIGURANJE NA DVA ŽIVOTA

Osiguranje na dva života se odnosi na isplatu osigurane sume koja zavisi od dužine života dva osigurana lica (primer: muž i žena, brat i sestra, roditelj i dete, itd.).

Ako obeležimo sa l_x lice staro x godina i sa l_y lice staro y godina, mogu da se formiraju $l_x l_y$ parovi i to posle prve godine $l_{x+1} l_{y+1}$ i tako redom do posle n godina $l_{x+n} l_{y+n}$ parova.

5.1. VEROVATNOĆA ŽIVOTA I SMRTI DVA LICA

Imamo dva lica A i B starosti x i y godina, treba da odredimo verovatnoću ${}_n P_{xy}$ da će oba lica živeti još samo n godina.

$${}_n P_{xy} = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+n}}{l_y} = {}_n P_x \cdot {}_n P_y$$

1. Verovatnoća da oba lica A i B starosti x i y godina neće biti živo posle n godina:

$${}_n q_{xy} = 1 - {}_n P_x \cdot {}_n P_y$$

2. Verovatnoća da posle n godina neće biti živo ni lice A, ni lice B:

$${}_n \bar{q}_{xy} = 1 + {}_n P_{xy} - ({}_n P_x + {}_n P_y)$$

3. Verovatnoća da će posle n godina biti živo samo lice A:

$${}_n P_{x'y} = {}_n P_x - {}_n P_x \cdot {}_n P_y$$

4. Verovatnoća da će posle n godina biti živo samo lice B:

$${}_n P_{xy'} = {}_n P_y - {}_n P_x \cdot {}_n P_y$$



1. Lice A je staro 45 godina i lice B 52 godine. Kolika je verovatnoća da će oba ova lica živeti još 15 godina?

Rešenje:

$${}_n P_{xy} = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+n}}{l_y} = \frac{l_{45+15}}{l_{45}} \cdot \frac{l_{52+15}}{l_{52}}$$

$${}_n P_{xy} = \frac{l_{60}}{l_{45}} \cdot \frac{l_{67}}{l_{52}} = \frac{55.973}{74.435} \cdot \frac{42.565}{67.253}$$

$${}_n P_{xy} = 0,4714$$

2. Lice A je staro 55 godina i lice B 38 godina. Kolika je verovatnoća da posle 25 godina:

- a) oba ova lica neće biti živa?
b) neće biti živo ni lice A, ni lice B?

Rešenje:

a)

$${}_n q_{xy} = 1 - {}_n P_{xy} = 1 - {}_n P_x \cdot {}_n P_y$$

$${}_n q_{xy} = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+n}}{l_y}$$

$${}_{25} q_{5538} = 1 - \frac{l_{55+25}}{l_{55}} \cdot \frac{l_{38+25}}{l_{38}} = 1 - \frac{l_{80}}{l_{55}} \cdot \frac{l_{63}}{l_{38}}$$

$${}_{25} q_{5538} = 1 - \frac{13.290}{63.469} \cdot \frac{60.551}{80.253} = 1 - 0,132183$$

$${}_{25} q_{5538} = 0,8678$$

b)

$${}_n \bar{q}_{xy} = 1 + {}_n P_{xy} - ({}_n P_x + {}_n P_y)$$

$${}_{25} \bar{q}_{5538} = 1 + {}_{25} P_{5538} - ({}_{25} P_{55} + {}_{25} P_{38})$$

$${}_{25} \bar{q}_{5538} = 1 + 0,1321 - \left(\frac{l_{55+25}}{l_{55}} + \frac{l_{38+25}}{l_{38}} \right) = 1,1321 - \left(\frac{l_{80}}{l_{55}} + \frac{l_{63}}{l_{38}} \right)$$

$${}_{25} \bar{q}_{5538} = 1,1321 - \left(\frac{13.290}{63.469} + \frac{50.661}{80.253} \right) = 1,1321 - (0,2093 + 0,6312)$$

$${}_{25} \bar{q}_{5538} = 0,2916$$



3. Lice A je staro 50 godina i lice B 40 godina. Kolika je verovatnoća da posle 35 godina bude živo:
- a) samo lice A?
- b) samo lice B?

Rešenje:

a)

$${}_n P_{x:y} = {}_n P_x \cdot (1 - {}_n P_y)$$

$${}_n P_{x:y} = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \left(1 - \frac{l_{y+n}}{l_y}\right)$$

$${}_{35} P_{50:40} = \frac{l_{50+35}}{l_{50}} \cdot \left(1 - \frac{l_{40+35}}{l_{40}}\right) = \frac{l_{85}}{l_{50}} \cdot \left(1 - \frac{l_{75}}{l_{40}}\right)$$

$${}_{35} P_{50:40} = \frac{5.417}{69.517} \cdot \left(1 - \frac{24.100}{78.653}\right) = 0,07792 \cdot 0,6935$$

$${}_{35} P_{50:40} = 0,054$$

b)

$${}_n P_{xy'} = (1 - {}_n P_x) \cdot {}_n P_y$$

$${}_n P_{xy'} = \left(1 - \frac{l_{x+n}}{l_x}\right) \cdot \frac{l_{y+n}}{l_y}$$

$${}_{35} P_{5040'} = \left(1 - \frac{l_{50+35}}{l_{50}}\right) \cdot \frac{l_{40+35}}{l_{40}} = \left(1 - \frac{l_{85}}{l_{50}}\right) \cdot \frac{l_{75}}{l_{40}}$$

$${}_{35} P_{5040'} = \left(1 - \frac{5.417}{69.517}\right) \cdot \frac{24.100}{78.653} = (1 - 0,078) \cdot 0,306$$

$${}_{35} P_{5040'} = 0,282$$

5.2. DOŽIVOTNA ZAJEDNIČKA RENTA

Doživotna zajednička renta se odnosi na dva lica A i B koja su se osigurala da dok su u životu primaju početkom godine rentu. Kolika je miza za ovo osiguranje?

Ako neto mizu označimo sa a_{xy} , osiguravajuća kompanija primiće od $l_x l_y$ parova:

$$l_x l_y \cdot a_{xy} \text{ dinara,}$$

a isplaćivaće:

- ♦ početkom I godine $l_x l_y$ dinara;
- ♦ početkom II godine $l_{x+1} l_{y+1}$ dinar;
- ♦ itd.

Ako se diskontuju isplate na početku osiguranja i izjednače njihovi zbrojevi sa uplatama, dobijamo da je neto miza za ovo osiguranje:

$$a_{xy} = \frac{N_{xy}}{D_{xy}}.$$

6.

OBRAČUN BRUTO PREMIJE

Pored **neto premije** koja je dovoljna za pokrivanje direktnih troškova osiguranja, postoji i premija koja predstavlja **neto premiju uvećanu za određene dopunske troškove**. To bi značilo da osiguravajuće kompanije ukoliko bi obračunavale svojim osiguranicima premija bazirane na tablicama smrtnosti i kamatnoj stopi, ne bi imale za svoje troškove, radile bi sa gubitkom. Ovi troškovi se nazivaju režiskim ili troškovima sprovođenja osiguranja. To bi u suštini značilo da se bruto premija obračunava na osnovu tablice smrtnosti, kamatne stope i troškova sprovođenja osiguranja.

Troškovi osiguravajuće kompanije obuhvataju:

1. Akvizicione troškove (troškove pribavljanja osiguranja),
2. Inkaso troškovi (troškovi naplate premije),
3. Administrativne (upravne) troškove.

Akvizicioni troškovi ili **prvi a troškovi** sastoje se od provizija koje osiguravajuća kompanija isplaćuje agentima osiguranja (akviziterima). Provizija obično iznosi 1-3% (ili 1 – 30‰) osigurane sume ili 3 – 7% (30 – 70‰) godišnje premije. Ova visina zavisi od politike osiguravajuće kompanije kao i od sposobnosti agenta, njegovog karaktera, broja ugovorenih poslova, vrste osiguranja itd.

Troškovi naplate premije odnose se na troškove koji nastaju prilikom naplate premije. To su troškovi inkaso premije i plate inkasanata (agenti koji naplaćuju premije). Od naplaćene bruto premije obično na inkaso troškove otpada 2 – 3%.

U **administrativne** (upravne) **troškove** spadaju osnivački i organizacioni troškovi, kancelarijski troškovi, plate zaposlenih i dr. U ove troškove mogu se uključiti novčani iznosi neophodni za ukamačivanje akcijskog kapitala i raspodelu dobiti osiguranicima. U zavisnosti od poslovne politike osiguravača visina ovih troškova se obično kreće od 2 – 3‰ (promila) od osigurane mase.

Troškovi mogu biti jednokratni koji postoje samo prve godine poslovanja i trajni koji traju sve vreme trajanja osiguranja.

Jednokratna bruto premija sastoji se iz jednokratne neto premije i dadatak za troškove.

Formula po kojoj se izračunava bruto premija:

$$\Pi_x = \left[Px + \frac{k \cdot \alpha}{1000 \cdot a_x} + \frac{k \cdot \beta}{1000} \right] \cdot \frac{1000}{1000 - \gamma}$$

Px – neto premija

$\frac{k \cdot \alpha}{1000 \cdot a_x}$ - akvizicioni troškovi,

$\frac{k \cdot \beta}{1000}$ - administrativni troškovi,

$\frac{1000}{1000 - \gamma}$ - inkaso troškovi,

α - troškovi za jedinicu osigurane sume,

β, γ - troškovi od jedinice premije,

k – kapital.

Osoba stara 50 godina osigurala je kapital od 200.000,00 dinara da se isplati naslednicima nakon njegove smrti, bilo kada da smrt nastupi.

- Izračunati godišnje akvizicione troškove, ako su oni 5‰ (promila) od osigurane sume, a premija se plaća godišnje.*
- Izračunati administrativne troškove ako oni iznose 2‰ od osigurane sume.*
- Izračunati inkaso troškove ako oni iznose 10‰ od izračunate premije.*
- Izračunati godišnju bruto premiju za ovo osiguranje.*



Rešenje:

$$P(A_{50}) = \frac{M_{50}}{N_{50}}$$

$$P = 200.000 \cdot 0,0357757$$

$$P(A_{50}) = \frac{4714,01}{131765,619}$$

$$P = 7155,14$$

$$P(A_{50}) = 0,0357757$$

a)

$$\frac{k \cdot \alpha}{1000 \cdot a_x} = \frac{200.000 \cdot 5}{1000 \cdot \frac{N_{50}}{D_{50}}} = \frac{200.000 \cdot 5}{1000 \cdot \frac{131765,619}{9781,919}}$$

$$\frac{k \cdot \alpha}{1000 \cdot a_x} = 74,23727$$

b)

$$\frac{k \cdot \beta}{1000} = \frac{200.000 \cdot 2}{1000} = 400$$

c)

$$\frac{1000}{1000 - \gamma} = \frac{1000}{1000 - 10} = 1,010101$$

$$\Pi_x = (7155,14 + 74,23727 + 400) \cdot 1,010101$$

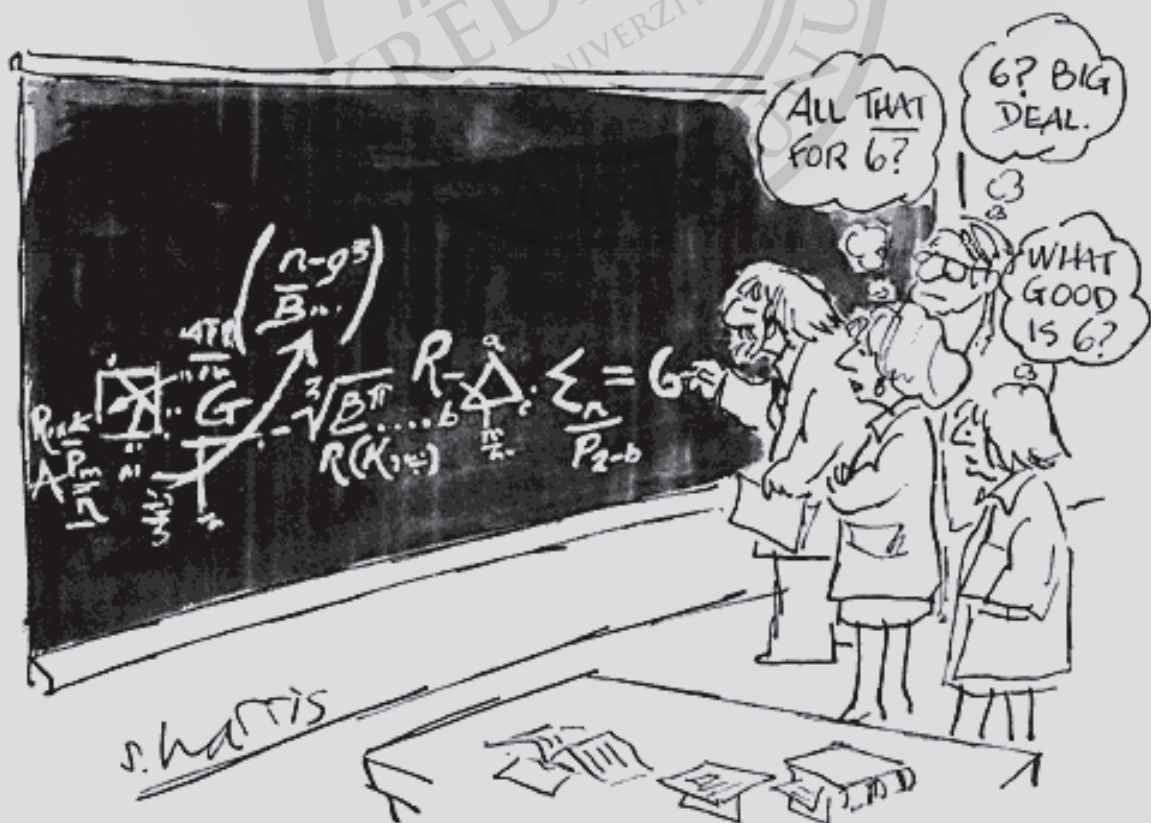
$$\Pi_x = 7706,4464$$



III

DEO

ZBIRKA ZADATAKA





1.

FINANSIJSKA MATEMATIKA

PROCENTNI RAČUN

Veza između početne vrednosti neke veličine, nove (povećane ili smanjene) vrednosti te veličine i procentne stope za koju je izvršeno povećanje ili smanjenje početne veličine.

Ako se početna vrednost neke veličine (glavnica G) povećava za procenat p , tada procentni prinos usled ovog povećanja iznosi

$$P = p \cdot G$$

a nova (povećana) vrednost te veličine (obeležavamo sa G_{pov}) iznosi:

$$G_{pov} = G + P = G + p \cdot G = G(1 + p)$$

$$G_{sma} = G - P = G - p \cdot G = G(1 - p)$$

1. Kolika je nova cena automobila od 8000 evra ako je:

- Ona povećanja za 23%,
- Ona smanjena za 23%?

Rešenje:

$$p = 23\%; G = 8000; \quad p = \frac{23}{100} = 0,23$$

$$G_{pov} = G(1 + p); \quad G_{pov} = 8000(1 + 0,23); \quad G_{pov} = 9840 \text{ evra}$$

$$G_{sma} = G(1 - p); \quad G_{sma} = 8000(1 - 0,23); \quad G_{sma} = 6160 \text{ evra}$$

U praksi se javljaju slučajevi kada je data glavnica sa prinosom ili glavnica po odbitku prinosa. Za takve slučajeve formiramo izvedene proporcije za procentni račun više i niže sto.

Osnovna proporcija:

$$G : P = 100 : p$$

$$(G \pm P) : (100 \pm p) = P : p$$

$$p = \frac{p(G+P)}{100+p}$$

$$p = \frac{p(G-P)}{100-p}$$

$$(G \pm P) : (100 \pm p) = G : 100$$

$$G = \frac{(G+P) \cdot 100}{100+p}$$

$$G = \frac{(G-P) \cdot 100}{100-p}$$

2. Cena knjige posle povećanja od 9% je 1200 dinara. Koliko je iznosila cena knjige pre poskupljenja?

Rešenje:

$$(G+P)=1200; \quad p=9\%; \quad G=?$$

$$G = \frac{(G+P) \cdot 100}{100+p} = \frac{1200 \cdot 100}{100+9} = 1.100,92$$

Cena knjige pre poskupljenja je iznosila 1.100,92 dinara.

3. Izračunati za koliko dinara je snižena cena patika, ako se posle sniženja od 25% patike prodaju po ceni od 2800 dinara?

Rešenje:

$$(G-p)=2800; \quad p=25\%; \quad G=?$$

$$G = \frac{(G-P) \cdot 100}{100-p} = \frac{2800 \cdot 100}{100-25} = 3.733,33$$

$$P = 3.733,33 - 2800$$

$$P = 933,33$$

Cena patika pre sniženja je 3.733,33 dinara a sniženje iznosi 933,33 dinara.

4. U jednoj fabrici broj zaposlenih u odnosu na prethodnu godinu se povećao za 100 radnika tako da sada iznosi 230. Za koliko se procenata povećao broj zaposlenih?

Rešenje:

$$G : P = 100 : p$$

$$P = 100;$$

$$G = 230;$$

$$p = ?$$

$$p = \frac{P \cdot 100}{G} = \frac{100 \cdot 100}{230}$$

$$p = 43,48\%$$

Broj zaposlenih se povećao za 43,48%.

5. Plan proizvodnje papira je prebačen za 10% i nakon povećanja iznosi 150.000 tona. Za koliko tona je prebačen plan proizvodnje?

Rešenje:

$$(G + P) = 150.000; \quad p = 10\%; \quad P = ?$$

$$P = \frac{(G + P) \cdot p}{100 + p} = \frac{150.000 \cdot 10}{100 + 10}$$

$$P = 13.636,364$$

Plan proizvodnje papira prebačen je za 13.636,364 tone.

6. Posle sniženja od 15% , roba se prodaje za 5200 dinara, izračunati:
- Za koliko je dinara snižena cena?
 - Koliko bi iznosila prodajna cena da je sniženje iznosilo 20% od prvobitne cene?

Rešenje:

a)

$$(G - P) = 5200; \quad p = 15\%; \quad P = ?$$

$$P = \frac{(G - P) \cdot p}{100 - p} = \frac{5200 \cdot 15}{100 - 15}$$

$$P = 917,64$$

Cena robe je snižena za 917,14 dinara

b)

$$G = 5200 + 917,64$$

$$G = 6.117,69$$

$$P = \frac{G \cdot p}{100} = \frac{6117,69 \cdot 20}{100}$$

$$P = 1.223,54$$

Prodajna cena bi posle sniženja od 20% iznosila:

$$6.117,69 - 1.223,54 = 4.894,15 \text{ dinara.}$$

INTERESNI RAČUN

7. Kapital od 20000 dinara uložen je 5 godina uz ineresnu stopu 5% p.a. izračunati interes.

Rešenje:

$$\begin{array}{ll} K = 20000 & i = \frac{K \cdot p \cdot g}{100} \\ p = 5\% & i = \frac{20000 \cdot 5 \cdot 5}{100} \\ g = 5god & i = 5000dinara \\ i = ? & \end{array}$$

8. Koliko iznosi interes na pozajmljenu sumu od 45500 dinara za 9 meseci uz interesnu stopu od 5% p.a.?

Rešenje:

$$\begin{array}{ll} K = 45500 & i = \frac{K \cdot p \cdot m}{1200} \\ m = 9 & i = \frac{45500 \cdot 9 \cdot 5}{1200} \\ p = 5\% & i = 1.706,25 \text{ dinara} \\ i = ? & \end{array}$$

9. Kapital od 9370 dinara uložen je 55 dana po stopi 7% p.a. (k,360) izračunati interes.

Rešenje:

$$\begin{array}{ll} K = 9370 & i = \frac{K \cdot p \cdot d}{36000} \\ p = 7\% & i = \frac{9370 \cdot 7 \cdot 55}{36000} \\ d = 55 & i = 100,206 \text{ dinara} \\ i = ? & \end{array}$$

10. Koliko dinara je iznosio pozajmljeni kapital koji je dužnik primio uz 6% p.a. interesa, ako je za 2 godine i dva meseca platio 4300 dinara kamate?

Rešenje:

$$p = 6\%$$

$$i = 4300$$

$$m = 26 \quad (24 + 2)$$

$$K = ?$$

$$K : i = 1200 : pm$$

$$K = \frac{i \cdot 1200}{pm}$$

$$K = \frac{4300 \cdot 1200}{6 \cdot 26}$$

$$K = 33.076,923 \text{ dinara}$$

- 11.** Izračunati kapital na koji je izračunat interes od 850 dinara po stopi od 6% p.a. za vreme od:

a) 7 godina b) 18 meseci c) 32 dana.

Rešenje:

a)

$$i = 850$$

$$p = 6\%$$

$$g = 7$$

$$K = ?$$

$$K : i = 100 : p \cdot g$$

$$K = \frac{i \cdot 100}{6 \cdot 7}$$

$$K = \frac{100 \cdot 850}{6 \cdot 7}$$

$$K = 2023,809 \text{ dinara}$$

b)

$$i = 850$$

$$p = 6\%$$

$$m = 18$$

$$K = ?$$

$$K = \frac{i \cdot 1200}{p \cdot m}$$

$$K = \frac{1200 \cdot 850}{6 \cdot 18}$$

$$K = 9.444,444 \text{ dinara}$$

c)

$$i = 850$$

$$p = 6\%$$

$$d = 32$$

$$K = ?$$

$$K = \frac{i \cdot 36000}{p \cdot d}$$

$$K = \frac{36000 \cdot 850}{6 \cdot 32}$$

$$K = 159,375 \text{ dinara}$$

12. Ako je na kapital od 1500 dinara:

- a) Za 6 meseci plaćen interes od 350 dinara,
- b) Za 9 meseci plaćen interes od 150 dinara,
- c) Za period od 4.05.2010. do 28.09.2010. (k,360) plaćen iznos 90 dinara, Izračunati interesnu stopu pod kojom je vršeno ukamaćivanje.

Rešenje:

a)

$$K = 1500$$

$$g = 6$$

$$i = 350$$

$$p = ?$$

$$p = \frac{100 \cdot i}{K \cdot g}$$

$$p = \frac{100 \cdot 350}{1500 \cdot 6}$$

$$p = 3,88\%$$

b)

$$K = 1500$$

$$m = 9$$

$$i = 150$$

$$p = ?$$

$$p = \frac{1200 \cdot i}{K \cdot m}$$

$$p = \frac{1200 \cdot 150}{1500 \cdot 9}$$

$$p = 13,33\%$$

c)

$$K = 1500$$

$$d = 147 \quad (27 + 30 + 31 + 31 + 28)$$

$$i = 90$$

$$p = ?$$

$$p = \frac{36000 \cdot i}{K \cdot d}$$

$$p = \frac{36000 \cdot 90}{1500 \cdot 147}$$

$$p = 14,69\%$$

13. Po dobitku interesa za 7 meseci dužnik je primio 33.286 dinara. Izračunati koliki je dug I koliko je interes, ako je interesna stopa 5,25%.

Rešenje:

$$(K - i) = 33.286$$

$$m = 7$$

$$p = 5,25\%$$

$$i = ?$$

$$K = ?$$

$$(K - i) : (1200 - pm) = i : pm$$

$$i = \frac{(K - i) \cdot pm}{1200 - pm}$$

$$i = \frac{33.286 \cdot 5,25 \cdot 7}{1.200 - 5,25 \cdot 7}$$

$$i = 1.501,59 \text{ din}$$

$$(K - i) = 33.286$$

$$K = 33.286 + i$$

$$K = 33.286 + 1.501,59$$

$$K = 34.337,59$$

14. Izračunati za koliko će dana kapital od 700.000 dinara, uz stopu od 8% p.a doneti 6.200 dinara interesa?

Rešenje:

$$K = 700.000$$

$$p = 8\%$$

$$i = 6.200$$

$$d = ?$$

$$K : i = 36.000 : p \cdot d$$

$$d = \frac{36.000 \cdot i}{K \cdot p}$$

$$d = \frac{36.000 \cdot 6.200}{700.000 \cdot 8} = 39,85$$

$$d \approx 40 \text{ (dana)}$$

15. Banka je 18.07. odobrila zajam, a 8.10. dužnik je vratio dug koji je uvećan za interes, i ukupno platio 600.000 dinara. Kolika je visina zajma, ako je interesna stopa 5% p.a (K, 360).

Rešenje:

$$(K + i) = 600.000$$

$$p = 5\%$$

$$d = 82 \text{ (13+31+30+8)}$$

$$K = ?$$

$$(K + i) : (36.000 + p \cdot d) = K : 36.000$$

$$K = \frac{(K + i) \cdot 36.000}{36.000 + p \cdot d}$$

$$K = \frac{600.000 \cdot 36.000}{36.000 + 5 \cdot 82}$$

$$K = 593.243,61 \text{ (dinara)}$$

16. Banka je dužniku odobrila zajam 10.02. od 10.000 dinara. Dužnik je vratio dug uvećan interesom u roku i ukupno platio 10.850 dinara. Kog datuma je vraćen dug ako je interesna stopa 4% p.a (K, 360).

Rešenje:

$$K = 10.000$$

$$(K + i) = 10.850$$

$$p = 10\%$$

$$d = ?$$

$$i = 10.850 - 10.000$$

$$i = 850$$

$$K : i = 36.000 : p \cdot d$$

$$p \cdot d = \frac{i \cdot 36.000}{K}$$

$$10 \cdot d = \frac{850 \cdot 36.000}{10.000}$$

$$d = \frac{3.060}{10}$$

$$d = 306 \text{ (dana)}$$

Zajam je vraćen 13.12. iste godine.

SREDNJI ROK PLAĆANJA

Kod srednjeg roka plaćanja (obračuna) imamo tri slučaja:

I slučaj

Obaveze dužnika su jednake, interesne stope su jednake a dani dospeća su različiti:

$$K_1 = K_2 = \dots = K_n = K$$

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n = p$$

$$d_1, d_2, \dots, d_n$$

$$d_s = \frac{d_1 + d_2 + \dots + d_n}{n}$$

$$d_s = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n}$$

II slučaj

Obaveze dužnika su različite, interesne stope su jednake a dani dospeća su različiti:

$$K_1 \neq K_2 \neq \dots \neq K_n$$

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n$$

$$d_1 \neq d_2 \neq d_3, \dots \neq d_n$$

$$d_s = \frac{K_1 \cdot d_1 + K_2 \cdot d_2 + \dots + K_n \cdot d_n}{K_1 + K_2 + \dots + K_n}$$

$$d_s = \frac{\sum_{i=1}^n K_i \cdot d_i}{\sum_{i=1}^n K_i}$$

III slučaj

Obaveze dužnika su različite, interesne stope su različite i dani dospeća su različiti:

$$K_1 \neq K_2 \neq \dots \neq K_n$$

$$p_1 \neq p_2 \neq \dots \neq p_n$$

$$d_1 \neq d_2 \neq d_3, \dots, \neq d_n$$

Ako je srednja stopa p_s data, tada je:

$$d_s = \frac{K_1 \cdot p_1 \cdot d_1 + K_2 \cdot p_2 \cdot d_2 + \dots + K_n \cdot p_n \cdot d_n}{(K_1 + K_2 + \dots + K_n) \cdot p_s}$$

Ako je srednja stopa p_s nije data, tada je:

$$d_s = \frac{K_1 \cdot p_1 \cdot d_1 + K_2 \cdot p_2 \cdot d_2 + \dots + K_n \cdot p_n \cdot d_n}{K_1 \cdot p_1 + K_2 \cdot p_2 + \dots + K_n \cdot p_n}$$

$$d_s = \frac{\sum_{i=1}^n K_i \cdot p_i \cdot d_i}{\sum_{i=1}^n K_i \cdot p_i}$$

17. Jedno preduzeće treba da plati sledeće iznose:

2500	15.02.
2500	30.03.
2500	25.04.

Uz interesnu stopu 7% p.a. Kada se može ceo dug otplatiti odjednom, a da se pri tome ne ošteti ni dužnik, ni poverilac?

Rešenje:

$$d_s = \frac{d_1 + d_2 + d_3}{3}$$

$$K_1 = K_2 = K_3 = 2500$$

$$p_1 = p_2 = p_3 = 7\%$$

$$d_1 = 0, d_2 = 43, d_3 = 68$$

$$d_s = \frac{0 + 43 + 68}{3}$$

$$d_s = 37$$

Srednji rok plaćanja je 37 dana.

Sve obaveze se mogu izmiriti odjednom 24.03. iste godine.

18. Preduzeće treba da isplati sledeće obveze:

1500	16.03.
2300	19.04.
2500	25.05.

uz interesnu stopu 8% p.a. koliko iznosi d_s ?

Rešenje:

$$K_1 = 1500, \quad K_2 = 2300, \quad K_3 = 2500$$

$$p_1 = p_2 = p_3 = 8\%$$

$$d_1 = 0, \quad d_2 = (15 + 19) = 34, \quad d_3 = (34 + 11 + 25) = 70$$

$$d_s = \frac{K_1 \cdot d_1 + K_2 \cdot d_2 + K_3 \cdot d_3}{K_1 + K_2 + K_3}$$

$$d_s = \frac{1500 \cdot 0 + 2300 \cdot 34 + 2500 \cdot 70}{1500 + 2300 + 2500}$$

$$d_s = 40,19$$

$$d_s \approx 40 \quad (\text{dana})$$

19. Preduzeće treba da plati sledeća dugovanja:

2200	17.05.	uz 5% p.a
3100	10.06.	uz 9% p.a
3500	18.07.	uz 11% p.a

Kada se može otplatiti ceo dug odjednom a da se pri tome ne oštete ni poverilac, ni dužnik?

Rešenje:

$$K_1 = 2200, \quad K_2 = 3100, \quad K_3 = 3500$$

$$p_1 = 5\%, \quad p_2 = 9\%, \quad p_3 = 11\%$$

$$d_1 = 0, \quad d_2 = (14 + 10) = 24, \quad d_3 = (24 + 20 + 18) = 62$$

$$d_s = \frac{K_1 \cdot p_1 \cdot d_1 + K_2 \cdot p_2 \cdot d_2 + K_3 \cdot p_3 \cdot d_3}{K_1 + K_2 + K_3}$$

$$d_s = \frac{2200 \cdot 5 \cdot 0 + 3100 \cdot 9 \cdot 24 + 3500 \cdot 11 \cdot 62}{2200 \cdot 5 + 3100 \cdot 9 + 3500 \cdot 11}$$

$$d_s = 39,49$$

$$d_s \approx 40 \quad (\text{dana})$$

Ceo dug se može vratiti odjednom 24.06. iste godine, a da dužnik ni poverilac ne budu oštećeni.

POTRŠAČKI KREDITI

20. Odobren je potrošački kredit u iznosu od 60.000 dinara sa kamatnom stopom 6% p.a i rokom otplate 5 meseci. Koliko iznosi ukupno plaćeni interes a koliko otplata?

Rešenje:

$$K = 60.000$$

$$p = 6\%$$

$$m = 5$$

$$i_1 = \frac{K \cdot p}{1200} = \frac{60000 \cdot 6}{1200} = 300$$

$$i_2 = \frac{K \cdot p}{1200} \left(1 - \frac{1}{m}\right) = 300 \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 240$$

$$i_3 = \frac{K \cdot p}{1200} \left(1 - \frac{2}{m}\right) = 300 \cdot \left(1 - \frac{2}{5}\right) = 180$$

$$i_4 = \frac{K \cdot p}{1200} \left(1 - \frac{3}{m}\right) = 300 \cdot \left(1 - \frac{3}{5}\right) = 120$$

$$i_5 = \frac{K \cdot p}{1200} \left(1 - \frac{4}{m}\right) = 300 \cdot \left(1 - \frac{4}{5}\right) = 60$$

$$otplata = \frac{K}{m} = \frac{60000}{5} = 12.000 \text{ dinara}$$

$$i_{ukupno} = \frac{K \cdot p}{2400} (m+1)$$

$$i_{ukupno} = \frac{60000 \cdot 6}{2400} (5+1)$$

$$i_{ukupno} = 900 \text{ dinara}$$

Otplatni plan

Broj meseci (<i>m</i>)	Iznos duga (<i>K</i>) 60.000	Kamata (<i>p</i>) 6%	Otplata $\left(\frac{K}{m}\right)$	Rata $b = \frac{K}{m} + i$
1	48.000	300	12.000	12300
2	36.000	240	12.000	12240
3	24.000	180	12.000	12180
4	12.000	120	12.000	12120
5	-	60	12.000	12060
Σ		900	60.000	60.900

21. Odobren je potrošački kredit za kupovinu bele tehnike od 80.000 dinara sa kamatnom stopom 6% (p.a) i rokom otplate 15 meseci. Učešće u gotovini iznosi 20% od vrednosti potrošačkog kredita. Izračunati ukupan interes i prosečnu mesečnu ratu.

Rešenje:

$$\begin{aligned} K &= 80.000 \\ p &= 6\% \\ m &= 15 \end{aligned} \quad \begin{aligned} K &= K - 20\% = 80.000 - \left(80.000 \cdot \frac{20}{100} \right) \\ K &= 64.000 \end{aligned}$$

Ukupan interes

$$i_1 = \frac{K \cdot p}{2400} (m+1) = \frac{64000 \cdot 6}{2400} (15+1) = 2560 \text{ dinara}$$

Prosečna mesečna rata:

$$b = \frac{K \cdot i}{m} = \frac{64000 \cdot 2560}{15} = 4437,33 \text{ dinara}$$

22. Odobren je potrošački kredit od 210.000 dinara sa kamatnom stopom od 8% (p.a) i rokom otplate od 5 meseci. Napraviti otplatni plan, izračunati ukupan interes i otplatu.

Rešenje:

$$\begin{aligned} K &= 210.000 \\ p &= 8\% \\ m &= 5 \end{aligned} \quad \text{otplata} = \frac{K}{m} = \frac{210000}{5} = 42.000 \text{ dinara}$$

Ukupan interes

$$\begin{aligned} i_1 &= \frac{K \cdot p}{1200} = \frac{210000 \cdot 8}{1200} = 1400 \\ i_2 &= \frac{K \cdot p}{1200} \left(1 - \frac{1}{5} \right) = 1400 \cdot \frac{4}{5} = 1120 \\ i_3 &= \frac{K \cdot p}{1200} \left(1 - \frac{2}{5} \right) = 1400 \cdot \frac{3}{5} = 840 \\ i_4 &= \frac{K \cdot p}{1200} \left(1 - \frac{3}{5} \right) = 1400 \cdot \frac{2}{5} = 560 \\ i_5 &= \frac{K \cdot p}{1200} \left(1 - \frac{4}{5} \right) = 1400 \cdot \frac{1}{5} = 280 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i &= \frac{K \cdot p}{2400} (m+1) \\ i &= \frac{210000 \cdot 8}{2400} (5+1) \\ i &= 4200 \text{ dinara} \end{aligned}$$

Otplatni plan

Broj meseci (<i>m</i>)	Iznos duga (<i>K</i>) 210.000	Kamata (<i>i</i>)	Otplata	Rata
1	168.000	1400	42.000	43400
2	126.000	1120	42.000	43120
3	84.000	840	42.000	42840
4	42.000	560	42.000	42560
5	-	280	42.000	42280
Σ		4200	210.000	214.200

23. Odobren je potrošački kredit od 30.000 dinara uz 15% (p.a) godišnje kamate na 18 meseci. Koliko iznosi prosečna mesečna rata, a koliko ukupan interes?

Rešenje:

$$\begin{array}{ll}
 \text{ukupan prinos} & \text{prosečna mesečna rata} \\
 K = 30.000 & i = \frac{K \cdot p}{2400} (m+1) \quad b = \frac{K+i}{m} \\
 p = 15\% & i = \frac{30000 \cdot 15}{2400} (18+1) \quad b = \frac{30000 + 3562,5}{18} \\
 m = 15 & i = 3.562,5 \text{ dinara} \quad b = 1.869,58 \text{ dinara}
 \end{array}$$

24. Prodavnica nameštaja odobrava kredit za kuhinje u vrednosti 50.000 dinara na 18 meseci uz 15% (p.a) kamate i 25% učešća od cene kuhinje u gotovini. Koliko iznosi prosečna mesečna rata?

Rešenje:

$$\begin{array}{ll}
 K = 50.000 & K = K - 25\% \\
 p = 15\% & K = 50.000 - \left(50.000 \cdot \frac{25}{100} \right) \\
 m = 18 & k = 37.500 \\
 \text{Prosečna mesečna rata} & \\
 i = \frac{K \cdot p}{2400} (m+1) & b = \frac{K+i}{m} \\
 i = \frac{37500 \cdot 15}{2400} (18+1) & b = \frac{37500 + 4453,12}{18} \\
 i = 4.453,12 & b = 2.330,73 \text{ (dinara)}
 \end{array}$$

ESKONTOVANJE MENICA

25. Eskontovana je menica 8.05 od 200000 dinara za 8.07. Naći eskontovanu sumu ako je eskontna stopa 8% (p.a) (k.360).

Rešenje:

$$\begin{aligned}
 K_n &= 20,000 & D &= \frac{36000}{8} = 4500 \\
 p &= 8\% & E &= 271 \\
 d &= (23 + 30 + 8) = 61 & E &= \frac{K_n \cdot d}{D} & K_0 &= K_n - E \\
 E &= ? & K_0 &= 20.000 - 271 \\
 K_0 &= ? & E &= \frac{20.000 \cdot 61}{4500} & K_0 &= 19.729 \text{ din}
 \end{aligned}$$

26. Na dan 8.03. eskontovana je menica sa rok 5.07. Izračunati na koju sumu glasi menica ako je eskontna stopa 8% (p.a), a dužnik je 8.03. primio odbitku eskonta 4320 dinara (k.360).

Rešenje:

$$\begin{aligned}
 & D = \frac{36000}{8} = 4500 \\
 K_n - E &= 4320 & E &= \frac{(K_n - E) \cdot d}{D - d} \\
 p &= 8\% & E &= \frac{4320 \cdot 119}{4500 - 119} \\
 d &= (23 + 30 + 31 + 30 + 5) = 119 & E &= 117,34 \\
 K_n &= ? & &
 \end{aligned}$$

$$K_n = 4320 + 117,34 = 4437,34 \text{ dinara (nominalna vrednost menice)}$$

27. Eskontna vrednost menice na dan 5.09. iznosi 32600 dinara. Izračunati na koliko dinara glasi menica (nominalna vrednost) ako je rok menice 10.12., a eskontna stopa je 9% (p.a) (k.360).

Rešenje:

$$D = \frac{36000}{9} = 4000$$

$$K_n - E = 32.600$$

$$p = 9\%$$

$$d = (21 + 31 + 30 + 10) = 92$$

$$K_n = ?$$

$$E = \frac{(K_n - E) \cdot d}{D - d}$$

$$E = \frac{32600 \cdot 92}{4000 - 92}$$

$$E = 767,45$$

$$K_n = 32600 + 767,45 = 33.367,45 \text{ dinara (nominalna vrednost menice)}$$

28. Preduzeće ima dug od 80.000 dinara sa rokom isplate 9.05. Preduzeće izdaje 9.05. banci 3 menice na jednake sume sa rokovima: 9.06., 9.07., 8.08. Na koju sumu glasi svaka od ovih menica, ako je eskontna stopa 8% (p.a) (k.360)?

Rešenje:

$$D = \frac{36000}{8} = 4500$$

$$K_n - E = 80.000$$

$$p = 8\%$$

$$d_s = \frac{31 + 61 + 91}{3} = 61$$

$$K_n = ?$$

$$E = \frac{(K_n - E) \cdot d}{D - d}$$

$$E = \frac{80000 \cdot 61}{4500 - 61}$$

$$E = 1099,35$$

$$K_n = 80000 + 1099,35 = 81.099,35 \text{ dinara - nominalna vrednost menice}$$

$$\frac{K_n}{3} = \frac{81.099,35}{3} = 27.033,116 \text{ dinara}$$

I	27.033,116	9.06.
II	27.033,116	9.07.
III	27.033,116	8.08.

29. Jedna banka je eskontovala 15.03. tri jednake menice čija je eskontna vrednost 180.000 dinara, sa rokovima otplate 10.06., 16.07., i 9.08. Izračunati nominalnu vrednost menica ako je eskontna stopa 6% (p.a) (k.360)?

Rešenje:

$$D = \frac{36000}{6} = 6000$$

$$K_n - E = 180.000$$

$$p = 6\%$$

$$d_s = \frac{87 + 1123 + 147}{3} = 119$$

$$K_n = ?$$

$$E = \frac{(K_n - E) \cdot d}{D - d}$$

$$E = \frac{180000 \cdot 119}{6000 - 119}$$

$$E = 3642,24$$

$$K_n = 180000 + 3642,24 = 183.642,24 \text{ dinara (nominalna vrednost menice)}$$

$$\frac{K_n}{3} = \frac{183.642,24}{3} = 61.214,079 \text{ dinara (nominalna vrednost 1., 2. i 3. menice)}$$

Obračun 15.03.

I	61.214,079	10.06
II	261.214,079	16.07.
III	61.214,079	9.08.

SLOŽENI INTERES

FAKTOR AKUMULACIJE, I - INTERESNE TABLICE

- 30.** Ako uložimo danas 50.000 dinara u banku koja računa interes po stopi od 7% (p.a) i primenjuje godišnje kapitalisanje, koliko ćemo imati na kraju:
- prve godine,
 - šeste godine,
 - dvanaeste godine?

