UNIVERZITET SINGIDUNUM

Ivana Kovačević

DISKRETNA MATEMATIKA

SA ZBIRKOM ZADATAKA

Beograd, 2013.

UNIVERZITET SINGIDUNUM

Ivana Kovačević

DISKRETNA MATEMATIKA

SA ZBIRKOM ZADATAKA

Treće izmenjeno i dopunjeno izdanje

Beograd, 2013.

DISKRETNA MATEMATIKA SA ZBIRKOM ZADATAKA

Autor:
dr Ivana Kovačević

Recezenti:
dr Nenad Cakić, *Elektrotehnički fakultet, Beograd*
mr Zoran Mišković, *Visoka škola elektrotehnike i računarstva, Beograd*

Izdavač:
UNIVERZITET SINGIDUNUM
Beograd, Danijelova 32
www. singidunum. ac. rs

Za izdavača:
Prof. dr Milovan Stanišić

Priprema za štampu:
Novak Njeguš

Dizajn korica:
Aleksandar Mihajlović

Godina izdanja:
2013.

Tiraž:
300 primeraka

Štampa:
Mladost Grup
Loznica

ISBN 978-86-7912-468-5

PREDGOVOR

Ova udženik predviđen je da prati osnovni, jednosemestralni kurs Diskretne matematike. Studenti koji slušaju Diskretnu matematiku uglavnom studiraju računarske nauke, pa je ovaj udžbenik pisan bez strogih matematičkih dokaza, kako bi se studenti na samom početku upoznali sa osnovnim pojmovima, prihvatili ih i osposobili se da ih kasnije primene u praksi.

Knjiga je prvenstveno namenjena studentima prve godine Informatike, Univerziteta Singidunum, ali može korisno da posluži i svim onima kojima nedostaju elementarna znanja iz ove oblasti.

Ovo je treće izmenjeno izdanje.

Beograd, januar 2013. *Autor*

SADRŽAJ

DISKRETNA MATEMATIKA

UVOD

Grubo govoreći matematiku možemo da podelimo na dve velike celine:

- ***Diskretnu matematiku***
- ***Kontinualnu matematiku***

Do sada, uglavnom smo se bavili ***matematičkom analizom,*** odnosno ***kontinualnom matematikom***. Ona se bavi procesima koji se odlikuju neprekidnim tokom. Nastala je i razvijala se tokom 18, 19 i početkom 20 veka. Nastanak diferencijalnog i integralnog računa u 18. veku bio je uslovljen industrijskom revolucijom, odnosno pojavom mašina kontinualnog dejstva. Matematička analiza je bila taj matematički aparat koji je mogao da prati i rešava probleme kontinuuma.

Razvoj računara uslovio je potrebu za novim matematičkim aparatom. Memorija računara je konačna, a znajući da su računari mašine diskretnog dejstva (prelaze iz jednog u drugo stanje u određenim vremenskim trenucima) pojavio se problem rešavanja velikog broja problema na konačnim skupovima.

Diskretna matematika je jedna od najaktuelnijih matematičkih disciplina.

Diskretna matematika je deo matematike koji se bavi proučavanjem diskretnih skupova.

Ona je u suštini sinteza:

- matematičke logike,
- teorije skupova,
- opšte algebre,
- kombinatorike,
- diskretne verovatnoće,

i novih oblasti matematike kao što su

- teorija grafova,
- teorija kodova,
- algoritamske strukture i slično.

Diskretna matematika obezbeđuje teorijsku osnovu za mnoge oblasti računarskih nauka, kao što su:

- struktura podataka,
- teorija algoritama,
- formalni jezici,

- konstrukcija prevodilaca,
- veštačka inteligencija,
- računarske mreže,
- softversko inženjerstvo i mnoge druge.

CILJEVI PREDMETA

- pomogne da se razviju sposobnosti logičkog razmišljanja,
- da se koriste logički ispravne forme zaključivanja,
- da se nauče osnovne tehnike dokazivanja,
- da se radi sa simboličkim izrazima,
- da se nauči da se radi sa diskretnim strukturama,
- da se upozna sa osnovnim tehnikama prebrojavanja,
- da se shvati konstrukcija algoritma,
- da se nauči teorija grafova,
- da se nauči da se koristi matematička argumentacija,
- sa se uoči kako rezultate diskretne matematike je moguće koristiti u njenim primenama.

JEZIK MATEMATIKE

Pored govornog jezika u matematici se koriste razni matematički znaci-simboli, a sve to zajedno čini jezik matematike. Taj jezik je univerzalan i omogućava jednostavno i svima razumljivo zapisivanje matematičkih sadržaja.

Tvorac matematičkog jezika je nemački matematičar i filozof Lajbnic.

Gottfried Vilhelm von Leibniz (1596–1650)

Jezik matematike sadrži:

- ***Konstante:***

$$2,3,\frac{1}{2},\pi,\sqrt{2},\cdots$$

- ***Promenljive***:

$$x,y,a,b,\alpha,\beta,\cdots$$

- ***Operacijske znake***:

  algebarske operacije: $+,-,*,/$,

  logičke operacije: $\wedge,\vee,\Rightarrow,\Leftrightarrow,\neg$,

  skupovne operacije: $\cup,\cap,\setminus,X,\cdots$

- ***Relacijske znake:***

$$\rho:\quad =,\leq,\geq,\perp,\|,\cdots.$$

- ***Specijalne znake:***

$$(,),[,],\{,\},\exists,\forall,!,\cdots$$

Korišćenjem ovih elemenata matematičkog jezika definišemo ***izraze*** i ***formule***.

- ***Izrazi*** sadrže konstante, promenljive i operacijske znake:

Primer:

$$x+2$$

je izraz. Izrazi u običnom jeziku predstavljaju reči.

Definicija izraza glasi:

- Promenljive i znaci konstanti su izrazi.
- Ako su I_1 i I_2 izrazi, onda je i reč $I_1 * I_2$ izraz, gde je * je operacijski znak.
- Izrazi se dobijaju jedino konačnom primenom prethodna dva pravila.

- ***Formule*** su izrazi koji moraju da sadrže r znak relacije..

Primer:

$$x+2=5$$

je formula. Formule su u običnom jeziku su rečenice.

1.

OSNOVNI POJMOVI MATEMATIČKE LOGIKE

KRATAK SADRŽAJ:

- **1.1. LOGIKA**
- **1.2. MATEMATIČKA LOGIKA**
- **1.3. ISKAZNA LOGIKA**
  - 1.3.1. OSNOVNE LOGIČKE OPERACIJE
  - 1.3.2. ISKAZNE PORMULE
- **1.4. KVANTORI**
- **1.5. PREDIKATSKA LOGIKA**
- **1.6. ZADACI**

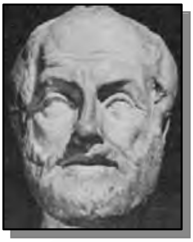
CILJEVI UČENJA:

Kada ovo poglavlje proučite bićete u mogućnosti da:

1. da koriste logički ispravne forme zaključivanja
2. izbegnete greške u zaključivanju
3. definišete iskaznu logiku
4. znate logičke operacije
5. napišete tablice istinitosti iskaznih formula
6. nabrojite osnovne logičke zakone
7. definišete predikatsku logiku
8. rešavate valjane formule

1.1. LOGIKA

Logika je veština i metoda pravilnog mišljenja. To je nauka o zaključivanju i kao takva koristi se u najrazličitijim oblastima. Nastala je u 4 veku p.n.e. Pogotovo u matematici osnova je celokupnog rezonovanja, odnosno pravilnog korišćenja matematičke argumentacije. Omogućava da se logički pravilno zaključuje i da se izbegnu greške zaključivanja.



Osnivač logike je grčki filozof ***Aristotel*** *(384-322 p.n.e.). Rođen u Stagiri, grčkoj koloniji na makedonskom poluostrvu. Njegov otac, Nikomah, radio je kao dvorski lekar kod kralja Amintasa III Makedonskog, dede Aleksandra Velikog. Od 18. do 37. godine pohađa Akademiju kao Platonov učenik. Na poziv kralja Filipa II Makedonskog postaje tutor Aleksandra Velikog, koji je tada imao 13 godina. Prvi je podrobno obradio zakone logike i pravila zaključivanja u delu* ***Organon,*** *što u prevodu znači oruđe. U ovom delu sačinio je prvi skup pravila deduktivnog zaključivanja.*

1.2. MATEMATIČKA LOGIKA

Matematička logika se intenzivno se razvija od sredine 19 veka pa do danas. Često se kaže da ona predstavlja logiku u matematici, ali ona je mnogo više od toga. Matematička logika predstavlja sponu između matematike i filozofije. Sa druge strane ona je značajna matematička disciplina koja je uvela strogost u definisanje pojmova. Obezbeđuje teorijske osnove mnogih matematičkih disciplina, a pre svega računarskih nauka. Omogućila je nastanak i razvoj digitalnih elektronskih računara, dajući formalni jezik koji je potreban za opisivanje i rešavanje problema u računarstvu. U poslednje vreme opšti cilj matematičke logike je konstruisanje sistema koji će biti u stanju da formalizuju različite oblasti ljudskog mišljenja, ali u granicama tehničke ostvarljivosti.

*Tvorac matematičke logike je **Džordž Bul** (George Boole, 1815. - 1864.) engleski matematičar i filozof. Bul je prišao logici na nov način, sažimajući je u prostu algebru, pretvarajući logiku u matematiku. Na taj način stvorene su nove matematičke discipline **matematička logika** ili **simbolična logika** i **algebra logike** koja je nazvana **Bulova algebra**. Nažalost, nije živeo dugo, umro je u 49-oj godini života, od prehlade, koju je dobio tako što je pešačio dve milje po kiši, kako bi stigao na predavanje, i predavao je u mokroj odeći.*

Sve do kasnih tridesetih godina njegova algebra nije imala nikakve praktične primene. 1937. godine naučnici Nakašima i godinu dana kasnije Šenon su iskoristili Bulovu algebru za analizu mreža sa relejima. Telefonija je tih godina bila u brzom razvoju, pa je bilo potrebno koristiti neki matematički aparat kojim bi se opisivale željene komunikacije i način ostvarivanja veza. Od ovog trenutka Bulova algebra doživljava svoju ekspanziju.

U ovoj knjizi od mnogih važnih oblasti matematičke logike osvrnućemo se samo na iskaznu i predikatsku logiku.

1.3. ISKAZNA LOGIKA

Polazni pojam u matematičkoj logici su iskazi, afirmativne rečenice koje imaju smisla i koje su ili tačne ili netačne.

Definicija:

Rečenica koja ima smisla i ima istinitosnu vrednost naziva se ***iskaz*** ili ***sud.***

- Iskazi se obeležavaju malim slovima $p, q, r, \ldots\ldots$ i nazivaju se ***iskazna slova.***
- ***Istinitosna vrednost*** iskaza je:

$$\tau(p)=\begin{cases} T, & p \quad je \quad tačan \quad iskaz \\ \perp, & p \quad je \quad netačan \quad iskaz \end{cases}$$

Napomena: Umesto T ("true") i $\perp$ (čita se ne te), u tehnici se više koriste oznake 1 i 0. U ovom slučaju simbole 1 i 0 ne treba shvatati kao brojeve 1 i 0.

Primer:

Rečenice :

$$2-1=1 \ ,$$

Beograd je glavni grad Srbije.

su iskazi koji imaju tačnu istinitosnu vrednost.

Rečenica *p*: *2-1=-1* je iskaz i ima netačnu istinitosnu vrednost, tj. $\tau(p)=\perp$.

Primer:

Rečenica $x^2=1$ nije iskaz , jer nema definisanu istinitosnu vrednost.

Za neke vrednosti promenljive x, tj za $x=\pm 1$ formula je tačna,

a za sve ostale je netačna.

Data je rečenica: Koliko je sati?

Ovo je rečenica koja nema istinitosnu vrednost i ne predstavlja iskaz.

1.3.1. OSNOVNE LOGIČKE OPERACIJE

U svakodnevnom jeziku, složene rečenice nastaju kombinovanjem prostih rečenica i veznika ***i, ili, ne, ako onda*** i dr. Istinitosna vrednost složene rečenice uslovljena je istinitošću njenih delova.

Primer:

p: Danas pada kiša

q: Danas je novembar.

Složena rečenica glasi: Danas pada kiša i danas je novembar

Sastoji se od 2 dela spojenih veznikom i.

Ova složena rečenica se može napisati i u obliku p i q.

Razlikujemo dve vrste logičkih operacija, ***unarne*** i ***binarne*** , koje se odnose na jednu, odnosno dve promenljive.

Osnovne logičke operacije su:

- ***konjunkcija*** (i), u oznaci $\wedge$. To je rečenica oblika *p* i *q*.

  Simbolički zapisana kao $p \wedge q$.

- ***disjunkcija*** (ili), u oznaci $\vee$. To je rečenica oblika *p* ili *q*.

  Simbolički zapisana kao $p \vee q$.

- ***implikacija*** (ako - onda), $\Rightarrow$. To je rečenica oblika ako *p* onda *q*.

  Simbolički zapisana kao $p \Rightarrow q$.

- ***ekvivalencija*** (ako i smo ako), u oznaci $\Leftrightarrow$. To je rečenica oblika ako *p* onda *q* i ako *q* onda *p*. Čita se i u obliku *p* ako i samo ako *q* i piše *p* akko *q*.

  Simbolički zapisana kao $p \Leftrightarrow q$.

- ***negacija*** (ne) $\neg$. To je rečenica oblika nije *p*.

  Simbolički zapisana kao $\neg p$.

  Napomena: Negacija je unarna operacija, ostale operacije su binarne.

  Kod iskaznih formula, nas ne zanimaju stvarne rečenice koje su zamenjene iskaznim slovima, već njihova istinitosna vrednost. Osnovni zadatak iskazne logike je kako doći do istinitosne vrednosti složene rečenice, ako znamo istinitosnu vrednost njenih delova.

- ***Istinitosna vrednost*** logičkih operacija u zavisnosti od istinitosnih vrednosti polaznih rečenica utvrđuje se sledećom tablicom.

$\tau(p)$	$\tau(q)$	$\tau(p \wedge q)$	$\tau(p \vee q)$	$\tau(p \Rightarrow q)$	$\tau(p \Leftrightarrow q)$	$\tau(\neg p)$
T	T	T	T	T	T	$\perp$
T	$\perp$	$\perp$	T	$\perp$	$\perp$	T
$\perp$	T	$\perp$	T	T	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T	T	T

Istinitosna vrednost logičkih operacija u tablici je u saglasnosti sa svakodnevnom logikom. Jedino kod implikacije naizgled nelogičnost vidimo u slučaju kada je $\tau(p) = \perp$.

Znači, impikacija je tačna bez obzira na vrednost iskaznog slova.

Primer:

Ako je Srbija najveća na svetu, veća je od Crne Gore $\tau\left(\perp\Rightarrow T\right)=T$.

Složena rečenica je tačna, jer ako je Srbija najveća na svetu,
veća je od Crne Gore, koja je manja od nje.

Primer:

Ako je Srbija najveća na svetu, veća je od SAD. $\tau\left(\perp\Rightarrow\perp\right)=T$.

Složena rečenica je tačna, jer ako je Srbija najveća na svetu,
veća je od svake druge države.

Implikaciji među logičkim operacijama pripada istaknuto mesto. Čuveni matematičar i filozof Bertrand Rasel je rekao da je cela matematika skup rečenica oblika *'ako p onda q'*. I zaista, najveći broj matematičkih tvrđenja je oblika implikacije i zato se razvio čitav niz različitih jezičkih izražavanja implikacije.

- Implikacija može da se čita na sledeće načine:

  Ako p, onda q,
  p, samo ako q,
  p je pretpostavka posledice q,
  p povlači q,
  iz p sledi q,
  p je dovoljan uslov za q,
  q je potreban uslov za p,
  q ako p.

Za implikaciju, $p\Rightarrow q$, vezane su i 3 dodatne vrste iskaza:

$q\Rightarrow p$	***konverzija***
$\neg p\Rightarrow\neg q$	***inverzija***
$\neg q\Rightarrow\neg p$	***kontrapozicija***

Primer:
Ako je Mia glumica, onda je Mia popularna - implikacija
Ako je Mia popularna, onda je Mia glumica - konverzija
Ako je Mia nije glumica, onda je Mia nije popularna - inverzija
Ako je Mia nije popularna, onda je Mia nije glumica - kontrapozicija

- ***Ekvivalencija*** je dvostruka implikacija, odnosno

$$(p \Leftrightarrow q) = ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$$

Ekvivalencija se čita na sledeće načine:
Ako p, onda q i obrnuto,
p ako i samo ako q,
p je potrebno i dovoljno da je q,
p je potreban i dovoljan uslov za q.

Reči ***ako i samo ako*** pišemo često u sledećem obliku ***akko***.

Primer:
Implikacija
Ako je neki ceo broj jednak 2, onda je njegov kvadrat jednak 4.

Primer:
Ekvivalencija
Trougao je pravougli, ako i samo ako, je zbir kvadrata nad katetama jednak kvadratu nad hipotenuzom.

Primer:
Broj je deljiv sa 6, akko je deljiv sa 2 i sa 3.

1.3.2. ISKAZNE FORMULE

Kombinovanjem iskaznih slova i logičkih operacija dobijamo složene formule, kao što su $p \wedge q \Leftrightarrow \neg p$, $(p \wedge q) \Rightarrow \neg p \vee r$ i slično.

Definicija:

- Iskazna slova p, q, r,...čine i***skaznu formulu F***.
- ***Iskaznu formulu*** čine iskazna slova i osnovne logičke operacije.
- Iskazne formule se mogu dobiti samo primenom prethodna dva pravila konačan broj puta.

Primer:

Formule su: p, $(p \Rightarrow q) \wedge p, \quad p \vee q \vee r, \quad \neg p \wedge (p \Leftrightarrow q)$.

Za dve formule F_1 i F_2 kažemo da su ***ekvivalentne*** ako je $F_1 \Leftrightarrow F_2$, i pišemo $F_1 \equiv F_2$.

Istinitosnu vrednost svake iskazne formule moguće je odrediti istinitosnom tablicom.

Primer:

Odrediti istinitosnu tabicu formule $(p \Rightarrow q) \wedge p$

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$
T	T	T	T
T	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	T	T	$\perp$
$\perp$	$\perp$	T	$\perp$

Prilikom pisanja iskaznih formula, nekada je moguće izostaviti zagrade, ali je tada važno znati prioritet logičkih operacija, koji je dat u tablici.

logički operator	prioritet
$\neg$	1-najveći
$\wedge, \quad \vee$	2
$\Rightarrow, \quad \Leftrightarrow$	3

Prevod sadržaja iz običnog jezika u zapis matematičke logike je jedan od najvažnijih problema hardverskih i softverskih poslova. Problem se svodi da se sadržaj običnog jezika svede na tačan i nedvosmislen logički zapis koji može da bude predmet daljeg proučavanja.

Primer:
Automatski, odgovor ne može biti poslan ako je unutrašnja memorija puna .
Neka je rečenica p: Odgovor se automatski šalje.
Neka je rečenica q: Unutrašnja memorija je puna.
Onda $\neg$ p je rečenica : Odgovor se ne šalje automatski.
Logički zapis bi bio : $q \Rightarrow \neg p$

- Iskazna formula koja je uvek tačna naziva se ***tautologija.***
- Iskazna formula koja je uvek netačna naziva se ***kontrapozicija*.**

Tautologije, kao uvek tačni iskazi, predstavljaju zakone mišljenja, odnosno zakonitosti logičkog zaključivanja.

Neki od važnijih logičkih zakona – tautologija su

Zakon idempotencije $\quad p \wedge p \Leftrightarrow p, \quad p \vee p \Leftrightarrow p$

Komutativnost $\quad p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p, \quad p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

Asocijativnost

$$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$$
$$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$$

Distributivnost

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \Leftrightarrow p \wedge (q \vee r)$$
$$(p \vee q) \wedge (p \vee r) \Leftrightarrow p \vee (q \wedge r)$$

Zakon apsorpcije

$$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$$
$$p \vee (p \wedge r) \Leftrightarrow p$$

Tranzitivnost za implikaciju $\quad ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

Tranzitivnost za ekvivalenciju $\big((p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)\big) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow r)$

De Morganovi zakoni $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q), \quad \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

Zakon kontrapozicije $(\neg q \Rightarrow \neg p) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$

Zakon dvojne negacije $\neg\neg p \Rightarrow p$

Modus ponens $\big(p \wedge (p \Rightarrow q)\big) \Rightarrow q$

Modus tolens $\big((p \Rightarrow q) \wedge \neg q\big) \Rightarrow \neg p$

Zakon svođenja na protivrečnost $\big(\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q)\big) \Rightarrow p$

Zakon silogizma $\big((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)\big) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$

1.4. KVANTORI

Kvantori ili kvantifikatori u jeziku su reči ***svaki*** i ***neki***. Osim ovih reči koriste se i drugi njihovi jezički oblici. Tako reč ***svaki*** u matematici znači isto što i ***bilo koji***, ***ma koji***, ***svi*** i slično, dok umesto reči ***neki*** koristi se i ***postoji***, ***bar jedan***, ***najmanje jedan*** i slično.

- ***Univerzalni kvantor*** znači ***svaki*** i obeležava se sa $\forall$.

$(\forall x)\, a(x)$ - za svaki *x* važi $a(x)$

- ***Egzistencijalni kvantor*** znači ***neki*** i obeležava se sa $\exists$.

$(\exists x)\, a(x)$ - postoji *x* za koje važi $a(x)$

U slučaju višestruke primene kvantora umesto

$(\forall x_1, \forall x_2, \ldots, \forall x_n) a(x)$ pišemo $(\forall x_1, x_2, \ldots, x_n) a(x)$.

Isto važi i za egzistencijalni kvantor.

Kao što se iz ovih definicija može videti kvantori na neki način predstavljaju uopštenja logičkih operacija konjukcije odnosno disjunkcije.

Prilikom zapisivanja različitih sadržaja upotrebom kvantora treba znati:

- Rečenica, svaki A je B, znači isto što i:

  Za svaki x, ako x ima osobinu A, onda x ima i osobinu B.

- Rečenica, neki A je B, znači isto što i:

  Postoji x, koji ima osobinu A i osobinu B.

Primer:
Primenom kvantora napisati sledeće rečenice:

a) Svaki prirodni broj je pozitivan.

$$(\forall x) x \in N \wedge x > 0$$

b) Postoji x takvo da je $x < 7$.

$$(\exists x) x < 7$$

c) Postoji tačno jedan broj čiji je kvadrat nula.

$$(\exists_1 x) x^2 = 0$$

Primer:

Uporebom kvantora zapisati sledeće rečenice:

a) x je oblika 2k, gde je k ceo broj

$$(\exists k \in Z) x = 2k$$

b)Za svaki ceo broj x, postoji ceo broj y, takav da im je zbir 0.

$$(\forall x \in Z)(\exists y \in Z) x + y = 0$$

Od izuzetnog značaja je poznavanje pravila za negaciju kvantora.

- ***Negacija kvantora***:

$$\neg(\forall x)a(x) = (\exists x)\neg a(x)$$
$$\neg(\exists x)a(x) = (\forall x)\neg a(x)$$

Primer:
Negirati sledeće rečenice:

a) Svi prirodni brojevi su i celi brojevi.
Negacija glasi: Neki prirodni brojevo nisu celi brojevi.

b) Neki prirodni brojevi su deljivi sa 5
Negacija glasi: Svi prirodni brojevi nisu deljivi sa 5.