Rešenje:

$$K_n = 50,000$$

$$p = 7\%$$

$$K_n = ?$$

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$K_1 = K_0 \cdot I_p^1$$

a)

b)

c)

$$K_6 = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^6$$

$$K_{12} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{12}$$

$$K_1 = K_0 \cdot I_p^1$$

$$K_6 = 50.000 \cdot \left(1 + \frac{7}{100}\right)^6$$

$$K_{12} = 50.000 \cdot \left(1 + \frac{7}{100}\right)^{12}$$

$$K_1 = 50.000 \cdot \left(1 + \frac{7}{100}\right)$$

$$K_6 = 75.036,515 \text{ (dinara)}$$

$$K_{12} = 50.000 \cdot 2,2521916$$

$$K_1 = 53.500 \text{ (dinara)}$$

$$K_6 = K_0 \cdot I_p^6$$

$$K_{12} = 112609,58 \text{ (dinara)}$$

$$K_1 = 50000 \cdot I_7^1$$

$$K_6 = 50000 \cdot I_7^6$$

$$K_{12} = K_0 \cdot I_p^{12}$$

$$K_1 = 50000 \cdot 1,070000$$

$$K_6 = 50000 \cdot 1,50073035$$

$$K_{12} = 50000 \cdot 2,25219156$$

$$K_1 = 53.500 \text{ (dinara)}$$

$$K_6 = 75.036,515 \text{ (dinara)}$$

$$K_{12} = 112609,58 \text{ (dinara)}$$

- 31.** U banci je ukamaćeno 100.000 dinara za vreme od 5 godina i 7 meseci uz 8% (p.a) interesa i godišnje kapitalisanje. Izračunati uvećani kapital.

Rešenje:

$$K_0 = 100,000$$

$$p = 8\%$$

$$n = 5$$

$$m = 7$$

$$K_n = ?$$

$$K_n = K_0 \cdot I_8^5 \cdot \left(1 + \frac{m \cdot p}{1200}\right)$$

$$K_1 = 100.000 \cdot I_8^5 \cdot \left(1 + \frac{7 \cdot 8}{1200}\right)$$

$$K_n = 100.000 \cdot 1,46932808 \cdot (1,04666) = 153.788,68 \text{ dinara}$$

32. Koliko treba uložiti danas da bi taj ulog zajedno sa 6% interesa na interes u toku 5 godina i 4 meseca porastao na 80000 dinara? Kapitalisanje je godišnje.

Rešenje:

$$\begin{aligned}
 K_n &= K_0 \cdot I_p^n \cdot \left(1 + \frac{m \cdot p}{1200}\right) \\
 K_0 &= 80,000 \\
 p &= 6\% \\
 n &= 5 \\
 v &= 4 \\
 K_0 &=? \\
 m &= 4
 \end{aligned}
 \qquad
 \begin{aligned}
 80000 &= K_0 \cdot I_6^5 \cdot \left(1 + \frac{4 \cdot 6}{1200}\right) \\
 80000 &= K_0 \cdot 1,33822558 \cdot 1,02 \\
 K_0 &= \frac{80000}{1,36499} = 58.608,488 \quad (\text{dinara})
 \end{aligned}$$

33. Pre 10 godina je uplaćeno X dinara. Na ime interesa na interes izračunato je 90.000 dinara, po stopi 8% (p.a) uz godišnje kapitalisanje. Izračunati uvećani kapital.

Rešenje:

$$\begin{aligned}
 i &= 90.000 \\
 p &= 8\% \\
 n &= 10 \\
 K_0 &=? \\
 K_n &=?
 \end{aligned}$$

$$K_n - K_0 = i$$

$$K_n = K_0 \cdot I_p^n$$

$$K_0 \cdot I_p^n - K_0 = i$$

$$K_0 \cdot (I_8^{10} - 1) = 90.000$$

$$K_0 = \frac{90000}{2,158925 - 1}$$

$$K_0 = 77.658,175 \quad (\text{dinara})$$

$$K_n = K_0 \cdot I_p^n$$

$$K_n = 77.658,17 \cdot I_8^{10}$$

$$K_n = 77.658,17 \cdot 2,158925$$

$$K_n = 167.658,16 \quad (\text{dinara})$$

34. Dužnik treba da uplati 20.000 dinara posle 3 godine, 25000 dinara posle 5 godina. Umesto ovih uplata on bi hteo da uplati jedan iznos posle 6 godina uz 6% (p.a) interesa. Izračunaj ovaj iznos.

Rešenje:

$$p = 6\%$$

$$K_0 = 20.000$$

$$n = 3$$

$$K_0 = 25.000$$

$$n = 5$$

$$K_n = ?$$

$$K_n = K_0 \cdot I_p^{(6-3)} + K_0 \cdot I_p^{(6-5)}$$

$$K_n = 20000 \cdot I_6^2 + 25000 \cdot I_6^1$$

$$K_n = 20000 \cdot 1,1236 + 25000 \cdot 1,060$$

$$K_n = 22472 + 26500$$

$$K_n = 48972 \text{ (dinara)}$$

35. Danas je uloženo 25.000 dinara uz 8% (p.a) interesa. Odredi stanje uloga posle 5 godina.

a) Ako je kapitalisanje polugodišnje;

b) Ako je kapitalisanje godišnje.

Rešenje:

$$p = 8\%$$

$$K_0 = 25.000$$

$$n = 5$$

$$m = 2$$

$$K_n = ?$$

a)

$$K_n = K_0 \cdot I_{\frac{p}{m}}^{n \cdot m}$$

$$K_n = 25000 \cdot I_{\frac{8}{2}}^{5 \cdot 2}$$

$$K_n = 25000 \cdot I_4^{10}$$

$$K_n = 25000 \cdot 1,48024428$$

$$K_n = 37006 \text{ (dinara)}$$

b)

$$K_n = K_0 \cdot I_p^n$$

$$K_n = 25000 \cdot I_8^5$$

$$K_n = 25000 \cdot I_4^{10}$$

$$K_n = 25000 \cdot 1,46932$$

$$K_n = 36733 \text{ (dinara)}$$

36. Odrediti polugodišnju konformnu kamatnu stopu ako je godišnja stopa 8%.

Rešenje:

$$p_c = 100 \cdot \left(\sqrt[m]{1 + \frac{p}{100}} - 1 \right)$$

$$p_c = 100 \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{8}{100}} - 1 \right)$$

$$p_c = 100 \cdot 0,03923$$

$$p_c = 3,923$$

37. Godišnjoj stopi od 75% odrediti tromesečnu konformnu kamatnu stopu.

Rešenje:

$$p = 75\%$$

$$m = \frac{12}{3} = 4$$

$$p_c = 100 \cdot \left(\sqrt[m]{1 + \frac{p}{100}} - 1 \right)$$

$$p_c = 100 \cdot \left(\sqrt[4]{1 + \frac{75}{100}} - 1 \right)$$

$$p_c = 100 \cdot \left(\sqrt[4]{1,75} - 1 \right)$$

$$p_c = 100 \cdot \left(1,75^{\frac{1}{4}} - 1 \right)$$

$$p_c = 100 \cdot (1,75^{0,25} - 1)$$

$$p_c = 100 \cdot 0,15016$$

$$p_c = 15,016$$

38. Pre 8 godina ukamaćeno je 30.000 dinara, a pre 3 godine jos 10.000. Koliko iznosi danas uvećani kapital ako je interesna stopa 8% (p.a)α a kapitalisanje je šestomesečno?

Rešenje:

$$p = 8\%$$

$$K_0 = 30.000$$

$$n = 8$$

$$m = 2$$

$$K_0 = 10.000$$

$$n = 3$$

$$K_n = ?$$

$$K_n = K_0 \cdot I_{\frac{p}{m}}^{\frac{m \cdot n}{m}} + K_0 \cdot I_{\frac{p}{m}}^{\frac{m \cdot n}{m}}$$

$$K_{n \cdot m} = 30000 \cdot I_{\frac{8}{2}}^{\frac{8 \cdot 2}{2}} + 10000 \cdot I_{\frac{8}{2}}^{\frac{3 \cdot 2}{2}}$$

$$K_{n \cdot m} = 30000 \cdot I_4^{16} + 10000 \cdot I_4^6$$

$$K_{n \cdot m} = 30000 \cdot 1,87298 + 10000 \cdot 1,265319$$

$$K_{n \cdot m} = 68.842,59 \text{ (dinara)}$$

DISKONTNI FAKTOR

II - FINANSIJSKA TABLICA

39. Štediša je posle 10 godina imao na svom računu 150.000 dinara. Koliko je imao novaca na početku prve godine? Interesna stopa je 5% (p.a) a kapitalisanje je godišnje.

Rešenje:

$$\begin{aligned} K_n &= 150,000 & K_0 &= K_n \cdot II_p^n \\ p &= 5\% & K_0 &= 150000 \cdot II_5^{10} \\ n &= 10 & K_0 &= 150000 \cdot 0,613913 \\ K_0 &=? & K_0 &= 92.086,95 \text{ (dinara)} \end{aligned}$$

40. Koji će kapital za 5 godina sa 6%(p.a) interesa da poraste na 30.000 dinara? Kapitalisanje je polugodišnje.

Rešenje:

$$\begin{aligned} K_n &= 30,000 & K_0 &= K_n \cdot II_{\frac{p}{m}}^{n \cdot m} \\ p &= 6\% & K_0 &= 30000 \cdot II_{\frac{6}{2}}^{5 \cdot 2} \\ n &= 5 & K_0 &= 30000 \cdot II_3^{10} \\ m &= 2 & K_0 &= 30000 \cdot 0,744093 \\ K_0 &=? & K_0 &= 22.322,79 \text{ (dinara)} \end{aligned}$$

41. Koliko treba uložiti danas da bi smo primili kroz 10 godina iznos od 50.000 dinara sa 6%(p.a) interesa. Koliko je primljeno na ime interesa ako je kapitalisanje tromesečno.

Rešenje:

$$\begin{aligned} K_n &= 50.000 & K_0 &= K_n \cdot II_{\frac{p}{m}}^{n \cdot m} \\ p &= 6\% & K_0 &= 50000 \cdot II_{\frac{6}{4}}^{10 \cdot 4} \\ n &= 10 & & \\ m &= 4 & K_0 &= 50000 \cdot II_{1,5}^{40} & I &= K_n - K_0 \\ K_0 &=? & K_0 &= 50000 \cdot 0,55126 & I &= 50.000 - 27.563,115 \\ I &=? & K_0 &= 27.563,115 \text{ (dinara)} & I &= 22.436,885 \text{ (dinara)} \end{aligned}$$

42. Koliko treba uložiti danas da bi se posle 5 godina primilo 30.000 dinara ako se računa 6%(p.a)d interesa. Kapitalisanje se vrši:
a) godišnje; b) polugodišnje; c) tromesečno.

Rešenje:

$$K_n = 30.000$$

$$p = 6\%$$

$$n = 5$$

$$m = 1; 2; 4.$$

$$K_0 = ?$$

a)

$$K_0 = K_n \cdot II_p^n$$

$$K_0 = 30000 \cdot II_6^5$$

$$K_0 = 30000 \cdot 0,747258$$

$$K_0 = 22.417,74 \text{ (dinara)}$$

b)

$$K_0 = K_n \cdot II_{\frac{p}{m}}^{\frac{n \cdot m}{m}}$$

$$K_0 = 30000 \cdot II_{\frac{6}{2}}^{5 \cdot 2}$$

$$K_0 = 30000 \cdot II_3^{10}$$

$$K_0 = 30000 \cdot 0,744093$$

$$K_0 = 22.322,79 \text{ (dinara)}$$

c)

$$K_0 = K_n \cdot II_{\frac{p}{m}}^{\frac{n \cdot m}{m}}$$

$$K_0 = 30000 \cdot II_{\frac{6}{4}}^{5 \cdot 4}$$

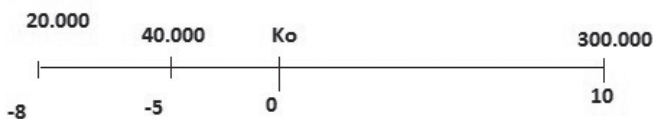
$$K_0 = 30000 \cdot II_{1,5}^{20}$$

$$K_0 = 30000 \cdot 0,74247$$

$$K_0 = 22.274,10 \text{ (dinara)}$$

43. Pre 8 godina uloženo je 20.000 dinara, a pre 5 godina uloženo je 40.000 dinara. Koliko treba uložiti danas da bi zbir svih uloga posle 10 godina iznosio 300,000 dinara kamatna stopa je 6% (p.a)d, kapitalisanje je godišnje.

Rešenje:



$$K_0 = K_n \cdot I_6^{10} - (K_n \cdot I_6^8 + K_n \cdot I_6^5)$$

$$K_n = 300000 \cdot 0,55839478 - (20.000 \cdot 1,593848 + 40.000 \cdot 1,338225)$$

$$K_n = 167.518,41 - (31.876,96 + 53.529)$$

$$K_n = 82.112,45 \text{ (dinara)}$$

FAKTOR DODAJNIH ULOGA

III - FINANSIJSKA TABLICA

44. Banka plaća interes po stopi od 8% (p.a) kapitališe jednom godišnje. Ulažemo 5 puta uzastopno početkom godine po 5000 dinara, koliko će iznositi suma ovih uloga na kraju 5-te godine? Koliko iznosi suma ovih uloga ukoliko se uplaćaju krajem svake godine?

Rešenje:

$$p = 8\%$$

$$n = 5$$

$$u = 5000$$

$$S_n = ?$$

$$S_n' = ?$$

$$S_n = u \cdot III_p^n$$

$$S_5 = 5000 \cdot III_8^5$$

$$S_5 = 5000 \cdot 6,335929$$

$$K_0 = 31.679,645 \text{ (dinara)}$$

$$S_n' = u \cdot (1 + III_p^{n-1})$$

$$S_5' = 5000 \cdot (1 + III_8^{5-1})$$

$$S_5' = 5000 \cdot (1 + 4,8666)$$

$$S_5' = 29.333 \text{ (dinara)}$$

45. Kolika je sadašnja vrednost niza od 15 stalnih uloga od 10.000 dinara uplaćivanih krajem godine uz obračun interesa po stopi 8%(p.a) ako je kapitalisanje godišnje?

Rešenje:

$$p = 8\%$$

$$n = 15$$

$$u = 10000$$

$$S_n = ?$$

$$K_0 = ?$$

$$S_n = u \cdot (1 + III_p^{n-1})$$

$$S_{15} = 10000 \cdot (1 + III_8^{15-1})$$

$$S_{15} = 10000 \cdot (1 + 26,1521139)$$

$$S_{15} = 271.521,13 \text{ (dinara)}$$

$$K_0 = S_n \cdot II_p^n$$

$$K_0 = 271.521,13 \cdot II_8^{15}$$

$$K_0 = 271.521,13 \cdot 0,31524$$

$$K_0 = 85.594,783 \text{ (dinara)}$$

46. Početkom svakog tromesečja ulagano je u banku po 5000 dinara. Koliki je zbir ovih uloga krajem 10-te godine ako je interes 12% p.a uz godišnje kapitalisanje? Rešiti pomoću konformne kamatne stope.

Rešenje:

$$\begin{aligned}
 u &= 5000 & p_c &= 100 \left(\sqrt[4]{1 + \frac{p}{100}} - 1 \right) \\
 p &= 12\% & p_c &= 100 \left(\sqrt[4]{1 + \frac{12}{100}} - 1 \right) \\
 n &= 10 & p_c &= 100 \left(1,12^{\frac{1}{4}} - 1 \right) \\
 m &= 4 & p_c &= 2,873 \\
 S_n &=? & S_{nm} &= u \cdot r_c \cdot \frac{r_c^{nm} - 1}{r_c - 1} \\
 r_c &=? & S_{10 \cdot 4} &= 5000 \cdot 1,02873 \cdot \frac{1,02873^{10 \cdot 4} - 1}{1,02873 - 1} \\
 p_c &=? & S_{40} &= 384.144,86 \text{ (dinara)}
 \end{aligned}$$

47. Početkom svakog meseca ulagano je u banku po 3000 dinara. Koliki je zbir ovih uloga krajem 10-te godine ako je interes 14%(p.a.) uz polugodišnje kapitalisanje? Rešiti pomoću konformne kamatne stope.

Rešenje:

$$\begin{aligned}
 u &= 3000 & p_c &= 100 \left(\sqrt[6]{1 + \frac{p}{100}} - 1 \right) \\
 p &= 14\% & p_c &= 100 \left(\sqrt[6]{1 + \frac{14}{100}} - 1 \right) \\
 n &= 10 & p_c &= 100 \left(1,07^{\frac{1}{6}} - 1 \right) \\
 m &= 12 & p_c &= 1,13357 \\
 p_c &=? & & \\
 r_c &=? & & \\
 S_n &=? & &
 \end{aligned}$$

$$r_c = 1 + \frac{p_c}{100}$$

$$r_c = 1 + \frac{1,13357}{100}$$

$$r_c = 1,01133$$

$$S_{nm} = u \cdot r_c \cdot \frac{r_c^{nm} - 1}{r_c - 1}$$

$$S_{10 \cdot 4} = 3000 \cdot 1,01133 \cdot \frac{1,01133^{10 \cdot 12} - 1}{1,01133 - 1}$$

$$S_{40} = 765.520,09 \text{ (dinara)}$$

48. Početkom svakog meseca ulagano je u banku po 15.000 dinara. Koliki je zbir ovih uloga krajem 10-te godine ako je interes računat po stopi od 16% (p.a.) i polugodišnje kapitalisanje? Rešiti pomoću konformne kamatne stope.

Rešenje:

$$u = 15000$$

$$n = 10$$

$$p = 16\%$$

$$m = \frac{12}{2} \text{ (polugod.)}$$

$$m = 2 \text{ (ipolugod.)}$$

$$p_c = ?$$

$$r_c = ?$$

$$S_n = ?$$

$$p_c = 100 \left(\sqrt[{\frac{m}{2}}]{1 + \frac{p}{100}} - 1 \right)$$

$$p_c = 100 \sqrt[6]{1 + \frac{16}{100}} - 1$$

$$p_c = 100(1,08^{\frac{1}{6}} - 1)$$

$$p_c = 1,2904$$

$$r_c = 1 + \frac{p_c}{100}$$

$$r_c = 1 + \frac{1,2904}{100}$$

$$r_c = 1,012904$$

$$S_{2nm} = u \cdot r_c \cdot \frac{r_c^{2nm} - 1}{r_c - 1}$$

$$S_{10 \cdot 12} = 15000 \cdot 1,012904 \cdot \frac{1,012904^{2 \cdot 10 \cdot 6} - 1}{1,012904 - 1}$$

$$S_{120} = 4.306.969,2 \text{ (dinara)}$$

49. Ulagano je početkom svakog meseca 10 godina po 2000 dinara uz interesnu stopu $p=14\%$ (p.a.) i tromesečno kapitalisanje. Odrediti zbir uloga na kraju 10-te godine.

Rešenje:

$$u = 2000$$

$$p = 14\%$$

$$n = 10$$

$$m = 4$$

$$v = 3$$

$$p_c = ?$$

$$r_c = ?$$

$$S_n = ?$$

$$p_c = 100 \left(\sqrt[3]{1 + \frac{p}{100}} - 1 \right)$$

$$p_c = 100 \sqrt[3]{1 + \frac{14}{100}} - 1$$

$$p_c = 1,152154$$

$$r_c = 1 + \frac{p_c}{100}$$

$$r_c = 1 + \frac{1,152154}{100}$$

$$r_c = 1,0115215$$

$$S_{v \cdot n \cdot m} = u \cdot r_c \cdot \frac{r_c^{v \cdot n \cdot m} - 1}{r_c - 1}$$

$$S_{3 \cdot 10 \cdot 4} = 2000 \cdot 1,0115215 \cdot \frac{1,0115215^{3 \cdot 10 \cdot 4} - 1}{1,0115215 - 1}$$

$$S_{120} = 525.146,72 \text{ (dinara)}$$

50. Ulagáč je danas uložio 2000 dinara i želi da u toku n godina ulaže tako da svaki sledeći ulog bude: a) veći od prethodnog za 200 dinara, b) manji od prethodnog za 200 dinara. Sa kojom sumom će raspolagati ulagač na kraju 5-te godine ako je godišnja interesna stopa 6% (p.a.) i godišnje kapitalisanje?

Rešenje:

$$u = 2000$$

$$d = 200$$

$$p = 6\%$$

$$n = 5$$

a)

$$S_n^+ = u \cdot III_p^n + d \frac{100}{p} (III_p^n - nI_p^1)$$

$$S_n^+ = 2000 \cdot III_6^5 + 200 \frac{100}{6} (III_6^5 - 5I_6^1)$$

$$S_n^+ = 2000 \cdot 5,975318 + 200 \cdot \frac{100}{6} (5,975318 - 5 \cdot 1,060)$$

$$S_n^+ = 14201,018 \text{ (dinara)}$$

b)

$$S_n^- = u \cdot III_p^n - d \frac{100}{p} (III_p^n - nI_p^1)$$

$$S_n^+ = 2000 \cdot III_6^5 - 200 \frac{100}{6} (III_6^5 - 5I_6^1)$$

$$S_n^+ = 2000 \cdot 5,975318 - 200 \cdot \frac{100}{6} (5,975318 - 5 \cdot 1.060)$$

$$S_n^+ = 9.699,638 \text{ (dinara)}$$

FAKTOR AKUMULACIJE

IV - INTERESNA TABLICA

51. Koliko treba uložiti danas da bi se krajem svake godine u toku 10 godina primala renta od 10.000 dinara? Interesna stopa je 8% (p.a.)d, a kapitalisanje je godišnje.

Rešenje:

$$n = 5$$

$$C_o = u \cdot IV_p^n$$

$$p = 8\%$$

$$C_o = 10000 \cdot IV_8^{10}$$

$$u = 10000$$

$$C_o = 10000 \cdot 6,71008$$

$$C_o = ?$$

$$C_o = 67.100,8 \text{ (dinara)}$$

52. Koliko treba uložiti danas da bi se početkom svakih šest meseci u toku narednih 5 godina primala renta od 3.000 dinara? Interesna stopa je 12% (p.a.)d, a kapitalisanje je polugodišnje.

Rešenje:

$$n = 5$$

$$C_o = u \cdot (1 + IV_{\frac{p}{m}}^{n \cdot m - 1})$$

$$u = 3000$$

$$C_o = 3000 \cdot (1 + IV_{\frac{12}{2}}^{5 \cdot 2 - 1})$$

$$p = 12\%$$

$$m = 2$$

$$C_o = 3000 \cdot (1 + 6,80169)$$

$$C_o = ?$$

$$C_o = 23.405,07 \text{ (dinara)}$$

53. Danas je uloženo 200.000 dinara u banku koja plaća 8% (p.a.)d interesa. Izračunati kolika se renta može primiti u toku 5 godina ako se prima anticipativno? Kapitalisanje je godišnje.

Rešenje:

$$C_o = u \cdot (1 + IV_p^{n-1})$$

$$u = \frac{C_o}{1 + IV_p^{n-1}}$$

$$C_o = 200000$$

$$p = 8\%$$

$$n = 5$$

$$u = ?$$

$$u = \frac{200000}{1 + IV_8^4} = \frac{200000}{1 + 3,312126}$$

$$u = 46.380,834 \text{ (dinara)}$$

54. Danas je uloženo 100.000 dinara u banku koja plaća 6% (p.a.)d interesa. Izračunati kolika se renta može primiti u toku 10 godina ako se prima dekurzivno, a kapitalisanje je godišnje.

Rešenje:

$$C_o = u \cdot IV_p^n$$

$$u = \frac{C_o}{IV_p^n}$$

$$C_o = 100000$$

$$p = 6\%$$

$$n = 10$$

$$u = ?$$

$$u = \frac{100000}{IV_6^{10}} = \frac{100000}{7,360087}$$

$$u = 13.586,796 \text{ (dinara)}$$

55. Ulaže se krajem svake godine posle 5-te godine 12 puta po 6000 dinara. Kolika je sadašnja vrednost ovih uloga ako je interesna stopa 6%(p.a.)d, a kapitalisanje je godišnje?

Rešenje:

$$u = 6000$$

$$n = 5$$

$$p = 6\%$$

$$d = 12$$

$$C_o^d = ?$$

$$C_o^d = u \cdot IV_p^n \cdot II_p^d$$

$$C_o^d = 6000 \cdot IV_6^5 \cdot II_6^{12}$$

$$C_o^d = 6000 \cdot 4,212363 \cdot 0,496969$$

$$C_o^d = 12.560,483 \text{ (dinara)}$$

56. Koliko treba uložiti danas da bi počev od treće godine u toku narednih 8 godina primali po 10.000 dinara krajem svake godine? Interesna stopa je 8% (p.a.), a kapitalisanje je godišnje.

Rešenje:

$$u = 10000$$

$$n = 3$$

$$d = 8$$

$$p = 8\%$$

$$C_o^{-d} = ?$$

$$C_o^{-d} = u \cdot IV_p^n \cdot II_p^d$$

$$C_o^{-d} = 10000 \cdot IV_8^3 \cdot II_8^8$$

$$C_o^{-d} = 10000 \cdot 5,746638 \cdot 0,79382$$

$$C_o^{-d} = 45.617,962 \text{ (dinara)}$$

57. Koliko treba uložiti danas da bi počev od 10-te godine u toku narednih 20 godina primali po 15.000 dinara krajem svake godine? Interesna stopa je 6%(p.a.)d, a kapitalisanje je godišnje.

Rešenje:

$$u = 15000$$

$$p = 6\%$$

$$n = 10$$

$$n = 20$$

$$C_o^{-d} = ?$$

$$C_o^{-d} = u \cdot IV_p^n \cdot II_p^d$$

$$C_o^{-d} = 15000 \cdot IV_8^{20} \cdot II_8^{10}$$

$$C_o^{-d} = 15000 \cdot 9,818147 \cdot 0,46319$$

$$C_o^{-d} = 68.215,013 \text{ (dinara)}$$

58. Koliko treba uložiti danas da bi počev od 5-te godine u toku narednih 15 godina, početkom svake godine primali po 30.000 dinara? Interesna stopa je 5%(p.a.)d, a kapitalisanje je godišnje.

Rešenje:

$$u = 30000$$

$$p = 5\%$$

$$n = 15$$

$$d = 5$$

$$C_o^{-d} = ?$$

$$C_o^{-d} = u \cdot (1 + IV_p^{n-1}) \cdot II_p^d$$

$$C_o^{-d} = 30000 \cdot (1 + IV_5^{15-1}) \cdot II_5^5$$

$$C_o^{-d} = 30000 \cdot (1 + 9,89864) \cdot 0,78352$$

$$C_o^{-d} = 256.179,07 \text{ (dinara)}$$

OTPLATA ZAJMOVA I KREDITA

V - FINANSIJSKA TABLICA

59. Zajam od 150.000 dinara se amortizuje 3 godine jednakim mesečnim anuitetima. Interesna stopa je 10%(p.a.)d i tromesečno kapitalisanje. Odrediti mesečni anuitet.

Rešenje:

$$K = 1500000$$

$$p = 10\%$$

$$m = 4$$

$$n = 3$$

$$r_c = ?$$

$$p_c = ?$$

$$a = ?$$

$$v = 3$$

$$p_c = 100 \cdot \left(\sqrt[3]{1 + \frac{\frac{p}{4}}{100}} - 1 \right)$$

$$p_c = 100 \cdot \left(\sqrt[3]{1 + \frac{\frac{10}{4}}{100}} - 1 \right)$$

$$p_c = 100 \cdot \left(\left(1 + \frac{2,5}{100} \right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right)$$

$$p_c = 100 \cdot (1,025^{0,333} - 1)$$

$$p_c = 0,8256$$

$$r_c = 1 + \frac{p_c}{100}$$

$$r_c = 1 + \frac{0,8256}{100}$$

$$r_c = 1,00825$$

$$a = K \cdot \frac{r_c^{n \cdot m \cdot v} (r_c - 1)}{r_c^{n \cdot m \cdot v} - 1}$$

$$a = 150000 \cdot \frac{1,00825^{3 \cdot 4 \cdot 3} (1,00825 - 1)}{1,00825^{3 \cdot 4 \cdot 3} - 1}$$

$$a = 4.833,065 \text{ (dinara)}$$

60. Zajam od 100.000 dinara se amortizuje 6 godina jednakim tromesečnim anuitetima. Interesna stopa je 12%(p.a.)d i kapitalisanje je polugodišnje. Odrediti tromesečni anuitet.

Rešenje:

$$K = 1000000$$

$$n = 6$$

$$m = 2$$

$$v = 2$$

$$p = 12\%$$

$$p_c = ?$$

$$p_k = ?$$

$$a = ?$$

$$p_c = 100 \cdot \left(\sqrt[2]{1 + \frac{p}{100}} - 1 \right)$$

$$p_c = 100 \cdot \left(\sqrt[2]{1 + \frac{12}{100}} - 1 \right)$$

$$p_c = 2,9563$$

$$r_c = 1 + \frac{p_c}{100}$$

$$r_c = 1 + \frac{2,9563}{100}$$

$$r_c = 1,02956$$

$$a = K \cdot \frac{r_c^{n \cdot m \cdot v} (r_c - 1)}{r_c^{n \cdot m \cdot v} - 1}$$

$$a = 100000 \cdot \frac{1,02956^{6 \cdot 2 \cdot 2} (1,02956 - 1)}{1,02956^{6 \cdot 2 \cdot 2} - 1}$$

$$a = 5.876,756 \text{ (dinara)}$$

61. Zajam od 200.000 dinara otplaćuje se 10 godina jednakim šestomesečnim anuitetima. Polugodišnja stopa je 12% i kapitalisanje je šestomesečno. Odrediti anuitet.

Rešenje:

$$K = 2000000$$

$$n = 10$$

$$m = 2$$

$$p_s = \frac{p}{2} = 5\%$$

$$a = ?$$

$$a = K \cdot V_{\frac{p}{m}}^{m \cdot n}$$

$$a = K \cdot V_5^{2 \cdot 10}$$

$$a = 200000 \cdot 0,0802425$$

$$a = 16.048,5 \text{ (dinara)}$$

62. Zajam od 200.000 dinara amortizuje se jednom godišnje jednakim anuitetima u toku 5 godina i uz interes 5%(p.a.)d i godišnje kapitalisanje. Izraditi plan amortizacije.

Rešenje:

$$K = 2000000$$

$$n = 5$$

$$p = 5\%$$

$$m = 1$$

$$a = ?$$

$$a = K \cdot V_p^n$$

$$a = 200000 \cdot V_5^5$$

$$a = 200000 \cdot 0,23097480$$

$$a = 46.194,96 \text{ (dinara)}$$

63. Zajam od 100.000 dinara amortizuje se jednom godišnje jednakim godišnjim otplatama u toku 4 godine. Interesna stopa je 7% i godišnje kapitalisanje. Izraditi plan amortizacije.

Rešenje:

$$K = 100.000$$

$$n = 4$$

$$p = 7\%$$

$$b = ?$$

$$b = \frac{K}{n} = \frac{100000}{4}$$

$$b = 25.000$$

$$K_1 = 100.000$$

$$i_1 = \frac{K_1 \cdot p}{100} = \frac{100.000 \cdot 7}{100} = 7.000$$

$$a_1 = b + i_1 = 25.000 + 7.000 = 32.000$$

$$K_2 = K_1 - b$$

$$= 100.000 - 25.000 = 75.000$$

$$i_2 = \frac{K_2 \cdot p}{100} = \frac{75.000 \cdot 7}{100} = 5.250$$

$$a_2 = b + i_2 = 25.000 + 5.250 = 30.250$$

$$K_3 = K_2 - b$$

$$= 75.000 - 25.000 = 50.000$$

$$i_3 = \frac{K_3 \cdot p}{100} = \frac{50.000 \cdot 7}{100} = 3.500$$

$$a_3 = b + i_3 = 25.000 + 3.500 = 28.500$$

$$K_4 = K_3 - b$$

$$= 50.000 - 25.000 = 25.000$$

$$i_4 = \frac{K_4 \cdot p}{100} = \frac{25.000 \cdot 7}{100} = 1750$$

$$a_4 = b + i_4 = 25.000 + 1750 = 26.750$$

Period otplate (n)	Kredit: $K = K_i - b$	Interes: $i = \frac{K_i \cdot p}{100}$	Otplata: $b = \frac{K}{n}$	Anuitet: $a = i + b$
1	100.000	7000	25.000	32.000
2	75.000	5250	25.000	30.250
3	50.000	3500	25.000	28.500
4	25.000	1750	25.000	26.750
		17.500	100.000	117.500

64. Zajam od 200.000 dinara amortizuje se 5 godina godišnjim dekurzivnim otplatama koje konstantno: a) Rastu za 5000 dinara, b) Opadaju za 5000 dinara. Interesna stopa je 8% (p.a)d. Izračunati amortizacione planove.

Rešenje:

a)

$$K = 200.000$$

$$n = 5$$

$$p = 8\%$$

$$d = 5000$$

$$b_1 = ?$$

$$b_1 = \frac{K}{n} - \frac{(n-1) \cdot d}{2} = \frac{200000}{5} - \frac{(5-1) \cdot 5000}{2}$$

$$b_1 = 30.000$$

$$K = 200000$$

$$b_1 = 30.000$$

$$K_1 = K - b_1 = 200.000 - 30.000$$

$$K_1 = 170.000$$

$$i_1 = \frac{K \cdot p}{100} = \frac{200000 \cdot 8}{100} = 16000$$

$$a_1 = b_1 + i_1 = 30.000 + 16000$$

$$a_1 = 46.000$$

$$b_2 = b_1 + d = 30.000 + 5.000$$

$$b_2 = 35.000$$

$$K_2 = K_1 - b_2$$

$$K_2 = 170000 - 35.000 = 135.000$$

$$i_2 = \frac{K_1 \cdot p}{100} = \frac{170.000 \cdot 8}{100} = 13.600$$

$$a_2 = b_2 + i_2 = 35.000 + 13.600$$

$$a_2 = 48.600$$

$$b_3 = b_2 + d = 35.000 + 5.000$$

$$b_3 = 40.000$$

$$K_3 = K_2 - b_3$$

$$K_3 = 135000 - 40.000 = 95.000$$

$$i_3 = \frac{K_2 \cdot p}{100} = \frac{135.000 \cdot 8}{100} = 10.800$$

$$a_3 = b_3 + i_3 = 40.000 + 10.800$$

$$a_3 = 50.800$$

$$b_4 = b_3 + d = 40.000 + 5.000$$

$$b_4 = 45.000$$

$$K_4 = K_3 - b_4$$

$$K_4 = 95000 - 45.000 = 50.000$$

$$i_4 = \frac{K_3 \cdot p}{100} = \frac{95.000 \cdot 8}{100} = 7600$$

$$a_4 = b_4 + i_4 = 45.000 + 7600$$

$$a_4 = 52.600$$

$$b_5 = b_4 + d = 45.000 + 5.000$$

$$b_5 = 50.000$$

$$K_5 = K_4 - b_5$$

$$K_5 = 50000 - 50.000 = 0$$

$$i_5 = \frac{K_4 \cdot p}{100} = \frac{50.000 \cdot 8}{100} = 4000$$

$$a_5 = b_5 + i_5 = 50.000 + 4000$$

$$a_5 = 54.000$$

Plan otplate

Na kraju godine (n)	Dug i otplata duga $K_i = K - b_i$	Interes: $i = \frac{K_i \cdot p}{100}$	Otplata: $b_i = b + d$	Anuiteti: $a = i + b_i$
0	200.000	--	--	--
1	170.000	16.000	30.000	46.000
2	135.000	13.600	35.000	48.600
3	95.000	10.800	40.000	50.800
4	50.000	7.600	45.000	52.600
5	0	4000	50.000	54.000
		52.000	200.000	252.000

b)

$$b_1 = \frac{K}{n} - \frac{(n-1) \cdot d}{2} = \frac{200000}{5} - \frac{(5-1) \cdot 5000}{2}$$

$$b = 50.000$$

$$K = 200000$$

$$b_1 = 50.000$$

$$K_1 = K - b_1 = 200.000 - 50.000$$

$$K_1 = 150.000$$

$$i_1 = \frac{K \cdot p}{100} = \frac{200000 \cdot 8}{100} = 16000$$

$$a_1 = b_1 + i_1 = 50.000 + 16000$$

$$a_1 = 66.000$$

$$b_2 = b_1 - d = 50.000 - 5.000$$

$$b_2 = 45.000$$

$$K_2 = K_1 - b_2$$

$$K_2 = 150000 - 45.000 = 105.000$$

$$i_2 = \frac{K_1 \cdot p}{100} = \frac{150.000 \cdot 8}{100} = 12.000$$

$$a_2 = b_2 + i_2 = 45.000 + 12.000$$

$$a_2 = 57.000$$

$$b_3 = b_2 - d = 45.000 - 5.000$$

$$b_3 = 40.000$$

$$K_3 = K_2 - b_3$$

$$K_3 = 105000 - 40.000 = 65.000$$

$$i_3 = \frac{K_2 \cdot p}{100} = \frac{105.000 \cdot 8}{100} = 8.400$$

$$a_3 = b_3 + i_3 = 40.000 + 8.400$$

$$a_3 = 48.400$$

$$b_4 = b_3 - d = 40.000 - 5.000$$

$$b_4 = 35.000$$

$$K_4 = K_3 - b_4$$

$$K_4 = 65.000 - 35.000 = 30.000$$

$$i_4 = \frac{K_3 \cdot p}{100} = \frac{65.000 \cdot 8}{100} = 5200$$

$$a_4 = b_4 + i_4 = 35.000 + 5200$$

$$a_4 = 40.200$$

$$b_5 = b_4 - d = 35.000 - 5.000$$

$$b_5 = 30.000$$

$$K_5 = K_4 - b_5$$

$$K_5 = 30.000 - 30.000 = 0$$

$$i_5 = \frac{K_4 \cdot p}{100} = \frac{30.000 \cdot 8}{100} = 2400$$

$$a_5 = b_5 + i_5 = 30.000 + 2400$$

$$a_5 = 32.400$$

Plan otplate

Na kraju godine (n)	Dug i otplata duga $K_i = K - b_i$	Interes: $i = \frac{K_i \cdot p}{100}$	Otplata: $b_i = b + d$	Anuiteti: $a = i + b_i$
0	200.000	--	--	--
1	150.000	16.000	50.000	66.000
2	105.000	12.000	5.000	57.000
3	65.000	8.400	40.000	48.400
4	30.000	5.200	35.000	40.200
5	0	2.400	30.000	32.400
		44.000	200.000	244.000

65. Zajam od 100.000 dinara amortizuje se 8 godina jednakim anuitetima uz 6% p.a interesa i godišnje kapitalisanje. Odrediti:

- Anuitet;
- Petu otplatu, prvu otplatu i peti interes;
- Otplaćeni deo duga sa 6 plaćenih anuiteta;
- Ostatak duga posle 6 plaćenih anuiteta?

Rešenje:

$$K = 100.000$$

$$n = 8$$

$$p = 6\%$$

$$c = 6 \text{ (anuitet)}$$

a)

$$a = K \cdot V_p^n$$

$$a = 100.000 \cdot V_6^8$$

$$a = 100.000 \cdot 0.16103594$$

$$a = 16.103,59 \text{ (dinara)}$$

b)

Prva otplata

$$b_1 = a - K \cdot i$$

$$b_1 = 16.103,59 - 100.000 \cdot \frac{6}{100}$$

$$b_1 = 16.103,59 - 6.000$$

$$b_1 = 10.103,59 \text{ (dinara)}$$

Peta otplata

$$b_5 = b_1 \cdot (1+i)^4$$

$$b_5 = b_1 \cdot I_p^4$$

$$b_5 = 10.103,59 \cdot I_6^4$$

$$b_5 = 10.103,59 \cdot 1,262476$$

$$b_5 = 12.755,549 \text{ (dinara)}$$

Peti interes

$$I_5 = a - b_5$$

$$I_5 = 16.103,59 - 12.755,549$$

$$I_5 = 3.348,041 \text{ (dinar)}$$

c)

$$O_c = \frac{K \cdot I_p^c - 1}{I_p^m - 1}$$

$$O_6 = \frac{100.000 \cdot I_6^8 - 1}{I_6^8 - 1}$$

$$O_6 = \frac{100.000 \cdot 1,418519 - 1}{1,593848 - 1}$$

$$O_6 = 70.476,728 \text{ (dinara)}$$

d)

$$R_c = \frac{K \cdot I_p^m - I_p^c}{I_p^m - 1}$$

$$R_6 = \frac{100.000 \cdot I_6^8 - I_6^6}{I_6^8 - 1}$$

$$R_6 = \frac{100.000 \cdot 1,593848 - 1,418519}{1,593848 - 1}$$

$$R_6 = 29.524,222 \text{ (dinara)}$$

2.

PRIMERI IZ PRAKSE

66. M-plast d.o.o. Šabac je prodao robu OMV d.o.o. Beograd u vrednosti od 100.000 dinara. Na fakturi M-plasta je naznačeno da ukoliko OMV plati robu pre isteka ugovorenog roka plaćanja od 30 dana ostvaruje rabat od 8%. OMV je platio pre roka M-plastu. Izračunati koliki je rabat i koliko je OMV platio M-plastu.

$$\text{Rabat je: } P = \frac{100000 * 8}{100} = 8000 \text{ dinara}$$

OMV je platio M-plastu $100000 - 8000 = 92000$ dinara.

67. Godišnji plan prodaje Nelta d.o.o. Beograd realizovan je sa 105%, što iznosi 42 milijarde dinara. Za narednu godinu plan prodaje je povećan za 12,5%. Koliko dinara iznosi novi plan prodaje?

Plan prodaje Nelta za ovu godinu je iznosio

$$P = \frac{42000000000 * 100}{105} = 40000000000 \text{ dinara}$$

Povećanje prodaje Nelta za narednu godinu je

$$P = \frac{40000000000 * 12,5}{100} = 5000000000 \text{ dinara}$$

Godišnji plan prodaje Nelta za narednu godinu je

$$40000000000 + 5000000000 = 45000000000$$

68. Marko Marković je godišnji bonus od 25.000 evra uložio kod Societe General banke a.d. Beograd na 4 godine uz interes od 5%p.a. Izračunati koliki će biti Markov interes za 4 godine.

$$i = \frac{25000 * 4 * 5}{100} = 5000 \text{ evra}$$

Marko će na ime interesa za četiri godine ostvariti 5.000 evra.

69. Zoran Petrović je oročio 2.100.000 dinara kod Raiffeisen bank a.d. Beograd za vreme od 06.01-16.04. tekuće godine uz interes od $5\frac{2}{3}\%$ (30,360), kako bi imao dovoljno sredstava da plati porez na lična primanja građanin. Izračunati koliko će biti Zoranov interes za navedeni vremenski period.

$$i = \frac{K * p * d}{36000} = \frac{2100000 * \frac{17}{3} * 100}{36000} = 33055,56 \text{ dinara.}$$

Zoran će za navedeni vremenski period od 100 dana ostvariti interes od 33.055,56 dinara.

70. Kog datuma je Petar Janković uzeo kredit od 246.000 dinara od Aik banke a.d. Niš, ako je o roku 09.06. tekuće godine, Petar platio 4.100 dinara na ime 6%p.a. interesa (k,360)?

$$d = \frac{36000 * 4100}{246000 * 6} = 100 \text{ dana}$$

Petar je podigao kredit kod Aik banke 01.03. tekuće godine.

71. Marko Maković ima troje maloletne dece koja su uštedela različite novčane sume (kapital). Pomenute tri sume obrazuju aritmetičku progresiju. Marko ih je oročio na godinu dana uz kamatnu stopu od 3%p.a. kod Banca Intese a.d. Beograd. Interes na sva tri kapitala za jednu godinu iznosu 189 evra. Razlika između najvećeg i najmanjeg kapitala je 2.400 evra. Izračunati sva tri kapitala.

Shodno tome, pomenute kapitalne možemo obeležiti sa $K-d$, K i $K+d$.

Zadatak možemo rešiti na dva načina:

- a) Korišćenjem poznatog interesa za jednu godinu od 189 evra na sva tri kapitala

$$\frac{[(K-d) + K + (K+d)] * 3}{100} = 189$$

$$9K = 18900$$

$$K = 2100 \text{ evra}$$

- b) Korišćenjem razlike između najvećeg i najmanjeg kapitala od 2.400 evra

$$(K+d) - (K-d) = 2400$$

$$2d = 2400$$

$$d = 1200 \text{ evra}$$

Proizilazi da je: $K-d = 900$ evra

$$K = 2100 \text{ evra}$$

$$K+d = 3300 \text{ evra}$$

- 72.** Maja Marković je istog dana uložila kod Komercijalne banke a.d. Beograd iznos od 5.000 evra uz interes po stopi od 4%p.a. i iznos od 4.800 evra po stopi od 5%p.a. Izračunati vreme posle koga će se oba iznosa uvećana interesom izjednačiti.

$$5000 + \frac{5000 * 4 * t}{100} = 4800 + \frac{4800 * 5 * t}{100}$$

$$200 = 240t - 200t$$

$$40t = 200$$

$$t = 5 \text{ godina}$$

Posle 5 godina oba Majina uloga uvećana interesom će se izjednačiti.

- 73.** Jugohemija a.d. Beograd je 05.03. tekuće godine podnela svojoj poslovnoj banci Erste bank a.d. Novi ad na eskont menicu Vetfarma a.d. Beograd od 60.000 dinara sa rokom 15.05. tekuće godine. Izračunati eskontovanu vrednost menice, ako je eskontna stopa 5%.

Eskont izračunavamo po formuli:

$$E = \frac{60000 * 71}{\frac{36000}{5}} = \frac{60000 * 71}{7200} = 591,67 \text{ dinara}$$

Eskontovana suma je po formuli:

$$K_0 = K_n - E = 60000 - 591,67 = 59408,33 \text{ dinara}$$

- 74.** Aleksandra Janković je uložila u Uni credit banku a.d. Beograd 20.000 evra na 15 godina uz interesnu stopu 15%p.a. Na koliko evra će se uvećati Aleksandrin ulog zajedno sa interesom na interes, ako je kapitalisanje:

- Godišnje,
- Polugodišnje.

Zadatak rešavamo primenom I finansijskih tablica.

a)

$$K_n = 20000 * I_{15}^{15} = 20000 * 8,13706163 = 162741,23 \text{ evra}$$

Aleksandrin ulog zajedno sa interesom pri godišnjem kapitalisanju za 15 godina će da se uveća na 162.741,23 evra.

b)

$$K_n = 20000 * I_{7,5}^{30} = 20000 * 8,75495519 = 175099,10 \text{ evra}$$

Aleksandrin ulog zajedno sa interesom pri polugodišnjem kapitalisanju za 15 godina će da se uveća na 175.099,10 evra.

- 75.** Marko Petrović je uložio u OTP banku a.d. Novi Sad sumu od 40.000 evra na period od 10 godina i 7 meseci, uz interesnu stopu od 6%p.a. i godišnje kapitalisanje. Izračunati na koliko evra će se uvećati Markov ulog zajedno sa interesom na interes.

$$K_n = 40000 * I_6^{10} + \frac{40000 * I_6^{10} * 7 * 6}{1200}$$

$$K_n = 40000 * I_6^{10} * \left(1 + \frac{7 * 6}{1200}\right) = 40000 * I_6^{10} * 1,035$$

$$K_n = 40000 * 1,79084770 * 1,035 = 74141,10 \text{ evra}$$

Markov ulog zajedno sa interesom će se uvećati na 74.141,10 evra.

- 76.** Koji kapital je Jelisaveta Jovanović uplatila pre 12 godina u Komercijalnu banku a.d. Beograd uz kamatnu stopu od 5%p.a. i kvartalno kapitalisanje, pa danas raspolaže iznosom od 50.000 evra?

$$K_0 = K_n * II_{p/m}^{mn} = 50000 * II_{1,25}^{48}$$

$$K_0 = 50000 * 0,55085649$$

$$K_0 = 27542,82 \text{ evra}$$

Jelisaveta je pre 12 godina uplatila 27.542,82 evra u Komercijalnu banku a.d. Beograd.

- 77.** Početkom svakog polugodišta Zorana Marković uloži po 4.000 evra u Piraeus banku a.d. Beograd koja plaća 6%p.a. interesa i kapitališe šestomesečno. Kolika je Zoranina suma uloga posle 10 godina?

$$S_n = u * III_{p/m}^{nm}$$

$$S_n = 4000 * III_3^{20} = 4000 * 27,67648572$$

$$S_n = 110705,94 \text{ evra}$$

Suma Zoraninog uloga posle 10 godina je 110.705,94 evra.

78. Janko Janković je uplaćivao u Privrednu banku a.d. Beograd početkom godine: prvih pet godina po 1.000 evra, drugih pet godina po 1.500 evra, a narednih 5 godina po 2.000 evra.

- Odrediti Jankovu sumu uloga na kraju 15 godina, ako je interesna stopa 6%p.a. i godišnje kapitalisanje.
- Odrediti sadašnju vrednost Jankove sume uloga pod gore navedenim uslovima.

Rešavanju zadatka pristupamo korišćenjem I i III finansijskih tablica.

a)

$$S_n = 1000 * III_6^5 * I_6^{10} + 1500 * III_6^5 * I_6^5 + 2000 * III_6^5$$

$$S_n = 1000 * III_6^5 * (I_6^{10} + 1,5 * I_6^5 + 2)$$

$$S_n = 34646,01 \text{ evra}$$

Jankova suma uloga na kraju 15 godine kod Privredne banke iznosi 34.646,01 evra.

b)

$$S_0 = S_n * II_p^n$$

$$S_0 = 34646,01 * II_6^{15}$$

$$S_0 = 14456,56 \text{ evra}$$

Sadašnja vrednost Jankove sume uloga je 14.456,56 evra.

79. Kolika je sadašnja vrednost niza od 24 Zoranova stalna uloga od 12.500 evra, uplaćivanih krajem godine kod Agro banke a.d. Beograd uz obračun interesa po stopi od 4,5%p.a.?

$$S_0' = 12500 * IV_{4,5}^{24}$$

$$S_0' = 181193,48 \text{ evra}$$

Sadašnja vrednost niza Zoranih stalnih uloga je 181.193,48 evra.

80. Pink d.o.o. Beograd otplaćuje kredit od 600.000 evra 12 godina jednakim šestomesečnim anuitetima kod Hypo banke a.d. Beograd. Polugodišnja kamatna stopa je 3%. Kapitalisanje je šestomesečno. Izračunati koliki je Pinkov anuitet.

$$a = 600000 * V_3^{24}$$

$$a = 35428,45 \text{ evra}$$

Pinkov anuitet po kreditu kod Hypo banke je 35.428,45 evra

3.

AKTUARSTVO

81. Lice je staro 33 godine. Kolika je vjerojatnoća da će doživjeti 55 godina?

Rešenje:

$$P_x = \frac{l_{x+n}}{l_x},$$

$$P_{33} = \frac{l_{33+22}}{l_{33}} = \frac{l_{55}}{l_{33}} = \frac{63469}{84089}$$

$$P_{33} = 0,75478$$

82. Kolika je vjerojatnoća da lice staro 33 godine neće doživjeti 55 godinu?

Rešenje:

$$Q_x = 1 - P_x$$

$$Q_{33} = 1 - 0,75478$$

$$Q_{33} = 0,24522$$

83. Ako je lice staro 35 godina, kolika je vjerojatnoća da će:

a) Doživjeti 65 godina?

b) Umreti pre nego što navršši 65 godina starosti?

Rešenje:

a)

$${}_n P_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

$${}_{30} P_{35} = \frac{l_{35+30}}{l_{35}} = \frac{l_{65}}{l_{35}} = \frac{46754}{82581}$$

$${}_{30} P_{35} = 0,56615$$

b)

$${}_n Q_x = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

$${}_n Q_x = 1 - {}_n P_x =$$

$${}_{30} Q_{35} = 1 - 0,56615 = 0,43385$$

84. Lice je staro 25 godina, kolika je verovatnoća da će:

- a) Doživeti 70-tu godinu života?
- b) Umreti u toku narednih 20 godina?

Rešenje:

a)

$${}_n P_x = \frac{l_{x+n}}{l_x},$$

$${}_{45} P_{25} = \frac{l_{25+45}}{l_{25}} = \frac{l_{70}}{l_{25}} = \frac{35837}{89835} = 0,39892.$$

b)

$${}_n Q_x = 1 - {}_n P_x$$

$${}_{20} Q_{25} = 1 - {}_{20} P_{25} = 1 - \frac{l_{25}}{l_{45}} = 1 - \frac{89835}{93268} = 1 - 0,96319$$

$${}_{20} Q_{25} = 0,036807.$$

85. Lice je staro 35 godina, kolika je verovatno trajanje njegovog života?

Rešenje:

$$l_{x+n} = \frac{1}{2} \cdot l_x$$

$$l_{x+n} = \frac{1}{2} \cdot l_{35}$$

$$l_{x+n} = \frac{1}{2} \cdot 82581$$

$$l_{x+n} = 41290$$

$$l_{66} = 44693$$

$$l_{67} = 42565$$

$$l_{67} < l_{x+n} < l_{66}$$

86. Ako je lice staro 37 godina i osiguralo je rentu od 100.000,00 dinara koju će da prima od dana osiguranja dokle god je živo, koliko će neto mizu uplatiti za ovo osiguranje

- a) anticipativno?
- b) dekurzivno?

Rešenje:

a)

$$a_x = \frac{N_x}{D_x}$$

$$a_{37} = \frac{N_{37}}{D_{37}}$$

$$a_{37} = \frac{319922,64}{18986,95} =$$

$$a_{37} = 16,8496$$

$$M = R \cdot a_x$$

$$M = 100\,000 \cdot 16,8496$$

$$M = 1.684.960$$

b)

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

$$a_{37} = \frac{N_{38}}{D_{37}}$$

$$a_{37} = \frac{298935,69}{18986,95} =$$

$$a_{37} = 15,74427$$

$$M = R \cdot a_x$$

$$M = 100\,000 \cdot 15,74427$$

$$M = 1.574.427$$

87. Lice ima 38 godina i osiguralo je rentu od 150.000,00 dinara koju će da prima doživotno po isteku 5 godina od dana osiguranja. Koliku će neto mizu da uplati za ovo osiguranje

a) anticipativno?

b) dekurzivno?

Rešenje:

a)

$${}_k|a_x = \frac{N_{x+k}}{D_x}$$

$${}_s|a_{38} = \frac{N_{38+5}}{D_{38}} =$$

$${}_s|a_{38} = \frac{N_{43}}{D_{38}} =$$

$${}_s|a_{38} = \frac{218641,25}{18079,83} =$$

$${}_s|a_{38} = 11,993545$$

$$M = R \cdot {}_k|a_x$$

$$M = 150\,000 \cdot 11,993545 =$$

$$M = 1.799.032$$

b)

$${}_k|a_x = \frac{N_{x+k+1}}{D_x}$$

$${}_s|a_{38} = \frac{N_{38+5+1}}{D_{38}} =$$

$${}_s|a_{38} = \frac{N_{44}}{D_{38}} =$$

$${}_s|a_{38} = \frac{202736,43}{18079,83} =$$

$${}_s|a_{38} = 11,213404$$

$$M = 150\,000 \cdot 11,213404 =$$

$$M = 1.788.201$$

88. Lice je staro 40 godina i osiguralo je rentu od 20.000,00 dinara da je prima doživotno ali najviše 15 godina. Koliko iznosi neto miza za ovo osiguranje:
a) anticipativno? b) dekurzivno?

Rešenje:

a)

$$|_n a_x = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

$$|_{15} a_{40} = \frac{N_{40} - N_{40+15}}{D_{40}}$$

$$|_{15} a_{40} = \frac{N_{40} - N_{55}}{D_{40}}$$

$$|_{15} a_{40} = \frac{263643,62 - 87924,183}{16382,56}$$

$$|_{15} a_{40} = 10,726006$$

$$|_{15} a_{40} = 10,726006$$

$$M = 20.000 \cdot 10,726006$$

$$M = 214.520,12$$

b)

$$|_n a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x} - \frac{N_{x+n+1}}{D_x}$$

$$|_{15} a_{40} = \frac{N_{40+1}}{D_{40}} - \frac{N_{40+15+1}}{D_{40}}$$

$$|_{15} a_{40} = \frac{N_{41}}{D_{40}} - \frac{N_{56}}{D_{40}}$$

$$|_{15} a_{40} = \frac{247261,06 - 80583,634}{16382,56}$$

$$|_{15} a_{40} = 10,174076$$

$$M = 20.000 \cdot 10,174076$$

$$M = 203.481,53$$

89. Osoba je stara 30 godina i osiguralo je rentu od 30.000 dinara da je prima po isteku 10 godina od dana osiguranja, ali najviše sledećih 15 godina. Koliko iznosi neto miza za ovo osiguranje:

a) anticipativno?

b) dekurzivno?

Rešenje:

a)

$$|_k|_n a_x = \frac{N_{x+k} - N_{x+k+n}}{D_x}$$

$$|_{10}|_{15} a_{30} = \frac{N_{30+10} - N_{30+10+15}}{D_{30}}$$

$$|_{10}|_{15} a_{30} = \frac{N_{40} - N_{55}}{D_{30}}$$

$$|_{10}|_{15} a_{30} = \frac{263643,62 - 87924,183}{26605,43}$$

$$|_{10}|_{15} a_{30} = 6,6046456$$

$$M = 30.000 \cdot 6,6046456$$

$$M = 198.193,37$$

b)

$$|_k|_n a_x = \frac{N_{x+k+1} - N_{x+k+n+1}}{D_x}$$

$$|_{10}|_{15} a_{30} = \frac{N_{30+10+1} - N_{30+10+15+1}}{D_{30}}$$

$$|_{10}|_{15} a_{30} = \frac{N_{41} - N_{56}}{D_{30}}$$

$$|_{10}|_{15} a_{30} = \frac{247261,06 - 80583,643}{26605,43}$$

$$|_{10}|_{15} a_{30} = 6,2647894$$

$$M = 30.000 \cdot 6,2647894$$

$$M = 187.943,68$$

90. Osoba je stara 45 godina osigurala je doživotnu ličnu rentu u visini 200.000,00 dinara da prima početkom svakih šest meseci po 25.000,00 dinara. Izračunati jednokratnu premiju.

Rešenje:

$$a_x^{(\frac{1}{m})} = a_x - \frac{m-1}{2m}$$

$$a_{45}^{(\frac{1}{2})} = a_{45} - \frac{2-1}{2 \cdot 2} = a_{45} - \frac{1}{4}$$

$$a_{45}^{(\frac{1}{2})} = \frac{N_{45}}{D_{45}} - 0,25$$

$$a_{45}^{(\frac{1}{2})} = \frac{189326,69}{12743,15} - 0,25$$

$$a_{45}^{(\frac{1}{2})} = 14,607134$$

$$P = 200.000 \cdot 14,607134$$

$$P = 2.921.426,8$$

91. Ako osiguranik ima 35 godina i želi da osigura neposrednu doživotnu ličnu rentu sa jednokratnom premijom od 100.000,00 dinara, rate se isplaćuju dekurzivno krajem svakog polugodišta, kolika će biti polugodišnja rata?

Rešenje:

$$a_x^{(\frac{1}{m})} = a_x - \frac{m-1}{2m}$$

$$a_{35}^{(\frac{1}{2})} = a_{35} - \frac{2-1}{2 \cdot 2} = a_{35} - \frac{1}{4}$$

$$a_{35}^{(\frac{1}{2})} = \frac{N_{35+1}}{D_{35}} - 0,25 = \frac{N_{36}}{D_{35}} - 0,25$$

$$a_{35}^{(\frac{1}{2})} = \frac{337858,15}{20927,30} - 0,25$$

$$a_{35}^{(\frac{1}{2})} = 15,894374$$

$$R_{35}^{(\frac{1}{2})} = \frac{100.000}{2}$$

$$R_{35}^{(\frac{1}{2})} = 3145,767$$

92. Lice staro 30 godina hoće da osigura odloženu doživotnu ličnu rentu uplatom jednokratne premije u iznosu od 30.000 dinara. Primaće je nakon isteka 20 godina od početka osiguranja. Koliko će iznostiti mesečna anticipativna renta?

Rešenje:

$$\begin{aligned}
 {}_{m|}a_x^{(k)} &= \frac{N_{x+m}}{D_x} - \frac{k-1}{2 \cdot k} \\
 {}_{20|}a_{30}^{(12)} &= \frac{N_{30+20}}{D_{30}} - \frac{12-1}{2 \cdot 12} = \frac{N_{50}}{D_{30}} - \frac{11}{24} \\
 {}_{20|}a_{30}^{(12)} &= \frac{131765,619}{26605,43} - 0,45833 & R_{30} &= \frac{30.000}{12} \\
 {}_{20|}a_{30}^{(12)} &= 4,49425 & R_{30} &= 556,266
 \end{aligned}$$

93. Lice staro 40 godina osiguralo je 200.000,00 dinara da mu se isplati ako doživi 60 godina starosti. Izračunati jednokratnu premiju za ovo osiguranje.

Rešenje:

$$\begin{aligned}
 {}_{|n}E_x &= \frac{D_{x+n}}{D_x} \\
 {}_{|20}E_{40} &= \frac{D_{40+20}}{D_{40}} = \frac{D_{60}}{D_{40}} \\
 {}_{|20}E_{40} &= \frac{5320,816}{16382,56} & M &= K \cdot {}_{|n}E_x \\
 {}_{|20}E_{40} &= 0,32478 & M &= 200.000 \cdot 0,32478 \\
 & & M &= 64957,076
 \end{aligned}$$

94. Osoba ima 42 godine. Osigurala je 300.000,00 dinara da se isplati naslednicama nakon njene smrti, bez obzira na vreme na stupanja smrti. Izračunati neto premiju za ovo osiguranje.

Rešenje:

$$\begin{aligned}
 A_x &= \frac{M_x}{D_x} \\
 A_{42} &= \frac{M_{42}}{D_{42}} \\
 A_{42} &= \frac{5920,13}{14830,58} & M &= 300.000 \cdot 0,39918 \\
 A_{42} &= 0,39918 & M &= 119754
 \end{aligned}$$

95. Lice staro 40 godina osiguralo je 200.000,00 dinara da se isplati naslednicima posle njegove smrti, u slučaju da je smrt zadesi nakon isteka 20 godina od dana osiguranja. Izračunati neto mizu.

Rešenje:

$$\begin{aligned}
 {}_{k|}A_x &= \frac{M_{x+k}}{D_x} \\
 {}_{20|}A_{40} &= \frac{M_{40+20}}{D_{40}} = \frac{M_{60}}{D_{40}} \\
 {}_{20|}A_{40} &= \frac{3189,47}{16382,56} \\
 {}_{20|}A_{40} &= 0,19468 \qquad M = 200.000 \cdot 0,19468 \\
 & \qquad \qquad \qquad M = 38936
 \end{aligned}$$

96. Osoba ima 50 godine. Osigurala je 400.000,00 dinara da se isplati naslednicama ukoliko umre u toku 15 godina od dana osiguranja. Odrediti jednokratnu premiju.

Rešenje:

$$\begin{aligned}
 {}_{n|}A_x &= \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \\
 {}_{15|}A_{50} &= \frac{M_{50} - M_{50+15}}{D_{50}} = \frac{M_{50} - M_{65}}{D_{50}} \\
 {}_{15|}A_{50} &= \frac{4714,01 - 2411,62}{9781,919} \\
 {}_{15|}A_{50} &= 0,235372 \qquad M = 400.000 \cdot 0,235372 \\
 & \qquad \qquad \qquad M = 94148,807
 \end{aligned}$$

97. Lice staro 50 godina osiguralo je 250.000,00 dinara da se isplati naslednicima ukoliko preživi 15 godina od dana osiguranja a umre u toku narednih 20 godina. Koliko iznosi neto miza za ovo osiguranje?

Rešenje:

$$\begin{aligned}
 {}_{k|n}A_x &= \frac{M_{x+k} - M_{x+k+n}}{D_x} \\
 {}_{15|20}A_{50} &= \frac{M_{50+15} - M_{50+15+20}}{D_{50}} = \frac{M_{65} - M_{85}}{D_{50}} \\
 {}_{15|20}A_{50} &= \frac{2411,62 - 166,836}{9781,919} \\
 {}_{15|20}A_{50} &= 0,229483 \qquad M = 250.000 \cdot 0,229483 \\
 & \qquad \qquad \qquad M = 57370,747
 \end{aligned}$$

98. Osoba je stara 45 godina a osigurala je sumu od 300.000,00 dinara da mu se isplati ako doživi 65 godina starosti ili nasljednicima ukoliko umre pre navršene 65 godine starosti. Izračunati neto mizu.

Rešenje:

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

$$A_{45:\overline{20}|} = \frac{M_{45} - M_{45+20} + D_{45+20}}{D_{45}} = \frac{M_{45} - M_{65} + D_{65}}{D_{45}}$$

$$A_{45:\overline{20}|} = \frac{5461,36 - 2411,62 + 3653,017}{12743,15}$$

$$A_{45:\overline{20}|} = \frac{6702,757}{12743,15}$$

$$A_{45:\overline{20}|} = 0,525989$$

$$M = 300.000 \cdot 0,525989$$

$$M = 157796,71$$

99. Osoba je imala 42 godine. Osigurala je 200.000,00 dinara da se isplati nasljednicima na kraju godine u kojoj osigurana osoba umre, bilo kada je smrt zadesi. Kolika će biti godišnja neto premija koja se plaća doživotno?

Rešenje:

$$P(A_{42}) = \frac{A_{42}}{a_{42}}$$

$$P(A_{42}) = \frac{M_{42}}{N_{42}}$$

$$P(A_{42}) = \frac{5920,13}{231671,83}$$

$$P(A_{42}) = 0,0255539$$

$$P = 200.000 \cdot 0,0255539$$

$$P = 5110,789$$

100. Lice staro 55 godina osiguralo je 250.000,00 dinara da se isplati nasljednicima posle njene smrti ukoliko je smrt zadesi po isteku prvih 20 godina od osiguranja. Kolika je godišnja neto premija ako se premija plaća doživotno?

Rešenje:

$$P\left({}_{20|}A_{55}\right)=\frac{{}_{20|}A_{55}}{a_{55}}$$

$$P\left({}_{20|}A_{55}\right)=\frac{M_{75}}{N_{55}}$$

$$P\left({}_{20|}A_{55}\right)=\frac{982,705}{87924,183}$$

$$P\left({}_{20|}A_{55}\right)=0,0111767$$

$$P = 250.000 \cdot 0,0111767$$

$$P = 2794,183$$

101. Osoba ima 40 godina. Osigurala je 180.000,00 dinara da se isplati naslednicima na kraju godine u kojoj osigurana osoba umre, ma kada ona umrla. Kolika je godišnja neto premija koja se plaća najviše 15 godina od dana osiguranja?

Rešenje:

$${}_{15}P\left(A_{40}\right)=\frac{A_{40}}{{}_{15}a_{40}}$$

$${}_{15}P\left(A_{40}\right)=\frac{M_{40}}{N_{40}-N_{55}}$$

$${}_{15}P\left(A_{40}\right)=\frac{6242,42}{263643,62-87924,183}$$

$${}_{15}P\left(A_{40}\right)=0,0355249$$

$$P = 180.000 \cdot 0,0355249$$

$$P = 6394,486$$

102. Ako je lice staro 50 godina i osiguralo je 100.000,00 dinara da se isplati naslednicima posle njegove smrti. Ako umre nakon isteka prvih 10 godina od dana osiguranja, kolika je neto premija ako se premija plaća najviše 20 godina?

Rešenje:

$${}_{20}P\left({}_{10|}A_{50}\right)=\frac{{}_{10|}A_{50}}{{}_{12}a_{50}}$$

$${}_{20}P\left({}_{10|}A_{50}\right)=\frac{M_{60}}{N_{50}-N_{70}}$$

$${}_{20}P\left({}_{10|}A_{50}\right)=\frac{3189,47}{131765,619-16840,036}$$

$${}_{20}P\left({}_{10|}A_{50}\right)=0,0277535$$

$$P = 100.000 \cdot 0,0277535$$

$$P = 2775,35$$

- 103.** Osoba ima 42 godine i osigurala je rentu od 20.000,00 dinara koju će da prima do svoje 60-te godine, doživotno. Koliko iznosi godišnja premija koja se plaća doživotno?

Rešenje:

$$P \left({}_{12|}a_{42} \right) = \frac{N_{60}}{N_{42}}$$

$$P \left({}_{12|}a_{42} \right) = \frac{55414,907}{231671,83}$$

$$P \left({}_{12|}a_{42} \right) = 0,2391957$$

$$P = 20.000 \cdot 0,2391957$$

$$P = 4783,914$$

- 104.** Osiguranik ima 50 godina i osigurava se za slučaj smrti na 100.000,00 dinara. Koliko će plaćati godišnju premiju dokle god je živ?

Rešenje:

$$P_{50} = \frac{M_{50}}{N_{50}}$$

$$P_{50} = \frac{4714,01}{131765,619}$$

$$P_{50} = 0,0357757$$

$$P = 100.000 \cdot 0,0357757$$

$$P = 3577,57$$

- 105.** Osiguranik je 50-to godišnjak i osigurava kapital od 100.000,00 dinara koji će primiti samo ako doživi 65-tu godinu. Koliko će iznositii godišnja premija?

Rešenje:

$${}_{15}E_{65} = \frac{D_{65}}{N_{50} - N_{65}}$$

$${}_{15}E_{65} = \frac{3653,017}{131765,619 - 32276,412}$$

$${}_{15}E_{65} = 0,036717$$

$$P = 100.000 \cdot 0,036717$$

$$P = 3671,772$$

- 106.** Osoba stara 30 godina osigurala je rentu od 20.000,00 dinara koju će da prima od svoje 45-te do 65-te godine starosti. Kolika je godišnja premija koja se plaća najviše 10 godina?

Rešenje:

$$\begin{aligned}
 {}_{10}P\left({}_{15|20}a_{30}\right) &= \frac{N_{45} - N_{65}}{N_{30} - N_{40}} \\
 {}_{10}P\left({}_{15|20}a_{30}\right) &= \frac{189326,69}{479951,73 - 263643,62} \\
 P\left({}_{12|}a_{42}\right) &= 0,875264
 \end{aligned}
 \qquad
 \begin{aligned}
 P &= 20.000 \cdot 0,875264 \\
 P &= 17505,279
 \end{aligned}$$

- 107.** Osiguranik starosti 45 godina osigurao je rentu od 20.000,00 dinara koju će da prima u toku prvih 25 godina od dana osiguranja. Odrediti godišnju premiju koja se plaća najviše 15 godina.

Rešenje:

$$\begin{aligned}
 {}_{25}P\left({}_{15}a_{45}\right) &= \frac{N_{45} - N_{70}}{N_{45} - N_{60}} \\
 {}_{25}P\left({}_{15}a_{45}\right) &= \frac{189326,69 - 16840,036}{189326,69 - 55414,907} \\
 {}_{25}P\left({}_{15}a_{45}\right) &= 1,2880618 \\
 P &= 20.000 \cdot 1,2880618 \\
 P &= 25761,236
 \end{aligned}$$

- 108.** Lice staro 45 godina osiguralo je, za slučaj smrti, na 100.000,00 dinara, ali samo do svoje 65 godine. Kolika je godišnja premija?

Rešenje:

$$\begin{aligned}
 {}_{20}P_{45} &= \frac{M_{45} - M_{65}}{N_{45} - N_{65}} \\
 {}_{20}P_{45} &= \frac{5461,36 - 2411,62}{189326,69 - 32276,412} \\
 {}_{20}P_{45} &= 0,019419
 \end{aligned}
 \qquad
 \begin{aligned}
 P &= 100.000 \cdot 0,019419 \\
 P &= 1941,896
 \end{aligned}$$

109. Osoba stara 55 godina osigurala je kapital od 100.000,00 dinara da se isplati naslednicima nakon njegove smrti, bilo kada da smrt nastupi.

- Odrediti godišnje akvizicione troškove, ako su oni 8% od osigurane sume, premija se plaća godišnje.
- Odrediti upravno-administrativne troškove ako oni iznose 5% od osigurane sume.
- Odrediti inkaso troškove ako oni iznose 20% od izračunate premije.
- Odrediti godišnju bruto premiju za ovo osiguranje.

Rešenje:

$$P_{A(55)} = \frac{M_{55}}{N_{55}}$$

$$P_{A(55)} = \frac{3958,84}{87924,183} \quad P = 100.000 \cdot 0,045025$$

$$P_{A(55)} = 0,045025 \quad P = 4.502,561$$

a)

$$\frac{k \cdot \alpha}{1000 \cdot a_x} = \frac{100.000 \cdot 5}{1000 \cdot \frac{N_{55}}{D_{55}}} = \frac{100.000 \cdot 5}{1000 \cdot \frac{87924,183}{7340,540}}$$

$$\frac{k \cdot \alpha}{1000 \cdot a_x} = 41,74$$

b)

$$\frac{k \cdot \beta}{1000} = \frac{100.000 \cdot 2}{1000} = 200$$

c)

$$\frac{1000}{1000 - \gamma} = \frac{1000}{1000 - 10} = 1,01010$$

d)

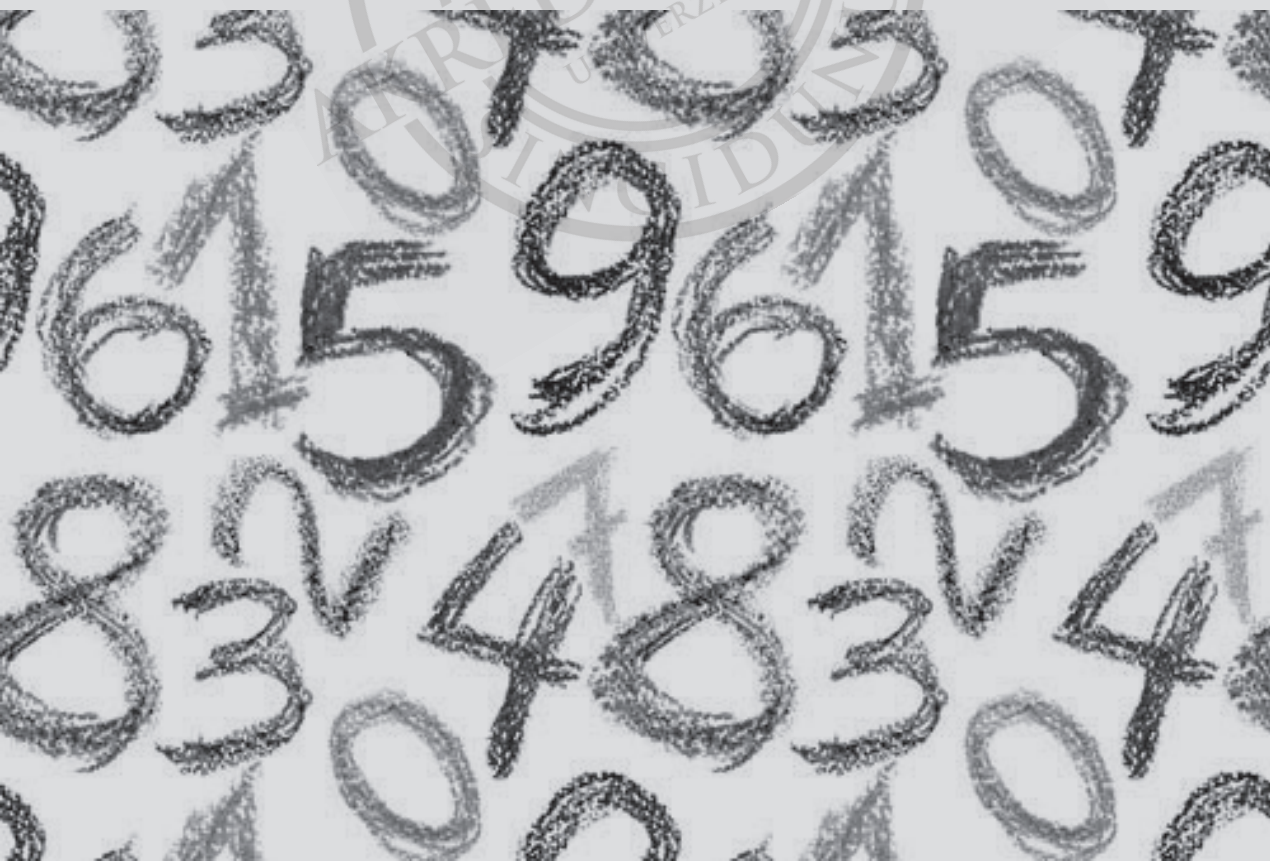
$$\Pi_x = \left(P_x + \frac{k \cdot \alpha}{1000 \cdot a_x} + \frac{k \cdot \beta}{1000} \right) \cdot \frac{1000}{1000 - \gamma}$$

$$\Pi_x = (4502,561 + 41,47 + 200) \cdot 1,01010$$

$$\Pi_x = 4792,2184.$$

PRILOZI

FINANSIJSKE TABLICE



$$I_p^n$$

	0,25%	0,50%	0,75%	1,00%	1,25%
1	1,00250000	1,00500000	1,00750000	1,01000000	1,01250000
2	1,00500625	1,01002500	1,01505625	1,02010000	1,02515625
3	1,00751877	1,01507513	1,02266917	1,03030100	1,03797070
4	1,01003756	1,02015050	1,03033919	1,04060401	1,05094534
5	1,01256266	1,02525125	1,03806673	1,05101005	1,06408215
6	1,01509406	1,03037751	1,04585224	1,06152015	1,07738318
7	1,01763180	1,03552940	1,05369613	1,07213535	1,09085047
8	1,02017588	1,04070704	1,06159885	1,08285671	1,10448610
9	1,02272632	1,04591058	1,06956084	1,09368527	1,11829218
10	1,02528313	1,05114013	1,07758255	1,10462213	1,13227083
11	1,02784634	1,05639583	1,08566441	1,11566835	1,14642422
12	1,03041596	1,06167781	1,09380690	1,12682503	1,16075452
13	1,03299200	1,06698620	1,10201045	1,13809328	1,17526395
14	1,03557448	1,07232113	1,11027553	1,14947421	1,18995475
15	1,03816341	1,07768274	1,11860259	1,16096896	1,20482918
16	1,04075882	1,08307115	1,12699211	1,17257864	1,21988955
17	1,04336072	1,08848651	1,13544455	1,18430443	1,23513817
18	1,04596912	1,09392894	1,14396039	1,19614748	1,25057739
19	1,04858404	1,09939858	1,15254009	1,20810895	1,26620961
20	1,05120550	1,10489558	1,16118414	1,22019004	1,28203723
21	1,05383352	1,11042006	1,16989302	1,23239194	1,29806270
22	1,05646810	1,11597216	1,17866722	1,24471586	1,31428848
23	1,05910927	1,12155202	1,18750723	1,25716302	1,33071709
24	1,06175704	1,12715978	1,19641353	1,26973465	1,34735105
25	1,06441144	1,13279558	1,20538663	1,28243200	1,36419294
26	1,06707247	1,13845955	1,21442703	1,29525631	1,38124535
27	1,06974015	1,14415185	1,22353523	1,30820888	1,39851092
28	1,07241450	1,14987261	1,23271175	1,32129097	1,41599230
29	1,07509553	1,15562197	1,24195709	1,33450388	1,43369221
30	1,07778327	1,16140008	1,25127176	1,34784892	1,45161336
31	1,08047773	1,16720708	1,26065630	1,36132740	1,46975853
32	1,08317892	1,17304312	1,27011122	1,37494068	1,48813051
33	1,08588687	1,17890833	1,27963706	1,38869009	1,50673214
34	1,08860159	1,18480288	1,28923434	1,40257699	1,52556629
35	1,09132309	1,19072689	1,29890359	1,41660276	1,54463587
36	1,09405140	1,19668052	1,30864537	1,43076878	1,56394382
37	1,09678653	1,20266393	1,31846021	1,44507647	1,58349312
38	1,09952850	1,20867725	1,32834866	1,45952724	1,60328678
39	1,10227732	1,21472063	1,33831128	1,47412251	1,62332787
40	1,10503301	1,22079424	1,34834861	1,48886373	1,64361946
41	1,10779559	1,22689821	1,35846123	1,50375237	1,66416471
42	1,11056508	1,23303270	1,36864969	1,51878989	1,68496677
43	1,11334149	1,23919786	1,37891456	1,53397779	1,70602885
44	1,11612485	1,24539385	1,38925642	1,54931757	1,72735421
45	1,11891516	1,25162082	1,39967584	1,56481075	1,74894614
46	1,12171245	1,25787892	1,41017341	1,58045885	1,77080797
47	1,12451673	1,26416832	1,42074971	1,59626344	1,79294306
48	1,12732802	1,27048916	1,43140533	1,61222608	1,81535485
49	1,13014634	1,27684161	1,44214087	1,62834834	1,83804679
50	1,13297171	1,28322581	1,45295693	1,64463182	1,86102237