1.5. PREDIKATSKA LOGIKA

Iskaznim formulama se ne mogu analizirati mnogi matematički sadržaji kao što su na primer:

$$(\forall x)\, x \in N \wedge x > 0$$
$$(\exists x)\, x < 7$$
$$x + y \geq 7$$
$$x = y$$

Takvi matematički sadržaji su predmet proučavanja ***predikatske logike***.

Iskazna logika je malo *' grublja'*, ona radi sa iskazima kao nedeljivim celinama, dok predikatska logika izučava i njihovu strukturu. Sve zakonitosti koje smo uveli u iskaznoj logici ostaju da važe, samo sada dodajemo još neka nova, koja u iskaznoj logici nisu važila.

Za razliku od iskaza koji imaju istinitosnu vrednost, navedena tvrđenja imaće istinitosnu vrednost tek kada se vrednost promenljive zameni sa nekom konkretnom brojnom vrednošću.

U tvrđenju $(\exists x)\, x < 7$ možemo reći da je promenljiva x subjekat, a < 7 je predikat koji definiše osobinu promenljive.

Takva tvrđenje možemo da zapišemo u obliku $P(x)$, gde x označava promenljivu, a P ***predikat***.

Predikatske formule grade se pomoću:

- Skupa konstanti
- Skupa promenljivih
- Operacijskih znakova
- Relacijskih znakova
- Simbola logičkih operacija
- Kvantora
- Pomoćnih simbola

Korišćenjem ovih simbola mogu se opisati gotovo svi iskazi koji se u matematici pojavljuju, odnosno problemi koji se rešavaju pomoću računara.

Predikatske formule se uvek definišu u odnosu na neki jezik, odnosno algebarsku strukturu. U okviru te strukture se vrši interpretacija formule. Znači, promenljive u formuli mogu da uzimaju različite vrednosti. Tek u konkretnoj interpretaciji možemo govoriti da li je neka predikatska formula tačna ili ne.

Primer:

Data je formula $a(x, y) \Rightarrow (\exists z)\big(a(x, z) \wedge a(z, y)\big)$

Ona može da ima više interpretacija.

Jedna njena interpretacija u skupu N i relacija < kao vrednost znaka a bi bila

$x < y \Rightarrow (\exists z)(x < z \wedge y < y)$

Za konkretne brojne vrednosti x,y,z nastaju različiti iskazi o prirodnim brojevima, koji su nekada tačni, a nekada ne.

Druga interpretacija je u skupu pravih, a relacija a je paralelno.

$x \| y \Rightarrow (\exists z)(x \| z \wedge z \| y)$

1.5.1. VALJANE FORMULE

Valjana formula u predikatskoj logici su manje više kao tautologija u iskaznoj logici. Međutim, dok za ispitivanje da li je neka iskazna formula tautologija imamo jasno definisan postupak, za ispitivanje da li je neka predikatska formula valjana, jasnog i definisanog postupka nema.

Valjanim formulama, isto kao i tautologijama ispituju se zakoni mišljenja.

- Predikatska formula je ***valjana***, u oznaci $\models F$, ukoliko je istinita pri svakoj glavnoj interpretaciji.

Primer:

a) Formula $a(k) \Rightarrow (\exists x) a(x)$ je valjana, jer za svaku interpretaciju ako je $a(k)$ tačno, $(\exists x) a(x)$ je takođe tačno.

b) Formula $(\exists x) a(x) \Rightarrow a(k)$ nije valjana, jer postoje interpretacije kada nije istinita.

Ako je domen skup N i a je biti paran broj, a je k=5

Važnije valjane formule:

Zakon permutacije istorodnih kvantora

$$(\forall x)(\forall y) A \Leftrightarrow (\forall y)(\forall x) A$$
$$(\exists x)(\exists y) A \Leftrightarrow (\exists y)(\exists x) A$$

Distributivni zakon univerzalnog kvantora prema konjunkciji

$$(\forall x)(A \wedge B) \Leftrightarrow (\forall x) A \wedge (\forall x) B$$

Distributivni zakon egzistencijalnog kvantora prema disjunkciji

$$(\exists x)(A \vee B) \Leftrightarrow (\exists x) A \vee (\exists x) B$$

Distributivni zakoni operacija $\wedge, \vee, \Rightarrow$ prema kvantorima

$$(\forall x)(A \vee B(x)) \Leftrightarrow A \vee (\forall x) B(x), \quad (\exists x)(A \vee B(x)) \Leftrightarrow A \vee (\exists x) B(x)$$
$$(\forall x)(A \wedge B(x)) \Leftrightarrow A \wedge (\forall x) B(x), \quad (\exists x)(A \wedge B(x)) \Leftrightarrow A \wedge (\exists x) B(x)$$
$$(\forall x)(A \Rightarrow B(x)) \Leftrightarrow A \Rightarrow (\forall x) B(x), \quad (\exists x)(A \Rightarrow B(x)) \Leftrightarrow A \Rightarrow (\exists x) B(x)$$
$$(\forall x)(B(x) \Rightarrow A) \Leftrightarrow (\exists x) B(x) \Rightarrow A, \quad (\exists x)(B(x) \Rightarrow A) \Leftrightarrow (\forall x) B(x) \Rightarrow A$$

De Morganovi zakoni za kvantore

$$\neg(\forall x) A \Leftrightarrow (\exists x) \neg A, \quad \neg(\exists x) A \Leftrightarrow (\forall x) \neg A$$

Zakon saglasnosti implikacije sa kvantorima

$$(\forall x)(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\forall x) A \Rightarrow (\forall x) B$$
$$(\exists x)(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\exists x) A \Rightarrow (\exists x) B$$

Zakon saglasnosti ekvivalencije sa kvantorima

$$(\forall x)(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\forall x) A \Leftrightarrow (\forall x) B$$
$$(\exists x)(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\exists x) A \Leftrightarrow (\exists x) B$$

U savremenoj literaturi koriste bar tri naziva za isti pojam, predikatska logika, logika prvog reda i kvantifikatorski račun.

Prvi naziv predikatska logika nastao je najverovatnije jer se ova logika bavi predikatima. Predikat je onj deo rečenice kojim se nešto tvrdi. U matematici to su relacije koje su definisane nad nekim skupom objekata.

Naziv logika prvog reda ukazuje na postojanje u logika viših redova. Logika prvog reda odnosi se na na osnovni nivo objekata koje proučavamo.

A naziv kvantifikatorski račun potiče od korišćenja kvantifikatora , specifičnih operatora koji govore o kvantitetu objekta sa nekom osobinom.

U praksi je često potrebno opisati rezonovanja u koja je uključeno i vreme. Tako dolazimo do ***temporalne logike***. Ona je izuzetno važna za primenu u računarstvu jer se rad softvera i hardvera posmatra u zavisnosti od protoka vremena, kao što su problemi verifikacije algoritama, rada operativnih sistema ili paralelno programiranje. Za ovakve problema potrebno je definisati još novih operatora koji bi opisali različite modele vremena, ali ta problematika prevazilazi nivo ovoga kursa.

PITANJA ZA PONAVLJANJE

1. Šta je iskaz?
2. Šta je iskazna formula?
3. Navesti osnovne logičke operacije.
4. Šta je tautologija, a šta kontradikcija?
5. Navesti osnovne logičke zakone.
6. Šta su kvantori?
7. Kako glase negacije kvantora?
8. Koja je razlika između iskazne i predikatske logike?
9. šta su valjane formule

KLJUČNE REČI

Iskaz
Formula
Konjunkcija
Disjunkcija
Implikacija
Ekvivalencija
Kontradikcija
Iskazna formula
Kvantor
Negacija
Tautologija
Egzistencijalni kvantor
Univerzalni kvantor
Predikat
Valjana formula

1.6. ZADACI

1. Da li su dati matematički izrazi, iskazi:

a) $\frac{1}{5} > \frac{1}{3}$, b) $x^2 + y^2 \geq 2xy$, c) $\sqrt{(-3)^2} = -3$, d) $x^2 = y$.

Rešenje:

a) da, b) da,

c) da, d) ne, jer nema definisanu istinitosnu vrednost.

2. Odrediti istinitosnu vrednost sledećih iskaza:

a) $\frac{1}{5} > \frac{1}{3}$, b) $x^2 + y^2 \geq 2xy$,

c) $\sqrt{(-3)^2} = -3$, d) $(1 < 2) \wedge (2 < 5)$.

Rešenje:

a) $\tau\left(\frac{1}{5} > \frac{1}{3}\right) = \perp$, b) $\tau\left(x^2 + y^2 \geq 2xy\right) = T$,

c) $\tau\left(\sqrt{(-3)^2} = -3\right) = \perp$, d) $\tau\left((1 < 2) \wedge (2 < 5)\right) = T \wedge T = T$

3. Date rečenice napisati korišćenjem znakova osnovnih logičkih operacija:

a) Najmanje jedan od brojeva *a* i *b* je pozitivan.
b) Oba broja *a* i *b* su pozitivna.
c) Najmanje jedan od brojeva *a* i *b* nije pozitivan.
d) Nijedan od brojeva *a* i *b* nije pozitivan,
e) Tačno jedan od brojeva *a* i *b* je pozitivan.

Rešenje:

a) $a > 0 \vee b > 0$,
b) $a > 0 \wedge b > 0$,
c) $\neg(a > 0) \vee \neg(b > 0)$,
d) $\neg(a > 0) \wedge \neg(b > 0)$,
e) $\neg(a > 0) \wedge (b > 0)$.

4. Date rečenice napisati korišćenjem znakova osnovnih logičkih operacija:

a) Svaki od brojeva 2,4,6 je paran,
b) Neki od brojeva 2,4,6 je manji od 6,
c) Neki od brojeva 2,4,6 nije deljiv sa 3,
d) Nijedan od brojeva 2,4,6 nije veći od 6.

Rešenje:

a) $2|2 \wedge 2|4 \wedge 2|6$, b) $2<6 \vee 4>6 \vee 6<6$,

c) $\neg(3|2) \vee \neg(3|3) \vee \neg(3|6)$, d) $\neg(2>6) \wedge \neg(4>6) \wedge \neg(6>6)$.

5. Dati su iskazi :

$p \equiv \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right):\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)=\frac{10}{3}$, $q \equiv \frac{1}{2}-\frac{1}{3}:\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)=-\frac{37}{6}$,

$r \equiv \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right):\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=7$, $s \equiv \frac{1}{2}-\frac{1}{3}:\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$.

Odrediti njihovu tačnost i koristeći dobijene rezultate odrediti istinitosnu vrednost sledećih iskaza:

a) $(p \wedge q) \vee r$, b) $(p \vee q) \vee (r \wedge s)$,

c) $(p \vee q) \Rightarrow (r \wedge \neg s)$, d) $(p \vee \neg q) \Leftrightarrow (r \wedge s)$.

Rešenje:

Kako je $\tau(p)=T,\ \tau(q)=T,\ \tau(r)=\perp,\ \tau(s)=\perp$, dobijamo

a) $\tau((p \wedge q) \vee r)=(T \wedge T) \vee \perp = T \vee \perp = T$,

b) $\tau((p \vee q) \vee (r \wedge s))=(T \vee T) \vee (\perp \vee \perp)=T \vee \perp = T$

c) $\tau((p \vee q) \Rightarrow (r \wedge \neg s))=\perp$

d) $\tau((p \vee \neg q) \Leftrightarrow (r \wedge s))=\perp$

6. Dati su iskazi:

$$p \equiv \left(4x^4y^3\right)^3 : \left(2x^2y\right)^5 = 2x^2y^3, \qquad q \equiv \left(3x^4y^2\right)^2 : \left(3x^6y\right)^2 = 3xy^4,$$

$$r \equiv (2x-y)(2x+y) = 4x^2 - y^2, \qquad s \equiv (x-2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2.$$

Odrediti njihovu tačnost i koristeći dobijene rezultate odrediti istinitosnu vrednost sledećih iskaza:

a) $(p \wedge q) \vee r$, b) $(p \vee q) \vee (r \wedge s)$,

c) $(p \vee q) \Rightarrow (r \wedge \neg s)$, d) $(p \vee \neg q) \Leftrightarrow (r \wedge s)$.

Rešenje:

Kako je

$$\tau(p) = \perp,\ \tau(q) = \perp,\ \tau(r) = T,\ \tau(s) = \perp,$$

a) $\tau((p \wedge q) \vee r) = T$, b) $\tau((p \vee q) \vee (r \wedge s)) = \perp$

c) $\tau((p \vee q) \Rightarrow (r \wedge \neg s)) = T$, d) $\tau((p \vee \neg q) \Leftrightarrow (r \wedge s)) = \perp$

7. Dati su iskazi:

$$p \equiv \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1, \qquad q \equiv \left(xe^{2x}\right)' = e^{2x},$$

$$r \equiv AI = IA = A, \qquad s \equiv \int \ln x \, dx = 1 + \ln x + C.$$

Odrediti njihovu tačnost i koristeći dobijene rezultate odrediti istinitosnu vrednost sledećih iskaza:

a) $(p \wedge q) \vee r$, b) $(p \vee q) \vee (r \wedge s)$,

c) $(p \vee q) \Rightarrow (r \wedge \neg s)$, d) $(p \vee \neg q) \Leftrightarrow (r \wedge s)$.

Rešenje:

Kako je

$$\tau(p) = T,\ \tau(q) = \perp,\ \tau(r) = T,\ \tau(s) = \perp,$$

a) $\tau((p \wedge q) \vee r) = T$,

b) $\tau((p \vee q) \vee (r \wedge s)) = T$

c) $\tau((p \vee q) \Rightarrow (r \wedge \neg s)) = T$,

d) $\tau((p \vee \neg q) \Leftrightarrow (r \wedge s)) = \perp$

8. Implikaciju $x = 3 \Rightarrow x < 10$, pročitati na više načina.

Rešenje:

Ako $x = 3$, onda je $x < 10$,

$x = 3$ je pretpostavka posledice $x < 10$,

$x = 3$ povlači $x < 10$,

iz $x = 3$ sledi $x < 10$,

$x = 3$ je dovoljan uslov za $x < 10$.

$x < 10$ je potreban uslov za $x = 3$.

9. Rečenici, ceo broj je deljiv sa 4, ($4|x$), napisati po jedan dovoljan i jedan potreban uslov.

Rešenje:

Dovoljan uslov je recimo $8|x$, jer ako je broj deljiv sa 8 deljiv je i sa 4, $8|x \Rightarrow 4|x$.

Potreban uslov je recimo $2|x$, jer ako je broj deljiv sa 2 može da bude deljiv i sa 4, $4|x \Rightarrow 2|x$.

10. Naći konverziju, inverziju i kontrapoziciju implikacije

$x = 3 \Rightarrow x < 0$ $x = 3 \Rightarrow x < 10$

Rešenje:

$q \Rightarrow p$ *konverzija*

$x < 10 \Rightarrow x = 3$.

$\neg p \Rightarrow \neg q$ *inverzija*

$(\neg(x = 3) \Rightarrow \neg(x < 10)) \Leftrightarrow (x \neq 3 \Rightarrow x \geq 10)$

$\neg q \Rightarrow \neg p$ *kontrapozicija*

$(\neg(x < 10) \Rightarrow \neg(x = 3)) \Leftrightarrow (x \geq 10 \Rightarrow x \neq 3)$

11. Koristeći logičku operaciju ekvivalenciju zapisati Pitagorinu teoremu.

Rešenje:

a) Trougao je pravougli akko je $a^2 + b^2 = c^2$

b) $a^2 + b^2 = c^2$ je potreban I dovoljan uslov da bi trougao bio pravougli.

c) ako je $a^2 + b^2 = c^2$, trougao je pravougli I obrnuto.

12. Ispitati da li su iskazne formule tautologije:

a) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$, b) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$,

c) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow \neg p$, d) $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$,

e) $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$.

Rešenje:

a) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

$\tau(p)$	$\tau(p)$	$\tau(\neg p)$	$\tau(\neg q)$	$\tau(p \wedge q)$	$\tau(\neg(p \wedge q))$	$\tau(\neg p \vee \neg q)$	F
T	T	$\perp$	$\perp$	T	$\perp$	$\perp$	T
T	$\perp$	$\perp$	T	$\perp$	T	T	T
$\perp$	T	T	$\perp$	$\perp$	T	T	T
$\perp$	$\perp$	T	T	$\perp$	T	T	T

Formula je tautologija.

b) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ je tautologija,

c) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow \neg p$ nije tautologija,

d) $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$ je tautologija,

e) $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

$\tau(p)$	$\tau(q)$	$\tau(r)$	$\tau(p \vee q)$	$\tau((p \vee q) \wedge r)$	$\tau(p \vee r)$	$\tau(q \vee r)$	$\tau((p \vee r) \wedge (q \vee r))$	$\tau(F)$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	$\perp$	T	$\perp$	T	T	T	$\perp$
T	$\perp$	T	T	T	T	T	T	T
T	$\perp$	$\perp$	T	$\perp$	T	$\perp$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	T	T	T	T	T	T	T	T
$\perp$	T	$\perp$	T	$\perp$	$\perp$	T	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	T	$\perp$	$\perp$	T	T	T	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$

Formula nije tautologija.

13. Dokazati da su sledeće formule tautologije

a) $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ zakon komutacije

b) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ De Morganov zakon

c) $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$ zakon idempotencije

d) $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \Leftrightarrow p \wedge (q \vee r)$ zakon distribucije.

Rešenje:
Formule se mogu dokazati korišćenjem tablica kao u prethodnom primeru.

14. Metodom svođenja na protivrečnost ispitati da li je sledeća formula tautologija
$((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$.

Rešenje:
Ako posmatrana formula ne bi bila tautologija, tada za neke vrednosti p i q koji se pojavljuju u ovoj formulu je

$$\tau(((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p) = \perp .$$

To se može desiti u slučaju da je

$$\tau((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) = T, \tau(p) = \perp .$$

Na osnovu toga dobijamo da je

$\tau((p \Rightarrow q) \Rightarrow \perp) = T$, odnosno $\tau(p \Rightarrow q) = \perp$.

Ovaj izraz može biti netačan samo u jednom slučaju, a to je kada je

$\tau(p) = T$ i $\tau(q) = \perp$.

Kako smo već pretpostavili da je $\tau(p)=\perp$,

dolazimo do kontradikcije. Znači ne možemo naći vrednosti izraza p i q za koje je polazna formula netačna. Prema tome polazna formula mora biti tautologija.

15. Metodom svođenja na protivrečnost ispitati da li su sledeće formule tautologija

a) $p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$,

b) $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$,

c) $(p \Rightarrow r) \Rightarrow (((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow r)$,

d) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \vee q)$,

e) $(p \vee q) \wedge p \Rightarrow (p \vee \neg q)$.

Rešenje:

a)

$$\tau(p \Rightarrow (p \Rightarrow q)) = \perp$$

$$\tau(p) = T, \tau(p \Rightarrow q) = \perp$$

$$\tau(T \Rightarrow q) = \perp$$

$$\tau(q) = \perp$$

Nismo dobili kontradikciju, znači naša pretpostavka da formula nije tautologija je dobra. Znači formula nije tautologija.

b) formula nije tautologija,

c) formula nije tautologija,

d) Pretpostavimo da je

$$\tau((p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \vee q)) = \perp$$

$$\tau(p \Rightarrow q) = T, \tau(\neg p \vee q) = \perp.$$

Ako je $\tau(\neg p \vee q) = \perp$, onda je $\begin{array}{l} \tau(\neg p) = \perp, \tau(q) = \perp \\ \tau(p) = T, \tau(q) = \perp \end{array}$

Ako dobijene vrednosti ubacimo u prvu vezu dobijamo $\tau(T \Rightarrow \perp) = \perp$.

Po pretpostavci taj izraz je tačan. To je kontradikcija, koja obara polaznu pretpostavku, znači polazna formula je tačna

Ako dobijene vrednosti ubacimo u prvu vezu dobijamo

$\tau(T \Rightarrow \perp) = \perp$, a po našoj pretpostavki taj izraz je tačan. To je kontradikcija, koja obara polaznu pretpostavku, znači naša formula je tautologija.

e) formula nije tautologija.

16. Ako je dat predikat $P: x^2 - y^2 < z^2$, napisati iskaz $P(1,1,1)$.

Rešenje:

$$P(1,1,1) = 1^2 - 1^2 < 1^2$$

17. Ako je dat predikat $P: x^2 - y^2 < z^2$, napisati iskaz $(\exists x)(\exists y)P(x,y,1)$.

Rešenje:

$$(\exists x)(\exists y)P(x,y,1) = (\exists x)(\exists y)\, x^2 - y^2 < 1$$

Postoje brojevi x i z takvi da je $x^2 - y^2 < 1$.

18. Napisati sledeći iskaz u simboličkom zapisu:

’Svako zna matematiku bolje od Nikole’.

Rešenje:

Domen su studenti,

P(x,y): x zna matematiku bolje od y.

$$(\forall x)P(x, Nikola)$$

19. Dokazati valjanu formulu

$$(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) = (\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big)$$

Rešenje:

$(\forall x)P(x) \vee (\forall x)Q(x) =$

$P(a) \vee (\forall x)Q(x) =$ za proizvoljno a

$P(a) \vee Q(b) =$ za proizvoljno b

$(\forall x)\big(P(x) \vee Q(x)\big)$ kako su a i proizvoljni , uzećemo a=b

2.

OSNOVNI POJMOVI TEORIJE SKUPOVA

KRATAK SADRŽAJ:

CILJEVI UČENJA:

Kada ovo poglavlje proučite moći ćete da:

1. objasnite pojam skupa,
2. definišete osnovne skupovne relacije,
3. definišete osnovne skupovne operacije,
4. znate šta je kardinalni broj skupa,
5. znate probleme teorije beskonačnih skupova,
6. poznajete Raselov paradoks.

2.1. POJAM SKUPA

Svakodnevno, radimo sa skupovima. Korpa jabuka, stado ovaca, kontinenti, populacija bakterija, tačke na kružnici, prirodni brojevi, sve su to primeri skupova. Skoro svaka delatnost čoveka odnosi se na neke skupove. Danas su skupovi u matematici i nauci deo naše svakodnevice. Istorijski gledano nastali su kasno i njihov nastanak uslovio je velike potrese u matematičkom svetu.

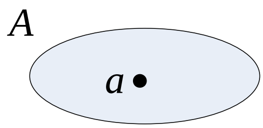
U drugoj polovini 19. veka matematičari hteli da prouče osnove matematičke analize i prvi radovi iz te oblasti bili su vezani za skupove brojeva i funkcija. Ta razmišljanja su ih dovela do ispitivanja apstraktnih osobina skupova. Tako nastaje prvo ***naivna teorija skupova*** čiji se pojmovi intuitivno prihvataju. Njen tvorac je nemački matematičar Džorž Kantor (*Georg Kantor* 1845.-1918.). Njegova otkrića u prvo vreme izazivaju sumnje pa i otvorena protivljenja matematičara toga doba. Međutim, krajem 19 veka teorija skupova počinje da se široko primenjuje u mnogim matematičkim disciplinama. Ali, baš u trenutku kada se teorija skupova počela da prihvata i primenjuje uočavaju se njeni prvi paradoksi. Prvi uočava sam Kantor 1895g a zatim i mnogi drugi. Otkrivanje paradoksa u teoriji skupova uticalo je na razvoj matematičke logike i dalji razvoj teorije skupova koji je omogućio da se definiše prva aksiomatski zasnovana teorije beskonačnih skupova koju daje nemački matematičar Ernest Zermelo, koja je postala odlučujući korak u sintetizovanju matematičkih znanja.