I_p^n

	1,50%	1,75%	2,00%	2,25%	2,50%
1	1,01500000	1,01750000	1,02000000	1,02250000	1,02500000
2	1,03022500	1,03530625	1,04040000	1,04550625	1,05062500
3	1,04567838	1,05342411	1,06120800	1,06903014	1,07689063
4	1,06136355	1,07185903	1,08243216	1,09308332	1,10381289
5	1,07728400	1,09061656	1,10408080	1,11767769	1,13140821
6	1,09344326	1,10970235	1,12616242	1,14282544	1,15969342
7	1,10984491	1,12912215	1,14868567	1,16853901	1,18868575
8	1,12649259	1,14888178	1,17165938	1,19483114	1,21840290
9	1,14338998	1,16898721	1,19509257	1,22171484	1,24886297
10	1,16054083	1,18944449	1,21899442	1,24920343	1,28008454
11	1,17794894	1,21025977	1,24337431	1,27731050	1,31208666
12	1,19561817	1,23143931	1,26824179	1,30604999	1,34488882
13	1,21355244	1,25298950	1,29360663	1,33543611	1,37851104
14	1,23175573	1,27491682	1,31947876	1,36548343	1,41297382
15	1,25023207	1,29722786	1,34586834	1,39620680	1,44829817
16	1,26898555	1,31992935	1,37278571	1,42762146	1,48450562
17	1,28802033	1,34302811	1,40024142	1,45974294	1,52161826
18	1,30734064	1,36653111	1,42824625	1,49258716	1,55965872
19	1,32695075	1,39044540	1,45681117	1,52617037	1,59865019
20	1,34685501	1,41477820	1,48594740	1,56050920	1,63861644
21	1,36705783	1,43953681	1,51566634	1,59562066	1,67958185
22	1,38756370	1,46472871	1,54597967	1,63152212	1,72157140
23	1,40837715	1,49036146	1,57689926	1,66823137	1,76461068
24	1,42950281	1,51644279	1,60843725	1,70576658	1,80872595
25	1,45094535	1,54298054	1,64060599	1,74414632	1,85394410
26	1,47270953	1,56998269	1,67341811	1,78338962	1,90029270
27	1,49480018	1,59745739	1,70688648	1,82351588	1,94780002
28	1,51722218	1,62541290	1,74102421	1,86454499	1,99649502
29	1,53998051	1,65385762	1,77584469	1,90649725	2,04640739
30	1,56308022	1,68280013	1,81136158	1,94939344	2,09756758
31	1,58652642	1,71224913	1,84758882	1,99325479	2,15000677
32	1,61032432	1,74221349	1,88454059	2,03810303	2,20375694
33	1,63447918	1,77270223	1,92223140	2,08396034	2,25885086
34	1,65899637	1,80372452	1,96067603	2,13084945	2,31532213
35	1,68388132	1,83528970	1,99988955	2,17879356	2,37320519
36	1,70913954	1,86740727	2,03988734	2,22781642	2,43253532
37	1,73477663	1,90008689	2,08068509	2,27794229	2,49334870
38	1,76079828	1,93333841	2,12229879	2,32919599	2,55568242
39	1,78721025	1,96717184	2,16474477	2,38160290	2,61957448
40	1,81401841	2,00159734	2,20803966	2,43518897	2,68506384
41	1,84122868	2,03662530	2,25220046	2,48998072	2,75219043
42	1,86884712	2,07226624	2,29724447	2,54600528	2,82099520
43	1,89687982	2,10853090	2,34318936	2,60329040	2,89152008
44	1,92533302	2,14543019	2,39005314	2,66186444	2,96380808
45	1,95421301	2,18297522	2,43785421	2,72175639	3,03790328
46	1,98352621	2,22117728	2,48661129	2,78299590	3,11385086
47	2,01327910	2,26004789	2,53634352	2,84561331	3,19169713
48	2,04347829	2,29959872	2,58707039	2,90963961	3,27148956
49	2,07413046	2,33984170	2,63881179	2,97510650	3,35327680
50	2,10524242	2,38078893	2,69158803	3,04204640	3,43710872

	2,75%	3,00%	3,25%	3,50%	3,75%
1	1,02750000	1,03000000	1,03250000	1,03500000	1,03750000
2	1,05575625	1,06090000	1,06605625	1,07122500	1,07640625
3	1,08478955	1,09272700	1,10070308	1,10871788	1,11677148
4	1,11462126	1,12550881	1,13647593	1,14752300	1,15865042
5	1,14527334	1,15927407	1,17341140	1,18768631	1,20209981
6	1,17676836	1,19405230	1,21154727	1,22925533	1,24717855
7	1,20912949	1,22987387	1,25092255	1,27227926	1,29394774
8	1,24238055	1,26677008	1,29157754	1,31680904	1,34247078
9	1,27654602	1,30477318	1,33355381	1,36289735	1,39281344
10	1,31165103	1,34391638	1,37689430	1,41059876	1,44504394
11	1,34772144	1,38423387	1,42164337	1,45996972	1,49923309
12	1,38478378	1,42576089	1,46784678	1,51106866	1,55545433
13	1,42286533	1,46853371	1,51555180	1,56395606	1,61378387
14	1,46199413	1,51258972	1,56480723	1,61869452	1,67430076
15	1,50219896	1,55796742	1,61566347	1,67534883	1,73708704
16	1,54350944	1,60470644	1,66817253	1,73398604	1,80222781
17	1,58595595	1,65284763	1,72238814	1,79467555	1,86981135
18	1,62956973	1,70243306	1,77836575	1,85748920	1,93992927
19	1,67438290	1,75350605	1,83616264	1,92250132	2,01267662
20	1,72042843	1,80611123	1,89583792	1,98978886	2,08815200
21	1,76774021	1,86029457	1,95745266	2,05943147	2,16645770
22	1,81635307	1,91610341	2,02106987	2,13151158	2,24769986
23	1,86630278	1,97358651	2,08675464	2,20611448	2,33198860
24	1,91762610	2,03279411	2,15457416	2,28332849	2,41943818
25	1,97036082	2,09377793	2,22459782	2,36324498	2,51016711
26	2,02454575	2,15659127	2,29689725	2,44595856	2,60429838
27	2,08022075	2,22128901	2,37154641	2,53156711	2,70195956
28	2,13742682	2,28792768	2,44862167	2,62017196	2,80328305
29	2,19620606	2,35656551	2,52820188	2,71187798	2,90840616
30	2,25660173	2,42726247	2,61036844	2,80679370	3,01747139
31	2,31865828	2,50008035	2,69520541	2,90503148	3,13062657
32	2,38242138	2,57508276	2,78279959	3,00670759	3,24802507
33	2,44793797	2,65233524	2,87324058	3,11194235	3,36982601
34	2,51525626	2,73190530	2,96662089	3,22086033	3,49619448
35	2,58442581	2,81386245	3,06303607	3,33359045	3,62730178
36	2,65549752	2,89827833	3,16258475	3,45026611	3,76332559
37	2,72852370	2,98522668	3,26536875	3,57102543	3,90445030
38	2,80355810	3,07478348	3,37149323	3,69601132	4,05086719
39	2,88065595	3,16702698	3,48106676	3,82537171	4,20277471
40	2,95987399	3,26203779	3,59420143	3,95925972	4,36037876
41	3,04127052	3,35989893	3,71101298	4,09783381	4,52389296
42	3,12490546	3,46069589	3,83162090	4,24125799	4,69353895
43	3,21084036	3,56451677	3,95614858	4,38970202	4,86954666
44	3,29913847	3,67145227	4,08472341	4,54334160	5,05215466
45	3,38986478	3,78159584	4,21747692	4,70235855	5,24161046
46	3,48308606	3,89504372	4,35454492	4,86694110	5,43817085
47	3,57887093	4,01189503	4,49606763	5,03728404	5,64210226
48	3,67728988	4,13225188	4,64218983	5,21358898	5,85368109
49	3,77841535	4,25621944	4,79306100	5,39606459	6,07319413
50	3,88232177	4,38390602	4,94883548	5,58492686	6,30093891

$$I_p^n$$

	4,00%	4,25%	4,50%	4,75%	5,00%
1	1,04000000	1,04250000	1,04500000	1,04750000	1,05000000
2	1,08160000	1,08680625	1,09202500	1,09725625	1,10250000
3	1,12486400	1,13299552	1,14116613	1,14937592	1,15762500
4	1,16985856	1,18114783	1,19251860	1,20397128	1,21550625
5	1,21665290	1,23134661	1,24618194	1,26115991	1,27628156
6	1,26531902	1,28367884	1,30226012	1,32106501	1,34009564
7	1,31593178	1,33823519	1,36086183	1,38381560	1,40710042
8	1,36856905	1,39511018	1,42210061	1,44954684	1,47745544
9	1,42331181	1,45440237	1,48609514	1,51840031	1,55132822
10	1,48024428	1,51621447	1,55296942	1,59052433	1,62889463
11	1,53945406	1,58065358	1,62285305	1,66607423	1,71033936
12	1,60103222	1,64783136	1,69588143	1,74521276	1,79585633
13	1,66507351	1,71786419	1,77219610	1,82811037	1,88564914
14	1,73167645	1,79087342	1,85194492	1,91494561	1,97993160
15	1,80094351	1,86698554	1,93528244	2,00590552	2,07892818
16	1,87298125	1,94633243	2,02237015	2,10118604	2,18287459
17	1,94790050	2,02905156	2,11337681	2,20099237	2,29201832
18	2,02581652	2,11528625	2,20847877	2,30553951	2,40661923
19	2,10684918	2,20518591	2,30786031	2,41505264	2,52695020
20	2,19112314	2,29890631	2,41171402	2,52976764	2,65329771
21	2,27876807	2,39660983	2,52024116	2,64993160	2,78596259
22	2,36991879	2,49846575	2,63365201	2,77580335	2,92526072
23	2,46471554	2,60465054	2,75216635	2,90765401	3,07152376
24	2,56330416	2,71534819	2,87601383	3,04576758	3,22509994
25	2,66583633	2,83075049	3,00543446	3,19044154	3,38635494
26	2,77246978	2,95105739	3,14067901	3,34198751	3,55567269
27	2,88336858	3,07647732	3,28200956	3,50073192	3,73345632
28	2,99870332	3,20722761	3,42969999	3,66701668	3,92012914
29	3,11865145	3,34353478	3,58403649	3,84119998	4,11613560
30	3,24339751	3,48563501	3,74531813	4,02365698	4,32194238
31	3,37313341	3,63377450	3,91385745	4,21478068	4,53803949
32	3,50805875	3,78820992	4,08998104	4,41498276	4,76494147
33	3,64838110	3,94920884	4,27403018	4,62469445	5,00318854
34	3,79431634	4,11705021	4,46636154	4,84436743	5,25334797
35	3,94608899	4,29202485	4,66734781	5,07447488	5,51601537
36	4,10393255	4,47443590	4,87737846	5,31551244	5,79181614
37	4,26808986	4,66459943	5,09686049	5,56799928	6,08140694
38	4,43881345	4,86284491	5,32621921	5,83247925	6,38547729
39	4,61636599	5,06951581	5,56589908	6,10952201	6,70475115
40	4,80102063	5,28497024	5,81636454	6,39972431	7,03998871
41	4,99306145	5,50958147	6,07810094	6,70371121	7,39198815
42	5,19278391	5,74373868	6,35161548	7,02213750	7,76158756
43	5,40049527	5,98784758	6,63743818	7,35568903	8,14966693
44	5,61651508	6,24233110	6,93612290	7,70508426	8,55715028
45	5,84117568	6,50763017	7,24824843	8,07107576	8,98500779
46	6,07482271	6,78420445	7,57441961	8,45445186	9,43425818
47	6,31781562	7,07253314	7,91526849	8,85603832	9,90597109
48	6,57052824	7,37311580	8,27145557	9,27670014	10,40126965
49	6,83334937	7,68647322	8,64367107	9,71734340	10,92133313
50	7,10668335	8,01314834	9,03263627	10,17891721	11,46739979

	5,25%	5,50%	5,75%	6,00%	6,25%
1	1,05250000	1,05500000	1,05750000	1,06000000	1,06250000
2	1,10775625	1,11302500	1,11830625	1,12360000	1,12890625
3	1,16591345	1,17424138	1,18260886	1,19101600	1,19946289
4	1,22712391	1,23882465	1,25060887	1,26247696	1,27442932
5	1,29154791	1,30696001	1,32251888	1,33822558	1,35408115
6	1,35935418	1,37884281	1,39856371	1,41851911	1,43871123
7	1,43072027	1,45467916	1,47898113	1,50363026	1,52863068
8	1,50583309	1,53468651	1,56402254	1,59384807	1,62417009
9	1,58488933	1,61909427	1,65395384	1,68947896	1,72568073
10	1,66809602	1,70814446	1,74905618	1,79084770	1,83353577
11	1,75567106	1,80209240	1,84962692	1,89829856	1,94813176
12	1,84784379	1,90120749	1,95598046	2,01219647	2,06988999
13	1,94485559	2,00577390	2,06844934	2,13292826	2,19925812
14	2,04696050	2,11609146	2,18738518	2,26090396	2,33671175
15	2,15442593	2,23247649	2,31315982	2,39655819	2,48275623
16	2,26753329	2,35526270	2,44616651	2,54035168	2,63792850
17	2,38657879	2,48480215	2,58682109	2,69277279	2,80279903
18	2,51187418	2,62146627	2,73556330	2,85433915	2,97797397
19	2,64374757	2,76564691	2,89285819	3,02559950	3,16409734
20	2,78254432	2,91775749	3,05919754	3,20713547	3,36185342
21	2,92862789	3,07823415	3,23510140	3,39956360	3,57196926
22	3,08238086	3,24753703	3,42111973	3,60353742	3,79521734
23	3,24420585	3,42615157	3,61783411	3,81974966	4,03241843
24	3,41452666	3,61458990	3,82585957	4,04893464	4,28444458
25	3,59378931	3,81339235	4,04584650	4,29187072	4,55222236
26	3,78246325	4,02312893	4,27848267	4,54938296	4,83673626
27	3,98104257	4,24440102	4,52449542	4,82234594	5,13903228
28	4,19004731	4,47784307	4,78465391	5,11168670	5,46022180
29	4,41002479	4,72412444	5,05977151	5,41838790	5,80148566
30	4,64155109	4,98395129	5,35070837	5,74349117	6,16407851
31	4,88523252	5,25806861	5,65837410	6,08810064	6,54933342
32	5,14170723	5,54726238	5,98373061	6,45338668	6,95866676
33	5,41164686	5,85236181	6,32779512	6,84058988	7,39358343
34	5,69575832	6,17424171	6,69164334	7,25102528	7,85568239
35	5,99478563	6,51382501	7,07641284	7,68608679	8,34666254
36	6,30951188	6,87208538	7,48330657	8,14725200	8,86832895
37	6,64076125	7,25005008	7,91359670	8,63608712	9,42259951
38	6,98940122	7,64880283	8,36862851	9,15425235	10,01151198
39	7,35634478	8,06948699	8,84982465	9,70350749	10,63723148
40	7,74255288	8,51330877	9,35868957	10,28571794	11,30205845
41	8,14903691	8,98154076	9,89681422	10,90286101	12,00843710
42	8,57686135	9,47552550	10,46588104	11,55703267	12,75896442
43	9,02714657	9,99667940	11,06766920	12,25045463	13,55639970
44	9,50107176	10,54649677	11,70406018	12,98548191	14,40367468
45	9,99987803	11,12655409	12,37704364	13,76461083	15,30390434
46	10,52487163	11,73851456	13,08872365	14,59048748	16,26039837
47	11,07742739	12,38413287	13,84132526	15,46591673	17,27667326
48	11,65899232	13,06526017	14,63720146	16,39387173	18,35646534
49	12,27108942	13,78384948	15,47884054	17,37750403	19,50374443
50	12,91532162	14,54196120	16,36887387	18,42015427	20,72272845

I_p^n

	6,50%	6,75%	7,00%	7,25%	7,50%
1	1,06500000	1,06750000	1,07000000	1,07250000	1,07500000
2	1,13422500	1,13955625	1,14490000	1,15025625	1,15562500
3	1,20794963	1,21647630	1,22504300	1,23364983	1,24229688
4	1,28646635	1,29858845	1,31079601	1,32308944	1,33546914
5	1,37008666	1,38624317	1,40255173	1,41901343	1,43562933
6	1,45914230	1,47981458	1,50073035	1,52189190	1,54330153
7	1,55398655	1,57970207	1,60578148	1,63222906	1,65904914
8	1,65499567	1,68633195	1,71818618	1,75056567	1,78347783
9	1,76257039	1,80015936	1,83845921	1,87748168	1,91723866
10	1,87713747	1,92167012	1,96715136	2,01359910	2,06103156
11	1,99915140	2,05138285	2,10485195	2,15958504	2,21560893
12	2,12909624	2,18985119	2,25219159	2,31615495	2,38177960
13	2,26748750	2,33766615	2,40984500	2,48407618	2,56041307
14	2,41487418	2,49545861	2,57853415	2,66417171	2,75244405
15	2,57184101	2,66390207	2,75903154	2,85732416	2,95887735
16	2,73901067	2,84371546	2,95216375	3,06448016	3,18079315
17	2,91704637	3,03566625	3,15881521	3,28665497	3,41935264
18	3,10665438	3,24057373	3,37993228	3,52493745	3,67580409
19	3,30858691	3,45931245	3,61652754	3,78049542	3,95148940
20	3,52364506	3,69281604	3,86968446	4,05458134	4,24785110
21	3,75268199	3,94208113	4,14056237	4,34853849	4,56643993
22	3,99660632	4,20817160	4,43040174	4,66380753	4,90892293
23	4,25638573	4,49222319	4,74052986	5,00193357	5,27709215
24	4,53305081	4,79544825	5,07236695	5,36457375	5,67287406
25	4,82769911	5,11914101	5,42743264	5,75350535	6,09833961
26	5,14149955	5,46468303	5,80735292	6,17063449	6,55571508
27	5,47569702	5,83354913	6,21386763	6,61800549	7,04739371
28	5,83161733	6,22731370	6,64883836	7,09781089	7,57594824
29	6,21067245	6,64765737	7,11425705	7,61240218	8,14414436
30	6,61436616	7,09637424	7,61225504	8,16430134	8,75495519
31	7,04429996	7,57537950	8,14511290	8,75621318	9,41157683
32	7,50217946	8,08671762	8,71527080	9,39103864	10,11744509
33	7,98982113	8,63257106	9,32533975	10,07188894	10,87625347
34	8,50915950	9,21526961	9,97811354	10,80210089	11,69197248
35	9,06225487	9,83730031	10,67658148	11,58525320	12,56887042
36	9,65130143	10,50131808	11,42394219	12,42518406	13,51153570
37	10,27863603	11,21015705	12,22361814	13,32600990	14,52490088
38	10,94674737	11,96684265	13,07927141	14,29214562	15,61426844
39	11,65828595	12,77460453	13,99482041	15,32832618	16,78533858
40	12,41607453	13,63689033	14,97445784	16,43962983	18,04423897
41	13,22311938	14,55738043	16,02266989	17,63150299	19,39755689
42	14,08262214	15,54000361	17,14425678	18,90978696	20,85237366
43	14,99799258	16,58895385	18,34435475	20,28074651	22,41630168
44	15,97286209	17,70870824	19,62845959	21,75110063	24,09752431
45	17,01109813	18,90404604	21,00245176	23,32805543	25,90483863
46	18,11681951	20,18006915	22,47262338	25,01933945	27,84770153
47	19,29441278	21,54222382	24,04570702	26,83324156	29,93627915
48	20,54854961	22,99632392	25,72890651	28,77865157	32,18150008
49	21,88420533	24,54857579	27,52992997	30,86510381	34,59511259
50	23,30667868	26,20560466	29,45702506	33,10282384	37,18974603

	7,75 %	8,00 %	8,25 %	8,50 %	8,75 %
1	1,07750000	1,08000000	1,08250000	1,08500000	1,08750000
2	1,16100625	1,16640000	1,17180625	1,17722500	1,18265625
3	1,25098423	1,25971200	1,26848027	1,27728913	1,28613867
4	1,34793551	1,36048896	1,37312989	1,38585870	1,39867581
5	1,45240051	1,46932808	1,48641310	1,50365669	1,52105994
6	1,56496155	1,58687432	1,60904218	1,63146751	1,65415268
7	1,68624608	1,71382427	1,74178816	1,77014225	1,79889104
8	1,81693015	1,85093021	1,88548569	1,92060434	1,95629401
9	1,95774223	1,99900463	2,04103826	2,08385571	2,12746974
10	2,10946726	2,15892500	2,20942391	2,26098344	2,31362334
11	2,27295097	2,33163900	2,39170139	2,45316703	2,51606538
12	2,44910467	2,51817012	2,58901675	2,66168623	2,73622110
13	2,63891028	2,71962373	2,80261063	2,88792956	2,97564045
14	2,84342583	2,93719362	3,03382601	3,13340357	3,23600898
15	3,06379133	3,17216911	3,28411666	3,39974288	3,51915977
16	3,30123516	3,42594264	3,55505628	3,68872102	3,82708625
17	3,55708088	3,70001805	3,84834842	4,00226231	4,16195630
18	3,83275465	3,99601950	4,16583717	4,34245461	4,52612747
19	4,12979313	4,31570106	4,50951873	4,71156325	4,92216363
20	4,44985210	4,66095714	4,88155403	5,11204612	5,35285295
21	4,79471564	5,03383372	5,28428224	5,54657005	5,82122758
22	5,16630610	5,43654041	5,72023552	6,01802850	6,33058499
23	5,56669482	5,87146365	6,19215495	6,52956092	6,88451118
24	5,99811367	6,34118074	6,70300774	7,08457360	7,48690591
25	6,46296748	6,84847520	7,25600587	7,68676236	8,14201017
26	6,96384746	7,39635321	7,85462636	8,34013716	8,85443606
27	7,50354564	7,98806147	8,50263303	9,04904881	9,62919922
28	8,08507043	8,62710639	9,20410026	9,81821796	10,47175415
29	8,71166339	9,31727490	9,96343853	10,65276649	11,38803264
30	9,38681730	10,06265689	10,78542221	11,55825164	12,38448549
31	10,11429564	10,86766944	11,67521954	12,54070303	13,46812797
32	10,89815355	11,73708300	12,63842515	13,60666279	14,64658917
33	11,74276045	12,67604964	13,68109523	14,76322913	15,92816573
34	12,65282439	13,69013361	14,80978558	16,01810360	17,32188023
35	13,63341828	14,78534429	16,03159290	17,37964241	18,83754475
36	14,69000819	15,96817184	17,35419931	18,85691201	20,48582991
37	15,82848383	17,24562558	18,78592075	20,45974953	22,27834003
38	17,05519132	18,62527563	20,33575921	22,19882824	24,22769478
39	18,37696865	20,11529768	22,01345935	24,08572865	26,34761807
40	19,80118372	21,72452150	23,82956975	26,13301558	28,65303466
41	21,33577546	23,46248322	25,79550925	28,35432190	31,16017519
42	22,98929806	25,33948187	27,92363876	30,76443927	33,88669052
43	24,77096866	27,36664042	30,22733896	33,37941660	36,85177594
44	26,69071873	29,55597166	32,72109442	36,21666702	40,07630633
45	28,75924943	31,92044939	35,42058471	39,29508371	43,58298314
46	30,98809126	34,47408534	38,34278295	42,63516583	47,39649416
47	33,38966833	37,23201217	41,50606255	46,25915492	51,54368740
48	35,97736763	40,21057314	44,93031271	50,19118309	56,05376005
49	38,76561362	43,42741899	48,63706351	54,45743365	60,95846405
50	41,76994868	46,90161251	52,64962124	59,08631551	66,29232966

I_p^n

	9,00%	9,25%	9,50%	9,75%	10,00%
1	1,09000000	1,09250000	1,09500000	1,09750000	1,10000000
2	1,18810000	1,19355625	1,19902500	1,20450625	1,21000000
3	1,29502900	1,30396020	1,31293238	1,32194561	1,33100000
4	1,41158161	1,42457652	1,43766095	1,45083531	1,46410000
5	1,53862395	1,55634985	1,57423874	1,59229175	1,61051000
6	1,67710011	1,70031221	1,72379142	1,74754019	1,77156100
7	1,82803912	1,85759109	1,88755161	1,91792536	1,94871710
8	1,99256264	2,02941827	2,06686901	2,10492309	2,14358881
9	2,17189328	2,21713946	2,26322156	2,31015309	2,35794769
10	2,36736367	2,42222486	2,47822761	2,53539301	2,59374246
11	2,58042641	2,64628066	2,71365924	2,78259383	2,85311671
12	2,81266478	2,89106162	2,97145686	3,05389673	3,13842838
13	3,06580461	3,15848482	3,25374527	3,35165166	3,45227121
14	3,34172703	3,45064466	3,56285107	3,67843770	3,79749834
15	3,64248246	3,76982929	3,90132192	4,03708537	4,17724817
16	3,97030588	4,11853850	4,27194750	4,43070120	4,59497299
17	4,32763341	4,49950331	4,67778251	4,86269456	5,05447028
18	4,71712042	4,91570737	5,12217185	5,33680728	5,55991731
19	5,14166125	5,37041030	5,60877818	5,85714599	6,11590904
20	5,60441077	5,86717325	6,14161210	6,42821773	6,72749995
21	6,10880774	6,40988678	6,72506525	7,05496896	7,40024994
22	6,65860043	7,00280131	7,36394645	7,74282843	8,14027494
23	7,25787447	7,65056043	8,06352137	8,49775420	8,95430243
24	7,91108317	8,35823727	8,82955590	9,32628524	9,84973268
25	8,62308066	9,13137421	9,66836371	10,23559805	10,83470594
26	9,39915792	9,97602633	10,58685826	11,23356886	11,91817654
27	10,24508213	10,89880877	11,59260979	12,32884182	13,10999419
28	11,16713952	11,90694858	12,69390772	13,53090390	14,42099361
29	12,17218208	13,00834132	13,89982896	14,85016703	15,86309297
30	13,26767847	14,21161289	15,22031271	16,29805832	17,44940227
31	14,46176953	15,52618708	16,66624241	17,88711900	19,19434250
32	15,76332879	16,96235939	18,24953544	19,63111310	21,11377675
33	17,18202838	18,53137763	19,98324131	21,54514663	23,22515442
34	18,72841093	20,24553006	21,88164924	23,64579843	25,54766986
35	20,41396792	22,11824159	23,96040591	25,95126378	28,10243685
36	22,25122503	24,16417894	26,23664448	28,48151199	30,91268053
37	24,25383528	26,39936549	28,72912570	31,25845941	34,00394859
38	26,43668046	28,84130680	31,45839264	34,30615921	37,40434344
39	28,81598170	31,50912768	34,44693994	37,65100973	41,14477779
40	31,40942005	34,42372199	37,71939924	41,32198318	45,25925557
41	34,23626786	37,60791628	41,30274216	45,35087654	49,78518112
42	37,31753197	41,08664853	45,22650267	49,77258700	54,76369924
43	40,67610984	44,88716352	49,52302042	54,62541423	60,24006916
44	44,33695973	49,03922615	54,22770736	59,95139212	66,26407608
45	48,32728610	53,57535456	59,37933956	65,79665285	72,89048369
46	52,67674185	58,53107486	65,02037682	72,21182650	80,17953205
47	57,41764862	63,94519929	71,19731262	79,25247959	88,19748526
48	62,58523700	69,86013022	77,96105732	86,97959635	97,01723378
49	68,21790833	76,32219227	85,36735777	95,46010699	106,71895716
50	74,35752008	83,38199505	93,47725675	104,76746742	117,39085288

	11,00%	12,00%	13,00%	14,00%	15,00%
1	1,11000000	1,12000000	1,13000000	1,14000000	1,15000000
2	1,23210000	1,25440000	1,27690000	1,29960000	1,32250000
3	1,36763100	1,40492800	1,44289700	1,48154400	1,52087500
4	1,51807041	1,57351936	1,63047361	1,68896016	1,74900625
5	1,68505816	1,76234168	1,84243518	1,92541458	2,01135719
6	1,87041455	1,97382269	2,08195175	2,19497262	2,31306077
7	2,07616015	2,21068141	2,35260548	2,50226879	2,66001988
8	2,30453777	2,47596318	2,65844419	2,85258642	3,05902286
9	2,55803692	2,77307876	3,00404194	3,25194852	3,51787629
10	2,83942099	3,10584821	3,39456739	3,70722131	4,04555774
11	3,15175729	3,47854999	3,83586115	4,22623230	4,65239140
12	3,49845060	3,89597599	4,33452310	4,81790482	5,35025011
13	3,88328016	4,36349311	4,89801110	5,49241149	6,15278762
14	4,31044098	4,88711229	5,53475255	6,26134910	7,07570576
15	4,78458949	5,47356576	6,25427038	7,13793798	8,13706163
16	5,31089433	6,13039365	7,06732553	8,13724930	9,35762087
17	5,89509271	6,86604089	7,98607785	9,27646420	10,76126400
18	6,54355291	7,68996580	9,02426797	10,57516918	12,37545361
19	7,26334373	8,61276169	10,19742280	12,05569287	14,23177165
20	8,06231154	9,64629309	11,52308776	13,74348987	16,36653739
21	8,94916581	10,80384826	13,02108917	15,66757845	18,82151800
22	9,93357404	12,10031006	14,71383077	17,86103944	21,64474570
23	11,02626719	13,55234726	16,62662877	20,36158496	24,89145756
24	12,23915658	15,17862893	18,78809051	23,21220685	28,62517619
25	13,58546380	17,0006441	21,23054227	26,46191581	32,91895262
26	15,07986482	19,04007214	23,99051277	30,16658403	37,85679551
27	16,73864995	21,32488079	27,10927943	34,38990579	43,53531484
28	18,57990145	23,88386649	30,63348575	39,20449260	50,06561207
29	20,62369061	26,74993047	34,61583890	44,69312156	57,57545388
30	22,89229657	29,95992212	39,11589796	50,95015858	66,21177196
31	25,41044919	33,55511278	44,20096469	58,08318078	76,14353775
32	28,20559861	37,58172631	49,94709010	66,21482609	87,56506841
33	31,30821445	42,09153347	56,44021181	75,48490175	100,69982867
34	34,75211804	47,14251748	63,77743935	86,05278799	115,80480298
35	38,57485103	52,79961958	72,06850647	98,10017831	133,17552342
36	42,81808464	59,13557393	81,43741231	111,83420328	153,15185194
37	47,52807395	66,23184280	92,02427591	127,49099173	176,12462973
38	52,75616209	74,17966394	103,98743178	145,33973058	202,54332419
39	58,55933991	83,08122361	117,50579791	165,68729286	232,92482281
40	65,00086731	93,05097044	132,78155163	188,88351386	267,86354623
41	72,15096271	104,21708689	150,04315335	215,32720580	308,04307817
42	80,08756861	116,72313732	169,54876328	245,47301461	354,24953990
43	88,89720115	130,72991380	191,59010251	279,83923665	407,38697088
44	98,67589328	146,41750346	216,49681583	319,01672979	468,49501651
45	109,53024154	163,98760387	244,64140189	363,67907196	538,76926899
46	121,57856811	183,66611634	276,44478414	414,59414203	619,58465934
47	134,95221060	205,70605030	312,38260608	472,63732191	712,52235824
48	149,79695377	230,39077633	352,99234487	538,80654698	819,40071197
49	166,27461868	258,03766949	398,88134970	614,23946356	942,31081877
50	184,56482674	289,00218983	450,73592516	700,23298846	1083,65744158

I_p^n

	16,00%	17,00%	18,00%	19,00%	20,00%
1	1,16000000	1,17000000	1,18000000	1,19000000	1,20000000
2	1,34560000	1,36890000	1,39240000	1,41610000	1,44000000
3	1,56089600	1,60161300	1,64303200	1,68515900	1,72800000
4	1,81063936	1,87388721	1,93877776	2,00533921	2,07360000
5	2,10034166	2,19244804	2,28775776	2,38635366	2,48832000
6	2,43639632	2,56516420	2,69955415	2,83976086	2,98598400
7	2,82621973	3,00124212	3,18547390	3,37931542	3,58318080
8	3,27841489	3,51145328	3,75885920	4,02138535	4,29981696
9	3,80296127	4,10840033	4,43545386	4,78544856	5,15978035
10	4,41143508	4,80682839	5,23383555	5,69468379	6,19173642
11	5,11726469	5,62398922	6,17592595	6,77667371	7,43008371
12	5,93602704	6,58006738	7,28759263	8,06424172	8,91610045
13	6,88579137	7,69867884	8,59935930	9,59644764	10,69932054
14	7,98751799	9,00745424	10,14724397	11,41977269	12,83918465
15	9,26552087	10,53872146	11,97374789	13,58952950	15,40702157
16	10,74800420	12,33030411	14,12902251	16,17154011	18,48842589
17	12,46768488	14,42645581	16,67224656	19,24413273	22,18611107
18	14,46251446	16,87895329	19,67325094	22,90051795	26,62333328
19	16,77651677	19,74837535	23,21443611	27,25161636	31,94799994
20	19,46075945	23,10559916	27,39303460	32,42942347	38,33759992
21	22,57448097	27,03355102	32,32378083	38,59101393	46,00511991
22	26,18639792	31,62925470	38,14206138	45,92330658	55,20614389
23	30,37622159	37,00622799	45,00763243	54,64873482	66,24737267
24	35,23641704	43,29728675	53,10900627	65,03199444	79,49684720
25	40,87424377	50,65782550	62,66862740	77,38807338	95,39621664
26	47,41412277	59,26965584	73,94898033	92,09180733	114,47545997
27	55,00038241	69,34549733	87,25979679	109,58925072	137,37055197
28	63,80044360	81,13423187	102,96656021	130,41120836	164,84466236
29	74,00851458	94,92705129	121,50054105	155,18933794	197,81359483
30	85,84987691	111,06465001	143,37063844	184,67531215	237,37631380
31	99,58585721	129,94564051	169,17735336	219,76362146	284,85157656
32	115,51959437	152,03639940	199,62927696	261,51870954	341,82189187
33	134,00272947	177,88258730	235,56254681	311,20726435	410,18627025
34	155,44316618	208,12262714	277,96380524	370,33664458	492,22352430
35	180,31407277	243,50347375	327,99729018	440,70060705	590,66822915
36	209,16432441	284,89906429	387,03680242	524,43372239	708,80187499
37	242,63061632	333,33190522	456,70342685	624,07612965	850,56224998
38	281,45151493	389,99832910	538,91004369	742,65059428	1020,67469998
39	326,48375732	456,29804505	635,91385155	883,75420719	1224,80963997
40	378,72115849	533,86871271	750,37834483	1051,66750656	1469,77156797
41	439,31654385	624,62639387	885,44644690	1251,48433281	1763,72588156
42	509,60719087	730,81288083	1044,82680734	1489,26635604	2116,47105788
43	591,14434141	855,05107057	1232,89563266	1772,22696369	2539,76526945
44	685,72743603	1000,40975257	1454,81684654	2108,95008679	3047,71832334
45	795,44382580	1170,47941051	1716,68387891	2509,65060328	3657,26198801
46	922,71483793	1369,46091029	2025,68697712	2986,48421790	4388,71438561
47	1070,34921199	1602,26926504	2390,31063300	3553,91621930	5266,45726273
48	1241,60508591	1874,65504010	2820,56654694	4229,16030097	6319,74871528
49	1440,26189966	2193,34639691	3328,26852539	5032,70075815	7583,69845834
50	1670,70380360	2566,21528439	3927,35685996	5988,91390220	9100,43815000

	0,25 %	0,50 %	0,75 %	1,00 %	1,25 %
1	0,99750623	0,99502488	0,99255583	0,99009901	0,98765432
2	0,99501869	0,99007450	0,98516708	0,98029605	0,97546106
3	0,99253734	0,98514876	0,97783333	0,97059015	0,96341833
4	0,99006219	0,98024752	0,97055417	0,96098034	0,95152428
5	0,98759321	0,97537067	0,96332920	0,95146569	0,93977706
6	0,98513038	0,97051808	0,95615802	0,94204524	0,92817488
7	0,98267370	0,96568963	0,94904022	0,93271805	0,91671593
8	0,98022314	0,96088520	0,94197540	0,92348322	0,90539845
9	0,97777869	0,95610468	0,93496318	0,91433982	0,89422069
10	0,97534034	0,95134794	0,92800315	0,90528695	0,88318093
11	0,97290807	0,94661487	0,92109494	0,89632372	0,87227746
12	0,97048187	0,94190534	0,91423815	0,88744923	0,86150860
13	0,96806171	0,93721924	0,90743241	0,87866260	0,85087269
14	0,96564759	0,93255646	0,90067733	0,86996297	0,84036809
15	0,96323949	0,92791688	0,89397254	0,86134947	0,82999318
16	0,96083740	0,92330037	0,88731766	0,85282126	0,81974635
17	0,95844130	0,91870684	0,88071231	0,84437749	0,80962602
18	0,95605117	0,91413616	0,87415614	0,83601731	0,79963064
19	0,95366700	0,90958822	0,86764878	0,82773992	0,78975866
20	0,95128878	0,90506290	0,86118985	0,81954447	0,78000855
21	0,94891649	0,90056010	0,85477901	0,81143017	0,77037881
22	0,94655011	0,89607971	0,84841589	0,80339621	0,76086796
23	0,94418964	0,89162160	0,84210014	0,79544179	0,75147453
24	0,94183505	0,88718567	0,83583140	0,78756613	0,74219707
25	0,93948634	0,88277181	0,82960933	0,77976844	0,73303414
26	0,93714348	0,87873991	0,82343358	0,77204796	0,72398434
27	0,93480646	0,87400986	0,81730380	0,76440392	0,71504626
28	0,93247527	0,86966155	0,81121966	0,75683557	0,70621853
29	0,93014990	0,86533488	0,80518080	0,74934215	0,69749978
30	0,92783032	0,86102973	0,79918690	0,74192292	0,68888867
31	0,92551653	0,85674600	0,79323762	0,73457715	0,68038387
32	0,92320851	0,85248358	0,78733262	0,72730411	0,67198407
33	0,92090624	0,84824237	0,78147158	0,72010307	0,66368797
34	0,91860972	0,84402226	0,77565418	0,71297334	0,65549429
35	0,91631892	0,83982314	0,76988008	0,70591420	0,64740177
36	0,91403384	0,83564492	0,76414896	0,69892495	0,63940916
37	0,91175445	0,83148748	0,75846051	0,69200490	0,63151522
38	0,90948075	0,82735073	0,75281440	0,68515337	0,62371873
39	0,90721272	0,82323455	0,74721032	0,67836967	0,61601850
40	0,90495034	0,81913886	0,74164796	0,67165314	0,60841334
41	0,90269361	0,81506354	0,73612701	0,66500311	0,60090206
42	0,90044250	0,81100850	0,73064716	0,65841892	0,59348352
43	0,89819701	0,80697363	0,72520809	0,65189992	0,58615656
44	0,89595712	0,80295884	0,71980952	0,64544546	0,57892006
45	0,89372281	0,79896402	0,71445114	0,63905492	0,57177290
46	0,89149407	0,79498907	0,70913264	0,63272764	0,56471397
47	0,88927090	0,79103390	0,70385374	0,62646301	0,55774219
48	0,88705326	0,78709841	0,69861414	0,62026041	0,55085649
49	0,88484116	0,78318250	0,69341353	0,61411921	0,54405579
50	0,88263457	0,77928607	0,68825165	0,60803882	0,53733905

$$\Pi_p^n$$

	1,50%	1,75%	2,00%	2,25%	2,50%
1	0,98522167	0,98280098	0,98039216	0,97799511	0,97560976
2	0,97066175	0,96589777	0,96116878	0,95647444	0,95181440
3	0,95631699	0,94928528	0,94232233	0,93542732	0,92859941
4	0,94218423	0,93295851	0,92384543	0,91484335	0,90595064
5	0,92826033	0,91691254	0,90573081	0,89471232	0,88385429
6	0,91454219	0,90114254	0,88797138	0,87502427	0,86229687
7	0,90102679	0,88564378	0,87056018	0,85576946	0,84126524
8	0,88771112	0,87041157	0,85349037	0,83693835	0,82074657
9	0,87459224	0,85544135	0,83675527	0,81852161	0,80072836
10	0,86166723	0,84072860	0,82034830	0,80051013	0,78119840
11	0,84893323	0,82626889	0,80426304	0,78289499	0,76214478
12	0,83638742	0,81205788	0,78849318	0,76566748	0,74355589
13	0,82402702	0,79809128	0,77303253	0,74881905	0,72542038
14	0,81184928	0,78436490	0,75787502	0,73234137	0,70772720
15	0,79985150	0,77087459	0,74301473	0,71622628	0,69046556
16	0,78803104	0,75761631	0,72844581	0,70046580	0,67362493
17	0,77638526	0,74458605	0,71416256	0,68505212	0,65719506
18	0,76491159	0,73177990	0,70015937	0,66997763	0,64116591
19	0,75360747	0,71919401	0,68643076	0,65523484	0,62552772
20	0,74247042	0,70682458	0,67297133	0,64081647	0,61027094
21	0,73149795	0,69466789	0,65977582	0,62671538	0,59538629
22	0,72068763	0,68272028	0,64683904	0,61292457	0,58086467
23	0,71003708	0,67097817	0,63415592	0,59943724	0,56669724
24	0,69954392	0,65943800	0,62172149	0,58624668	0,55287535
25	0,68920583	0,64809632	0,60953087	0,57334639	0,53939059
26	0,67902052	0,63694970	0,59757928	0,56072997	0,52623472
27	0,66898574	0,62599479	0,58586204	0,54839117	0,51339973
28	0,65909925	0,61522829	0,57437455	0,53632388	0,50087778
29	0,64935887	0,60464697	0,56311231	0,52452213	0,48866125
30	0,63976243	0,59424764	0,55207089	0,51298008	0,47674269
31	0,63030781	0,58402716	0,54124597	0,50169201	0,46511481
32	0,62099292	0,57398247	0,53063330	0,49065233	0,45377055
33	0,61181568	0,56411053	0,52022873	0,47985558	0,44270298
34	0,60277407	0,55440839	0,51002817	0,46929641	0,43190534
35	0,59386608	0,54487311	0,50002761	0,45896960	0,42137107
36	0,58508974	0,53550183	0,49022315	0,44887002	0,41109372
37	0,57644309	0,52629172	0,48061093	0,43899268	0,40106705
38	0,56792423	0,51724002	0,47118719	0,42933270	0,39128492
39	0,55953126	0,50834400	0,46194822	0,41988528	0,38174139
40	0,55126232	0,49960098	0,45289042	0,41064575	0,37243062
41	0,54311559	0,49100834	0,44401021	0,40160954	0,36334695
42	0,53508925	0,48256348	0,43530413	0,39277216	0,35448483
43	0,52718153	0,47426386	0,42676875	0,38412925	0,34583886
44	0,51939067	0,46610699	0,41840074	0,37567653	0,33740376
45	0,51171494	0,45809040	0,41019680	0,36740981	0,32917440
46	0,50415265	0,45021170	0,40215373	0,35932500	0,32114576
47	0,49670212	0,44246850	0,39426836	0,35141809	0,31331294
48	0,48936170	0,43485848	0,38653761	0,34368518	0,30567116
49	0,48212975	0,42737934	0,37895844	0,33612242	0,29821576
50	0,47500468	0,42002883	0,37152788	0,32872608	0,29094221

	2,75%	3,00%	3,25%	3,50%	3,75%
1	0,97323601	0,97087379	0,96852300	0,96618357	0,96385542
2	0,94718833	0,94259591	0,93803681	0,93351070	0,92901727
3	0,92183779	0,91514166	0,90851022	0,90194271	0,89543834
4	0,89716573	0,88848705	0,87991305	0,87144223	0,86307310
5	0,87315400	0,86260878	0,85221603	0,84197317	0,83187768
6	0,84978491	0,83748426	0,82539083	0,81350064	0,80180981
7	0,82704128	0,81309151	0,79941000	0,78599096	0,77282874
8	0,80490635	0,78940923	0,77424698	0,75941156	0,74489517
9	0,78336385	0,76641673	0,74987601	0,73373097	0,71797125
10	0,76239791	0,74409391	0,72627216	0,70891881	0,69202048
11	0,74199310	0,72242128	0,70341129	0,68494571	0,66700769
12	0,72213440	0,70137988	0,68127002	0,66178330	0,64289898
13	0,70280720	0,68095134	0,65982568	0,63940415	0,61966167
14	0,68399728	0,66111781	0,63905635	0,61778179	0,59726426
15	0,66569078	0,64186195	0,61894078	0,59689062	0,57567639
16	0,64787424	0,62316694	0,59945838	0,57670591	0,55486881
17	0,63053454	0,60501645	0,58058923	0,55720378	0,53481331
18	0,61365892	0,58739461	0,56231402	0,53836114	0,51548271
19	0,59723496	0,57028603	0,54461407	0,52015569	0,49685080
20	0,58125057	0,55367575	0,52747125	0,50256588	0,47889234
21	0,56569398	0,53754928	0,51086804	0,48557090	0,46158298
22	0,55055375	0,52189250	0,49478745	0,46915063	0,44489926
23	0,53581874	0,50669175	0,47921302	0,45328563	0,42881856
24	0,52147809	0,49193374	0,46412884	0,43795713	0,41331910
25	0,50752126	0,47760557	0,44951945	0,42314699	0,39837985
26	0,49393796	0,46369473	0,43536993	0,40883767	0,38398058
27	0,48071821	0,45018906	0,42166579	0,39501224	0,37010176
28	0,46785227	0,43707675	0,40839302	0,38165434	0,35672459
29	0,45533068	0,42434636	0,39553803	0,36874815	0,34383093
30	0,44314421	0,41198676	0,38308768	0,35627841	0,33140331
31	0,43128391	0,39998715	0,37102923	0,34423035	0,31942487
32	0,41974103	0,38833703	0,35935035	0,33258971	0,30787940
33	0,40850708	0,37702625	0,34803908	0,32134271	0,29675123
34	0,39757380	0,36604490	0,33708385	0,31047605	0,28602528
35	0,38693314	0,35538340	0,32647346	0,29997686	0,27568702
36	0,37657727	0,34503243	0,31619706	0,28983272	0,26572242
37	0,36649856	0,33498294	0,30624413	0,28003161	0,25611800
38	0,35668959	0,32522615	0,29660448	0,27056194	0,24686072
39	0,34714316	0,31575355	0,28726826	0,26141250	0,23793805
40	0,33785222	0,30655684	0,27822592	0,25257247	0,22933788
41	0,32880995	0,29762800	0,26946820	0,24403137	0,22104855
42	0,32000968	0,28895922	0,26098615	0,23577910	0,21305885
43	0,31144495	0,28054294	0,25277109	0,22780590	0,20535793
44	0,30310944	0,27237178	0,24481462	0,22010231	0,19793535
45	0,29499702	0,26443862	0,23710859	0,21265924	0,19078106
46	0,28710172	0,25673653	0,22964512	0,20546787	0,18388536
47	0,27941773	0,24925876	0,22241658	0,19851968	0,17723890
48	0,27193940	0,24199880	0,21541558	0,19180645	0,17083268
49	0,26466122	0,23495029	0,20863494	0,18532024	0,16465800
50	0,25757783	0,22810708	0,20206774	0,17905337	0,15870651

Π_p^n

	4,00%	4,25%	4,50%	4,75%	5,00%
1	0,96153846	0,95923261	0,95693780	0,95465394	0,95238095
2	0,92455621	0,92012721	0,91572995	0,91136414	0,90702948
3	0,88899636	0,88261603	0,87629660	0,87003737	0,86383760
4	0,85480419	0,84663408	0,83856134	0,83058460	0,82270247
5	0,82192711	0,81211902	0,80245105	0,79292086	0,78352617
6	0,79031453	0,77901105	0,76789574	0,75696502	0,74621540
7	0,75991781	0,74725281	0,73482846	0,72263964	0,71068133
8	0,73069021	0,71678926	0,70318513	0,68987077	0,67683936
9	0,70258674	0,68756764	0,67290443	0,65858785	0,64460892
10	0,67556417	0,65953730	0,64392768	0,62872349	0,61391325
11	0,64958093	0,63264969	0,61619874	0,60021335	0,58467929
12	0,62459705	0,60685822	0,58966386	0,57299604	0,55683742
13	0,60057409	0,58211819	0,56427164	0,54701293	0,53032135
14	0,57747508	0,55838676	0,53997286	0,52220804	0,50506795
15	0,55526450	0,53562279	0,51672044	0,49852797	0,48101710
16	0,53390818	0,51378685	0,49446932	0,47592169	0,45811152
17	0,51337325	0,49284110	0,47317639	0,45434051	0,43629669
18	0,49362812	0,47274926	0,45280037	0,43373796	0,41552065
19	0,47464242	0,45347650	0,43330179	0,41406965	0,39573396
20	0,45638695	0,43498945	0,41464286	0,39529322	0,37688948
21	0,43883360	0,41725607	0,39678743	0,37736823	0,35894236
22	0,42195539	0,40024563	0,37970089	0,36025607	0,34184987
23	0,40572633	0,38392866	0,36335013	0,34391987	0,32557131
24	0,39012147	0,36827689	0,34770347	0,32832446	0,31006791
25	0,37511680	0,35326321	0,33273060	0,31343624	0,29530277
26	0,36068923	0,33886159	0,31840248	0,29922314	0,28124073
27	0,34681657	0,32504709	0,30469137	0,28565455	0,26784832
28	0,33347747	0,31179577	0,29157069	0,27270124	0,25509364
29	0,32065141	0,29908467	0,27901502	0,26033531	0,24294632
30	0,30831867	0,28689177	0,26700002	0,24853013	0,23137745
31	0,29646026	0,27519594	0,25550241	0,23726027	0,22035947
32	0,28505794	0,26397692	0,24449991	0,22650145	0,20986617
33	0,27409417	0,25321527	0,23397121	0,21623050	0,19987254
34	0,26355209	0,24289235	0,22389589	0,20642530	0,19035480
35	0,25341547	0,23299026	0,21425444	0,19706473	0,18129029
36	0,24366872	0,22349186	0,20502817	0,18812862	0,17265741
37	0,23429685	0,21438068	0,19619921	0,17959772	0,16443563
38	0,22528543	0,20564094	0,18775044	0,17145367	0,15660536
39	0,21662061	0,19725750	0,17966549	0,16367893	0,14914797
40	0,20828904	0,18921582	0,17192870	0,15625673	0,14204568
41	0,20027793	0,18150199	0,16452507	0,14917110	0,13528160
42	0,19257493	0,17410263	0,15744026	0,14240678	0,12883962
43	0,18516820	0,16700492	0,15066054	0,13594919	0,12270440
44	0,17804635	0,16019657	0,14417276	0,12978443	0,11686133
45	0,17119841	0,15366577	0,13796437	0,12389922	0,11129651
46	0,16461386	0,14740122	0,13202332	0,11828088	0,10599668
47	0,15828256	0,14139206	0,12633810	0,11291731	0,10094921
48	0,15219476	0,13562787	0,12089771	0,10779695	0,09614211
49	0,14634112	0,13009868	0,11569158	0,10290878	0,09156391
50	0,14071262	0,12479489	0,11070965	0,09824228	0,08720373

$$\Pi_p^n$$

	5,25%	5,50%	5,75%	6,00%	6,25%
1	0,95011876	0,94786730	0,94562648	0,94339623	0,94117647
2	0,90272567	0,89845242	0,89420944	0,88999644	0,88581315
3	0,85769660	0,85161366	0,84558812	0,83961928	0,83370649
4	0,81491363	0,80721674	0,79961051	0,79209366	0,78466493
5	0,77426473	0,76513435	0,75613287	0,74725817	0,73850817
6	0,73564345	0,72524583	0,71501927	0,70496054	0,69506652
7	0,69894865	0,68743681	0,67614115	0,66505711	0,65418025
8	0,66408423	0,65159887	0,63937697	0,62741237	0,61569906
9	0,63095888	0,61762926	0,60461180	0,59189846	0,57948147
10	0,59948588	0,58543058	0,57173692	0,55839478	0,54539432
11	0,56958278	0,55491050	0,54064957	0,52678753	0,51331230
12	0,54117129	0,52598152	0,51125255	0,49696936	0,48311746
13	0,51417699	0,49856068	0,48345395	0,46883902	0,45469879
14	0,48852921	0,47256937	0,45716685	0,44230096	0,42795180
15	0,46416077	0,44793305	0,43230908	0,41726506	0,40277817
16	0,44100786	0,42458109	0,40880291	0,39364628	0,37908533
17	0,41900984	0,40244653	0,38657486	0,37136442	0,35678619
18	0,39810911	0,38146590	0,36555542	0,35034379	0,33579877
19	0,37825094	0,36157906	0,34567889	0,33051301	0,31604590
20	0,35938331	0,34272896	0,32688311	0,31180473	0,29745497
21	0,34145683	0,32486158	0,30910932	0,29415540	0,27995762
22	0,32442454	0,30792567	0,29230196	0,27750510	0,26348952
23	0,30824185	0,29187267	0,27640847	0,26179726	0,24799014
24	0,29286636	0,27665656	0,26137917	0,24697855	0,23340248
25	0,27825783	0,26223370	0,24716706	0,23299863	0,21967292
26	0,26437798	0,24856275	0,23372772	0,21981003	0,20675099
27	0,25119048	0,23560450	0,22101912	0,20736795	0,19458917
28	0,23866079	0,22332181	0,20900153	0,19563014	0,18314274
29	0,22675609	0,21167944	0,19763738	0,18455674	0,17236964
30	0,21544522	0,20064402	0,18689114	0,17411013	0,16223025
31	0,20469855	0,19018390	0,17672921	0,16425484	0,15268729
32	0,19448793	0,18026910	0,16711982	0,15495740	0,14370569
33	0,18478663	0,17087119	0,15803293	0,14618622	0,13525241
34	0,17556925	0,16196321	0,14944012	0,13791153	0,12729639
35	0,16681164	0,15351963	0,14131454	0,13010522	0,11980837
36	0,15849087	0,14551624	0,13363077	0,12274077	0,11276081
37	0,15058515	0,13793008	0,12636479	0,11579318	0,10612783
38	0,14307377	0,13073941	0,11949389	0,10923885	0,09988501
39	0,13593708	0,12392362	0,11299659	0,10305552	0,09400942
40	0,12915637	0,11746314	0,10685257	0,09722219	0,08847946
41	0,12271389	0,11133947	0,10104262	0,09171905	0,08327478
42	0,11659277	0,10553504	0,09554857	0,08652740	0,07837627
43	0,11077698	0,10003322	0,09035326	0,08162962	0,07376590
44	0,10525128	0,09481822	0,08544044	0,07700908	0,06942673
45	0,10000122	0,08987509	0,08079474	0,07265007	0,06534280
46	0,09501304	0,08518965	0,07640164	0,06853781	0,06149911
47	0,09027367	0,08074849	0,07224742	0,06465831	0,05788151
48	0,08577071	0,07653885	0,06831907	0,06099840	0,05447672
49	0,08149236	0,07254867	0,06460432	0,05754566	0,05127221
50	0,07742742	0,06876652	0,06109156	0,05428836	0,04825619

	6,50%	6,75%	7,00%	7,25%	7,50%
1	0,93896714	0,93676815	0,93457944	0,93240093	0,93023256
2	0,88165928	0,87753457	0,87343873	0,86937150	0,86533261
3	0,82784909	0,82204643	0,81629788	0,81060280	0,80496057
4	0,77732309	0,77006692	0,76289521	0,75580680	0,74880053
5	0,72988084	0,72137416	0,71298618	0,70471497	0,69655863
6	0,68533412	0,67576034	0,66634222	0,65707689	0,64796152
7	0,64350621	0,63303076	0,62274974	0,61265911	0,60275490
8	0,60423119	0,59300305	0,58200910	0,57124392	0,56070223
9	0,56735323	0,55550637	0,54393374	0,53262837	0,52158347
10	0,53272604	0,52038068	0,50834929	0,49662319	0,48519393
11	0,50021224	0,48747605	0,47509280	0,46305192	0,45134319
12	0,46968285	0,45665203	0,44401196	0,43175004	0,41985413
13	0,44101676	0,42777708	0,41496445	0,40256414	0,39056198
14	0,41410025	0,40072794	0,38781724	0,37535118	0,36331347
15	0,38882652	0,37538917	0,36244602	0,34997779	0,33796602
16	0,36509533	0,35165262	0,33873460	0,32631962	0,31438699
17	0,34281251	0,32941698	0,31657439	0,30426072	0,29245302
18	0,32188969	0,30858733	0,29586392	0,28369298	0,27204932
19	0,30224384	0,28907478	0,27650833	0,26451560	0,25306913
20	0,28379703	0,27079605	0,25841900	0,24663459	0,23541315
21	0,26647608	0,25367312	0,24151309	0,22996232	0,21898897
22	0,25021228	0,23763289	0,22571317	0,21441708	0,20371067
23	0,23494111	0,22260693	0,21094688	0,19992269	0,18949830
24	0,22060198	0,20853108	0,19714662	0,18640810	0,17627749
25	0,20713801	0,19534527	0,18424918	0,17380709	0,16397906
26	0,19449579	0,18299323	0,17219549	0,16205789	0,15253866
27	0,18262515	0,17142223	0,16093037	0,15110293	0,14189643
28	0,17147902	0,16058289	0,15040221	0,14088851	0,13199668
29	0,16101316	0,15042893	0,14056282	0,13136458	0,12278761
30	0,15118607	0,14091703	0,13136712	0,12248446	0,11422103
31	0,14195875	0,13200659	0,12277301	0,11420462	0,10625212
32	0,13329460	0,12365957	0,11474113	0,10648449	0,09883918
33	0,12515925	0,11584034	0,10723470	0,09928624	0,09194343
34	0,11752042	0,10851554	0,10021934	0,09257458	0,08552877
35	0,11034781	0,10165391	0,09366294	0,08631663	0,07956164
36	0,10361297	0,09522614	0,08753546	0,08048171	0,07401083
37	0,09728917	0,08920482	0,08180884	0,07504122	0,06884729
38	0,09135134	0,08356423	0,07645686	0,06996850	0,06404399
39	0,08577590	0,07828031	0,07145501	0,06523870	0,05957580
40	0,08054075	0,07333050	0,06678038	0,06082862	0,05541935
41	0,07562512	0,06869368	0,06241157	0,05671666	0,05155288
42	0,07100950	0,06435005	0,05832857	0,05288267	0,04795617
43	0,06667559	0,06028108	0,05451268	0,04930785	0,04461039
44	0,06260619	0,05646939	0,05094643	0,04597468	0,04149804
45	0,05878515	0,05289873	0,04761349	0,04286684	0,03860283
46	0,05519733	0,04955384	0,04449859	0,03996908	0,03590961
47	0,05182848	0,04642046	0,04158747	0,03726721	0,03340428
48	0,04866524	0,04348521	0,03886679	0,03474798	0,03107375
49	0,04569506	0,04073556	0,03632410	0,03239905	0,02890582
50	0,04290616	0,03815978	0,03394776	0,03020890	0,02688913

Π_p^n

	7,75%	8,00%	8,25%	8,50%	8,75%
1	0,92807425	0,92592593	0,92378753	0,92165899	0,91954023
2	0,86132181	0,85733882	0,85338340	0,84945529	0,84555423
3	0,79937059	0,79383224	0,78834494	0,78290810	0,77752114
4	0,74187525	0,73502985	0,72826322	0,72157428	0,71496196
5	0,68851532	0,68058320	0,67276048	0,66504542	0,65743629
6	0,63899333	0,63016963	0,62148775	0,61294509	0,60453912
7	0,59303326	0,58349040	0,57412263	0,56492635	0,55589804
8	0,55037889	0,54026888	0,53036732	0,52066945	0,51117061
9	0,51079247	0,50024897	0,48994672	0,47987968	0,47004194
10	0,47405334	0,46319349	0,45260667	0,44228542	0,43222247
11	0,43995670	0,42888286	0,41811240	0,40763633	0,39744595
12	0,40831248	0,39711376	0,38624702	0,37570168	0,36546754
13	0,37894430	0,36769792	0,35681018	0,34626883	0,33606211
14	0,35168844	0,34046104	0,32961679	0,31914178	0,30902263
15	0,32639299	0,31524170	0,30449588	0,29413989	0,28415874
16	0,30291692	0,29189047	0,28128950	0,27109667	0,26129539
17	0,28112940	0,27026895	0,25985173	0,24985869	0,24027162
18	0,26090895	0,25024903	0,24004779	0,23028450	0,22093942
19	0,24214288	0,23171206	0,22175315	0,21224378	0,20316269
20	0,22472657	0,21454821	0,20485280	0,19561639	0,18681627
21	0,20856294	0,19865575	0,18924046	0,18029160	0,17178507
22	0,19356190	0,18394051	0,17481798	0,16616738	0,15796328
23	0,17963981	0,17031528	0,16149467	0,15314965	0,14525360
24	0,16671908	0,15769934	0,14918676	0,14115176	0,13356652
25	0,15472769	0,14601790	0,13781687	0,13009378	0,12281979
26	0,14359878	0,13520176	0,12731350	0,11990210	0,11293774
27	0,13327033	0,12518682	0,11761063	0,11050885	0,10385080
28	0,12368476	0,11591372	0,10864723	0,10185148	0,09549498
29	0,11478864	0,10732752	0,10036696	0,09387233	0,08781148
30	0,10653238	0,09937733	0,09271774	0,08651828	0,08074619
31	0,09886996	0,09201605	0,08565149	0,07974035	0,07424937
32	0,09175866	0,08520005	0,07912378	0,07349341	0,06827528
33	0,08515885	0,07888893	0,07309356	0,06773586	0,06278187
34	0,07903374	0,07304531	0,06752292	0,06242936	0,05773045
35	0,07334918	0,06763454	0,06237683	0,05753858	0,05308547
36	0,06807348	0,06262458	0,05762294	0,05303095	0,04881423
37	0,06317724	0,05798572	0,05323135	0,04887645	0,04488665
38	0,05863317	0,05369048	0,04917446	0,04504742	0,04127508
39	0,05441594	0,04971341	0,04542675	0,04151836	0,03795410
40	0,05050203	0,04603093	0,04196467	0,03826577	0,03490032
41	0,04686963	0,04262123	0,03876644	0,03526799	0,03209225
42	0,04349850	0,03946411	0,03581195	0,03250506	0,02951011
43	0,04036984	0,03654084	0,03308263	0,02995858	0,02713573
44	0,03746621	0,03383411	0,03056132	0,02761160	0,02495240
45	0,03477142	0,03132788	0,02823217	0,02544848	0,02294474
46	0,03227046	0,02900730	0,02608053	0,02345482	0,02109861
47	0,02994938	0,02685861	0,02409287	0,02161734	0,01940102
48	0,02779525	0,02486908	0,02225669	0,01992382	0,01784002
49	0,02579606	0,02302693	0,02056045	0,01836297	0,01640461
50	0,02394066	0,02132123	0,01899349	0,01692439	0,01508470

$$\Pi_p^n$$

	9,00%	9,25%	9,50%	9,75%	10,00%
1	0,91743119	0,91533181	0,91324201	0,91116173	0,90909091
2	0,84167999	0,83783232	0,83401097	0,83021570	0,82644628
3	0,77218348	0,76689457	0,76165385	0,75646077	0,75131480
4	0,70842521	0,70196299	0,69557429	0,68925811	0,68301346
5	0,64993139	0,64252906	0,63522767	0,62802561	0,62092132
6	0,59626733	0,58812728	0,58011659	0,57223290	0,56447393
7	0,54703424	0,53833161	0,52978684	0,52139672	0,51315812
8	0,50186628	0,49275204	0,48382360	0,47507674	0,46650738
9	0,46042778	0,45103162	0,44184803	0,43287175	0,42409762
10	0,42241081	0,41284359	0,40351419	0,39441617	0,38554329
11	0,38753285	0,37788887	0,36850611	0,35937692	0,35049390
12	0,35553473	0,34589370	0,33653526	0,32745050	0,31863082
13	0,32617865	0,31660751	0,30733813	0,29836036	0,28966438
14	0,29924647	0,28980092	0,28067410	0,27185454	0,26333125
15	0,27453804	0,26526400	0,25632337	0,24770346	0,23939205
16	0,25186976	0,24280458	0,23408527	0,22569791	0,21762914
17	0,23107318	0,22224675	0,21377651	0,20564730	0,19784467
18	0,21199374	0,20342952	0,19522969	0,18737795	0,17985879
19	0,19448967	0,18620551	0,17829195	0,17073162	0,16350799
20	0,17843089	0,17043983	0,16282370	0,15556411	0,14864363
21	0,16369806	0,15600900	0,14869744	0,14174407	0,13513057
22	0,15018171	0,14280000	0,13579675	0,12915177	0,12284597
23	0,13778139	0,13070938	0,12401530	0,11767815	0,11167816
24	0,12640494	0,11964245	0,11325598	0,10722383	0,10152560
25	0,11596784	0,10951254	0,10343012	0,09769825	0,09229600
26	0,10639251	0,10024031	0,09445673	0,08901891	0,08390545
27	0,09760781	0,09175315	0,08626185	0,08111062	0,07627768
28	0,08954845	0,08398457	0,07877795	0,07390489	0,06934335
29	0,08215454	0,07687375	0,07194333	0,06733931	0,06303941
30	0,07537114	0,07036499	0,06570167	0,06135700	0,05730855
31	0,06914783	0,06440731	0,06000153	0,05590615	0,05209868
32	0,06343838	0,05895406	0,05479592	0,05093955	0,04736244
33	0,05820035	0,05396253	0,05004193	0,04641417	0,04305676
34	0,05339481	0,04939362	0,04570039	0,04229081	0,03914251
35	0,04898607	0,04521155	0,04173552	0,03853377	0,03558410
36	0,04494135	0,04138357	0,03811463	0,03511050	0,03234918
37	0,04123059	0,03787970	0,03480788	0,03199134	0,02940835
38	0,03782623	0,03467249	0,03178802	0,02914928	0,02673486
39	0,03470296	0,03173684	0,02903015	0,02655971	0,02430442
40	0,03183758	0,02904973	0,02651156	0,02420019	0,02209493
41	0,02920879	0,02659015	0,02421147	0,02205029	0,02008630
42	0,02679706	0,02433881	0,02211093	0,02009138	0,01826027
43	0,02458446	0,02227808	0,02019263	0,01830650	0,01660025
44	0,02255455	0,02039184	0,01844076	0,01668018	0,01509113
45	0,02069224	0,01866530	0,01684087	0,01519834	0,01371921
46	0,01898371	0,01708494	0,01537979	0,01384815	0,01247201
47	0,01741625	0,01563839	0,01404547	0,01261790	0,01133819
48	0,01597821	0,01431432	0,01282692	0,01149695	0,01030745
49	0,01465891	0,01310235	0,01171408	0,01047558	0,00937041
50	0,01344854	0,01199300	0,01069779	0,00954495	0,00851855

Π_p^n

	11,00%	12,00%	13,00%	14,00%	15,00%
1	0,90090090	0,89285714	0,88495575	0,87719298	0,86956522
2	0,81162243	0,79719388	0,78314668	0,76946753	0,75614367
3	0,73119138	0,71178025	0,69305016	0,67497152	0,65751623
4	0,65873097	0,63551808	0,61331873	0,59208028	0,57175325
5	0,59345133	0,56742686	0,54275994	0,51936866	0,49717674
6	0,53464084	0,50663112	0,48031853	0,45558655	0,43232760
7	0,48165841	0,45234922	0,42506064	0,39963732	0,37593704
8	0,43392650	0,40388323	0,37615986	0,35055905	0,32690177
9	0,39092477	0,36061002	0,33288483	0,30750794	0,28426241
10	0,35218448	0,32197324	0,29458835	0,26974381	0,24718471
11	0,31728331	0,28747610	0,26069765	0,23661738	0,21494322
12	0,28584082	0,25667509	0,23070589	0,20755910	0,18690715
13	0,25751426	0,22917419	0,20416450	0,18206939	0,16252796
14	0,23199482	0,20461981	0,18067655	0,15970999	0,14132866
15	0,20900435	0,18269626	0,15989075	0,14009648	0,12289449
16	0,18829220	0,16312166	0,14149624	0,12289165	0,10686477
17	0,16963262	0,14564434	0,12521791	0,10779969	0,09292589
18	0,15282218	0,13003959	0,11081231	0,09456113	0,08080512
19	0,13767764	0,11610678	0,09806399	0,08294836	0,07026532
20	0,12403391	0,10366677	0,08678229	0,07276172	0,06110028
21	0,11174226	0,09255961	0,07679849	0,06382607	0,05313068
22	0,10066870	0,08264251	0,06796327	0,05598778	0,04620059
23	0,09069252	0,07378796	0,06014448	0,04911209	0,04017443
24	0,08170498	0,06588210	0,05322521	0,04308078	0,03493428
25	0,07360809	0,05882331	0,04710195	0,03779016	0,03037764
26	0,06631359	0,05252081	0,04168314	0,03314926	0,02641534
27	0,05974197	0,04689358	0,03688774	0,02907830	0,02296986
28	0,05382160	0,04186927	0,03264402	0,02550728	0,01997379
29	0,04848793	0,03738327	0,02888851	0,02237481	0,01736851
30	0,04368282	0,03337792	0,02556505	0,01962702	0,01510305
31	0,03935389	0,02980172	0,02262394	0,01721669	0,01313309
32	0,03545395	0,02660868	0,02002119	0,01510236	0,01142008
33	0,03194050	0,02375775	0,01771786	0,01324768	0,00993050
34	0,02877522	0,02121227	0,01567953	0,01162077	0,00863522
35	0,02592363	0,01893953	0,01387569	0,01019366	0,00750889
36	0,02335462	0,01691029	0,01227937	0,00894181	0,00652947
37	0,02104020	0,01509848	0,01086670	0,00784369	0,00567780
38	0,01895513	0,01348078	0,00961655	0,00688043	0,00493722
39	0,01707670	0,01203641	0,00851022	0,00603547	0,00429323
40	0,01538441	0,01074680	0,00753117	0,00529427	0,00373324
41	0,01385983	0,00959536	0,00666475	0,00464410	0,00324630
42	0,01248633	0,00856728	0,00589801	0,00407377	0,00282287
43	0,01124895	0,00764936	0,00521948	0,00357348	0,00245467
44	0,01013419	0,00682978	0,00461901	0,00313463	0,00213449
45	0,00912990	0,00609802	0,00408762	0,00274968	0,00185608
46	0,00822513	0,00544466	0,00361736	0,00241200	0,00161398
47	0,00741003	0,00486131	0,00320120	0,00211579	0,00140346
48	0,00667570	0,00434045	0,00283292	0,00185595	0,00122040
49	0,00601415	0,00387540	0,00250701	0,00162803	0,00106122
50	0,00541815	0,00346018	0,00221859	0,00142810	0,00092280

$$\Pi_p^n$$

	16,00%	17,00%	18,00%	19,00%	20,00%
1	0,86206897	0,85470085	0,84745763	0,84033613	0,83333333
2	0,74316290	0,73051355	0,71818443	0,70616482	0,69444444
3	0,64065767	0,62437056	0,60863087	0,59341581	0,57870370
4	0,55229110	0,53365005	0,51578888	0,49866875	0,48225309
5	0,47611302	0,45611115	0,43710922	0,41904937	0,40187757
6	0,41044225	0,38983859	0,37043154	0,35214233	0,33489798
7	0,35382953	0,33319538	0,31392503	0,29591792	0,27908165
8	0,30502546	0,28478237	0,26603816	0,24867052	0,23256804
9	0,26295298	0,24340374	0,22545607	0,20896683	0,19380670
10	0,22668360	0,20803738	0,19106447	0,17560238	0,16150558
11	0,19541690	0,17780973	0,16191904	0,14756502	0,13458799
12	0,16846284	0,15197413	0,13721953	0,12400422	0,11215665
13	0,14522659	0,12989242	0,11628773	0,10420523	0,09346388
14	0,12519534	0,11101916	0,09854893	0,08756742	0,07788657
15	0,10792701	0,09488817	0,08351604	0,07358606	0,06490547
16	0,09304053	0,08110100	0,07077630	0,06183703	0,05408789
17	0,08020735	0,06931709	0,05997992	0,05196389	0,04507324
18	0,06914427	0,05924538	0,05083044	0,04366713	0,03756104
19	0,05960713	0,05063708	0,04307664	0,03669507	0,03130086
20	0,05138546	0,04327955	0,03650563	0,03083619	0,02608405
21	0,04429781	0,03699107	0,03093698	0,02591277	0,02173671
22	0,03818776	0,03161630	0,02621778	0,02177544	0,01811393
23	0,03292049	0,02702248	0,02221845	0,01829869	0,01509494
24	0,02837973	0,02309614	0,01882920	0,01537705	0,01257912
25	0,02446528	0,01974029	0,01595695	0,01292189	0,01048260
26	0,02109076	0,01687204	0,01352284	0,01085873	0,00873550
27	0,01818169	0,01442055	0,01146003	0,00912498	0,00727958
28	0,01567387	0,01232525	0,00971189	0,00766805	0,00606632
29	0,01351196	0,01053440	0,00823042	0,00644374	0,00505526
30	0,01164824	0,00900376	0,00697493	0,00541491	0,00421272
31	0,01004159	0,00769553	0,00591096	0,00455034	0,00351060
32	0,00865654	0,00657737	0,00500929	0,00382382	0,00292550
33	0,00746253	0,00562169	0,00424516	0,00321329	0,00243792
34	0,00643322	0,00480486	0,00359759	0,00270025	0,00203160
35	0,00554588	0,00410672	0,00304881	0,00226911	0,00169300
36	0,00478093	0,00351002	0,00258373	0,00190682	0,00141083
37	0,00412149	0,00300001	0,00218960	0,00160237	0,00117569
38	0,00355301	0,00256411	0,00185560	0,00134653	0,00097974
39	0,00306294	0,00219155	0,00157254	0,00113154	0,00081645
40	0,00264047	0,00187312	0,00133266	0,00095087	0,00068038
41	0,00227626	0,00160096	0,00112937	0,00079905	0,00056698
42	0,00196230	0,00136834	0,00095710	0,00067147	0,00047248
43	0,00169163	0,00116952	0,00081110	0,00056426	0,00039374
44	0,00145831	0,00099959	0,00068737	0,00047417	0,00032811
45	0,00125716	0,00085435	0,00058252	0,00039846	0,00027343
46	0,00108376	0,00073021	0,00049366	0,00033484	0,00022786
47	0,00093427	0,00062411	0,00041836	0,00028138	0,00018988
48	0,00080541	0,00053343	0,00035454	0,00023645	0,00015823
49	0,00069432	0,00045592	0,00030046	0,00019870	0,00013186
50	0,00059855	0,00038968	0,00025462	0,00016698	0,00010988

$$\text{III}_p^n$$

	0,25%	0,50%	0,75%	1,00%	1,25%
1	1,00250000	1,00500000	1,00750000	1,01000000	1,01250000
2	2,00750625	2,01502500	2,02255625	2,03010000	2,03765625
3	3,01502502	3,03010012	3,04522542	3,06040100	3,07562695
4	4,02506258	4,05025063	4,07556461	4,10100501	4,12657229
5	5,03762523	5,07550188	5,11363135	5,15201506	5,19065444
6	6,05271930	6,10587939	6,15948358	6,21353521	6,26803762
7	7,07035110	7,14140879	7,21317971	7,28567056	7,35888809
8	8,09052697	8,18211583	8,27477856	8,36852727	8,46337420
9	9,11325329	9,22802641	9,34433940	9,46221254	9,58166637
10	10,13853642	10,27916654	10,42192194	10,56683467	10,71393720
11	11,16638277	11,33556237	11,50758636	11,68250301	11,86036142
12	12,19679872	12,39724018	12,60139325	12,80932804	13,02111594
13	13,22979072	13,46422639	13,70340370	13,94742132	14,19637988
14	14,26536520	14,53654752	14,81367923	15,09689554	15,38633463
15	15,30352861	15,61423026	15,93228183	16,25786449	16,59116382
16	16,34428743	16,69730141	17,05927394	17,43044314	17,81105336
17	17,38764815	17,78578791	18,19471849	18,61474757	19,04619153
18	18,43361727	18,87971685	19,33867888	19,81089504	20,29676893
19	19,48220131	19,97911544	20,49121897	21,01900399	21,56297854
20	20,53340682	21,08401101	21,65240312	22,23919403	22,84501577
21	21,58724033	22,19443107	22,82229614	23,47158598	24,14307847
22	22,64370843	23,31040322	24,00096336	24,71630183	25,45736695
23	23,70281770	24,43195524	25,18847059	25,97346485	26,78808403
24	24,76457475	25,55911502	26,38488412	27,24319950	28,13543508
25	25,82898619	26,69191059	27,59027075	28,52563150	29,49962802
26	26,89605865	27,83037015	28,80469778	29,82088781	30,88087337
27	27,96579880	28,97452200	30,02823301	31,12909669	32,27938429
28	29,03821330	30,12439461	31,26094476	32,45038766	33,69537659
29	30,11330883	31,28001658	32,50290184	33,78489153	35,12906880
30	31,19109210	32,44141666	33,75417361	35,13274045	36,58068216
31	32,27156983	33,60862375	35,01482991	36,49406785	38,05044069
32	33,35474876	34,78166686	36,28494113	37,86900853	39,53857120
33	34,44063563	35,96057520	37,56457819	39,25769862	41,04530334
34	35,52923722	37,14537807	38,85381253	40,66027560	42,57086963
35	36,62056031	38,33610496	40,15271612	42,07687836	44,11550550
36	37,71461171	39,53278549	41,46136149	43,50764714	45,67944932
37	38,81139824	40,73544942	42,77982170	44,95272361	47,26294243
38	39,91092673	41,94412666	44,10817037	46,41225085	48,86622921
39	41,01320405	43,15884730	45,44648164	47,88637336	50,48955708
40	42,11823706	44,37964153	46,79483026	49,37523709	52,13317654
41	43,22603265	45,60653974	48,15329148	50,87898946	53,79734125
42	44,33659774	46,83957244	49,52194117	52,39777936	55,48230801
43	45,44993923	48,07877030	50,90085573	53,93175715	57,18833687
44	46,56606408	49,32416415	52,29011215	55,48107472	58,91569108
45	47,68497924	50,57578497	53,68978799	57,04588547	60,66463721
46	48,80669169	51,83366390	55,09996140	58,62634432	62,43544518
47	49,93120842	53,09783222	56,52071111	60,22260777	64,22838824
48	51,05853644	54,36832138	57,95211644	61,83483385	66,04374310
49	52,18868278	55,64516299	59,39425732	63,46318218	67,88178989
50	53,32165449	56,92838880	60,84721424	65,10781401	69,74281226

$$\text{III}_p^n$$

	1,50%	1,75%	2,00%	2,25%	2,50%
1	1,01500000	1,01750000	1,02000000	1,02250000	1,02500000
2	2,04522500	2,05280625	2,06040000	2,06800625	2,07562500
3	3,09090337	3,10623036	3,12160800	3,13703639	3,15251563
4	4,15226693	4,17808939	4,20404016	4,23011971	4,25632852
5	5,22955093	5,26870596	5,30812096	5,34779740	5,38773673
6	6,32299419	6,37840831	6,43428338	6,49062284	6,54743015
7	7,43283911	7,50753045	7,58296905	7,65916186	7,73611590
8	8,55933169	8,65641224	8,75462843	8,85399300	8,95451880
9	9,70272167	9,82539945	9,94972100	10,07570784	10,20338177
10	10,86326249	11,01484394	11,16871542	11,32491127	11,48346631
11	12,04121143	12,22510371	12,41208973	12,60222177	12,79555297
12	13,23682960	13,45654303	13,68033152	13,90827176	14,14044179
13	14,45038205	14,70953253	14,97393815	15,24370788	15,51895284
14	15,68213778	15,98444935	16,29341692	16,60919130	16,93192666
15	16,93236984	17,28167721	17,63928525	18,00539811	18,38022483
16	18,20135539	18,60160656	19,01207096	19,43301957	19,86473045
17	19,48937572	19,94463468	20,41231238	20,89276251	21,38634871
18	20,79671636	21,31116578	21,84055863	22,38534966	22,94600743
19	22,12366710	22,70161119	23,29736980	23,91152003	24,54465761
20	23,47052211	24,11638938	24,78331719	25,47202923	26,18327405
21	24,83757994	25,55592620	26,29898354	27,06764989	27,86285590
22	26,22514364	27,02065490	27,84496321	28,69917201	29,58442730
23	27,63352080	28,51101637	29,42186247	30,36740338	31,34903798
24	29,06302361	30,02745915	31,03029972	32,07316996	33,15776393
25	30,51396896	31,57043969	32,67090572	33,81731628	35,01170803
26	31,98667850	33,14042238	34,34432383	35,60070590	36,91200073
27	33,48147867	34,73787977	36,05121031	37,42422178	38,85980075
28	34,99870085	36,36329267	37,79223451	39,28876677	40,85629577
29	36,53868137	38,01715029	39,56807921	41,19526402	42,90270316
30	38,10176159	39,69995042	41,37944079	43,14465746	45,00027074
31	39,68828801	41,41219955	43,22702961	45,13791226	47,15027751
32	41,29861233	43,15441305	45,11157020	47,17601528	49,35403445
33	42,93309152	44,92711527	47,03380160	49,25997563	51,61288531
34	44,59208789	46,73083979	48,99447763	51,39082508	53,92820744
35	46,27596921	48,56612949	50,99436719	53,56961864	56,30141263
36	47,98510874	50,43353675	53,03425453	55,79743506	58,73394794
37	49,71988538	52,33362365	55,11493962	58,07537735	61,22729664
38	51,48068366	54,26696206	57,23723841	60,40457334	63,78297906
39	53,26789391	56,23413390	59,40198318	62,78617624	66,40255354
40	55,08191232	58,23573124	61,61002284	65,22136521	69,08761737
41	56,92314100	60,27235654	63,86222330	67,71134592	71,83980781
42	58,79198812	62,34462278	66,15946777	70,25735121	74,66080300
43	60,68886794	64,45315367	68,50265712	72,86064161	77,55232308
44	62,61420096	66,59858386	70,89271027	75,52250605	80,51613116
45	64,56841398	68,78155908	73,33056447	78,24426243	83,55403443
46	66,55194018	71,00273637	75,81717576	81,02725834	86,66788530
47	68,56521929	73,26278425	78,35351927	83,87287165	89,85958243
48	70,60869758	75,56238298	80,94058966	86,78251126	93,13107199
49	72,68282804	77,90222468	83,57940145	89,75761776	96,48434879
50	74,78807046	80,28301361	86,27098948	92,79966416	99,92145751