Sa aspekta naivne teorije skupova možemo reći da:

- ***Skup*** je osnovni pojam koji se ne definiše. Čine ga elementi koji imaju bar jednu zajedničku osobinu.
- Objekti skupa nazivaju se njegovim ***elementima.***
- Skupovi se obeležavaju najčešće velikim slovima A, B, C, ...,a njegovi elementi malim slovima a, b, c, ...
- Neki element a može pripadati datom skupu A, što se označava sa $a \in A$, ili ne pripadati istom skupu, što se označava sa $a \notin A$.
- Skup svih elemenata x za koje tačna rečenica $A(x)$, piše se kao

$$\{x | A(x)\}$$

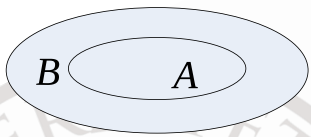
- Skup koji nema elemenata naziva se ***prazan skup*** i obeležava sa $\varnothing$.
- Za grafičko predstavljanje skupova koriste se ***Venovi dijagrami.***



$$a \in A$$

- Kažemo da je A ***podskup*** skupa B i pišemo $A \subset B$, ako svaki element skupa A pripada istovremeno i skupu B.

$$A \subset B = \left\{ x \middle| x \in A \Rightarrow x \in B \right\}$$



$$A \subset B$$

- Dva skupa A i B su ***jednaka***, ako svaki element skupa A pripada i skupu B i ako svaki element skupa B istovremeno pripada i skupu A.

$$A = B = \left\{ x \middle| x \in A \Leftrightarrow x \in B \right\}$$

- Za proizvoljne skupove A, B, C važi

$$A \subset A$$
$$A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A = B$$
$$A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$$

- ***Partitivni*** skup $\mathrm{P}(A)$ datog skupa A, je skup svih podskupova datog skupa, tj.

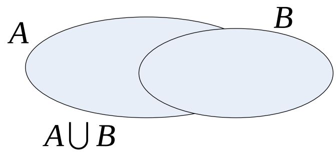
$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \left\{ X \middle| X \subset A \right\}.$$

Primer:

$A = \{a,b,c\}$ $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$

2.2. OPERACIJE SA SKUPOVIMA

- ***Unija*** dva skupa A i B je skup $A \bigcup B = \left\{ x \middle| \; x \in A \vee x \in B \right\}$.

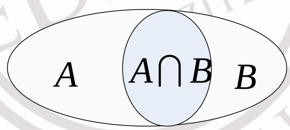


Primer: $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3,6,7\}$; $A \bigcup B = \{1,2,3,6,7\}$.

- U opštem slučaju, kada imamo konačno mnogo skupova $A_1, A_2, \ldots, A_n$, njihova unija je:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n .$$

- ***Presek*** skupova A i B je skup $A \bigcap B = \left\{ x \middle| \; x \in A \wedge x \in B \right\}$.



Primer:

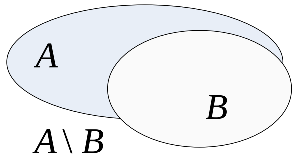
$A = \{1,2\}$, $B = \{2,3,6,7\}$; $A \bigcap B = \{2\}$

- Ako je presek dva skupa A i B prazan, tj. $A \bigcap B = \varnothing$, tada za ta dva skupa kažemo da su ***disjunktni***.

- Ako je dato konačno mnogo skupova $A_1, A_2, \ldots, A_n$ njihov presek je:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n .$$

- ***Razlika*** skupova A i B je skup $A \setminus B = \left\{ x \middle| x \in A \wedge x \notin B \right\}$.

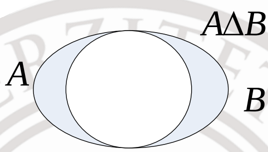


Primer:

$A=\{1,2\}$, $B=\{2,3,6,7\}$; $A\setminus B=\{1\}$, $B\setminus A=\{3,6,7\}$.

- ***Simetrična razlika skupova*** A i B je unija skupova $A\setminus B$ i $B\setminus A$, tj.

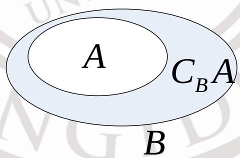
$$A\ \Delta\ B=(A\setminus B)\bigcup(B\setminus A).$$



Primer:

$A=\{1,2\}$, $B=\{2,3,6,7\}$; $A\Delta B=\{1,3,6,7\}$.

- ***Komplement*** skupa A u odnosu na skup B (ili dopuna skupa A do skupa B) gde je $A\subset B$ je skup $C_B A=B\setminus A$.



Primer:

$A=\{1,2\}$, $B=\{1,2,3,6,7\}$; $C_B A=\{3,6,7\}$.

- Par elemenata (a,b) nazivamo ***uređenim parom*** (ili uređenom dvojkom) ako je tačno određeno koji je element na prvom, a koji na drugom mestu.
- Uređeni parovi (a,b) i (c,d) su jednaki ako i samo ako je $a=c$ i $b=d$.
- ***Dekartovim proizvodom*** skupova A i B naziva se skup

$$A\times B=\{(a,b)\,|\,a\in A\wedge\ b\in B\}.$$

Primer:

Dati su skupovi $A=\{1,2,3\}$ i $B=\{x,y\}$.

$$A\times B=\{(1,x),(2,x),(3,x),(1,y),(2,y),(3,y)\},$$

$$B\times A=\{(x,1),(x,2),(x,3),(y,1),(y,2),(y,3)\}.$$

Očigledno je $A\times B\neq B\times A$, što znači da za Dekartov proizvod skupova ne važi zakon komutacije.

Dekartov proizvod $A\times A$ se označava sa A^2. Dekartov proizvod $R\times R=R^2$ predstavlja realnu ravan

Za operacije sa skupovima važe sledeći zakoni:

Zakon komutacije $\quad A\cup B=B\cup A \qquad A\cap B=B\cap A$

Zakon asocijacije $\quad (A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

Zakon distribucije $\quad A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

Zakon identiteta $\quad A\cup\varnothing=A$

Zakon dvostrukog komplementa $\quad (A^C)^C=A$

De Morganovi zakoni $\quad (A\cup B)^C=A^C\cap B^C$

$$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$$

Dekart Rene (Descartes René, 1596.-1650.) Bio je matematičar, filozof i naučnik čije je delo Geometrija (La geometrie) postavilo osnove današnjoj analitičkoj geometriji. Dekart je bio prvi koji je upotrebio poslednja slova alfabeta da označi nepoznate veličine. O značenju tog otkrića Engels je rekao: "Dekartova promenljiva veličina bila je prekretnica u matematici. Zahvaljujući tome ušli su u matematiku kretanje i dijalektika, a isto se tako odmah nužno došlo do diferencijalnog i integralnog računa, koji se odmah i javlja, te su ga Njutn i Lajbnic uglavnom dovršili, a nisu ga otkrili." Začetnik je novog filozofskog pravca racionalizma. Metodskim skeptičkim raščišćavanjem svega nejasnog i nesigurnog i izdvajanjem i odbacivanjem nepouzdanog. Ta istina je sadržana u njegovoj poznatoj rečenici "Mislim, dakle postojim" (Cogito, ergo sum).
1649. godine Dekarta je u Stokholm pozvala švedska kraljica Kristina da bi je podučavao. Dvadeset trogodišnja kraljica je želela da crta tangente u pet sati ujutru, tako da je Dekart razbio svoju životnu naviku ustajanja u jedanaest sati. Želeći da svojim savetima utiče na ćudljivu vladarku tada moćne, Dekart je podnosio surove uslove u zemlji stena i glečera i svako jutro hodao do palate. Ne naviknut na hladnoću švedskih zima umro je 1650. godine od zapaljenja pluća.

2.3. BROJ ELEMENATA SKUPA - KARDINALNI BROJ

Određivanje broja elemenata konačnih skupova svodi se na njihovo prebrojavanje.

Kada se radi o beskonačnim skupovima, stvar je mnogo složenija. Još u antičko doba Euklid daje aksiomu: Celina je uvek veća od svakog svog dela. Ali u antici je ovo služilo upravo kao argument da beskonačne skupove treba odbaciti baš zato što proizvode ovakve paradokse. U 17. veku čuveni fizičar i matematičar Galileo Galilej (*Galileo Galilei* 1564-1642) takođe je primetio da kod beskonačnog skupa, njegov pravi podskup može biti iste veličine kao i ceo skup. Kasnije u 19. veku je uočeno da svi beskonačni skupovi nisu iste veličine, da neki beskonačni skupovi mogu biti veći ili manji od drugih beskonačnih skupova. Pojam kardinalnog broja uveo je Džordž Kantor da bi se pomoću njega beskonačni skupovi mogli upoređivati po veličini.

Primer:

Skup N prirodnih brojeva ima beskonačno mnogo elemenata, ali manje od skupa celih brojeva Z, kojih je takođe beskonačno mnogo.

- Ako postoji bijektivna funkcija f skupa A na skup B, onda se za skupove A i B kaže da imaju isti ***kardinalni broj,*** u oznaci $kA = kB$.
- Kod konačnih skupova, ***kardinalni broj*** predstavlja broj elemenata skupa.
- Ako skup A ima isti kardinalni broj kao skup prirodnih brojeva N, onda za skup A kažemo da je ***prebrojiv***.
- Skup A je prebrojiv ako se može poređati u niz.
- Kardinalni broj skupa prirodnih brojeva označava se sa hebrejskim slovom $\aleph$ i čita se ***alef nula*** $kN = \aleph_0$.

Primer:
Dokazati da kardinalni broj skupa prirodnih brojeva je jednak kardinalnom broju skupa svih parnih prirodnih brojeva.
Ako se uoči bijektivno preslikavanje skupa prirodnih brojeva u skup parnih prirodnih brojeva kao u sledećoj šemi

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3 & 2\cdot 4 & \ldots & 2\cdot n & \cdots \end{array}$$

odnosno preslikavanje $f : N \to Z$, kod koga je $f(1) = 0,\ f(2) = 1,\ldots\ldots.$

možemo zaključiti da ovi skupovi imaju isti kardinalni broj i da je $kN = k2N$.

Primer:
Skup celih brojeva je takođe prebrojiv, jer se brojevi mogu poređati u niz,
$0, -1, 1, -2, 2, \cdots$
Znači postoji bijektivno preslikavanje $f : N \to Z$, kod koga je
$f(1) = 0,\ f(2) = 1,\ldots\ldots.$
Dakle $kN = kZ$.

Primer:
Skup pozitivnih racionalnih brojeva je prebrojiv, jer se i ovi brojevi mogu poređati u niz,

$$\begin{array}{lll} 0 & & \\ 1 & & \\ \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} \\ \ldots & & \end{array}$$

Dakle $cardN = cardQ$.

Ako posmatramo sve racionalne brojeve Q, oni se takođe mogu napisati u obliku niza $\{0, \pm q_1, \pm q_2, ...\}$ pa možemo zaključiti da je skup Q takođe prebrojiv skup.

- Skup realnih brojeva R je ***neprebrojiv***, $cardR = c$ (kontinuum).
- Kontinuum iznosi $c = 2^{\chi_0}$

Primer:

Skup svih tačaka prave ima kardinalni broj c.

Skup svih realnih brojeva na intervalu $(0,1)$ ima takođe kardinalni broj c.

Primer:

Koliki je kardinalni broj praznog skupa?

$card\,\varnothing = 0$

$card\,\{\varnothing\} = 1$

Kantor dakle tvrdi da ne postoji samo jedna beskonačnost. Postoji čitav spektar beskonačnosti, a dve sa kojima se najčešće srećemo u svakodnevnoj matematici su prirodni brojevi čiji je kardinalni broj ***alef nula*** $\aleph_0$ i realni brojevi čiji je kardinalni broj kontinuum C.