IIIⁿ_p

	2,75%	3,00%	3,25%	3,50%	3,75%
1	1,02750000	1,03000000	1,03250000	1,03500000	1,03750000
2	2,08325625	2,09090000	2,09855625	2,10622500	2,11390625
3	3,16804580	3,18362700	3,19925933	3,21494288	3,23067773
4	4,28266706	4,30913581	4,33573526	4,36246588	4,38932815
5	5,42794040	5,46840988	5,50914665	5,55015218	5,59142796
6	6,60470876	6,66246218	6,72069392	6,77940751	6,83860650
7	7,81383825	7,89233605	7,97161647	8,05168677	8,13255425
8	9,05621880	9,15910613	9,26319401	9,36849581	9,47502503
9	10,33276482	10,46387931	10,59674781	10,73139316	10,86783847
10	11,64441585	11,80779569	11,97364212	12,14199192	12,31288241
11	12,99213729	13,19202956	13,39528548	13,60196164	13,81211550
12	14,37692107	14,61779045	14,86313226	15,11303030	15,36756983
13	15,79978639	16,08632416	16,37868406	16,67698636	16,98135370
14	17,26178052	17,59891389	17,94349129	18,29568088	18,65565447
15	18,76397948	19,15688130	19,55915476	19,97102971	20,39274151
16	20,30748892	20,76158774	21,22732729	21,70501575	22,19496932
17	21,89344487	22,41443537	22,94971543	23,49969130	24,06478067
18	23,52301460	24,11686844	24,72808118	25,35718050	26,00470994
19	25,19739750	25,87037449	26,56424382	27,27968181	28,01738656
20	26,91782593	27,67648572	28,46008174	29,26947068	30,10553856
21	28,68556615	29,53678030	30,41753440	31,32890215	32,27199626
22	30,50191921	31,45288370	32,43860426	33,46041373	34,51969612
23	32,36822199	33,42647022	34,52535890	35,66652821	36,85168472
24	34,28584810	35,45926432	36,67993307	37,94985669	39,27112290
25	36,25620892	37,55304225	38,90453089	40,31310168	41,78129001
26	38,28075467	39,70963352	41,20142815	42,75906024	44,38558838
27	40,36097542	41,93092252	43,57297456	45,29062734	47,08754794
28	42,49840224	44,21885020	46,02159623	47,91079930	49,89083099
29	44,69460831	46,57541571	48,54979811	50,62267728	52,79923715
30	46,95121003	49,00267818	51,16016655	53,42947098	55,81670855
31	49,26986831	51,50275852	53,85537196	56,33450247	58,94733512
32	51,65228969	54,07784128	56,63817155	59,34121005	62,19536019
33	54,10022765	56,73017652	59,51141213	62,45315240	65,56518619
34	56,61548391	59,46208181	62,47803302	65,67401274	69,06138067
35	59,19990972	62,27594427	65,54106909	69,00760318	72,68868245
36	61,85540724	65,17422259	68,70365384	72,45786930	76,45200804
37	64,58393094	68,15944927	71,96902259	76,02889472	80,35645834
38	67,38748904	71,23423275	75,34051582	79,72490604	84,40732553
39	70,26814499	74,40125973	78,82158259	83,55027775	88,61010024
40	73,22801898	77,66329753	82,41578402	87,50953747	92,97047900
41	76,26928950	81,02319645	86,12679700	91,60737128	97,49437196
42	79,39419496	84,48389234	89,95841791	95,84862928	102,18791091
43	82,60503532	88,04840911	93,91456649	100,23833130	107,05745757
44	85,90417379	91,71986139	97,99928990	104,78167290	112,10961223
45	89,29403857	95,50145723	102,21676682	109,48403145	117,35122269
46	92,77712463	99,39650095	106,57131174	114,35097255	122,78939354
47	96,35599556	103,40839598	111,06737937	119,38825659	128,43149579
48	100,03328544	107,54064785	115,70956920	124,60184557	134,28517689
49	103,81170079	111,79686729	120,50263020	129,99791016	140,35837102
50	107,69402256	116,18077331	125,45146568	135,58283702	146,65930993

IIIⁿ_p

	4,00%	4,25%	4,50%	4,75%	5,00%
1	1,04000000	1,04250000	1,04500000	1,04750000	1,05000000
2	2,12160000	2,12930625	2,13702500	2,14475625	2,15250000
3	3,24646400	3,26230177	3,27819113	3,29413217	3,31012500
4	4,41632256	4,44344959	4,47070973	4,49810345	4,52563125
5	5,63297546	5,67479620	5,71689166	5,75926336	5,80191281
6	6,89829448	6,95847504	7,01915179	7,08032837	7,14200845
7	8,21422626	8,29671023	8,38001362	8,46414397	8,54910888
8	9,58279531	9,69182041	9,80211423	9,91369081	10,02656432
9	11,00610712	11,14622278	11,28820937	11,43209112	11,57789254
10	12,48635141	12,66243725	12,84117879	13,02261545	13,20678716
11	14,02580546	14,24309083	14,46403184	14,68868969	14,91712652
12	15,62683768	15,89092219	16,15991327	16,43390245	16,71298285
13	17,29191119	17,60878638	17,93210937	18,26201281	18,59863199
14	19,02358764	19,39965980	19,78405429	20,17695842	20,57856359
15	20,82453114	21,26664534	21,71933673	22,18286395	22,65749177
16	22,69751239	23,21297777	23,74170689	24,28404998	24,84036636
17	24,64541288	25,24202933	25,85508370	26,48504236	27,13238467
18	26,67122940	27,35731557	28,06356246	28,79058187	29,53900391
19	28,77807858	29,56250149	30,37142277	31,20563451	32,06595410
20	30,96920172	31,86140780	32,78313680	33,73540215	34,71925181
21	33,24796979	34,25801763	35,30337795	36,38533375	37,50521440
22	35,61788858	36,75648338	37,93702996	39,16113710	40,43047512
23	38,08260412	39,36113392	40,68919631	42,06879111	43,50199887
24	40,64590829	42,07648211	43,56521015	45,11455869	46,72709882
25	43,31174462	44,90723260	46,57064460	48,30500023	50,11345376
26	46,08421440	47,85828999	49,71132361	51,64698774	53,66912645
27	48,96758298	50,93476732	52,99333317	55,14771966	57,40258277
28	51,96628630	54,14199493	56,42303316	58,81473634	61,32271191
29	55,08493775	57,48552971	60,00706966	62,65593632	65,43884750
30	58,32833526	60,97116472	63,75238779	66,67959329	69,76078988
31	61,70146867	64,60493922	67,66624524	70,89437398	74,29882937
32	65,20952742	68,39314914	71,75622628	75,30935674	79,06377084
33	68,85790851	72,34235798	76,03025646	79,93405119	84,06695938
34	72,65222486	76,45940819	80,49661800	84,77841862	89,32030735
35	76,59831385	80,75143304	85,16396581	89,85289350	94,83632272
36	80,70224640	85,22586895	90,04134427	95,16840594	100,62813886
37	84,97033626	89,89046838	95,13820476	100,73640522	106,70954580
38	89,40914971	94,75331328	100,46442398	106,56888447	113,09502309
39	94,02551570	99,82282910	106,03032306	112,67840648	119,79977424
40	98,82653633	105,10779933	111,84668760	119,07813079	126,83976295
41	103,81959778	110,61738080	117,92478854	125,78184201	134,23175110
42	109,01238169	116,36111949	124,27640402	132,80397950	141,99333866
43	114,41287696	122,34896707	130,91384220	140,15966853	150,14300559
44	120,02939204	128,59129817	137,84996510	147,86475278	158,70015587
45	125,87056772	135,09892834	145,09821353	155,93582854	167,68516366
46	131,94539043	141,88313279	152,67263314	164,39028039	177,11942185
47	138,26320604	148,95566594	160,58790163	173,24631871	187,02539294
48	144,83373429	156,32878174	168,85935720	182,52301885	197,42666259
49	151,66708366	164,01525496	177,50302828	192,24036225	208,34799572
50	158,77376700	172,02840330	186,53566455	202,41927945	219,81539550

$$\text{III}_p^n$$

	5,25%	5,50%	5,75%	6,00%	6,25%
1	1,05250000	1,05500000	1,05750000	1,06000000	1,06250000
2	2,16025625	2,16802500	2,17580625	2,18360000	2,19140625
3	3,32616970	3,34226638	3,35841511	3,37461600	3,39086914
4	4,55329361	4,58109103	4,60902398	4,63709296	4,66529846
5	5,84484153	5,88805103	5,93154286	5,97531854	6,01937962
6	7,20419571	7,26689384	7,33010657	7,39383765	7,45809084
7	8,63491598	8,72157300	8,80908770	8,89746791	8,98672152
8	10,14074907	10,25625951	10,37311024	10,49131598	10,61089161
9	11,72563840	11,87535379	12,02706408	12,18079494	12,33657234
10	13,39373441	13,58349825	13,77612027	13,97164264	14,17010811
11	15,14940547	15,38559065	15,62574718	15,86994120	16,11823987
12	16,99724926	17,28679814	17,58172764	17,88213767	18,18812986
13	18,94210484	19,29257203	19,65017698	20,01506593	20,38738798
14	20,98906535	21,40866350	21,83756216	22,27596988	22,72409973
15	23,14349128	23,64113999	24,15072198	24,67252808	25,20685596
16	25,41102457	25,99640269	26,59688850	27,21287976	27,84478446
17	27,79760336	28,48120483	29,18370959	29,90565255	30,64758348
18	30,30947754	31,10267110	31,91927289	32,75999170	33,62555745
19	32,95322511	33,86831801	34,81213108	35,78559120	36,78965479
20	35,73576943	36,78607550	37,87132862	38,99272668	40,15150822
21	38,66439732	39,86430965	41,10643001	42,39229028	43,72347748
22	41,74677818	43,11184669	44,52754974	45,99582769	47,51869482
23	44,99098403	46,53799825	48,14538385	49,81557735	51,55111325
24	48,40551070	50,15258816	51,97124342	53,86451200	55,83555783
25	51,99930001	53,96598051	56,01708991	58,15638272	60,38778019
26	55,78176326	57,98910943	60,29557258	62,70576568	65,22451645
27	59,76280583	62,23351045	64,82006801	67,52811162	70,36354873
28	63,95285313	66,71135353	69,60472192	72,63979832	75,82377053
29	68,36287792	71,43547797	74,66449343	78,05818622	81,62525619
30	73,00442901	76,41942926	80,01520180	83,80167739	87,78933470
31	77,88966154	81,67749787	85,67357590	89,88977803	94,33866812
32	83,03136877	87,22476025	91,65730652	96,34316471	101,29733487
33	88,44301563	93,07712207	97,98510164	103,18375460	108,69091830
34	94,13877395	99,25136378	104,67674499	110,43477987	116,54660070
35	100,13355958	105,76518879	111,75315782	118,12086666	124,89326324
36	106,44307146	112,63727417	119,23646440	126,26811866	133,76159219
37	113,08383271	119,88732425	127,15006110	134,90420578	143,18419170
38	120,07323393	127,53612708	135,51868962	144,05845813	153,19570369
39	127,42957871	135,60561407	144,36851427	153,76196562	163,83293517
40	135,17213159	144,11892285	153,72720384	164,04768356	175,13499361
41	143,32116850	153,10046360	163,62401806	174,95054457	187,14343071
42	151,89802985	162,57598910	174,08989910	186,50757724	199,90239513
43	160,92517642	172,57266850	185,15756830	198,75803188	213,45879483
44	170,42624818	183,11916527	196,86162847	211,74351379	227,86246951
45	180,42612621	194,24571936	209,23867211	225,50812462	243,16637385
46	190,95099783	205,98423392	222,32739576	240,09861210	259,42677222
47	202,02842522	218,36836679	236,16872101	255,56452882	276,70344548
48	213,68741754	231,43362696	250,80592247	271,95840055	295,05991082
49	225,95850696	245,21747645	266,28476301	289,33590458	314,56365525
50	238,87382858	259,75943765	282,65363689	307,75605886	335,28638370

IIIⁿ_p

	6,50%	6,75%	7,00%	7,25%	7,50%
1	1,06500000	1,06750000	1,07000000	1,07250000	1,07500000
2	2,19922500	2,20705625	2,21490000	2,22275625	2,23062500
3	3,40717463	3,42353255	3,43994300	3,45640608	3,47292188
4	4,69364098	4,72212099	4,75073901	4,77949552	4,80839102
5	6,06372764	6,10836416	6,15329074	6,19850894	6,24402034
6	7,52286994	7,58817874	7,65402109	7,72040084	7,78732187
7	9,07685648	9,16788081	9,25980257	9,35262990	9,44637101
8	10,73185215	10,85421276	10,97798875	11,10319557	11,22984883
9	12,49442254	12,65437212	12,81644796	12,98067725	13,14708750
10	14,37156001	14,57604224	14,78359932	14,99427635	15,20811906
11	16,37071141	16,62742509	16,88845127	17,15386139	17,42372799
12	18,49980765	18,81727629	19,14064286	19,47001634	19,80550759
13	20,76729515	21,15494244	21,55048786	21,95409252	22,36592066
14	23,18216933	23,65040105	24,12902201	24,61826423	25,11836470
15	25,75401034	26,31430312	26,88805355	27,47558839	28,07724206
16	28,49302101	29,15801858	29,84021730	30,54006854	31,25803521
17	31,41006738	32,19368484	32,99903251	33,82672351	34,67738785
18	34,51672176	35,43425856	36,37896479	37,35166097	38,35319194
19	37,82530867	38,89357101	39,99549232	41,13215639	42,30468134
20	41,34895373	42,58638706	43,86517678	45,18673773	46,55253244
21	45,10163573	46,52846818	48,00573916	49,53527621	51,11897237
22	49,09824205	50,73663979	52,43614090	54,19908374	56,02789530
23	53,35462778	55,22886297	57,17667076	59,20101731	61,30498744
24	57,88767859	60,02431122	62,24903772	64,56559106	66,97786150
25	62,71537769	65,14345223	67,67647036	70,31909641	73,07620112
26	67,85687725	70,60813526	73,48382328	76,48973090	79,63191620
27	73,33257427	76,44168439	79,69769091	83,10773639	86,67930991
28	79,16419159	82,66899808	86,34652927	90,20554728	94,25525816
29	85,37486405	89,31665545	93,46078632	97,81794946	102,39940252
30	91,98923021	96,41302970	101,07304137	105,98225080	111,15435771
31	99,03353017	103,98840920	109,21815426	114,73846398	120,56593454
32	106,53570963	112,07512682	117,93342506	124,12950262	130,68337963
33	114,52553076	120,70769788	127,25876481	134,20139156	141,55963310
34	123,03469026	129,92296749	137,23687835	145,00349245	153,25160558
35	132,09694513	139,76026779	147,91345984	156,58874565	165,82047600
36	141,74824656	150,26158587	159,33740202	169,01392971	179,33201170
37	152,02688259	161,47174292	171,56102017	182,33993961	193,85691258
38	162,97362996	173,43858556	184,64029158	196,63208523	209,47118102
39	174,63191590	186,21319009	198,63511199	211,96041141	226,25651960
40	187,04799044	199,85008042	213,60956983	228,40004124	244,30075857
41	200,27110981	214,40746085	229,63223972	246,03154423	263,69831546
42	214,35373195	229,94746446	246,77649650	264,94133119	284,55068912
43	229,35172453	246,53641831	265,12085125	285,22207770	306,96699080
44	245,32458662	264,24512654	284,74931084	306,97317833	331,06451511
45	262,33568475	283,14917258	305,75176260	330,30123376	356,96935375
46	280,45250426	303,32924173	328,22438598	355,32057321	384,81705528
47	299,74691704	324,87146555	352,27009300	382,15381477	414,75333442
48	320,29546665	347,86778947	377,99899951	410,93246634	446,93483451
49	342,17967198	372,41636526	405,52892947	441,79757015	481,52994709
50	365,48635066	398,62196992	434,98595454	474,90039398	518,71969313

$$\text{III}_p^n$$

	7,75%	8,00%	8,25%	8,50%	8,75%
1	1,07750000	1,08000000	1,08250000	1,08500000	1,08750000
2	2,23850625	2,24640000	2,25430625	2,26222500	2,27015625
3	3,48949048	3,50611200	3,52278652	3,53951413	3,55629492
4	4,83742600	4,86660096	4,89591640	4,92537283	4,95497073
5	6,28982651	6,33592904	6,38232951	6,42902952	6,47603067
6	7,85478807	7,92280336	7,99137169	8,06049702	8,13018335
7	9,54103414	9,63662763	9,73315986	9,83063927	9,92907439
8	11,35796429	11,48755784	11,61864554	11,75124361	11,88536840
9	13,31570652	13,48656247	13,65968380	13,83509932	14,01283814
10	15,42517377	15,64548746	15,86910771	16,09608276	16,32646147
11	17,69812474	17,97712646	18,26080910	18,54924979	18,84252685
12	20,14722941	20,49529658	20,84982585	21,21093603	21,57874795
13	22,78613969	23,21492030	23,65243648	24,09886559	24,55438840
14	25,62956552	26,15211393	26,68626249	27,23226916	27,79039738
15	28,69335684	29,32428304	29,97037915	30,63201204	31,30955715
16	31,99459200	32,75022569	33,52543543	34,32073306	35,13664341
17	35,55167288	36,45024374	37,37378385	38,32299538	39,29859970
18	39,38442753	40,44626324	41,53962102	42,66544998	43,82472718
19	43,51422066	44,76196430	46,04913975	47,37701323	48,74689081
20	47,96407276	49,42292144	50,93069378	52,48905936	54,09974375
21	52,75878840	54,45675516	56,21497602	58,03562940	59,92097133
22	57,92509450	59,89329557	61,93521154	64,05365790	66,25155632
23	63,49178932	65,76475922	68,12736650	70,58321882	73,13606750
24	69,48990300	72,10593995	74,83037423	77,66779242	80,62297340
25	75,95287048	78,95441515	82,08638011	85,35455478	88,76498358
26	82,91671794	86,35076836	89,94100646	93,69469193	97,61941964
27	90,42026358	94,33882983	98,44363950	102,74374075	107,24861886
28	98,50533401	102,96593622	107,64773976	112,56195871	117,72037301
29	107,21699739	112,28321111	117,61117829	123,21472520	129,10840565
30	116,60381469	122,34586800	128,39660049	134,77297684	141,49289114
31	126,71811033	133,21353744	140,07182004	147,31367987	154,96101912
32	137,61626388	144,95062044	152,71024519	160,92034266	169,60760829
33	149,35902433	157,62667007	166,39134042	175,68357179	185,53577402
34	162,01184872	171,31680368	181,20112600	191,70167539	202,85765424
35	175,64526699	186,10214797	197,23271890	209,08131780	221,69519899
36	190,33527519	202,07031981	214,58691820	227,93822981	242,18102890
37	206,16375901	219,31594540	233,37283896	248,39797935	264,45936893
38	223,21895034	237,94122103	253,70859817	270,59680759	288,68706371
39	241,59591899	258,05651871	275,72205752	294,68253624	315,03468178
40	261,39710271	279,78104021	299,55162726	320,81555182	343,68771644
41	282,73287817	303,24352342	325,34713651	349,16987372	374,84789163
42	305,72217623	328,58300530	353,27077528	379,93431299	408,73458215
43	330,49314489	355,94964572	383,49811424	413,31372959	445,58635808
44	357,18386361	385,50561738	416,21920866	449,53039661	485,66266442
45	385,94311304	417,42606677	451,63979338	488,82548032	529,24564755
46	416,93120430	451,90015211	489,98257633	531,46064615	576,64214171
47	450,32087264	489,13216428	531,48863888	577,71980107	628,18582911
48	486,29824027	529,34273742	576,41895158	627,91098416	684,23958916
49	525,06385389	572,77015642	625,05601509	682,36841782	745,19805321
50	566,83380256	619,67176893	677,70563633	741,45473333	811,49038287

$$III_p^n$$

	9,00%	9,25%	9,50%	9,75%	10,00%
1	1,09000000	1,09250000	1,09500000	1,09750000	1,10000000
2	2,27810000	2,28605625	2,29402500	2,30200625	2,31000000
3	3,57312900	3,59001645	3,60695738	3,62395186	3,64100000
4	4,98471061	5,01459298	5,04461833	5,07478717	5,10510000
5	6,52333456	6,57094283	6,61885707	6,66707891	6,71561000
6	8,20043468	8,27125504	8,34264849	8,41461911	8,48717100
7	10,02847380	10,12884613	10,23020009	10,33254447	10,43588810
8	12,02103644	12,15826439	12,29706910	12,43746756	12,57947691
9	14,19292972	14,37540385	14,56029067	14,74762064	14,93742460
10	16,56029339	16,79762871	17,03851828	17,28301366	17,53116706
11	19,14071980	19,44390936	19,75217752	20,06560749	20,38428377
12	21,95338458	22,33497098	22,72363438	23,11950422	23,52271214
13	25,01918919	25,49345579	25,97737965	26,47115588	26,97498336
14	28,36091622	28,94410045	29,54023072	30,14959358	30,77248169
15	32,00339868	32,71392975	33,44155263	34,18667895	34,94972986
16	35,97370456	36,83246825	37,71350013	38,61738015	39,54470285
17	40,30133797	41,33197156	42,39128265	43,48007472	44,59917313
18	45,01845839	46,24767893	47,51345450	48,81688200	50,15909045
19	50,16011964	51,61808923	53,12223267	54,67402799	56,27499949
20	55,76453041	57,48526249	59,26384478	61,10224572	63,00249944
21	61,87333815	63,89514927	65,98891003	68,15721468	70,40274939
22	68,53193858	70,89795057	73,35285649	75,90004311	78,54302433
23	75,78981305	78,54851100	81,41637785	84,39779732	87,49732676
24	83,70089623	86,90674827	90,24593375	93,72408256	97,34705943
25	92,32397689	96,03812248	99,91429745	103,95968061	108,18176538
26	101,72313481	106,01414881	110,50115571	115,19324946	120,09994191
27	111,96821694	116,91295758	122,09376551	127,52209129	133,20993611
28	123,13535646	128,81990615	134,78767323	141,05299519	147,63092972
29	135,30753855	141,82824747	148,68750218	155,90316222	163,49402269
30	148,57521702	156,03986036	163,90781489	172,20122053	180,94342496
31	163,03698655	171,56604745	180,57405731	190,08833954	200,13776745
32	178,80031534	188,52840684	198,82359275	209,71945264	221,25154420
33	195,98234372	207,05978447	218,80683406	231,26459927	244,47669862
34	214,71075465	227,30531453	240,68848330	254,91039770	270,02436848
35	235,12472257	249,42355613	264,64888921	280,86166148	298,12680533
36	257,37594760	273,58773507	290,88553369	309,34317347	329,03948586
37	281,62978288	299,98710056	319,61465939	340,60163289	363,04343445
38	308,06646334	328,82840737	351,07305203	374,90779209	400,44777789
39	336,88244504	360,33753505	385,51999197	412,55880182	441,59255568
40	368,29186510	394,76125704	423,23939121	453,88078500	486,85181125
41	402,52813296	432,36917331	464,54213337	499,23166154	536,63699237
42	439,84566492	473,45582185	509,76863604	549,00424854	591,40069161
43	480,52177477	518,34298537	559,29165647	603,62966277	651,64076077
44	524,85873450	567,38221151	613,51936383	663,58105489	717,90483685
45	573,18602060	620,95756608	672,89870340	729,37707074	790,79532054
46	625,86276245	679,48864094	737,91908022	801,58953425	870,97485259
47	683,28041107	743,43384023	809,11639284	880,84201384	959,17233785
48	745,86564807	813,29397045	887,07745016	967,82161018	1056,18957163
49	814,08355640	889,61616271	972,44480793	1063,28171718	1162,90852880
50	888,44107647	972,99815777	1065,92206468	1168,04918460	1280,29938168

$$\Pi_p^n$$

	11,00%	12,00%	13,00%	14,00%	15,00%
1	1,11000000	1,12000000	1,13000000	1,14000000	1,15000000
2	2,34210000	2,37440000	2,40690000	2,43960000	2,47250000
3	3,70973100	3,77932800	3,84979700	3,92114400	3,99337500
4	5,22780141	5,35284736	5,48027061	5,61010416	5,74238125
5	6,91285957	7,11518904	7,32270579	7,53551874	7,75373844
6	8,78327412	9,08901173	9,40465754	9,73049137	10,06679920
7	10,85943427	11,29969314	11,75726302	12,23276016	12,72681908
8	13,16397204	13,77565631	14,41570722	15,08534658	15,78584195
9	15,72200896	16,54873507	17,41974915	18,33729510	19,30371824
10	18,56142995	19,65458328	20,81431654	22,04451641	23,34927597
11	21,71318724	23,13313327	24,65017769	26,27074871	28,00166737
12	25,21163784	27,02910926	28,98470079	31,08865353	33,35191748
13	29,09491800	31,39260238	33,88271190	36,58106503	39,50470510
14	33,40535898	36,27971466	39,41746444	42,84241413	46,58041086
15	38,18994847	41,75328042	45,67173482	49,98035211	54,71747249
16	43,50084281	47,88367407	52,73906035	58,11760141	64,07509336
17	49,39593551	54,74971496	60,72513819	67,39406560	74,83635737
18	55,93948842	62,43968075	69,74940616	77,96923479	87,21181097
19	63,20283215	71,05244244	79,94682896	90,02492766	101,44358262
20	71,26514368	80,69873554	91,46991672	103,76841753	117,81012001
21	80,21430949	91,50258380	104,49100590	119,43599598	136,63163801
22	90,14788353	103,60289386	119,20483667	137,29703542	158,27638372
23	101,17415072	117,15524112	135,83146543	157,65862038	183,16784127
24	113,41330730	132,33387006	154,61955594	180,87082723	211,79301747
25	126,99877110	149,33393446	175,85009821	207,33274304	244,71197009
26	142,07863592	168,37400660	199,84061098	237,49932707	282,56876560
27	158,81728587	189,69888739	226,94989040	271,88923286	326,10408044
28	177,39718732	213,58275388	257,58337616	311,09372546	376,16969250
29	198,02087793	240,33268434	292,19921506	355,78684702	433,74514638
30	220,91317450	270,29260646	331,31511301	406,73700561	499,95691834
31	246,32362369	303,84771924	375,51607771	464,82018639	576,10045609
32	274,52922230	341,42944555	425,46316781	531,03501249	663,66552450
33	305,83743675	383,52097901	481,90337962	606,51991423	764,36535317
34	340,58955480	430,66349649	545,68081897	692,57270223	880,17015615
35	379,16440582	483,46311607	617,74932544	790,67288054	1013,34567957
36	421,98249046	542,59869000	699,18673775	902,50708382	1166,49753151
37	469,51056441	608,83053280	791,21101365	1029,99807555	1342,62216123
38	522,26672650	683,01019674	895,19844543	1175,33780613	1545,16548542
39	580,82606641	766,09142034	1012,70424333	1341,02509898	1778,09030823
40	645,82693372	859,14239079	1145,48579497	1529,90861284	2045,95385447
41	717,97789643	963,35947768	1295,52894831	1745,23581864	2353,99693264
42	798,06546504	1080,08261500	1465,07771159	1990,70883325	2708,24647253
43	886,96266619	1210,81252880	1656,66781410	2270,54806990	3115,63344341
44	985,63855947	1357,23003226	1873,16462994	2589,56479969	3584,12845992
45	1095,16880101	1521,21763613	2117,80603183	2953,24387165	4122,89772891
46	1216,74736912	1704,88375247	2394,25081596	3367,83801368	4742,48238825
47	1351,69957973	1910,58980276	2706,63342204	3840,47533559	5455,00474648
48	1501,49653350	2140,98057909	3059,62576691	4379,28188258	6274,40545846
49	1667,77115218	2399,01824858	3458,50711660	4993,52134614	7216,71627723
50	1852,33597892	2688,02043841	3909,24304176	5693,75433460	8300,37371881

$$\text{III}_p^n$$

	16,00%	17,00%	18,00%	19,00%	20,00%
1	1,16000000	1,17000000	1,18000000	1,19000000	1,20000000
2	2,50560000	2,53890000	2,57240000	2,60610000	2,64000000
3	4,06649600	4,14051300	4,21543200	4,29125900	4,36800000
4	5,87713536	6,01440021	6,15420976	6,29659821	6,44160000
5	7,97747702	8,20684825	8,44196752	8,68295187	8,92992000
6	10,41387334	10,77201245	11,14152167	11,52271273	11,91590400
7	13,24009307	13,77325456	14,32699557	14,90202814	15,49908480
8	16,51850797	17,28470784	18,08585477	18,92341349	19,79890176
9	20,32146924	21,39310817	22,52130863	23,70886205	24,95868211
10	24,73290432	26,19993656	27,75514419	29,40354584	31,15041853
11	29,85016901	31,82392578	33,93107014	36,18021955	38,58050224
12	35,78619605	38,40399316	41,21866276	44,24446127	47,49660269
13	42,67198742	46,10267200	49,81802206	53,84090891	58,19592323
14	50,65950541	55,11012623	59,96526603	65,26068160	71,03510787
15	59,92502627	65,64884769	71,93901392	78,85021111	86,44212945
16	70,67303048	77,97915180	86,06803642	95,02175122	104,93055534
17	83,14071536	92,40560761	102,74028298	114,26588395	127,11666640
18	97,60322981	109,28456090	122,41353392	137,16640190	153,73999969
19	114,37974658	129,03293626	145,62797002	164,41801826	185,68799962
20	133,84050604	152,13853542	173,02100463	196,84744173	224,02559955
21	156,41498700	179,17208644	205,34478546	235,43845566	270,03071946
22	182,60138492	210,80134114	243,48684684	281,36176223	325,23686335
23	212,97760651	247,80756913	288,49447928	336,01049706	391,48423602
24	248,21402355	291,10485588	341,60348554	401,04249150	470,98108322
25	289,08826732	341,76268138	404,27211294	478,43056488	566,37729986
26	336,50239009	401,03233722	478,22109327	570,52237221	680,85275984
27	391,50277250	470,37783454	565,48089006	680,11162293	818,22331180
28	455,30321610	551,51206642	668,44745027	810,52283129	983,06797417
29	529,31173068	646,43911771	789,94799132	965,71216923	1180,88156900
30	615,16160759	757,50376772	933,31862976	1150,38748139	1418,25788280
31	714,74746480	887,44940823	1102,49598312	1370,15110285	1703,10945936
32	830,26705917	1039,48580763	1302,12526008	1631,66981239	2044,93135123
33	964,26978864	1217,36839493	1537,68780689	1942,87707675	2455,11762148
34	1119,71295482	1425,49102206	1815,65161213	2313,21372133	2947,34114577
35	1300,02702759	1668,99449581	2143,64890232	2753,91432838	3538,00937493
36	1509,19135201	1953,89356010	2530,68570473	3278,34805077	4246,81124991
37	1751,82196833	2287,22546532	2987,38913158	3902,42418042	5097,37349989
38	2033,27348326	2677,22379443	3526,29917527	4645,07477470	6118,04819987
39	2359,75724058	3133,52183948	4162,21302682	5528,82898189	7342,85783985
40	2738,47839907	3667,39055219	4912,59137165	6580,49648845	8812,62940781
41	3177,79494293	4292,01694606	5798,03781854	7831,98082126	10576,35528938
42	3687,40213380	5022,82982689	6842,86462588	9321,24717730	12692,82634725
43	4278,54647520	5877,88089746	8075,76025854	11093,47414099	15232,59161670
44	4964,27391123	6878,29065003	9530,57710507	13202,42422777	18280,30994004
45	5759,71773703	8048,77006054	11247,26098399	15712,07483105	21937,57192805
46	6682,43257496	9418,23097083	13272,94796110	18698,55904895	26326,28631366
47	7752,78178695	11020,50023587	15663,25859410	22252,47526825	31592,74357640
48	8994,38687286	12895,15527597	18483,82514104	26481,63556922	37912,49229168
49	10434,64877252	15088,50167288	21812,09366643	31514,33632737	45496,19075001
50	12105,35257612	17654,71695727	25739,45052639	37503,25022957	54596,62890001

$$IV_p^n$$

	0,25%	0,50%	0,75%	1,00%	1,25%
1	0,99750623	0,99502488	0,99255583	0,99009901	0,98765432
2	1,99252492	1,98509938	2,02255625	1,97039506	1,96311538
3	2,98506227	2,97024814	3,04522542	2,94098521	2,92653371
4	3,97512446	3,95049566	4,07556461	3,90196555	3,87805798
5	4,96271766	4,92586633	5,11363135	4,85343124	4,81783504
6	5,94784804	5,89638441	6,15948358	5,79547647	5,74600992
7	6,93052174	6,86207404	7,21317971	6,72819453	6,66272585
8	7,91074487	7,82295924	8,27477856	7,65167775	7,56812429
9	8,88852357	8,77906392	9,34433940	8,56601758	8,46234498
10	9,86386391	9,73041186	10,42192194	9,47130453	9,34552591
11	10,83677198	10,67702673	11,50758636	10,36762825	10,21780337
12	11,80725384	11,61893207	12,60139325	11,25507747	11,07931197
13	12,77531555	12,55615131	13,70340370	12,13374007	11,93018466
14	13,74096314	13,48870777	14,81367923	13,00370304	12,77055275
15	14,70420264	14,41662465	15,93228183	13,86505252	13,60054592
16	15,66504004	15,33992502	17,05927394	14,71787378	14,42029227
17	16,62348133	16,25863186	18,19471849	15,56225127	15,22991829
18	17,57953250	17,17276802	19,33867888	16,39826858	16,02954893
19	18,53319950	18,08235624	20,49121897	17,22600850	16,81930759
20	19,48448828	18,98741915	21,65240312	18,04555297	17,59931613
21	20,43340477	19,88797925	22,82229614	18,85698313	18,36969495
22	21,37995488	20,78405896	24,00096336	19,66037934	19,13056291
23	22,32414452	21,67568055	25,18847059	20,45582113	19,88203744
24	23,26597957	22,56286622	26,38488412	21,24338726	20,62423451
25	24,20546591	23,44563803	27,59027075	22,02315570	21,35726865
26	25,14260939	24,32401794	28,80469778	22,79520366	22,08125299
27	26,07741585	25,19802780	30,02823301	23,55960759	22,79629925
28	27,00989112	26,06768936	31,26094476	24,31644316	23,50251778
29	27,94004102	26,93302423	32,50290184	25,06578530	24,20001756
30	28,86787134	27,79405397	33,75417361	25,80770822	24,88890623
31	29,79338787	28,65079997	35,01482991	26,54228537	25,56929010
32	30,71659638	29,50328355	36,28494113	27,26958947	26,24127418
33	31,63750262	30,35152592	37,56457819	27,98969255	26,90496215
34	32,55611234	31,19554818	38,85381253	28,70266589	27,56045644
35	33,47243126	32,03537132	40,15271612	29,40858009	28,20785822
36	34,38646510	32,87101624	41,46136149	30,10750504	28,84726737
37	35,29821955	33,70250372	42,77982170	30,79950994	29,47878259
38	36,20770030	34,52985445	44,10817037	31,48466330	30,10250133
39	37,11491302	35,35308900	45,44648164	32,16303298	30,71851983
40	38,01986336	36,17222786	46,79483026	32,83468611	31,32693316
41	38,92255697	36,98729141	48,15329148	33,49968922	31,92783522
42	39,82299947	37,79829991	49,52194117	34,15810814	32,52131874
43	40,72119648	38,60527354	50,90085573	34,81000806	33,10747530
44	41,61715359	39,40823238	52,29011215	35,45545352	33,68639536
45	42,51087640	40,20719640	53,68978799	36,09450844	34,25816825
46	43,40237047	41,00218547	55,09996140	36,72723608	34,82288222
47	44,29164137	41,79321937	56,52071111	37,35369909	35,38062442
48	45,17869463	42,58031778	57,95211644	37,97395949	35,93148091
49	46,06353580	43,36350028	59,39425732	38,58807871	36,47553670
50	46,94617037	44,14278635	60,84721424	39,19611753	37,01287575

$$IV_p^n$$

	1,50%	1,75%	2,00%	2,25%	2,50%
1	0,98522167	0,98280098	0,98039216	0,97799511	0,97560976
2	1,95588342	1,94869875	1,94156094	1,93446955	1,92742415
3	2,91220042	2,89798403	2,88388327	2,86989687	2,85602356
4	3,85438465	3,83094254	3,80772870	3,78474021	3,76197421
5	4,78264497	4,74785508	4,71345951	4,67945253	4,64582850
6	5,69718717	5,64899762	5,60143089	5,55447680	5,50812536
7	6,59821396	6,53464139	6,47199107	6,41024626	6,34939060
8	7,48592508	7,40505297	7,32548144	7,24718461	7,17013717
9	8,36051732	8,26049432	8,16223671	8,06570622	7,97086553
10	9,22218455	9,10122291	8,98258501	8,86621635	8,75206393
11	10,07111779	9,92749181	9,78684805	9,64911134	9,51420871
12	10,90750521	10,73954969	10,57534122	10,41477882	10,25776460
13	11,73153222	11,53764097	11,34837375	11,16359787	10,98318497
14	12,54338150	12,32200587	12,10624877	11,89593924	11,69091217
15	13,34323301	13,09288046	12,84926350	12,61216551	12,38137773
16	14,13126405	13,85049677	13,57770931	13,31263131	13,05500266
17	14,90764931	14,59508282	14,29187188	13,99768343	13,71219772
18	15,67256089	15,32686272	14,99203125	14,66766106	14,35336363
19	16,42616837	16,04605673	15,67846201	15,32289590	14,97589134
20	17,16863879	16,75288130	16,35143334	15,96371237	15,58916229
21	17,90013673	17,44754919	17,01120916	16,59042775	16,18454857
22	18,62082437	18,13026948	17,65804820	17,20335232	16,76541324
23	19,33086145	18,80124764	18,29220412	17,80278955	17,33211048
24	20,03040537	19,46068565	18,91392560	18,38903624	17,88498583
25	20,71961120	20,10878196	19,52345647	18,96238263	18,42437642
26	21,39863172	20,74573166	20,12103576	19,52311260	18,95061114
27	22,06761746	21,37172644	20,70689780	20,07150376	19,46401087
28	22,72671671	21,98695474	21,28127236	20,60782764	19,96488866
29	23,37607558	22,59160171	21,84438466	21,13234977	20,45354991
30	24,01583801	23,18584934	22,39645555	21,64532985	20,93029259
31	24,64614582	23,76987650	22,93770152	22,14702186	21,39540741
32	25,26713874	24,34385897	23,46833482	22,63767419	21,84917796
33	25,87895442	24,90796951	23,98856355	23,11752977	22,29188094
34	26,48172849	25,46237789	24,49859172	23,58682618	22,72378628
35	27,07559458	26,00725100	24,99861933	24,04579577	23,14515734
36	27,66068431	26,54275283	25,48884248	24,49466579	23,55625107
37	28,23712740	27,06904455	25,96945341	24,93365848	23,95731812
38	28,80505163	27,58628457	26,44064060	25,36299118	24,34860304
39	29,36458288	28,09462857	26,90258883	25,78287646	24,73034443
40	29,91584520	28,59422955	27,35547924	26,19352221	25,10277505
41	30,45896079	29,08523789	27,79948945	26,59513174	25,46612200
42	30,99405004	29,56780136	28,23479358	26,98790390	25,82060683
43	31,52123157	30,04206522	28,66156233	27,37203316	26,16644569
44	32,04062223	30,50817221	29,07996307	27,74770969	26,50384945
45	32,55233718	30,96626261	29,49015987	28,11511950	26,83302386
46	33,05648983	31,41647431	29,89231360	28,47444450	27,15416962
47	33,55319195	31,85894281	30,28658196	28,82586259	27,46748255
48	34,04255365	32,29380129	30,67311957	29,16954777	27,77315371
49	34,52468339	32,72118063	31,05207801	29,50567019	28,07136947
50	34,99968807	33,14120946	31,42360589	29,83439627	28,36231168

$$IV_p^n$$

	2,75%	3,00%	3,25%	3,50%	3,75%
1	0,97323601	0,97087379	0,96852300	0,96618357	0,96385542
2	1,92042434	1,91346970	1,90655981	1,89969428	1,89287270
3	2,84226213	2,82861135	2,81507003	2,80163698	2,78831103
4	3,73942787	3,71709840	3,69498308	3,67307921	3,65138413
5	4,61258186	4,57970719	4,54719911	4,51505238	4,48326181
6	5,46236678	5,41719144	5,37258994	5,32855302	5,28507162
7	6,28940806	6,23028296	6,17199994	6,11454398	6,05790036
8	7,09431441	7,01969219	6,94624692	6,87395554	6,80279553
9	7,87767826	7,78610892	7,69612292	7,60768651	7,52076677
10	8,64007616	8,53020284	8,42239508	8,31660532	8,21278725
11	9,38206926	9,25262411	9,12580637	9,00155104	8,87979494
12	10,10420366	9,95400399	9,80707639	9,66333433	9,52269392
13	10,80701086	10,63495533	10,46690207	10,30273849	10,14235558
14	11,49100814	11,29607314	11,10595842	10,92052028	10,73961984
15	12,15669892	11,93793509	11,72489920	11,51741090	11,31529623
16	12,80457315	12,56110203	12,32435758	12,09411681	11,87016504
17	13,43510769	13,16611847	12,90494681	12,65132059	12,40497835
18	14,04876661	13,75351308	13,46726083	13,18968173	12,92046106
19	14,64600157	14,32379911	14,01187490	13,70983742	13,41731187
20	15,22725213	14,87747486	14,53934615	14,21240330	13,89620421
21	15,79294612	15,41502414	15,05021419	14,69797420	14,35778719
22	16,34349987	15,93691664	15,54500163	15,16712484	14,80268645
23	16,87931861	16,44360839	16,02421466	15,62041047	15,23150501
24	17,40079670	16,93554212	16,48834349	16,05836760	15,64482411
25	17,90831795	17,41314769	16,93786295	16,48151459	16,04320396
26	18,40225592	17,87684242	17,37323288	16,89035226	16,42718454
27	18,88297413	18,32703147	17,79489867	17,28536451	16,79728630
28	19,35082640	18,76410823	18,20329169	17,66701885	17,15401089
29	19,80615708	19,18845459	18,59882973	18,03576700	17,49784183
30	20,24930130	19,60044135	18,98191741	18,39204541	17,82924513
31	20,68058520	20,00042849	19,35294664	18,73627576	18,14867001
32	21,10032623	20,38876553	19,71229699	19,06886547	18,45654941
33	21,50883332	20,76579178	20,06033607	19,39020818	18,75330063
34	21,90640712	21,13183668	20,39741992	19,70068423	19,03932591
35	22,29334026	21,48722007	20,72389339	20,00066110	19,31501293
36	22,66991753	21,83225250	21,04009045	20,29049381	19,58073535
37	23,03641609	22,16723544	21,34633457	20,57052542	19,83685335
38	23,39310568	22,49246159	21,64293905	20,84108736	20,08371407
39	23,74024884	22,80821513	21,93020732	21,10249987	20,32165212
40	24,07810106	23,11477197	22,20843324	21,35507234	20,55098999
41	24,40691101	23,41239997	22,47790144	21,59910371	20,77203855
42	24,72692069	23,70135920	22,73888759	21,83488281	20,98509739
43	25,03836563	23,98190213	22,99165869	22,06268870	21,19045532
44	25,34147507	24,25427392	23,23647330	22,28279102	21,38839067
45	25,63647209	24,51871254	23,47358189	22,49545026	21,57917173
46	25,92357381	24,77544907	23,70322701	22,70091813	21,76305709
47	26,20299154	25,02470783	23,92564360	22,89943780	21,94029599
48	26,47493094	25,26670664	24,14105917	23,09124425	22,11112866
49	26,73959215	25,50165693	24,34969412	23,27656450	22,27578666
50	26,99716998	25,72976401	24,55176185	23,45561787	22,43449317