Jedno od pitanja koje je Kantor ostavio otvorenim, danas je poznato kao hipoteza kontinuuma.

- **Kantorova hipoteza kontinuuma**

Da li postoji skup A čiji je kardinalni broj između kardinalnog broja svih prirodnih brojeva i kardinalnog broja svih realnih brojeva?

$$\aleph_0 < K_A < C$$

2.4. RASELOV PARADOKS

Početkom 20 veka teorija skupova doživljava svoj procvat i nalazi široku primenu u matematici i nauci. Međutim, u naivnoj teoriji skupova pojmovi nisu bili strogo definisani i mogli su se tumačiti na različite načine.

Tako su uočene i prve protivrečnosti, odnosno paradoksi. Najčuveniji je Raselov paradoks nastao 1902 godine, (*Bertrand Rasel 1872-1970*). On je ukazao na nedostatke takozvane naivne teorije skupova. Glavni problem je predstavljao navedeni uslov, kojim se elementi grupišu u skup

Postoje razne interpretacije Raselovog paradoksa, paradoks brijača, paradoks biblioteke, Pinokija, lažova, i mnogi drugi.

Primer:

Paradoks lažova

Najstariji varijanta ovog paradoksa je tvrđenje čuvenog kritskog filozofa Epimenida ˝ Svi krićani lažu˝.

Paradoks brijača

U nekom selu živeo je brijač, koji je brijao sve one stanovnike sela, koji se nisu brijali sami. Da li je brijač brijao samog sebe?

Ako bi se brijač brijao sam, on bi bio jedan od stanovnika koji se briju sami, pa se ne bi smeo brijati kod brijača, odnosno kod samog sebe. Ako suprotno brijač se ne bi brijao sam, bio bi jedan od stanovnika sela koji se ne briju sami, pa bi se morao brijati kod brijača, odnosno kod sebe. Znači brijač je samo kontradiktoran.

Kako se rešava ovaj paradoks?

Jednostavno, da takvo selo ne može da postoji.

Raselov paradoks

Posmatrajmo skup $A=\{X \mid X \notin X\}$, odnosno skup svih skupova koji nisu element samog sebe. Da li je A element od A ili nije?

Odgovor je kontradiktoran, jer po definiciji skupa A,

A je element od A $\Leftrightarrow$ A nije element od A.

Nasuprot prethodnom primeru u Raselovom paradoksu nije baš jasno zašto skup A ne bi postojao i zašto je samo kontradiktoran.

Suština Raselovog paradoksa svodi se na sledeće: Neka se za osobinu uzme *'element skupa ne sadrži samog sebe'* i formiraju takvi skupovi. Zatim se formira skup svih takvih skupova. Postavlja se pitanje da li će taj skup sadržati samog sebe kao element ?

Neka je A skup svih skupova koji ne sadrže sebe kao element. Pitanje je da li skup A pripada samom sebi ili ne? Ako pripada sebi, onda neće posedovati polaznu osobinu " skup ne pripada samom sebi ". Ako ne pripada samom sebi, onda će da zadovolji traženu osobinu, pa će pripadati samom sebi. Oba slučaja dovode do kontradikcije.

Pojava Raselovog paradoksa ozbiljno je uzdrmala naivnu teoriju skupova. Kao rezultat razvila su se tri pravca u matematici kojima je pokušano rešavanje nastalih problema, Rasel–logicizam,(smatrali su da se matematika može svesti logiku), Bauer-intuicionalizam, (osnovan ideja je bila da da se postojanje objekta priznaje samo ako imamo način za njegovu konstrukciju) i Hilbert –formalizam, pa se moralo se pribeći aksiomatizaciji teorije skupova. Prvi aksiomatski pristup dao je Zermelo 1908g. A zatim i mnogi drugi matematičari. Zanimljiv je pristup von Nojmana koji je smatrao da paradoksi u Kantorovoj teoriji skupova ne dolaze sbog velikih skupova , nego zato što ti veliki skupovi su nečiji elementi. Tako on nekim objektima ne dozvoljava da budu elementi nekog drugog objekta. Te objekte zovemo klase. Objekti koji su elementi nekog drugog objekta on naziva skupom.

Rasel je uočeni problem rešio tako što je definisao pojam klase i jedan od načina prevazilaženja ovog paradoksa se svodi da se skup svih skupova ne smatra skupom, već klasom, koja je uopštenje pojma skupa. Klasa takođe nema strogu definiciju, već možemo reći da nju čine objekti odabrani po nekom zajedničkom kriterijumu. Naglašavamo da se pojam klase razlikuje od pojma skupa. Skup se može shvatiti kao unija bilo kakvih elemenata.

Primer:

U teoriji beskonačnih skupova važi $\aleph_0 = \aleph_0 + 1$.

Ovu činjenicu dokazao je David Hilbert (1862-1943) kroz jedan zanimljiv primer. Ulazi čovek u hotel u kome su sobe numerisane prirodnim brojevima: 1, 2, 3,... (ima ih beskonačno mnogo). Prilazi recepcionaru i zahteva sobu za prenoćište, na šta mu recepcionar odgovara da su sve sobe zauzete i da ne može da ga primi. Gost mu da to odgovara: Kako nema mesta? Samo prebacite gosta iz prve sobe u drugu, iz druge u treću, iz treće u četvrtu i tako redom – a ja ću uzeti sobu sa rednim brojem 1.

PITANJA ZA PONAVLJANJE

1. Šta je skup?
2. Šta su Venovi dijagrami?
3. Navesti i definisati osnovne skupovne relacije.
4. Navesti i definisati osnovne skupovne operacije.
5. Definisati Dekartov proizvod skupova.
6. Šta je partitivni skup?
7. Šta je kardinalni broj skupa?
8. Koliki je kardinalni broj skupa N, odnosno skupa R?
9. Kako glasi Raselov paradoks ?

KLJUČNE REČI

Skup
Element
Venov dijagram
Podskup
Unija
Presek
Razlika
Komplement
Dekartov proizvod
Partitivni skup
Kardinalni broj
Alef nula
Kontinuum

2.5. ZADACI

1. Ako je $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4,5\}$ i $C=\{2,3,4,5,6,7\}$, odrediti

a) $A\cup B,\ (A\cup B)\cup C,$ b) $A\cap B,\ (A\cap B)\cap C,$

c) $A\setminus B,\ \ C\setminus A.,$ d) $A\times B,\ P(A).$

Rešenje:

a) $A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$, $(A\cup B)\cup C=\{1,2,3,4,5,6,7\}$,

b) $A\cap B=\{2,3\}$, $(A\cap B)\cap C=\{2,3\}$,

c) $A\setminus B=\{1\}$, $C\setminus A=\{4,5,6,7\}$,

d)

$$A\times B=\left\{\begin{matrix}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),\\(2,5),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5)\end{matrix}\right\}$$

$$P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}.$$

2. Odrediti elemente skupova $A=\left\{x\,\middle|\,x^2-1=0\wedge x\in Z\right\}$ i

$B=\left\{x\,\middle|\,2x+1<7\wedge x\in N\right\}$, a zatim izračunati $A\cap B,\ A\cup B,\ A\setminus B$ i $B\setminus A$.

Rešenje:

$A=\{-1,1\}$.

Kako je $2x+1<7\Leftrightarrow x<3$, a treba da uzmemo samo prirodne brojeve $B=\{1,2\}$.

$$A\cap B=\{1\},\ A\cup B=\{-1,1,2\},\ A\setminus B=\{-1\},\ B\setminus A=\{2\}.$$

3. Dat je skup $P=\{0,1,2,\cdots 9\}$. Odrediti skupove

$A=\{x|x\in P\wedge x\geq 3\}$ i $B=\{x|x\in P\wedge x<8\}$, a zatim izračunati $A\cap B,\ A\cup B,\ A\setminus B$.

Rešenje:

$A=\{3,4,5,6,7,8,9\}$ i $B=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$.

$A\cap B=\{3,4,5,6,7\}$, $A\cup B=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $A\setminus B=\{8,9\}$

4. Dat je skup $P=\{0,1,2,\cdots 9\}$. Odrediti skupove

$$A=\left\{x\,\middle|\,x\in P\wedge\frac{2x}{12-x}\in P\right\} \text{ i } B=\left\{x\,\middle|\,x\in P\wedge\frac{x^2}{2}-x\in P\right\},$$

a zatim izračunati $A\cap B,\ A\cup B,\ A\setminus B,\quad B\setminus A,\ P(A\setminus B)$.

Rešenje:

$$A=\{0,4,6,8,9\},\ B=\{0,2,4\}.$$

$$A\cap B=\{0,4\},\ A\cup B=\{0,2,4,6,8,9\},$$

$$A\setminus B=\{6,8,9\},\ B\setminus A=\{2\},$$

$$P(A\setminus B)=\{\varnothing,\{6\},\{8\},\{9\},\{6,8\},\{6,9\},\{8,9\},\{6,8,9\}\}.$$

5. Koliko elemenata ima partitivni skup $P(A)$, skupa A koji ima:

a) nula elemenat

b) dva elementa

c) tri elementa

d) n elemenata

Rešenje:

a) 1, njegov element je prazan skup

b) 4

c) 8

d) 2^n, gde je n broj elemenata skupa

6. Koliko elemenata ima skup čiji je partitivni skup i kako glasi:

a) $P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

b) $P(A)=\{\varnothing,\{1\}\}$

Rešenje:

a) 2, a glasi $A=\{1,2\}$

b) 1, a glasi $A=\{1\}$

7. Odrediti Dekartov proizvod $A\times B$, ako su dati skupovi

$$A=\left\{x \middle| x\in N\wedge x^2=1\right\} \text{ i } B=\left\{x \middle| -1\le x<2\right\}.$$

Rešenje:

$$A=\{1},\ B=\{-1,0,1\},$$
$$A\times B=\{(1,-1),(1,0),(1,1)\}.$$

8. Dati su skupovi $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{a,b,4\}$, $C=\{2,4,c\}$, $D=\{a,b,3\}$ i $E=\{1,b\}$.

Odrediti a,b,c,d ako znamo da je

$$B\subset A,\ C\subset A,\ D\subset A \text{ i } E\subset B.$$

Rešenje:

$$a=1,\ b=2,\ c=3,\ d=4.$$

9. Dati su skupovi

$$A=\left\{n \middle| n\in N, n\le 10\right\},\ B=\left\{n \middle| n\in N, 2\le n\le 7\right\},\ C=\{2,3,6\}.$$

Odrediti skup X ako znamo da je $X\subset A$, $C\bigcup X=B$.

Rešenje: $X=\{2,3,4,5,6,7\}$.

10. Primenom tautologija dokazati sledeće skupovne jednakosti:

a) $A\bigcap(A\bigcup B)=A$, b) $A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$

c) $A\bigcap B=B\bigcap A$, d) $(A/B)\bigcap B=\varnothing$

Rešenje:

a)

$$x\in A\bigcap(A\bigcup B)\Leftrightarrow x\in A$$
$$x\in A\wedge x\in(A\bigcup B)\Leftrightarrow x\in A$$
$$x\in A\wedge(x\in A\vee x\in B)\Leftrightarrow x\in A$$

Ako uvedemo oznake: $p : x \in A$ i $q : x \in B$, dobijamo iskaznu formulu

$$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$$

Korišćenjem tablice lako se dokazuje da je formula tautologija, pa samim tim i svaka formula koja se na nju može svesti je tačna.

b) Ako uvedemo oznake:

$$p : x \in A, q : x \in B, r : x \in C$$

Dobijamo iskaznu formulu:

$$(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$$

$\tau(p)$	$\tau(q)$	$\tau(r)$	$\tau(p \wedge q)$	$\tau((p \wedge q) \vee r)$	$\tau(p \vee r)$	$\tau(q \vee r)$	$\tau((p \vee r) \wedge (q \vee r))$	$\tau(F)$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	$\perp$	T	T	T	T	T	T
T	$\perp$	T	$\perp$	T	T	T	T	T
T	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T	$\perp$	$\perp$	T
$\perp$	T	T	$\perp$	T	T	T	T	T
$\perp$	T	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T	$\perp$	T
$\perp$	$\perp$	T	$\perp$	T	T	T	T	T
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T

Kako je iskazna formula tautologija, svaki izraz, pa i naš, koji se može svesti na ovu tautologiju je tačan.

c) Ovoj jednakosti odgovara iskazna formula $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$, koja je tautologija.

d) Ovoj jednakosti odgovara iskazna formula $(p \wedge \neg q) \wedge q \Leftrightarrow \perp$, koja je tautologija.

11. Koliki je kadrinalni broj skupova:

a) $A = \{1, 2, 3\}$

b) $A = \{\varnothing, 1\}$

Rešenje:

a) card(A)=3

b) card(A)=2

3.

RELACIJE I FUNKCIJE

KRATAK SADRŽAJ:

CILJEVI UČENJA:

Kada ovo poglavlje proučite moći ćete da:

1. Definišete pojam relacije,

2. osobine relacija,

3. vrste relacija.

4. Definišete pojam funkcije,

5. osobine funkcija,

6. nabrojite različite vrste funkcija.

3.1. RELACIJE

Relacija je odnos, veza, između objekta. U matematici, se srećemo sa različitim relacijama. To su jednako, paralelno, normalno, slično i mnoge druge. Matematičke objekte je potrebno poređivati ili poređati po nekom zadatom kriterijumu, kao i uočiti sličnost između njih i grupisati ih u grupe međusobno sličnih i tada koristimo osobine relacija. U svakodnevnoj praksi najčešće se koriste ***binarne*** ili ***dvočlane*** relacije, i osvrnućemo se samo na taj tip relacija.

3.1.1. DEFINICIJA I OSOBINE

Relacija se može posmatrati kao povezivanje elemenata nekog skupa A, koji su u vezi, relaciji, sa elementima nekog skupa B. Znači ako $x \in A$ i $y \in B$, onda svakom paru $(x, y) \in A \times B$ pridružujemo vrednost T, a ako to nije slučaj vrednost $\perp$.

- ***Binarna relacija*** je bilo koji podskup Dekartovog proizvoda proizvoljnih skupova A i B. Ako je

  $$\rho \subset A \times B \quad \text{i} \quad (x, y) \subset \rho ,$$

  kažemo da je *x* u relaciji ρ sa *y* i pišemo $x \rho y$.

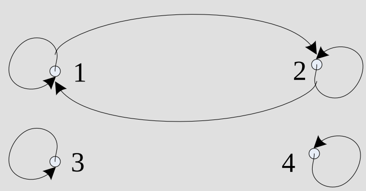
- Relacije se mogu predstaviti na različite načine: uređenim parovima, tablicama, graficima i td.

Primer:

Relaciji

$$\rho = \{(1,1),(2,2),(2,1),(1,2),(3,3),(4,4)\} ,$$

odgovara sledeći graf i tablica .



	1	2	3	4
1	T	T	$\perp$	$\perp$
2	T	T	$\perp$	$\perp$
3	$\perp$	$\perp$	T	$\perp$
4	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T

- Ako $A = B$, onda se skup $A^2 = A \times A$ naziva ***Dekartovim kvadratom***.

Relacija može da ima sledeće osobine:

Neka je $\rho \subset A^2$. Za relaciju tada kažemo da je

- (R) ***refleksivna*** ako $(\forall x \in A)(x\rho x)$
- (S) ***simetrična*** ako $(\forall x, y \in A)(x\rho y \Rightarrow y\rho x)$
- (AS) ***anti simetrična*** ako $(\forall x, y \in A)(x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = y)$
- (T) ***tranzitivna*** ako $(\forall x, y, z \in A)(x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z)$

Relacija iz prethodnog primera je refleksivna, simetrična i tranzitivna.

3.1.2. VRSTE RELACIJA

- Relacija koja je refleksivna, simetrična i tranzitivna zove se ***relacija ekvivalencije*.**

- Relacija koja je refleksivna, anti simetrična i tranzitivna zove se ***relacija poretka*.**

Primer:

Relacije ekvivalencije su jednako, podudarno, slično i td, a relacije poretka su manje ili jednako, veće ili jednako i td.

Uloga relacije ekvivalencije je da se pomoću njih izraze sličnosti između objekata i da se oni grupišu u grupe međusobno sličnih, a uloga relacije poretka da se objekti poređaju i upoređuju po nekom zadatom kriterijumu.

Relacija ekvivalencije može da se razlaže na klase ekvivalencije.

- Ako je $\sim$ relacija ekvivalencije skupa A, onda se ***klasa ekvivalencije***, elementa x, u oznaci C_x definiše kao $C_x = \{y | x \sim y\}$.
- ***Količnički skup*** je skup klasa $A|\rho$ ili $A|\sim$.

Klase ekvivalencije jednog skupa čine njegovo razlaganje na disjunktne podskupove, a njihova unija je sam polazni skup.

Primer:

Dat je skup $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ u kome je definisana je relacija $x \rho y \Leftrightarrow x^2 = y^2$.

Odrediti tablicu, napisati parove i ispitati osobine relacije.

$x\rho y$	-2	-1	0	1	2
-2	T	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T
-1	$\perp$	T	$\perp$	T	$\perp$
0	$\perp$	$\perp$	T	$\perp$	$\perp$
1	$\perp$	T	$\perp$	T	$\perp$
2	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T

$\rho : (-2,-2), (-2,2), (-1,-1), (1,1), (1,-1)$
$(-1,1), (0,0), (2,2), (2,-2)$

Osobine :

Relacija je refleksivna , jer $(\forall x \in A)(x \rho x)$,odnosno $x^2 = x^2$

Relacija je simetrična , jer $(\forall x, y \in A)(x \rho y \Rightarrow y \rho x)$, $x^2 = y^2 \Rightarrow y^2 = x^2$

Relacija je tranzitivna , jer
$(\forall x, y, z \in A)(x \rho y \wedge y \rho z \Rightarrow x \rho z)$, $x^2 = y^2 \wedge y^2 = z^2 \Rightarrow x^2 = z^2$

Znači ova relacija je relacija ekvivalencije.

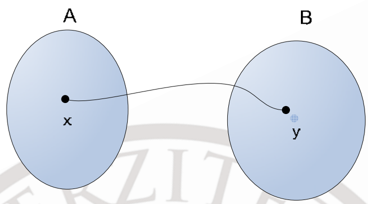
Razlikujemo 3 klase ekvivalencije $C_1 = \{-2, 2\}, C_2 = \{-1, 1\}, C_3 = \{0\}$.

Količnički skup je

$A / \rho = \{C_1, C_2, C_3\}$

3.2. FUNKCIJE

Pojam funkcije ili preslikavanja spada u osnovne matematičke kategorije. Jasna predstava o pojmu funkcije stvorena je tek u 17. veku. Kod funkcija, kao i kod relacija, uspostavlja se veza između elemenata dva skupa, ali dok kod relacija jednom elementu skupa A mogu odgovarati više elemenata skupa B, kod funkcija jednom elementu skupa A može odgovarati samo jedan elemenat skupa B.



3.2.1. DEFINICIJA I OSOBINE

- ***Preslikavanje*** ili ***funkcija*** f skupa A u skup B, u oznaci $f: A \to B$ je relacija $f \subset A \times B$, koja ima osobinu da je svaki elemenat skupa A u relaciji tačno sa jednim elementom skupa B, tj.

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B)\ (x, y) \in f \text{ i}$$
$$(\forall x \in A)(\forall y, z \in B)(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Rightarrow y = z.$$

- Kod funkcija uobičajeno je da umesto $(x, y) \in f$ pišemo $y = f(x)$ i kažemo da funkcija f preslikava *x* u *y*. Tada *x* nazivamo ***originalom***, *y* njenom ***slikom***.
- Skup $D_x \subseteq A$ onih elemenata iz A kojima su korespondirani elementi skupa B naziva se ***oblast definisanosti*** ili ***domen*** funkcije.
- Skup $D_y \subseteq B$ onih elemenata iz B kojima su korespondirani elementi skupa B naziva se ***oblast vrednosti*** ili ***kodomen*** funkcije.

Primer:
Kod funkcija definisanih na konačnim skupovima koristimo sledeće zapise :

Ako su dati skupovi

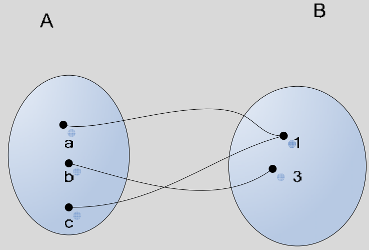
$$A = \{a, b, c\} \text{ i } B = \{1, 3\}$$

onda jedna od mogućih funkcija je njihovih elemenata je

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ili zapisana korišćenjem uređenih parova

$$f = \{(a,1),(b,3),(c,1)\}$$

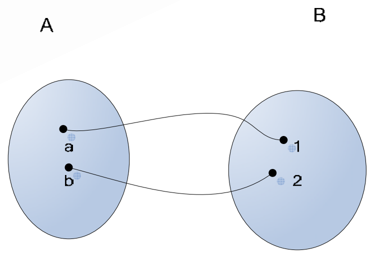


Relacija $\rho = f \cup \{(b,2)\}$ nije funkcija, jer bi se element b preslikavao u dva različita elementa 2 i 3.

- Funkcija $f : A^2 \to A$, naziva se ***binarnom operacijom***.
  Poznate binarne operacije su sabiranje, oduzimanje, množenje i sl.

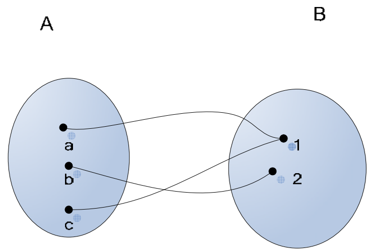
- Funkcija $f : A \to B$ se naziva “$1-1$” ili ***injektivna*** ako je

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)).$$



- Funkcija $f : A \to B$ se naziva “***na***” ili ***surjektivna*** ako je

$$(\forall y \in B, \exists x \in A)(y = f(x)).$$



U suštini, kod preslikavanja na je $D_y = B$.

- Ako je preslikavanje $f : A \to B$ "1-1" i "na" takvo preslikavanje ili funkciju nazivamo ***bijektivnim***, (obostrano jednoznačno preslikavanje).

Primer:

Ispitati da li je funkcija $f(x) = 2x - 1$ bijekcija.

Ako je ispunjeno

$$(\forall x_1, x_2 \in R)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

preslikavanje je "$1-1$". Izrazi koji u sebi sadrže nejednakosti se teško dokazuju i jednostavnije je koristiti kontrapoziciju prethodnog izraza koja glasi

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 .$$

Dakle $2x_1 - 1 = 2x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$, čime smo dokazali da je preslikavanje "$1-1$".

Da bismo dokazali da je preslikavanje "na" rešimo polaznu jednačinu po y.

Dobićemo izraz

$$x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} .$$

Onda

$$(\forall y \in R , \exists x \in R)\ x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$$

i zaključujemo da je preslikavanje "na".

Pošto je preslikavanje " 1-1" i "na", ono je bijekcija.