$$IV_p^n$$

	4,00%	4,25%	4,50%	4,75%	5,00%
1	0,96153846	0,95923261	0,95693780	0,95465394	0,95238095
2	1,88609467	1,87935982	1,87266775	1,86601808	1,85941043
3	2,77509103	2,76197585	2,74896435	2,73605545	2,72324803
4	3,62989522	3,60860993	3,58752570	3,56664004	3,54595050
5	4,45182233	4,42072895	4,38997674	4,35956090	4,32947667
6	5,24213686	5,19974000	5,15787248	5,11652592	5,07569207
7	6,00205467	5,94699280	5,89270094	5,83916556	5,78637340
8	6,73274487	6,66378206	6,59588607	6,52903633	6,46321276
9	7,43533161	7,35134970	7,26879050	7,18762418	7,10782168
10	8,11089578	8,01088700	7,91271818	7,81634767	7,72173493
11	8,76047671	8,64353669	8,52891692	8,41656102	8,30641422
12	9,38507376	9,25039491	9,11858078	8,98955706	8,86325164
13	9,98564785	9,83251310	9,68285242	9,53656998	9,39357299
14	10,56312293	10,39089986	10,22282528	10,05877803	9,89864094
15	11,11838743	10,92652265	10,73954573	10,55730599	10,37965804
16	11,65229561	11,44030949	11,23401505	11,03322768	10,83776956
17	12,16566885	11,93315059	11,70719143	11,48756819	11,27406625
18	12,6592697	12,40589985	12,15999180	11,92130615	11,68958690
19	13,13393940	12,85937636	12,59329359	12,33537580	12,08532086
20	13,59032634	13,29436581	13,00793645	12,73066902	12,46221034
21	14,02915995	13,71162188	13,40472388	13,10803725	12,82115271
22	14,45111533	14,11186751	13,78442476	13,46829332	13,16300258
23	14,85684167	14,49579617	14,14777489	13,81221319	13,48857388
24	15,24696314	14,86407307	14,49547837	14,14053765	13,79864179
25	15,62207994	15,21733627	14,82820896	14,45397389	14,09394457
26	15,98276918	15,55619787	15,14661145	14,75319703	14,37518530
27	16,32958575	15,88124496	15,45130282	15,03885158	14,64303362
28	16,66306322	16,19304072	15,74287351	15,31155282	14,89812726
29	16,98371463	16,49212539	16,02188853	15,57188814	15,14107358
30	17,29203330	16,77901717	16,28888854	15,82041827	15,37245103
31	17,58849356	17,05421311	16,54439095	16,05767854	15,59281050
32	17,87355150	17,31819003	16,78889086	16,28417999	15,80267667
33	18,14764567	17,57140531	17,02286207	16,50041049	16,00254921
34	18,41119776	17,81429766	17,24675796	16,70683579	16,19290401
35	18,66461323	18,04728792	17,46101240	16,90390052	16,37419429
36	18,90828195	18,27077978	17,66604058	17,09202913	16,54685171
37	19,14257880	18,48516046	17,86223979	17,27162686	16,71128734
38	19,36786423	18,69080140	18,04999023	17,44308053	16,86789271
39	19,58448484	18,88805890	18,22965572	17,60675946	17,01704067
40	19,79277388	19,07727472	18,40158442	17,76301619	17,15908635
41	19,99305181	19,25877671	18,56610949	17,91218729	17,29436796
42	20,18562674	19,43287934	18,72354975	18,05459407	17,42320758
43	20,37079494	19,59988426	18,87421029	18,19054327	17,54591198
44	20,54884129	19,76008082	19,01838305	18,32032770	17,66277331
45	20,72003970	19,91374659	19,15634742	18,44422692	17,77406982
46	20,88465356	20,06114781	19,28837074	18,56250780	17,88006650
47	21,04293612	20,20253987	19,41470884	18,67542511	17,98101571
48	21,19513088	20,33816774	19,53560654	18,78322206	18,07715782
49	21,34147200	20,46826642	19,65129813	18,88613085	18,16872173
50	21,48218462	20,59306131	19,76200778	18,98437312	18,25592546

$$IV_p^n$$

	5,25%	5,50%	5,75%	6,00%	6,25%
1	0,95011876	0,94786730	0,94562648	0,94339623	0,94117647
2	1,85284443	1,84631971	1,83983591	1,83339267	1,82698962
3	2,71054103	2,69793338	2,68542403	2,67301195	2,66069611
4	3,52545466	3,50515012	3,48503454	3,46510561	3,44536105
5	4,29971939	4,27028448	4,24116742	4,21236379	4,18386922
6	5,03536284	4,99553031	4,95618668	4,91732433	4,87893574
7	5,73431149	5,68296712	5,63232783	5,58238144	5,53311599
8	6,39839571	6,33456599	6,27170481	6,20979381	6,14881505
9	7,02935460	6,95219525	6,87631660	6,80169227	6,72829652
10	7,62884047	7,53762583	7,44805352	7,36008705	7,27369084
11	8,19842325	8,09253633	7,98870310	7,88687458	7,78700314
12	8,73959454	8,61851785	8,49995565	8,38384394	8,27012060
13	9,25377153	9,11707853	8,98340960	8,85268296	8,72481939
14	9,74230074	9,58964790	9,44057645	9,29498393	9,15277119
15	10,20646151	10,03758094	9,87288553	9,71224899	9,55554936
16	10,64746937	10,46216203	10,28168845	10,10589527	9,93463469
17	11,06647921	10,86460856	10,66826331	10,47725969	10,29142088
18	11,46458833	11,24607447	11,03381873	10,82760348	10,62721966
19	11,84283926	11,60765352	11,37949762	11,15811649	10,94326556
20	12,20222258	11,95038248	11,70638072	11,46992122	11,24072053
21	12,54367941	12,27524406	12,01549005	11,76407662	11,52067814
22	12,86810395	12,58316973	12,30779201	12,04158172	11,78416766
23	13,17634580	12,87504239	12,58420048	12,30337898	12,03215780
24	13,46921216	13,15169895	12,84557965	12,55035753	12,26556028
25	13,74746999	13,41393266	13,09274671	12,78335616	12,48523321
26	14,01184797	13,66249541	13,32647443	13,00316619	12,69198419
27	14,26303845	13,89809991	13,54749355	13,21053414	12,88657336
28	14,50169924	14,12142172	13,75649509	13,40616428	13,06971610
29	14,72845533	14,33310116	13,95413247	13,59072102	13,24208574
30	14,94390055	14,53374517	14,14102361	13,76483115	13,40431599
31	15,14859910	14,72392907	14,31775282	13,92908599	13,55700329
32	15,34308703	14,90419817	14,48487265	14,08404339	13,70070898
33	15,52787367	15,07506936	14,64290558	14,23022961	13,83596139
34	15,70344291	15,23703257	14,79234570	14,36814114	13,96325778
35	15,87025455	15,39055220	14,93366024	14,49824636	14,08306615
36	16,02874541	15,53606843	15,06729100	14,62098713	14,19582696
37	16,17933056	15,67399851	15,19365579	14,73678031	14,30195479
38	16,32240433	15,80473793	15,31314969	14,84601916	14,40183980
39	16,45834141	15,92866154	15,42614628	14,94907468	14,49584922
40	16,58749778	16,04612469	15,53299884	15,04629687	14,58432868
41	16,71021166	16,15746416	15,63404146	15,13801592	14,66760346
42	16,82680443	16,26299920	15,72959003	15,22454332	14,74597973
43	16,93758141	16,36303242	15,81994329	15,30617294	14,81974563
44	17,04283269	16,45785063	15,90538373	15,38318202	14,88917236
45	17,14283391	16,54772572	15,98617847	15,45583209	14,95451516
46	17,23784695	16,63291537	16,06258011	15,52436990	15,01601427
47	17,32812061	16,71366386	16,13482753	15,58902821	15,07389578
48	17,41389132	16,79020271	16,20314660	15,65002661	15,12837250
49	17,49538368	16,86275139	16,26775092	15,70757227	15,17964471
50	17,57281109	16,93151790	16,32884248	15,76186064	15,22790090

IVⁿ_p

	6,50%	6,75%	7,00%	7,25%	7,50%
1	0,93896714	0,93676815	0,93457944	0,93240093	0,93023256
2	1,82062642	1,81430272	1,80801817	1,80177243	1,79556517
3	2,64847551	2,63634915	2,62431604	2,61237523	2,60052574
4	3,42579860	3,40641606	3,38721126	3,36818203	3,34932627
5	4,15567944	4,12779022	4,10019744	4,07289700	4,04588490
6	4,84101356	4,80355056	4,76653966	4,72997389	4,69384642
7	5,48451977	5,43658132	5,38928940	5,34263300	5,29660132
8	6,08875096	6,02958438	5,97129851	5,91387692	5,85730355
9	6,65610419	6,58509075	6,51523225	6,44650529	6,37888703
10	7,18883022	7,10547143	7,02358154	6,94312847	6,86408096
11	7,68904246	7,59294748	7,49867434	7,40618040	7,31542415
12	8,15872532	8,04959951	7,94268630	7,83793044	7,73527827
13	8,59974208	8,47737659	8,35765074	8,24049458	8,12584026
14	9,01384233	8,87810453	8,74546799	8,61584576	8,48915373
15	9,40266885	9,25349371	9,10791401	8,96582356	8,82711975
16	9,76776418	9,60514633	9,44664860	9,29214318	9,14150674
17	10,11057670	9,93456331	9,76322299	9,59640389	9,43395976
18	10,43246638	10,24315064	10,05908691	9,88009687	9,70600908
19	10,73471022	10,53222542	10,33559524	10,14461247	9,95907821
20	11,01850725	10,80302147	10,59401425	10,39124705	10,19449136
21	11,28498333	11,05669459	10,83552733	10,62120938	10,41348033
22	11,53519562	11,29432748	11,06124050	10,83562646	10,61719101
23	11,77013673	11,51693441	11,27218738	11,03554914	10,80668931
24	11,99073871	11,72546549	11,46933400	11,22195724	10,98296680
25	12,19787673	11,92081076	11,65358318	11,39576433	11,14694586
26	12,39237251	12,10380399	11,82577867	11,55782222	11,29948452
27	12,57499766	12,27522622	11,98670904	11,70892515	11,44138095
28	12,74647668	12,43580911	12,13711125	11,84981366	11,57337763
29	12,90748984	12,58623804	12,27767407	11,98117823	11,69616524
30	13,05867591	12,72715507	12,40904118	12,10366269	11,81038627
31	13,20063465	12,85916166	12,53181419	12,21786731	11,91663839
32	13,33392925	12,98282123	12,64655532	12,32435180	12,01547757
33	13,45908850	13,09866157	12,75379002	12,42363805	12,10742099
34	13,57660892	13,20717712	12,85400936	12,51621263	12,19294976
35	13,68695673	13,30883102	12,94767230	12,60252926	12,27251141
36	13,79056970	13,40405716	13,03520776	12,68301096	12,34652224
37	13,88785887	13,49326198	13,11701660	12,75805218	12,41536952
38	13,97921021	13,57682621	13,19347345	12,82802068	12,47941351
39	14,06498611	13,65510652	13,26492846	12,89325938	12,53898931
40	14,14552687	13,72843702	13,33170884	12,95408800	12,59440866
41	14,22115199	13,79713070	13,39412041	13,01080466	12,64596155
42	14,29216149	13,86148075	13,45244898	13,06368733	12,69391772
43	14,35883708	13,92176183	13,50696167	13,11299518	12,73852811
44	14,42144327	13,97823122	13,55790810	13,15896986	12,78002615
45	14,48022842	14,03112995	13,60552159	13,20183670	12,81862898
46	14,53542575	14,08068379	13,65002018	13,24180578	12,85453858
47	14,58725422	14,12710425	13,69160764	13,27907299	12,88794287
48	14,63591946	14,17058947	13,73047443	13,31382097	12,91901662
49	14,68161451	14,21132503	13,76679853	13,34622002	12,94792244
50	14,72452067	14,24948480	13,80074629	13,37642892	12,97481157

IVⁿ_p

	7,75%	8,00%	8,25%	8,50%	8,75%
1	0,92807425	0,92592593	0,92378753	0,92165899	0,91954023
2	1,78939605	1,78326475	1,77717093	1,771111427	1,76509446
3	2,58876664	2,57709699	2,56551587	2,55402237	2,54261560
4	3,33064189	3,31212684	3,29377909	3,27559666	3,25757756
5	4,01915721	3,99271004	3,96653958	3,94064208	3,91501385
6	4,65815054	4,62287966	4,58802732	4,55358717	4,51955297
7	5,25118380	5,20637006	5,16214995	5,11851352	5,07545100
8	5,80156269	5,74663894	5,69251728	5,63918297	5,58662161
9	6,31235516	6,24688791	6,18246400	6,11906264	6,05666355
10	6,78640850	6,71008140	6,63507067	6,56134806	6,48888602
11	7,22636520	7,13896426	7,05318306	6,96898439	6,88633198
12	7,63467768	7,53607802	7,43943008	7,34468607	7,25179952
13	8,01362198	7,90377594	7,79624026	7,69095490	7,58786163
14	8,36531042	8,24423698	8,12585705	8,01009668	7,89688425
15	8,69170341	8,55947869	8,43035294	8,30423658	8,18104299
16	8,99462033	8,85136916	8,71164244	8,57533325	8,44233838
17	9,27574973	9,12163811	8,97149417	8,82519194	8,68261001
18	9,53665868	9,37188714	9,21154196	9,05547644	8,90354943
19	9,77880156	9,60359920	9,43329511	9,26772022	9,10671212
20	10,00352813	9,81814741	9,63814791	9,46333661	9,29352839
21	10,21209107	10,01680316	9,82738837	9,64362821	9,46531346
22	10,40565297	10,20074366	10,00220634	9,80979559	9,62327675
23	10,58529278	10,37105895	10,16370101	9,96294524	9,76853034
24	10,75201186	10,52875828	10,31288777	10,10409700	9,90209686
25	10,90673954	10,67477619	10,45070464	10,23419078	10,02491666
26	11,05033832	10,80997795	10,57801814	10,35409288	10,13785440
27	11,18360865	10,93516477	10,69562877	10,46460174	10,24170519
28	11,30729341	11,05107849	10,80427600	10,56645321	10,33720018
29	11,42208205	11,15840601	10,90464295	10,66032554	10,42501166
30	11,52861443	11,25778334	10,99736070	10,74684382	10,50575785
31	11,62748439	11,34979939	11,08301219	10,82658416	10,58000721
32	11,71924306	11,43499944	11,16213597	10,90007757	10,64828250
33	11,80440191	11,51388837	11,23522954	10,96781343	10,71106436
34	11,88343565	11,58693367	11,30275246	11,03024279	10,76879482
35	11,95678482	11,65456822	11,36512929	11,08778137	10,82188029
36	12,02485830	11,71719279	11,42275223	11,14081233	10,87069452
37	12,08803555	11,77517851	11,47598359	11,18968878	10,91558117
38	12,14666872	11,82886899	11,52515805	11,23473620	10,95685625
39	12,20108466	11,87858240	11,57058480	11,27625457	10,99481034
40	12,25158669	11,92461333	11,61254947	11,31452034	11,02971066
41	12,29845633	11,96723457	11,65131591	11,34978833	11,06180291
42	12,34195483	12,00669867	11,68712786	11,38229339	11,09131302
43	12,38232467	12,04323951	11,72021049	11,41225197	11,11844875
44	12,41979087	12,07707362	11,75077182	11,43986357	11,14340115
45	12,45456230	12,10840150	11,77900399	11,46531205	11,16634589
46	12,48683276	12,13740880	11,80508452	11,48876686	11,18744449
47	12,51678214	12,16426741	11,82917738	11,51038420	11,20684551
48	12,54457739	12,18913649	11,85143407	11,53030802	11,22468553
49	12,57037345	12,21216341	11,87199452	11,54867099	11,24109014
50	12,59431411	12,23348464	11,89098801	11,56559538	11,25617484

IVⁿ_p

	9,00%	9,25%	9,50%	9,75%	10,00%
1	0,91743119	0,91533181	0,91324201	0,91116173	0,90909091
2	1,75911119	1,75316413	1,74725298	1,74137743	1,73553719
3	2,53129467	2,52005870	2,50890683	2,49783821	2,48685199
4	3,23971988	3,22202169	3,20448112	3,18709632	3,16986545
5	3,88965126	3,86455075	3,83970879	3,81512193	3,79078677
6	4,48591859	4,45267803	4,41982538	4,38735483	4,35526070
7	5,03295284	4,99100964	4,94961222	4,90875156	4,86841882
8	5,53481911	5,48376168	5,43343581	5,38382830	5,33492620
9	5,99524689	5,93479330	5,87528385	5,81670004	5,75902382
10	6,41765770	6,34763689	6,27879803	6,21111621	6,14456711
11	6,80519055	6,72552576	6,64730414	6,57049313	6,49506101
12	7,16072528	7,07141946	6,98383940	6,89794363	6,81369182
13	7,48690392	7,38802696	7,29117753	7,19630399	7,10335620
14	7,78615039	7,67782788	7,57185163	7,46815853	7,36668746
15	8,06068843	7,94309188	7,82817500	7,71586199	7,60607951
16	8,31255819	8,18589646	8,06226028	7,94155990	7,82370864
17	8,54363137	8,40814321	8,27603678	8,14720720	8,02155331
18	8,75562511	8,61157274	8,47126647	8,33458514	8,20141210
19	8,95011478	8,79777825	8,64955842	8,50531676	8,36492009
20	9,12854567	8,96821808	8,81238212	8,66088088	8,51356372
21	9,29224373	9,12422707	8,96107956	8,80262494	8,64869429
22	9,44242544	9,26702707	9,09687631	8,93177671	8,77154026
23	9,58020683	9,39773645	9,22089161	9,04945486	8,88321842
24	9,70661177	9,51737890	9,33414759	9,15667869	8,98474402
25	9,82257960	9,62689144	9,43757770	9,25437694	9,07704002
26	9,92897211	9,72713175	9,53203443	9,34339585	9,16094547
27	10,02657992	9,81888490	9,61829629	9,42450646	9,23722316
28	10,11612837	9,90286947	9,69707423	9,49841136	9,30656651
29	10,19828291	9,97974323	9,76901756	9,56575067	9,36960591
30	10,27365404	10,05010822	9,83471924	9,62710767	9,42691447
31	10,34280187	10,11451553	9,89472076	9,68301382	9,47901315
32	10,40624025	10,17346959	9,94951668	9,73395337	9,52637559
33	10,46444060	10,22743212	9,99955861	9,78036753	9,56943236
34	10,51783541	10,27682574	10,04525901	9,82265835	9,60857487
35	10,56682148	10,32203729	10,08699453	9,86119211	9,64415897
36	10,61176282	10,36342086	10,12510916	9,89630261	9,67650816
37	10,65299342	10,40130056	10,15991704	9,92829395	9,70591651
38	10,69081965	10,43597305	10,19170506	9,95744323	9,73265137
39	10,72552261	10,46770989	10,22073521	9,98400295	9,75695579
40	10,75736020	10,49675962	10,24724677	10,00820314	9,77905072
41	10,78656899	10,52334977	10,27145824	10,03025343	9,79913702
42	10,81336604	10,54768858	10,29356917	10,05034481	9,81739729
43	10,83795050	10,56996666	10,31376180	10,06865131	9,83399753
44	10,86050504	10,59035850	10,33220255	10,08533149	9,84908867
45	10,88119729	10,60902380	10,34904343	10,10052983	9,86280788
46	10,90018100	10,62610874	10,36442322	10,11437798	9,87527989
47	10,91759725	10,64174713	10,37846870	10,12699588	9,88661808
48	10,93357546	10,65606145	10,39129561	10,13849283	9,89692553
49	10,94823436	10,66916379	10,40300969	10,14896841	9,90629594
50	10,96168290	10,68115679	10,41370748	10,15851336	9,91481449

$$IV_p^n$$

	11,00%	12,00%	13,00%	14,00%	15,00%
1	0,90090090	0,89285714	0,88495575	0,87719298	0,86956522
2	1,71252333	1,69005102	1,66810244	1,64666051	1,62570888
3	2,44371472	2,40183127	2,36115260	2,32163203	2,28322512
4	3,10244569	3,03734935	2,97447133	2,91371230	2,85497836
5	3,69589702	3,60477620	3,51723126	3,43308097	3,35215510
6	4,23053785	4,11140732	3,99754979	3,88866752	3,78448269
7	4,71219626	4,56375654	4,42261043	4,28830484	4,16041973
8	5,14612276	4,96763977	4,79877029	4,63886389	4,48732151
9	5,53704753	5,32824979	5,13165513	4,94637184	4,77158392
10	5,88923201	5,65022303	5,42624348	5,21611565	5,01876863
11	6,20651533	5,93769913	5,68694113	5,46723302	5,23371185
12	6,49235615	6,19437423	5,91764702	5,66029213	5,42061900
13	6,74987040	6,42354842	6,12181152	5,84236151	5,58314696
14	6,98186523	6,62816823	6,30248807	6,00207150	5,72447561
15	7,19086958	6,81086449	6,46237882	6,14216799	5,84737010
16	7,37916178	6,97398615	6,60387506	6,26505964	5,95423487
17	7,54879440	7,11963049	6,72909298	6,37285933	6,04716076
18	7,70161657	7,24967008	6,83990529	6,46742046	6,12796587
19	7,83929421	7,36577686	6,93796928	6,55036883	6,19823119
20	7,96332812	7,46944362	7,02475158	6,62313055	6,25933147
21	8,07507038	7,56200324	7,10155007	6,68695662	6,31246215
22	8,17573908	7,64464575	7,16951334	6,74294441	6,35866274
23	8,26643160	7,71843370	7,22965782	6,79205650	6,39883717
24	8,34813658	7,78431581	7,28288303	6,83513728	6,43377145
25	8,42174466	7,84313911	7,32998498	6,87292744	6,46414909
26	8,48805826	7,89565992	7,37166812	6,90607670	6,49056442
27	8,54780023	7,94255350	7,40855586	6,93515500	6,51353428
28	8,60162183	7,98442277	7,44119988	6,96066228	6,53350807
29	8,65010976	8,02180604	7,47008839	6,98303709	6,55087658
30	8,69379257	8,05518397	7,49565344	7,00266411	6,56597964
31	8,73314646	8,08498569	7,51827738	7,01988080	6,57911273
32	8,76860042	8,11159436	7,53829857	7,03498316	6,59053281
33	8,80054092	8,13535211	7,55601643	7,04823084	6,60046331
34	8,82931614	8,15656438	7,57169596	7,05985161	6,60909853
35	8,85523977	8,17550391	7,58557164	7,07004528	6,61660742
36	8,87859438	8,19241421	7,59785101	7,07898708	6,62313689
37	8,89963458	8,20751269	7,60871771	7,08683078	6,62881468
38	8,91858971	8,22099347	7,61833426	7,09371121	6,63375190
39	8,93566641	8,23302988	7,62684447	7,09974667	6,63804513
40	8,95105082	8,24377668	7,63437564	7,10504094	6,64177837
41	8,96491065	8,25337204	7,64104039	7,10968504	6,64502467
42	8,97739698	8,26193932	7,64693840	7,11375880	6,64784754
43	8,98864593	8,26958868	7,65215787	7,11733228	6,65030221
44	8,99878011	8,27641846	7,65677688	7,12046692	6,65243670
45	9,00791001	8,28251648	7,66086450	7,12321659	6,65429279
46	9,01613515	8,28796115	7,66448185	7,12562859	6,65590677
47	9,02354518	8,29282245	7,66768306	7,12774438	6,65731024
48	9,03022088	8,29716290	7,67051598	7,12960033	6,65853064
49	9,03623503	8,30103831	7,67302299	7,13122836	6,65959186
50	9,04165318	8,30449849	7,67524158	7,13265646	6,66051466

$$IV_p^n$$

	16,00%	17,00%	18,00%	19,00%	20,00%
1	0,86206897	0,85470085	0,84745763	0,84033613	0,83333333
2	1,60523187	1,58521441	1,56564206	1,54650095	1,52777778
3	2,24588954	2,20958496	2,17427293	2,13991677	2,10648148
4	2,79818064	2,74323501	2,69006180	2,63858552	2,58873457
5	3,27429365	3,19934616	3,12717102	3,05763489	2,99061214
6	3,68473591	3,58918475	3,49760256	3,40977722	3,32551012
7	4,03856544	3,92238013	3,81152759	3,70569514	3,60459176
8	4,34359090	4,20716251	4,07756576	3,95436567	3,83715980
9	4,60654388	4,45056624	4,30302183	4,16333249	4,03096650
10	4,83322748	4,65860363	4,49408629	4,33893487	4,19247209
11	5,02864438	4,83641336	4,65600533	4,48649989	4,32706007
12	5,19710722	4,98838748	4,79322486	4,61050411	4,43921673
13	5,34233381	5,11827990	4,90951259	4,71470933	4,53268061
14	5,46752915	5,22929906	5,00806152	4,80227675	4,61056717
15	5,57545616	5,32418723	5,09157756	4,87586282	4,67547264
16	5,66849669	5,40528823	5,16235386	4,93769985	4,72956054
17	5,74870404	5,47460533	5,22233378	4,98966374	4,77463378
18	5,81784831	5,53385071	5,27316422	5,03333087	4,81219482
19	5,87745544	5,58448778	5,31624087	5,07002594	4,84349568
20	5,92884090	5,62776734	5,35274650	5,10086214	4,86957973
21	5,97313871	5,66475841	5,38368347	5,12677490	4,89131644
22	6,01132647	5,69637471	5,40990125	5,14855034	4,90943037
23	6,04424696	5,72339719	5,43211970	5,16684902	4,92452531
24	6,07262669	5,74649332	5,45094890	5,18222607	4,93710442
25	6,09709197	5,76623361	5,46690585	5,19514796	4,94758702
26	6,11818273	5,78310565	5,48042868	5,20600669	4,95632252
27	6,13636443	5,79752619	5,49188872	5,21513167	4,96360210
28	6,15203830	5,80985145	5,50160061	5,22279972	4,96966841
29	6,16555026	5,82038585	5,50983102	5,22924347	4,97472368
30	6,17719850	5,82938962	5,51680595	5,23465837	4,97893640
31	6,18724008	5,83708514	5,52271691	5,23920872	4,98244700
32	6,19589662	5,84366252	5,52772619	5,24303254	4,98537250
33	6,20335916	5,84928420	5,53197135	5,24624583	4,98781042
34	6,20979238	5,85408906	5,53556894	5,24894607	4,98984201
35	6,21533826	5,85819578	5,53861775	5,25121519	4,99153501
36	6,22011919	5,86170579	5,54120148	5,25312201	4,99294584
37	6,22424068	5,86470581	5,54339108	5,25472438	4,99412154
38	6,22779369	5,86726992	5,54524668	5,25607090	4,99510128
39	6,23085663	5,86946147	5,54681922	5,25720244	4,99591773
40	6,23349709	5,87133459	5,54815188	5,25815331	4,99659811
41	6,23577336	5,87293555	5,54928126	5,25895236	4,99716509
42	6,23773565	5,87430389	5,55023835	5,25962383	4,99763758
43	6,23942729	5,87547341	5,55104945	5,26018810	4,99803131
44	6,24088559	5,87647300	5,55173682	5,26066227	4,99835943
45	6,24214275	5,87732735	5,55231934	5,26106073	4,99863286
46	6,24322651	5,87805756	5,55281300	5,26139557	4,99886071
47	6,24416078	5,87868168	5,55323136	5,26167695	4,99905060
48	6,24496619	5,87921511	5,55358590	5,26191340	4,99920883
49	6,24566051	5,87967103	5,55388635	5,26211210	4,99934069
50	6,24625906	5,88006071	5,55414098	5,26227908	4,99945058

$$V_p^n$$

	0,25%	0,50%	0,75%	1,00%	1,25%
1	1,00250000	1,00500000	1,00750000	1,01000000	1,01250000
2	0,50187578	0,50375312	0,50563200	0,50751244	0,50939441
3	0,33500139	0,33667221	0,33834579	0,34002211	0,34170117
4	0,25156445	0,25313279	0,25470501	0,25628109	0,25786102
5	0,20150250	0,20300997	0,20452242	0,20603980	0,20756211
6	0,16812803	0,16959546	0,17106891	0,17254837	0,17403381
7	0,14428928	0,14572854	0,14717488	0,14862828	0,15008872
8	0,12641035	0,12782886	0,12925552	0,13069029	0,13213314
9	0,11250462	0,11390736	0,11531929	0,11674036	0,11817055
10	0,10138015	0,10277057	0,10417123	0,10558208	0,10700307
11	0,09227840	0,09365903	0,09505094	0,09645408	0,09786839
12	0,08469370	0,08606643	0,08745148	0,08884879	0,09025831
13	0,07827595	0,07964224	0,08102188	0,08241482	0,08382100
14	0,07277510	0,07413609	0,07551146	0,07690117	0,07830515
15	0,06800777	0,06936436	0,07073639	0,07212378	0,07352646
16	0,06383642	0,06518937	0,06655879	0,06794460	0,06934672
17	0,06015587	0,06150579	0,06287321	0,06425806	0,06566023
18	0,05688433	0,05823173	0,05959766	0,06098205	0,06238479
19	0,05395722	0,05530253	0,05666740	0,05805175	0,05945548
20	0,05132288	0,05266645	0,05403063	0,05541531	0,05682039
21	0,04893947	0,05028163	0,05164543	0,05303075	0,05443749
22	0,04677278	0,04811380	0,04947748	0,05086372	0,05227238
23	0,04479455	0,04613465	0,04749846	0,04888584	0,05029666
24	0,04298121	0,04432061	0,04568474	0,04707347	0,04848665
25	0,04131298	0,04265186	0,04401650	0,04540675	0,04682247
26	0,03977312	0,04111163	0,04247693	0,04386888	0,04528729
27	0,03834736	0,03968565	0,04105176	0,04244553	0,04386677
28	0,03702347	0,03836167	0,03972871	0,04112444	0,04254863
29	0,03579093	0,03712914	0,03849723	0,03989502	0,04132228
30	0,03464059	0,03597892	0,03734816	0,03874811	0,04017854
31	0,03356449	0,03490304	0,03627352	0,03767573	0,03910942
32	0,03255569	0,03389453	0,03526634	0,03667089	0,03810791
33	0,03160806	0,03294727	0,03432048	0,03572744	0,03716786
34	0,03071620	0,03205586	0,03343053	0,03483997	0,03628387
35	0,02987533	0,03121550	0,03259170	0,03400368	0,03545111
36	0,02908121	0,03042194	0,03179973	0,03321431	0,03466533
37	0,02833004	0,02967139	0,03105082	0,03246805	0,03392270
38	0,02761843	0,02896045	0,03034157	0,03176150	0,03321983
39	0,02694335	0,02828607	0,02966893	0,03109160	0,03255365
40	0,02630204	0,02764552	0,02903016	0,03045560	0,03192141
41	0,02569204	0,02703631	0,02842276	0,02985102	0,03132063
42	0,02511112	0,02645622	0,02784452	0,02927563	0,03074906
43	0,02455724	0,02590320	0,02729338	0,02872737	0,03020466
44	0,02402855	0,02537541	0,02676751	0,02820441	0,02968557
45	0,02352339	0,02487117	0,02626521	0,02770505	0,02919012
46	0,02304022	0,02438894	0,02578495	0,02722775	0,02871675
47	0,02257762	0,02392733	0,02532532	0,02677111	0,02826406
48	0,02213433	0,02348503	0,02488504	0,02633384	0,02783075
49	0,02170915	0,02306087	0,02446292	0,02591474	0,02741563
50	0,02130099	0,02265376	0,02405787	0,02551273	0,02701763

$$V_p^n$$

	1,50%	1,75%	2,00%	2,25%	2,50%
1	1,01500000	1,01750000	1,02000000	1,02250000	1,02500000
2	0,51127792	0,51316295	0,51504950	0,51693758	0,51882716
3	0,34338296	0,34506746	0,34675467	0,34844458	0,35013717
4	0,25944479	0,26103237	0,26262375	0,26421893	0,26581788
5	0,20908932	0,21062142	0,21215839	0,21370021	0,21524686
6	0,17552521	0,17702256	0,17852581	0,18003496	0,18154997
7	0,15155616	0,15303059	0,15451196	0,15600025	0,15749543
8	0,13358402	0,13504292	0,13650980	0,13798462	0,13946735
9	0,11960982	0,12105813	0,12251544	0,12398170	0,12545689
10	0,10843418	0,10987534	0,11132653	0,11278768	0,11425876
11	0,09929384	0,10073038	0,10217794	0,10363649	0,10510596
12	0,09167999	0,09311377	0,09455960	0,09601740	0,09748713
13	0,08524036	0,08667283	0,08811835	0,08957686	0,09104827
14	0,07972332	0,08115562	0,08260197	0,08406230	0,08553652
15	0,07494436	0,07637739	0,07782547	0,07928852	0,08076646
16	0,07076508	0,07219958	0,07365013	0,07511663	0,07659899
17	0,06707966	0,06851623	0,06996984	0,07144039	0,07292777
18	0,06380578	0,06524492	0,06670210	0,06817720	0,06967008
19	0,06087847	0,06232061	0,06378177	0,06526182	0,06676062
20	0,05824574	0,05969122	0,06115672	0,06264207	0,06414713
21	0,05586550	0,05731464	0,05878477	0,06027572	0,06178733
22	0,05370332	0,05515638	0,05663140	0,05812821	0,05964661
23	0,05173075	0,05318796	0,05466810	0,05617097	0,05769638
24	0,04992410	0,05138565	0,05287110	0,05438023	0,05591282
25	0,04826345	0,04972952	0,05122044	0,05273599	0,05427592
26	0,04673196	0,04820269	0,04969923	0,05122134	0,05276875
27	0,04531527	0,04679079	0,04829309	0,04982188	0,05137687
28	0,04400108	0,04548151	0,04698967	0,04852525	0,05008793
29	0,04277878	0,04426424	0,04577836	0,04732081	0,04889127
30	0,04163919	0,04312975	0,04464992	0,04619934	0,04777764
31	0,04057430	0,04207005	0,04359635	0,04515280	0,04673900
32	0,03957710	0,04107812	0,04261061	0,04417415	0,04576831
33	0,03864144	0,04014779	0,04168653	0,04325722	0,04485938
34	0,03776189	0,03927363	0,04081867	0,04239655	0,04400675
35	0,03693363	0,03845082	0,04000221	0,04158731	0,04320558
36	0,03615240	0,03767507	0,03923285	0,04082522	0,04245158
37	0,03541437	0,03694257	0,03850678	0,04010643	0,04174090
38	0,03471613	0,03624990	0,03782057	0,03942753	0,04107012
39	0,03405463	0,03559399	0,03717114	0,03878543	0,04043615
40	0,03342710	0,03497209	0,03655575	0,03817738	0,03983623
41	0,03283106	0,03438170	0,03597188	0,03760087	0,03926786
42	0,03226426	0,03382057	0,03541729	0,03705364	0,03872876
43	0,03172465	0,03328666	0,03488993	0,03653364	0,03821688
44	0,03121038	0,03277810	0,03438794	0,03603901	0,03773037
45	0,03071976	0,03229321	0,03390962	0,03556805	0,03726751
46	0,03025125	0,03183043	0,03345342	0,03511921	0,03682676
47	0,02980342	0,03138836	0,03301792	0,03469107	0,03640669
48	0,02937500	0,03096569	0,03260184	0,03428233	0,03600599
49	0,02896478	0,03056124	0,03220396	0,03389179	0,03562348
50	0,02857168	0,03017391	0,03182321	0,03351836	0,03525806

$$V_p^n$$

	2,75%	3,00%	3,25%	3,50%	3,75%
1	1,02750000	1,03000000	1,03250000	1,03500000	1,03750000
2	0,52071825	0,52261084	0,52450492	0,52640049	0,52829755
3	0,35183243	0,35353036	0,35523095	0,35693418	0,35864005
4	0,26742059	0,26902705	0,27063723	0,27225114	0,27386875
5	0,21679832	0,21835457	0,21991560	0,22148137	0,22305189
6	0,18307083	0,18459750	0,18612997	0,18766821	0,18921219
7	0,15899747	0,16050635	0,16202204	0,16354449	0,16507370
8	0,14095795	0,14245639	0,14396263	0,14547665	0,14699839
9	0,12694095	0,12843386	0,12993555	0,13144601	0,13296517
10	0,11573972	0,11723051	0,11873107	0,12024137	0,12176134
11	0,10658629	0,10807745	0,10957936	0,11109197	0,11261521
12	0,09896871	0,10046209	0,10196719	0,10348395	0,10501230
13	0,09253252	0,09402954	0,09553925	0,09706157	0,09859642
14	0,08702457	0,08852634	0,09004176	0,09157073	0,09311317
15	0,08225917	0,08376658	0,08528858	0,08682507	0,08837595
16	0,07809710	0,07961085	0,08114013	0,08268483	0,08424483
17	0,07443186	0,07595253	0,07748966	0,07904313	0,08061280
18	0,07118063	0,07270870	0,07425415	0,07581684	0,07739662
19	0,06827802	0,06981388	0,07136804	0,07294033	0,07453058
20	0,06567173	0,06721571	0,06877888	0,07036108	0,07196210
21	0,06331941	0,06487178	0,06644424	0,06803659	0,06964862
22	0,06118640	0,06274739	0,06432936	0,06593207	0,06755531
23	0,05924410	0,06081390	0,06240555	0,06401880	0,06565339
24	0,05746863	0,05904742	0,06064891	0,06227283	0,06391890
25	0,05583997	0,05742787	0,05903933	0,06067404	0,06233169
26	0,05434116	0,05593829	0,05755981	0,05920540	0,06087470
27	0,05295776	0,05456421	0,05619588	0,05785241	0,05953343
28	0,05167738	0,05329323	0,05493512	0,05660265	0,05829540
29	0,05048935	0,05211467	0,05376682	0,05544538	0,05714991
30	0,04938442	0,05101926	0,05268172	0,05437133	0,05608762
31	0,04835453	0,04999893	0,05167172	0,05337240	0,05510046
32	0,04739263	0,04904662	0,05072976	0,05244150	0,05418131
33	0,04649253	0,04815612	0,04984961	0,05157242	0,05332395
34	0,04564875	0,04732196	0,04902581	0,05075966	0,05252287
35	0,04485645	0,04653929	0,04825348	0,04999835	0,05177320
36	0,04411132	0,04580379	0,04752831	0,04928416	0,05107060
37	0,04340953	0,04511162	0,04684645	0,04861325	0,05041122
38	0,04274764	0,04445934	0,04620445	0,04798214	0,04979159
39	0,04212256	0,04384385	0,04559920	0,04738775	0,04920860
40	0,04153151	0,04326238	0,04502794	0,04682728	0,04865946
41	0,04097200	0,04271241	0,04448814	0,04629822	0,04814164
42	0,04044175	0,04219167	0,04397753	0,04579828	0,04765286
43	0,03993871	0,04169811	0,04349403	0,04532539	0,04719106
44	0,03946100	0,04122985	0,04303579	0,04487768	0,04675434
45	0,03900693	0,04078518	0,04260108	0,04445343	0,04634098
46	0,03857493	0,04036254	0,04218835	0,04405108	0,04594943
47	0,03816358	0,03996051	0,04179616	0,04366919	0,04557824
48	0,03777158	0,03957777	0,04142320	0,04330646	0,04522609
49	0,03739773	0,03921314	0,04106828	0,04296167	0,04489179
50	0,03704092	0,03886549	0,04073027	0,04263371	0,04457422

$$V_p^n$$

	4,00%	4,25%	4,50%	4,75%	5,00%
1	1,04000000	1,04250000	1,04500000	1,04750000	1,05000000
2	0,53019608	0,53209608	0,53399756	0,53590049	0,53780488
3	0,36034854	0,36205965	0,36377336	0,36548967	0,36720856
4	0,27549005	0,27711502	0,27874365	0,28037592	0,28201183
5	0,22462711	0,22620704	0,22779164	0,22938090	0,23097480
6	0,19076190	0,19231731	0,19387839	0,19544512	0,19701747
7	0,16660961	0,16815221	0,16970147	0,17125735	0,17281982
8	0,14852783	0,15006493	0,15160965	0,15316196	0,15472181
9	0,13449299	0,13602944	0,13757447	0,13912803	0,14069008
10	0,12329094	0,12483012	0,12637882	0,12793699	0,12950457
11	0,11414904	0,11569338	0,11724818	0,11881337	0,12038889
12	0,10655217	0,10810349	0,10966619	0,11124019	0,11282541
13	0,10014373	0,10170340	0,10327535	0,10485950	0,10645577
14	0,09466897	0,09623806	0,09782032	0,09941565	0,10102397
15	0,08994110	0,09152043	0,09311381	0,09472113	0,09634229
16	0,08582000	0,08741022	0,08901537	0,09063531	0,09226991
17	0,08219852	0,08380017	0,08541758	0,08705063	0,08869914
18	0,07899333	0,08060681	0,08223690	0,08388343	0,08554622
19	0,07613862	0,07776427	0,07940734	0,08106766	0,08274501
20	0,07358175	0,07521983	0,07687614	0,07855047	0,08024259
21	0,07128011	0,07293083	0,07460057	0,07628907	0,07799611
22	0,06919881	0,07086234	0,07254565	0,07424846	0,07597051
23	0,06730906	0,06898552	0,07068249	0,07239969	0,07413682
24	0,06558683	0,06727631	0,06898703	0,07071867	0,07247090
25	0,06401196	0,06571452	0,06743903	0,06918513	0,07095246
26	0,06256738	0,06428306	0,06602137	0,06778192	0,06956432
27	0,06123854	0,06296736	0,06471946	0,06649444	0,06829186
28	0,06001298	0,06175492	0,06352081	0,06531016	0,06712253
29	0,05887993	0,06063500	0,06241461	0,06421829	0,06604551
30	0,05783010	0,05959825	0,06139154	0,06320945	0,06505144
31	0,05685535	0,05863654	0,06044345	0,06227550	0,06413212
32	0,05594859	0,05774275	0,05956320	0,06140929	0,06328042
33	0,05510357	0,05691064	0,05874453	0,06060455	0,06249004
34	0,05431477	0,05613469	0,05798191	0,05985574	0,06175545
35	0,05357732	0,05540999	0,05727045	0,05915794	0,06107171
36	0,05288688	0,05473220	0,05660578	0,05850680	0,06043446
37	0,05223957	0,05409745	0,05598402	0,05789843	0,05983979
38	0,05163192	0,05350225	0,05540169	0,05732932	0,05928423
39	0,05106083	0,05294350	0,05485567	0,05679637	0,05876462
40	0,05052349	0,05241839	0,05434315	0,05629675	0,05827816
41	0,05001738	0,05192438	0,05386158	0,05582791	0,05782229
42	0,04954020	0,05145918	0,05340868	0,05538756	0,05739471
43	0,04908989	0,05102071	0,05298235	0,05497362	0,05699333
44	0,04866454	0,05060708	0,05258071	0,05458418	0,05661625
45	0,04826246	0,05021657	0,05220202	0,05421751	0,05626173
46	0,04788205	0,04984760	0,05184471	0,05387203	0,05592820
47	0,04752189	0,04949873	0,05150734	0,05354630	0,05561421
48	0,04718065	0,04916864	0,05118858	0,05323900	0,05531843
49	0,04685712	0,04885612	0,05088722	0,05294891	0,05503965
50	0,04655020	0,04856005	0,05060215	0,05267490	0,05477674

$$V_p^n$$

	5,25%	5,50%	5,75%	6,00%	6,25%
1	1,05250000	1,05500000	1,05750000	1,06000000	1,06250000
2	0,53971072	0,54161800	0,54352673	0,54543689	0,54734848
3	0,36893004	0,37065407	0,37238067	0,37410981	0,37584149
4	0,28365136	0,28529449	0,28694120	0,28859149	0,29024534
5	0,23257332	0,23417644	0,23578414	0,23739640	0,23901321
6	0,19859542	0,20017895	0,20176803	0,20336263	0,20496273
7	0,17438885	0,17596442	0,17754648	0,17913502	0,18072999
8	0,15628918	0,15786401	0,15944628	0,16103594	0,16263296
9	0,14226057	0,14383946	0,14542670	0,14702224	0,14862603
10	0,13108152	0,13266777	0,13426327	0,13586796	0,13748179
11	0,12197467	0,12357065	0,12517676	0,12679294	0,12841911
12	0,11442178	0,11602923	0,11764767	0,11927703	0,12091722
13	0,10806405	0,10968426	0,11131631	0,11296011	0,11461555
14	0,10264516	0,10427912	0,10592574	0,10758491	0,10925653
15	0,09797715	0,09962560	0,10128751	0,10296276	0,10465123
16	0,09391903	0,09558254	0,09726029	0,09895214	0,10065795
17	0,09036298	0,09204197	0,09373597	0,09544480	0,09716831
18	0,08722511	0,08891992	0,09063045	0,09235654	0,09409799
19	0,08443921	0,08615006	0,08787734	0,08962086	0,09138040
20	0,08195228	0,08367933	0,08542350	0,08718456	0,08896227
21	0,07972143	0,08146478	0,08322590	0,08500455	0,08680045
22	0,07771153	0,07947123	0,08124934	0,08304557	0,08485962
23	0,07589358	0,07766965	0,07946472	0,08127848	0,08311061
24	0,07424339	0,07603580	0,07784779	0,07967900	0,08152909
25	0,07274066	0,07454935	0,07637817	0,07822672	0,08009462
26	0,07136817	0,07319307	0,07503860	0,07690435	0,07878989
27	0,07011129	0,07195228	0,07381439	0,07569717	0,07760015
28	0,06895744	0,07081440	0,07269293	0,07459255	0,07651276
29	0,06789578	0,06976857	0,07166336	0,07357961	0,07551680
30	0,06691693	0,06880539	0,07071624	0,07264891	0,07460284
31	0,06601270	0,06791665	0,06984336	0,07179222	0,07376261
32	0,06517593	0,06709519	0,06903754	0,07100234	0,07298892
33	0,06440032	0,06633469	0,06829246	0,07027293	0,07227543
34	0,06368030	0,06562958	0,06760253	0,06959843	0,07161653
35	0,06301096	0,06497493	0,06696282	0,06897386	0,07100726
36	0,06238791	0,06436635	0,06636893	0,06839483	0,07044324
37	0,06180725	0,06379993	0,06581694	0,06785743	0,06992051
38	0,06126548	0,06327217	0,06530335	0,06735812	0,06943557
39	0,06075946	0,06277991	0,06482500	0,06689377	0,06898526
40	0,06028637	0,06232034	0,06437907	0,06646154	0,06856675
41	0,05984365	0,06189090	0,06396299	0,06605886	0,06817746
42	0,05942899	0,06148927	0,06357445	0,06568342	0,06781509
43	0,05904031	0,06111337	0,06321135	0,06533312	0,06747754
44	0,05867569	0,06076128	0,06287179	0,06500606	0,06716290
45	0,05833341	0,06043127	0,06255404	0,06470050	0,06686944
46	0,05801189	0,06012175	0,06225650	0,06441485	0,06659557
47	0,05770966	0,05983129	0,06197773	0,06414768	0,06633985
48	0,05742542	0,05955854	0,06171641	0,06389765	0,06610096
49	0,05715793	0,05930230	0,06147131	0,06366356	0,06587769
50	0,05690609	0,05906145	0,06124133	0,06344429	0,06566893

$$V_p^n$$

	6,50%	6,75%	7,00%	7,25%	7,50%
1	1,06500000	1,06750000	1,07000000	1,07250000	1,07500000
2	0,54926150	0,55117594	0,55309179	0,55500905	0,55692771
3	0,37757570	0,37931243	0,38105167	0,38279340	0,38453763
4	0,29190274	0,29356367	0,29522812	0,29689607	0,29856751
5	0,24063454	0,24226037	0,24389069	0,24552548	0,24716472
6	0,20656831	0,20817934	0,20979580	0,21141766	0,21304489
7	0,18233137	0,18393912	0,18555322	0,18717363	0,18880032
8	0,16423730	0,16584891	0,16746776	0,16909381	0,17072702
9	0,15023803	0,15185820	0,15348647	0,15512281	0,15676716
10	0,13910469	0,14073662	0,14237750	0,14402729	0,14568593
11	0,13005521	0,13170116	0,13335690	0,13502237	0,13669747
12	0,12256817	0,12422978	0,12590199	0,12758470	0,12927783
13	0,11628256	0,11796102	0,11965085	0,12135194	0,12306420
14	0,11094048	0,11263666	0,11434494	0,11606522	0,11779737
15	0,10635278	0,10806729	0,10979462	0,11153465	0,11328724
16	0,10237757	0,10411086	0,10585765	0,10761780	0,10939116
17	0,09890633	0,10065868	0,10242519	0,10420570	0,10600003
18	0,09585461	0,09762621	0,09941260	0,10121358	0,10302896
19	0,09315575	0,09494670	0,09675301	0,09857449	0,10041090
20	0,09075640	0,09256670	0,09439293	0,09623484	0,09809219
21	0,08861333	0,09044294	0,09228900	0,09415124	0,09602937
22	0,08669120	0,08854002	0,09040577	0,09228816	0,09418687
23	0,08496078	0,08682866	0,08871393	0,09061624	0,09253528
24	0,08339770	0,08528446	0,08718902	0,08911101	0,09105008
25	0,08198148	0,08388691	0,08581052	0,08775190	0,08971067
26	0,08069480	0,08261865	0,08456103	0,08652149	0,08849961
27	0,07952288	0,08146489	0,08342573	0,08540494	0,08740204
28	0,07845305	0,08041294	0,08239193	0,08438951	0,08640520
29	0,07747440	0,07945186	0,08144865	0,08346425	0,08549811
30	0,07657744	0,07857215	0,08058640	0,08261962	0,08467124
31	0,07575393	0,07776557	0,07979691	0,08184734	0,08391628
32	0,07499665	0,07702486	0,07907292	0,08114017	0,08322599
33	0,07429924	0,07634368	0,07840807	0,08049172	0,08259397
34	0,07365610	0,07571641	0,07779674	0,07989637	0,08201461
35	0,07306226	0,07513808	0,07723396	0,07934915	0,08148291
36	0,07251332	0,07460428	0,07671531	0,07884563	0,08099447
37	0,07200534	0,07411106	0,07623685	0,07838187	0,08054533
38	0,07153480	0,07365492	0,07579505	0,07795435	0,08013197
39	0,07109854	0,07323268	0,07538676	0,07755991	0,07975124
40	0,07069373	0,07284150	0,07500914	0,07719571	0,07940031
41	0,07031779	0,07247884	0,07465962	0,07685920	0,07907663
42	0,06996842	0,07214236	0,07433591	0,07654807	0,07877789
43	0,06964352	0,07182999	0,07403590	0,07626023	0,07850201
44	0,06934119	0,07153981	0,07375769	0,07599379	0,07824710
45	0,06905968	0,07127010	0,07349957	0,07574704	0,07801146
46	0,06879743	0,07101928	0,07325996	0,07551840	0,07779354
47	0,06855300	0,07078591	0,07303744	0,07530646	0,07759190
48	0,06832505	0,07056869	0,07283070	0,07510992	0,07740527
49	0,06811240	0,07036642	0,07263853	0,07492758	0,07723247
50	0,06791393	0,07017798	0,07245985	0,07475837	0,07707241

$$V_p^n$$

	7,75%	8,00%	8,25%	8,50%	8,75%
1	1,07750000	1,08000000	1,08250000	1,08500000	1,08750000
2	0,55884777	0,56076923	0,56269208	0,56461631	0,56654192
3	0,38628434	0,38803351	0,38978515	0,39153925	0,39329579
4	0,30024243	0,30192080	0,30360263	0,30528789	0,30697657
5	0,24880838	0,25045645	0,25210892	0,25376575	0,25542694
6	0,21467748	0,21631539	0,21795860	0,21960708	0,22126082
7	0,19043325	0,19207240	0,19371774	0,19536922	0,19702683
8	0,17236735	0,17401476	0,17566921	0,17733065	0,17899906
9	0,15841948	0,16007971	0,16174781	0,16342372	0,16510740
10	0,14735335	0,14902949	0,15071430	0,15240771	0,15410966
11	0,13838216	0,14007634	0,14177996	0,14349293	0,14521519
12	0,13098130	0,13269502	0,13441890	0,13615286	0,13789681
13	0,12478752	0,12652181	0,12826696	0,13002287	0,13178944
14	0,11954129	0,12129685	0,12306394	0,12484244	0,12663222
15	0,11505225	0,11682954	0,11861900	0,12042046	0,12223380
16	0,11117757	0,11297687	0,11478892	0,11661354	0,11845059
17	0,10780800	0,10962943	0,11146415	0,11331198	0,11517274
18	0,10485853	0,10670210	0,10855946	0,11043041	0,11231476
19	0,10226202	0,10412763	0,10600750	0,10790140	0,10980912
20	0,09996473	0,10185221	0,10375437	0,10567097	0,10760176
21	0,09792314	0,09983225	0,10175643	0,10369541	0,10564890
22	0,09610161	0,09803207	0,09997794	0,10193892	0,10391471
23	0,09447070	0,09642217	0,09838936	0,10037193	0,10236954
24	0,09300585	0,09497796	0,09696605	0,09896975	0,10098871
25	0,09168643	0,09367878	0,09568733	0,09771168	0,09975145
26	0,09049497	0,09250713	0,09453567	0,09658017	0,09864020
27	0,08941658	0,09144810	0,09349614	0,09556025	0,09763999
28	0,08843849	0,09048891	0,09255595	0,09463914	0,09673799
29	0,08754971	0,08961854	0,09170406	0,09380577	0,09592315
30	0,08674069	0,08882743	0,09093091	0,09305058	0,09518590
31	0,08600313	0,08810728	0,09022818	0,09236524	0,09451789
32	0,08532974	0,08745081	0,08958859	0,09174247	0,09391186
33	0,08471416	0,08685163	0,08900575	0,09117588	0,09336140
34	0,08415075	0,08630411	0,08847402	0,09065984	0,09286090
35	0,08363452	0,08580326	0,08798844	0,09018937	0,09240538
36	0,08316106	0,08534467	0,08754458	0,08976006	0,09199044
37	0,08272643	0,08492440	0,08713850	0,08936799	0,09161216
38	0,08232710	0,08453894	0,08676671	0,08900966	0,09126705
39	0,08195993	0,08418513	0,08642606	0,08868193	0,09095200
40	0,08162208	0,08386016	0,08611373	0,08838201	0,09066421
41	0,08131102	0,08356149	0,08582722	0,08810737	0,09040118
42	0,08102444	0,08328684	0,08556422	0,08785576	0,09016065
43	0,08076028	0,08303414	0,08532270	0,08762512	0,08994060
44	0,08051665	0,08280152	0,08510079	0,08741363	0,08973921
45	0,08029186	0,08258728	0,08489682	0,08721961	0,08955481
46	0,08008436	0,08238991	0,08470926	0,08704154	0,08938592
47	0,07989274	0,08220799	0,08453673	0,08687807	0,08923118
48	0,07971572	0,08204027	0,08437797	0,08672795	0,08908936
49	0,07955213	0,08188557	0,08423184	0,08659005	0,08895934
50	0,07940091	0,08174286	0,08409730	0,08646334	0,08884013

$$V_p^n$$

	9,00%	9,25%	9,50%	9,75%	10,00%
1	1,09000000	1,09250000	1,09500000	1,09750000	1,10000000
2	0,56846890	0,57039725	0,57232697	0,57425805	0,57619048
3	0,39505476	0,39681615	0,39857997	0,40034619	0,40211480
4	0,30866866	0,31036414	0,31206300	0,31376523	0,31547080
5	0,25709246	0,25876229	0,26043642	0,26211482	0,26379748
6	0,22291978	0,22458395	0,22625328	0,22792777	0,22960738
7	0,19869052	0,20036026	0,20203603	0,20371779	0,20540550
8	0,18067438	0,18235658	0,18404561	0,18574144	0,18744402
9	0,16679880	0,16849786	0,17020454	0,17191878	0,17364054
10	0,15582009	0,15753894	0,15926615	0,16100166	0,16274539
11	0,14694666	0,14868726	0,15043693	0,15219558	0,15396314
12	0,13965066	0,14141432	0,14318771	0,14497074	0,14676332
13	0,13356656	0,13535414	0,13715206	0,13896022	0,14077852
14	0,12843317	0,13024517	0,13206809	0,13390182	0,13574622
15	0,12405888	0,12589556	0,12774370	0,12960315	0,13147378
16	0,12029991	0,12216133	0,12403470	0,12591985	0,12781662
17	0,11704625	0,11893232	0,12083078	0,12274145	0,12466413
18	0,11421229	0,11612281	0,11804610	0,11998198	0,12193022
19	0,11173041	0,11366506	0,11561284	0,11757352	0,11954687
20	0,10954648	0,11150487	0,11347670	0,11546170	0,11745962
21	0,10761663	0,10959832	0,11159370	0,11360248	0,11562439
22	0,10590499	0,10790947	0,10992784	0,11195981	0,11400506
23	0,10438188	0,10640860	0,10844938	0,11050389	0,11257181
24	0,10302256	0,10507095	0,10713351	0,10920990	0,11129978
25	0,10180625	0,10387569	0,10595939	0,10805698	0,11016807
26	0,10071536	0,10280523	0,10490940	0,10702747	0,10915904
27	0,09973491	0,10184456	0,10396852	0,10610635	0,10825764
28	0,09885205	0,10098083	0,10312389	0,10528076	0,10745101
29	0,09805572	0,10020298	0,10236444	0,10453963	0,10672807
30	0,09733635	0,09950142	0,10168058	0,10387336	0,10607925
31	0,09668560	0,09886781	0,10106399	0,10327363	0,10549621
32	0,09609619	0,09829488	0,10050739	0,10273318	0,10497172
33	0,09556173	0,09777625	0,10000441	0,10224565	0,10449941
34	0,09507660	0,09730631	0,09954945	0,10180543	0,10407371
35	0,09463584	0,09688010	0,09913756	0,10140762	0,10368971
36	0,09423505	0,09649323	0,09876437	0,10104784	0,10334306
37	0,09387033	0,09614182	0,09842600	0,10072224	0,10302994
38	0,09353820	0,09582240	0,09811901	0,10042739	0,10274692
39	0,09323555	0,09553188	0,09784032	0,10016023	0,10249098
40	0,09295961	0,09526750	0,09758719	0,09991804	0,10225941
41	0,09270789	0,09502678	0,09735716	0,09969838	0,10204980
42	0,09247814	0,09480750	0,09714803	0,09949907	0,10185999
43	0,09226837	0,09460768	0,09695783	0,09931817	0,10168805
44	0,09207675	0,09442551	0,09678478	0,09915390	0,10153224
45	0,09190165	0,09425938	0,09662729	0,09900471	0,10139100
46	0,09174160	0,09410783	0,09648390	0,09886915	0,10126295
47	0,09159525	0,09396953	0,09635333	0,09874597	0,10114682
48	0,09146139	0,09384330	0,09623439	0,09863399	0,10104148
49	0,09133893	0,09372806	0,09612603	0,09853218	0,10094590
50	0,09122687	0,09362282	0,09602728	0,09843960	0,10085917

$$V_p^n$$

	11,00%	12,00%	13,00%	14,00%	15,00%
1	1,11000000	1,12000000	1,13000000	1,14000000	1,15000000
2	0,58393365	0,59169811	0,59948357	0,60728972	0,61511628
3	0,40921307	0,41634898	0,42352197	0,43073148	0,43797696
4	0,32232635	0,32923444	0,33619420	0,34320478	0,35026535
5	0,27057031	0,27740973	0,28431454	0,29128355	0,29831555
6	0,23637656	0,24322572	0,25015323	0,25715750	0,26423691
7	0,21221527	0,21911774	0,22611080	0,23319238	0,24036036
8	0,19432105	0,20130284	0,20838672	0,21557002	0,22285009
9	0,18060166	0,18767889	0,19486890	0,20216838	0,20957402
10	0,16980143	0,17698416	0,18428956	0,19171354	0,19925206
11	0,16112101	0,16841540	0,17584145	0,18339427	0,19106898
12	0,15402729	0,16143681	0,16898608	0,17666933	0,18448078
13	0,14815099	0,15567720	0,16335034	0,17116366	0,17911046
14	0,14322820	0,15087125	0,15866750	0,16660914	0,17468849
15	0,13906524	0,14682424	0,15474178	0,16280896	0,17101705
16	0,13551675	0,14339002	0,15142624	0,15961540	0,16794769
17	0,13247148	0,14045673	0,14860844	0,15691544	0,16536686
18	0,12984287	0,13793731	0,14620085	0,15462115	0,16318629
19	0,12756250	0,13576300	0,14413439	0,15266316	0,16133635
20	0,12557564	0,13387878	0,14235379	0,15098600	0,15976147
21	0,12383793	0,13224009	0,14081433	0,14954486	0,15841679
22	0,12231310	0,13081051	0,13947948	0,14830317	0,15726577
23	0,12097118	0,12955996	0,13831913	0,14723081	0,15627839
24	0,11978721	0,12846344	0,13730826	0,14630284	0,15542983
25	0,11874024	0,12749997	0,13642593	0,14549841	0,15469940
26	0,11781258	0,12665186	0,13565451	0,14480001	0,15406981
27	0,11698916	0,12590409	0,13497907	0,14419288	0,15352648
28	0,11625715	0,12524387	0,13438693	0,14366449	0,15305713
29	0,11560547	0,12466021	0,13386722	0,14320417	0,15265133
30	0,11502460	0,12414366	0,13341065	0,14280279	0,15230020
31	0,11450627	0,12368606	0,13300919	0,14245256	0,15199618
32	0,11404329	0,12328033	0,13265593	0,14214675	0,15173280
33	0,11362938	0,12292031	0,13234487	0,14187958	0,15150452
34	0,11325905	0,12260064	0,13207081	0,14164604	0,15130657
35	0,11292749	0,12231662	0,13182922	0,14144181	0,15113485
36	0,11263044	0,12206414	0,13161616	0,14126315	0,15098586
37	0,11236416	0,12183959	0,13142819	0,14110680	0,15085653
38	0,11212535	0,12163980	0,13126229	0,14096993	0,15074426
39	0,11191107	0,12146197	0,13111582	0,14085010	0,15064676
40	0,11171873	0,12130363	0,13098648	0,14074514	0,15056209
41	0,11154601	0,12116260	0,13087223	0,14065321	0,15048853
42	0,11139086	0,12103696	0,13077129	0,14057266	0,15042463
43	0,11125146	0,12092500	0,13068209	0,14050208	0,15036911
44	0,11112617	0,12082521	0,13060326	0,14044023	0,15032086
45	0,11101354	0,12073625	0,13053357	0,14038602	0,15027893
46	0,11091227	0,12065694	0,13047196	0,14033850	0,15024249
47	0,11082119	0,12058621	0,13041749	0,14029684	0,15021082
48	0,11073926	0,12052312	0,13036933	0,14026032	0,15018328
49	0,11066556	0,12046686	0,13032673	0,14022830	0,15015935
50	0,11059924	0,12041666	0,13028906	0,14020022	0,15013855

$$V_p^n$$

	16,00%	17,00%	18,00%	19,00%	20,00%
1	1,16000000	1,17000000	1,18000000	1,19000000	1,20000000
2	0,62296296	0,63082949	0,63871560	0,64662100	0,65454545
3	0,44525787	0,45257368	0,45992386	0,46730789	0,47472527
4	0,35737507	0,36453311	0,37173867	0,37899094	0,38628912
5	0,30540938	0,31256386	0,31977784	0,32705017	0,33437970
6	0,27138987	0,27861480	0,28591013	0,29327429	0,30070575
7	0,24761268	0,25494724	0,26236200	0,26985490	0,27742393
8	0,23022426	0,23768989	0,24524436	0,25288506	0,26060942
9	0,21708249	0,22469051	0,23239482	0,24019220	0,24807946
10	0,20690108	0,21465660	0,22251464	0,23047131	0,23852276
11	0,19886075	0,20676479	0,21477639	0,22289090	0,23110379
12	0,19241473	0,20046558	0,20862781	0,21689602	0,22526496
13	0,18718411	0,19537814	0,20368621	0,21210215	0,22062000
14	0,18289797	0,19123022	0,19967806	0,20823456	0,21689306
15	0,17935752	0,18782209	0,19640278	0,20509191	0,21388212
16	0,17641362	0,18500401	0,19371008	0,20252345	0,21143614
17	0,17395225	0,18266157	0,19148527	0,20041431	0,20944015
18	0,17188485	0,18070600	0,18963946	0,19867559	0,20780539
19	0,17014166	0,17906745	0,18810284	0,19723765	0,20646245
20	0,16866703	0,17769036	0,18681998	0,19604529	0,20535653
21	0,16741617	0,17653004	0,18574643	0,19505440	0,20444394
22	0,16635264	0,17555025	0,18484626	0,19422943	0,20368962
23	0,16544658	0,17472141	0,18409020	0,19354156	0,20306526
24	0,16467339	0,17401917	0,18345430	0,19296727	0,20254787
25	0,16401262	0,17342343	0,18291883	0,19248730	0,20211873
26	0,16344723	0,17291747	0,18246748	0,19208581	0,20176250
27	0,16296294	0,17248736	0,18208672	0,19174971	0,20146659
28	0,16254775	0,17212144	0,18176528	0,19146819	0,20122067
29	0,16219153	0,17180992	0,18149377	0,19123225	0,20101619
30	0,16188568	0,17154455	0,18126431	0,19103443	0,20084611
31	0,16162295	0,17131839	0,18107030	0,19086852	0,20070459
32	0,16139714	0,17112556	0,18090621	0,19072931	0,20058682
33	0,16120298	0,17096109	0,18076739	0,19061249	0,20048877
34	0,16103598	0,17082077	0,18064990	0,19051444	0,20040715
35	0,16089229	0,17070102	0,18055046	0,19043211	0,20033917
36	0,16076862	0,17059880	0,18046628	0,19036299	0,20028256
37	0,16066217	0,17051154	0,18039499	0,19030494	0,20023542
38	0,16057051	0,17043702	0,18033463	0,19025619	0,20019614
39	0,16049158	0,17037338	0,18028350	0,19021524	0,20016342
40	0,16042359	0,17031903	0,18024020	0,19018084	0,20013617
41	0,16036503	0,17027260	0,18020352	0,19015194	0,20011346
42	0,16031458	0,17023294	0,18017244	0,19012767	0,20009454
43	0,16027112	0,17019905	0,18014612	0,19010727	0,20007878
44	0,16023367	0,17017010	0,18012381	0,19009013	0,20006564
45	0,16020140	0,17014536	0,18010491	0,19007574	0,20005470
46	0,16017359	0,17012423	0,18008890	0,19006364	0,20004558
47	0,16014962	0,17010617	0,18007534	0,19005348	0,20003798
48	0,16012897	0,17009073	0,18006384	0,19004494	0,20003165
49	0,16011117	0,17007754	0,18005410	0,19003776	0,20002638
50	0,16009583	0,17006627	0,18004584	0,19003173	0,20002198

Tablice smrtnosti 17 engleskih društava. Interes 4%

x	l_x	D_x	N_x	S_x	d_x	C_x	M_x	a_x
10	100000	67556,42	1381771,36	24814820,55	676	439,12	14411,37	20,4536
11	99324	64518,98	1314214,94	23433049,21	674	420,98	13972,25	20,3694
12	98650	61616,50	1249695,96	22118834,29	672	403,59	13551,27	20,2818
13	97978	58843,05	1188079,46	20869138,34	671	387,48	13147,68	20,1906
14	97307	56192,37	1129236,41	19681058,89	671	372,58	12760,20	20,0956
15	96636	53658,54	1073044,04	18551822,49	671	358,26	12387,62	19,9977
16	95965	51236,50	1019385,50	17478778,50	672	344,98	12029,36	19,8957
17	95293	48920,88	968149,00	16459393,05	673	332,21	11684,38	19,7901
18	94620	46707,09	919228,12	15491244,10	675	320,39	11352,17	19,6807
19	93945	44590,28	872521,03	14572016,03	677	308,97	11031,78	19,5675
20	93268	42566,30	827930,75	13699495,05	680	298,41	10722,81	19,4504
21	92588	40630,73	785364,45	12871564,35	683	288,19	10434,40	19,3293
22	91905	38779,81	744733,72	12086199,95	686	278,33	10136,21	19,2042
23	91219	37009,95	705953,91	11341466,28	690	269,19	9857,88	19,0747
24	90529	35317,31	668943,96	10635512,42	694	260,33	9588,69	18,9410
25	89835	33698,62	633626,65	9966568,51	698	251,76	9328,36	18,8028
26	89137	32150,76	599928,03	933294191	703	243,81	9076,60	18,6598
27	88434	30670,38	567777,27	8733013,93	708	236,10	8832,79	18,5123
28	87726	29254,64	537106,89	8165236,70	714	228,95	8596,69	18,3597
29	87012	27900,52	507852,25	7628129,85	720	221,99	8367,74	18,2022
30	86292	26605,43	479951,73	7120277,64	727	215,52	8145,75	18,0396
31	85565	25366,62	453346,30	6640325,95	734	209,24	7930,23	17,8718
32	84831	24181,75	427979,68	6186979,69	742	203,37	7720,99	17,6985
33	84089	23048,31	403797,93	5759000,09	750	197,67	7517,62	17,5197
34	83339	21964,17	380749,62	5355202,19	758	192,09	7319,95	17,3350
35	82581	20927,30	358785,45	4974452,53	767	186,89	7127,86	17,1444
36	81814	19935,51	337858,15	4615667,18	776	181,82	6940,97	16,9476
37	81038	18986,95	317922,64	4277809,03	785	176,84	6759,15	16,7443
38	80253	18079,83	298935,69	3959886,42	795	172,22	6582,31	16,5342
39	79458	17212,24	280855,86	3660950,75	805	167,67	6410,09	16,3172
40	78653	16382,56	263643,62	3380094,91	815	163,23	6242,42	16,0929
41	77838	15589,23	247261,06	3116451,31	826	159,06	6079,19	15,8610
42	77012	14830,58	231671,83	2869190,27	839	155,36	5920,13	15,6212
43	76173	14104,82	216841,25	2637518,46	857	152,59	5764,77	15,3736
44	75316	13409,74	202736,43	2420677,23	881	150,82	5612,18	15,1186

45	74435	12743,15	189326,69	2217940,82	909	149,64	5461,36	14,8571
46	73526	12103,40	176583,54	2028614,14	944	149,41	5311,72	14,5896
47	72582	11488,46	164480,14	1852030,61	981	149,31	5162,31	14,3170
48	71601	10897,30	152991,68	1687550,48	1021	149,41	5013,00	14,0394
49	70580	10328,76	142094,38	1534558,81	1063	149,58	4863,59	13,7572
50	69517	9781,919	131765,619	1392464,43	1108	149,91	4714,01	13,4703
51	68409	9255,778	121983,700	1260698,82	1156	150,39	4564,10	13,1792
52	67253	8749,395	112727,922	1138715,12	1207	150,99	4413,71	12,8841
53	66046	8261,892	103978,527	1025987,20	1261	151,68	4262,72	12,5853
54	64785	7792,452	95716,635	922008,67	1316	152,20	4111,04	12,2833
55	63469	7340,540	87924,183	826292,04	1375	152,91	3958,84	11,9779
56	62094	6905,301	80583,643	738367,86	1436	153,55	3805,93	11,6698
57	60658	6486,161	73678,342	657784,22	1497	153,92	3652,38	11,3593
58	59161	6082,776	67192,181	584105,88	1561	154,32	3498,46	11,0463
59	57600	5694,498	61109,405	516913,70	1627	154,67	3344,14	10,7313
60	55973	5320,816	55414,907	455804,30	1698	155,20	3189,47	10,4147
61	54275	4960,963	50094,091	400389,40	1770	155,56	3034,27	10,0977
62	52505	4614,595	45133,126	350295,31	1844	155,84	2878,71	9,7805
63	50661	4281,278	40518,531	305162,18	1917	155,77	2722,87	9,4641
64	48744	3960,841	36237,253	264643,65	1990	155,48	2567,10	9,1489
65	46754	3653,017	32276,412	228406,40	2061	154,84	2411,62	8,8356
66	44693	3357,679	28623,395	196129,99	2128	153,72	2256,78	8,5248
67	42565	3074,814	25265,716	167506,60	2191	152,19	2103,06	8,2170
68	40374	2804,366	22190,902	142240,89	2246	150,01	1950,87	7,9130
69	38128	2546,500	19386,536	120049,995	2291	147,12	1800,86	7,6130
70	35837	2301,431	16840,036	100663,462	2327	143,69	1653,74	7,3172
71	33510	2069,223	14538,605	83823,428	2351	139,59	1510,05	7,0261
72	31159	1850,048	12469,382	69284,824	2362	134,85	1370,46	6,7400
73	28797	1644,044	10619,334	56815,443	2358	129,44	1235,61	6,4594
74	26439	1451,369	8975,290	46196,110	2339	123,465	1106,17	6,1841
75	24100	1272,086	7523,921	37220,821	2303	116,886	982,705	5,9147
76	21797	1106,275	6251,835	29696,901	2249	109,754	865,819	5,6512
77	19548	953,9711	5145,5598	23445,0666	2179	102,249	756,065	5,3938
78	17369	815,0314	4191,5887	18299,5070	2092	94,390	653,816	5,1428
79	15277	689,2936	3376,5573	14107,9184	1987	86,205	559,426	4,8987
80	13290	576,5777	2687,2637	10731,3612	1866	77,841	473,221	4,6607
81	11424	476,5601	2110,6860	8044,0976	1730	69,393	395,380	4,4290
82	9694	388,8384	1634,1259	5933,4118	1582	61,015	325,987	4,2026
83	8112	312,8677	1245,2875	4299,2861	1427	52,920	264,972	3,9803
84	6685	247,9139	932,4198	3053,9988	1268	45,216	212,052	3,7611

85	5417	193,1635	684,5059	2121,5792	1111	38,093	166,836	3,5437
86	4306	147,6410	491,3424	1437,0735	958	31,5837	128,743	3,3280
87	3348	110,3786	343,7014	945,7312	811	25,7091	97,1593	3,1139
88	2537	80,4242	233,3228	602,0298	673	20,5139	71,4502	2,9011
89	1864	56,8181	152,8987	368,7070	545	15,9733	50,9363	2,6911
90	1319	38,6584	96,0816	215,8083	427	12,0336	34,9630	2,4854
91	892	25,1380	57,4332	119,7267	322	8,7254	22,9294	2,2843
92	570	15,4437	32,2852	62,3036	231	6,0189	14,2040	2,0903
93	339	8,8328	16,8395	30,0184	155	3,8833	8,1851	1,9065
94	184	4,6098	8,0066	13,1789	95	2,2885	4,3019	1,7369
95	89	2,1440	3,3968	5,1723	52	1,2045	2,0133	1,5844
96	37	0,8570	1,2528	1,7755	24	0,5345	0,8089	1,4618
97	13	0,2895	0,3958	0,5226	9	0,1927	0,2743	1,3670
98	4	0,0857	0,1063	0,1268	3	0,0618	0,0816	1,2403
99	1	0,0206	0,0206	0,0206	1	0,0198	0,0198	1,30



LITERATURA:

1. Avdalović V., *Menadžment rizikom u osiguranju*, ZENID, Beograd, 2000.
2. Barjaktarović, L., *Upravljanje rizikom*, Univerzitet Singidunum, Beograd, 2009.
3. Bjelica V., *Bankarstvo, teorija i praksa*, Stylos, Novi Sad, 2001.
4. Brealey, R., Myers, S., Marcus, A., *Fundamentals of Corporate Finance*, 5th edition, Copyright@ 2007 by The McGraw-Hill Companies, Inc.; za hrvatsko izdanje Osnove korporativnih finansija: Copyright@2007 MATE d.o.o. Zagreb
5. Vaughan E., T. Vaughan, *Osnovi osiguranja – Upravljanje rizicima*, MATE (John Wiley&Sons, Inc.), Zagreb, 1995.
6. Vugdelija, D., Sedlak, O., *Finansijska i aktuarska matematika – osnovni koncept za nastavu* - Ekonomski fakultet, Subotica, 2008. [materijal dostupan na sajtu fakulteta, preuzet u martu 2010.]
7. Vujović R., *Upravljanje rizicima i osiguranje*, Univerzitet Singidunum, Beograd, 2009.
8. Glen, N., *Actuarial Science - An Elementary Manual*, The Faculty of Actuaries, Glasgow, 1893. /digitalized by Microsoft/
9. Grupa autora, *Osnovi osiguranja*, udžbenik, Univerzitet Singidunum, Beograd, 2007.
10. Grupa autora, *Ekonomski rečnik* – drugo izmenjeno i dopunjeno izdanje, Univerzitet u Beogradu, Ekonomski fakultet, Beograd, 2006.
11. Damodaran, A., *Applied Corporate Finance*, Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, 2006.
12. Doherty, N., *Integrated risk management – techniques and strategies for managing corporate risk*, McGraw Hill, Inc., 2000.
13. Đukić Đ., Bjelica V. i Ristić Ž., *Bankarstvo*, Centar za izdavačku delatnost Ekonomskog fakulteta u Beogradu, 2004.
14. Kaen, F.R., *Corporate finance*, Blackwell Cambridge, 1995.
15. Kaščelan, V., Novović, M., *Osiguranje i aktuarska matematika*, Univerzitet Crne Gore, Podgorica, 2009.
16. Kim, S., Kim, S., *Global Corporate Finance*, sixth edition, Blackwell Publishing, Oxford, 2006.
17. Kočović, J., *Finansijska matematika*, Ekonomski fakultet, Beograd, 2006.
18. Kočović, J., *Aktuarske osnove formiranja tarifa u osiguranju života*, Ekonomski fakultet, Beograd, 2006.

19. Kočović, J., Šulejić, P., *Osiguranje*, Ekonomski fakultet, Beograd, 2006.
20. Krstić B., *Bankarstvo*, Ekonomski fakultet, Niš, 2001.
21. Krstić B., *Međunarodno bankarstvo*, Ekonomski fakultet, Niš, 2001.
22. Marković, M., *Uvod u osiguranje*, Beogradska poslovna škola, Beograd, 2006.
23. Mishkin, S.F., *The economics of Money, Banking, and Financial Markets*, eight edition, Pearson Education, Boston, 2007.
24. Petrović, Z., Petrović, T., *Osiguranje života*, Glosarijum, Beograd, 2003.
25. Ralević, R., *Finansijska i aktuarska matematika*, Savremena administracija, Beograd, 1973.
26. Ralević, R., Đorđević, M., Savić, N., *Zbirka rešenih zadataka iz matematike za ekonomiste*, 8 izdanje, Savremena administracija, Beograd, 1973.
27. Rašeta, J., *Finansijska i aktuarska matematika*, Univerzitet Singidunum, Beograd, 2008.
28. Rejda G., *Principles of Risk Management and Insurance*, 10th Edition, Addison Wesley, Boston, USA, 2008.
29. Ritter, L., Silber, W., Udell, G., *Principi novca, bankarstva i finansijskih tržišta*, jedanaesto izdanje, Pearson Education, Boston, 2007.
30. Stanišić, M., Stanojević, Lj., *Evaluacija i rizik*, Univerzitet Singidunum, Beograd, 2005.
31. Shapiro, A., Balbirer, S., *Modern Corporate Finance*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, USA, 2000.
32. Hadžić M., *Bankarstvo*, Univerzitet Singidunum, Beograd, 2008.
33. Šekarić, M., Kovačević, I., *Kvantitativne metode*, Univerzitet Singidunum, Beograd, 2009.
34. Welch, I., *A first course in Corporate Finance* – book in development, Brown University, October 2006.

Na osnovu člana 23. stav 2. tačka 7. Zakona o porezu na dodatu vrednost („Službeni glasnik RS”, br. 84/04... i 61/07), Odlukom Senata Univerziteta Singidunum, Beograd, broj 260/07 od 8. juna 2007. godine, ova knjiga je odobrena kao osnovni udžbenik na Univerzitetu.

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

51-71:33(075.8)

51-75:33(075.8)

ШЕКАРИЋ, Мирјана, 1952-

Finansijska matematika i aktuarstvo sa
zbirkom zadataka / Mirjana Šekarić, Lidiya
Barjaktarović. - Beograd : Univerzitet
Singidunum, 2012 (Loznica : Mladost grup). -
VII, 216 str. : ilustr. ; 25 cm

Tiraž 600. - Bibliografija: str. 215-216.

ISBN 978-86-7912-397-8

1. Барјактаровић, Лидија, 1975- [аутор]

а) Привредна математика б) Актуарска
математика

COBISS.SR-ID 188614924

© 2011.

Sva prava zadržana. Nijedan deo ove publikacije ne može biti reprodukovan u bilo kom vidu i putem bilo kog medija, u delovima ili celini bez prethodne pismene saglasnosti izdavača.