3.2.1. KOMPOZICIJA FUNKCIJA

- Neka su funkcije date $f:A\to B$ i $g:B\to C$. Tada izraz $g\circ f$ predstavlja ***proizvod*** ili ***kompoziciju*** ili ***slaganje*** preslikavanja f i g, a definiše se kao

$$(\forall x\in A)\big(g\circ f(x)\big)=g\big(f(x)\big).$$

Primer:
Ako su dati skupovi

$$A=\{1,2,3\},\ B=\{a,b,c\} \text{ i } C=\{5,6,7\},$$

a

$$f:A\to B \text{ i } g:B\to C,$$

gde je

$$f=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ a & b & c\end{pmatrix} \text{ i } g=\begin{pmatrix}a & b & c\\ 7 & 6 & 5\end{pmatrix}.$$

Tada

$$g\circ f:A\to C$$

glasi

$$g\circ f=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 7 & 6 & 5\end{pmatrix}.$$

Primer:
Neka su funkcije zadate formulama

$$f(x)=2x+1 \text{ i } g(x)=x^2+x+1.$$

Tada je:

$$(g\circ f)x=g\big(f(x)\big)=(2x+1)^2+(2x+1)+1=4x^2+6x+3$$

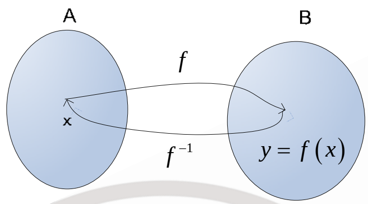
$$(f\circ g)x=f\big(g(x)\big)=2\big(x^2+x+1\big)+1=2x^2+2x+2$$

$$(g\circ g)x=g^2(x)=\big(x^2+x+1\big)^2+\big(x^2+x+1\big)+1=x^4+2x^3+4x^2+3x+3$$

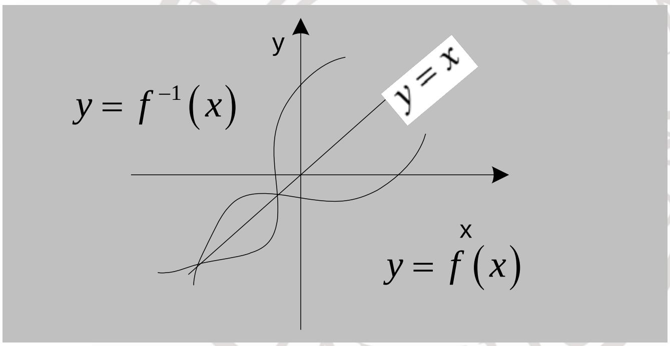
$$(f\circ f)x=f^2(x)=2(2x+1)+1=4x+3$$

3.2.2. INVERZNA FUNKCIJA

- Ako je $f : A \to B$ bijekcija, onda je f^{-1} ***inverzna funkcija*** skupa *B* u skup *A* sa osobinom $f^{-1} \circ f = I$, gde je I identično preslikavanje, tj. $(\forall x \in A) I(x) = x$.



- Možemo i pisati $f^{-1}(f(x)) = x$.
- Grafici funkcija f i f^{-1} su simetrični u odnosu na pravu $y = x$.

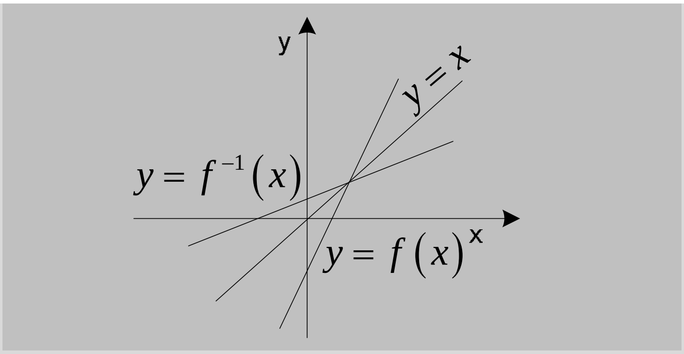


Primer:

Naći inverzno preslikavanje od funkcije $f(x) = 2x - 1$.

U prethodnom primeru pokazali smo da je funkcija $f(x) = 2x - 1$ bijekcija, odnosno zadovoljava osobine da je 1-1 i na.

Dakle postoji inverzno preslikavanje $f^{-1}(x) = y = \dfrac{x+1}{2}$.



Primer:

Odrediti inverzno preslikavanje funkcije $f(x) = x^2$.

Kako i za $x = -1$ i $x = 1$ dobijamo istu vrednost funkcije $f(\pm 1) = 1$, zaključujemo da funkcija $f(x) = x^2$ nije “1-1”, i nije ni bijekcija, pa ne postoji inverzna funkcija f^{-1}.

PITANJA ZA PONAVLJANJE

1. Definisati relaciju.
2. Osobine relacija.
3. Šta je relacija ekvivalencije?
4. Šta je relacija poretka?
5. Šta je funkcija?
6. Šta je bijekcija?
7. Definisati inverzno preslikavanje.
8. Definisati kompoziciju preslikavanja.

KLJUČNE REČI

Relacija
Refleksivnost
Simetričnost
Antisimetričnost
Tranzitivnost
Klasa ekvivalencije
Količnički skup

Funkcija
Domen
Kodomen
Injekcija
Surjekcija
Bijekcija
Inverznafunkcija

3.3. ZADACI

1. U skupu $A=\{1,2,3,4\}$ odrediti tablice za relacije: = (jednako), $<$ (manje), $|$ (biti činilac skupa).

Rešenje:

=	1	2	3	4
1	T	$\perp$	$\perp$	$\perp$
2	$\perp$	T	$\perp$	$\perp$
3	$\perp$	$\perp$	T	$\perp$
4	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T

<	1	2	3	4
1	$\perp$	T	T	T
2	$\perp$	$\perp$	T	T
3	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T
4	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$

$\vert$	1	2	3	4
1	T	T	T	T
2	$\perp$	T	$\perp$	T
3	$\perp$	$\perp$	T	$\perp$
4	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T

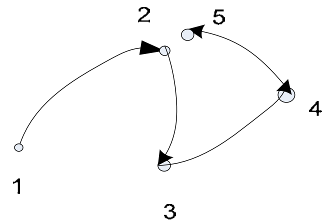
2. U skupu $A=\{1,2,3,4,5\}$ definisana je relacija

$$\rho:\forall(x,y)\in A: x\rho y \Leftrightarrow y=x+1.$$

Napisati tablicu, prikazati je grafički, ispisati parove i ispitati osobine relacije.

Rešenje:

ρ	1	2	3	4	5
1	$\perp$	T	$\perp$	$\perp$	$\perp$
2	$\perp$	$\perp$	T	$\perp$	$\perp$
3	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T	$\perp$
4	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T
5	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$



$$\rho:(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)$$

Osobine :

(R) Relacija nije refleksivna, jer nije $(\forall x\in A)(x\rho x)$, odnosno $x\neq x+1$.

(S) Relacija nije simetrična, jer nije $(\forall x,y\in A)(x\rho y\Rightarrow y\rho x)$, odnosno $y=x+1\neq x=y+1$.

(T) Relacija nije tranzitivna, jer nije $(x\rho y\wedge y\rho z\Rightarrow x\rho z)$, odnosno $y=x+1\wedge z=y+1\neg(\Rightarrow)z=x+1$.

3. U skupu $A=\{-1,0,1\}$ definisana je relacija

$$\rho:\forall(x,y)\in A: x\rho y\Leftrightarrow y^3=x^3.$$

Odrediti elemente relacije i prikazati je tabelarno. Ispitati osobine relacije.

Rešenje:

ρ	-1	0	1
-1	1	0	0
0	0	1	0
1	0	0	1

Osobine:

(R) Relacija je refleksivna $(\forall x\in A)(x\rho x)$; $x^3=x^3$.

(S) Relacija je simetrična $(\forall x,y\in A)(x\rho y\Rightarrow y\rho x)$;

$$x^3=y^3\Rightarrow y^3=x^3$$

(T) Relacija je tranzitivna $(\forall x,y,z\in A)(x\rho y\wedge y\rho z\Rightarrow x\rho z)$;

$$x^3=y^3\wedge y^3=z^3\Rightarrow x^3=z^3.$$

Ova relacija je relacija ekvivalencije.

4. Dat je skup $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ u kome je definisana je relacija $x\rho y \Leftrightarrow x \le y$. Napraviti tablicu, napisati parove relacije i ispitati njene osobine .

Rešenje:

	-2	-1	0	1	2
-2	T	T	T	T	T
-1	$\perp$	T	T	T	T
0	$\perp$	$\perp$	T	T	T
1	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T	T
2	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T

$\rho:(-2,-2),(-2,-1),(-2,0),(-2,1),(-2,2),(-1,-1),(-1,0),$
$(-1,1),(-1,2),(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,2),(2,2)$

Osobine :

Relacija je refleksivna , jer $x \le x$

Relacija nije simetrična , jer $x \le y \neg\Rightarrow y \le x$

Relacija je antisimetrična $x \le y \wedge y \le x \Rightarrow x = y$

Relacija je tranzitivna , jer $x \le y \wedge y \le z \Rightarrow x \le z$

Znači ova relacija je relacija poretka.

5. U skupu

$$A=\left\{1,2,\frac{1}{2},\frac{1}{3},3,\frac{1}{4},4\right\}$$

definisana je relacija

$$\rho:\forall(x,y)\in A: x\rho y \Leftrightarrow (x\in Z \wedge y\in Z)\vee(x\notin Z \wedge y\notin Z).$$

Odrediti elemente relacije i prikazati je tabelarno.

Dokazati da je ova relacija relacija ekvivalencije, odrediti klase ekvivalencije i količnički skup.

Rešenje:

$$\rho:(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,2),(2,4),(4,2),(1,3),(3,1),$$
$$(1,4),(3,3),(3,4),(4,4),(4,3),(4,1),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right),$$
$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right),\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right),\left(\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)$$

Rešenje:

	1	2	3	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
1	1	1	1	1	0	0	0
2	1	1	1	1	0	0	0
3	1	1	1	1	0	0	0
4	1	1	1	1	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	1	1	1
$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	1	1	1
$\frac{1}{4}$	0	0	0	0	1	1	1

Osobine :

(R) Relacija je refleksivna, jer

$$x\rho x \Leftrightarrow (x\in Z \wedge x\in Z)\vee(x\notin Z \wedge x\notin Z)$$

(S) Relacija je simetrična, jer

$$x\rho y \Rightarrow y\rho x \Leftrightarrow (x\in Z\wedge y\in Z)\vee(x\notin Z\wedge y\notin Z)\Rightarrow(y\in Z\wedge x\in Z)\vee(y\notin Z\wedge x\notin Z)$$

(T) Relacija je tranzitivna, jer

$$x\rho y \Leftrightarrow \big((x\in Z\wedge y\in Z)\vee(x\notin Z\wedge y\notin Z)\big)\wedge\big((y\in Z\wedge z\in Z)\vee(y\notin Z\wedge z\notin Z)\big)\Rightarrow$$
$$\big((x\in Z\wedge z\in Z)\vee(x\notin Z\wedge z\notin Z)\big)$$

Ovo je relacija ekvivalencije.

Data relacija rastavlja skup A na 2 podskupa (klase)

$$A_1 = \{1,2,3,4\}, \quad A_2 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right\}.$$

Količnički skup je $A/\rho = \{A_1, A_2\}$

6. U skupu formula

$$F = \{\neg(p \vee q), \neg p \vee q, p \Rightarrow q, \neg p \wedge \neg q, \neg(p \wedge q), \neg q \Rightarrow \neg p, \neg p \vee \neg q\},$$

uvedena je relacija na sledeći način $x \rho y \Leftrightarrow$ ako je formula tautologija. Dokazati da je ρ relacija ekvivalencije i odrediti klase ekvivalencije.

Rešenje:

Posle ispitivanja koje su od zadatih formula tautologije, tablicom ili nekom drugom metodom dobijamo da su tautologije :

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

$$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p$$

$$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

$$\neg p \vee q \Leftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p$$

Prema tome, postoje 3 klase ekvivalencije. To su

$$F_1 = \{p \Rightarrow q, \neg p \vee q, \neg q \Rightarrow \neg p\}, F_2 = \{\neg(p \vee q), \neg p \wedge \neg q\}, F_3 = \{\neg(p \wedge q), \neg p \vee \neg q\}$$

$$F = F_1 \cup F_2 \cup F_3$$

7. U skupu Z celih brojeva definisana je relacija

$$\rho : \forall (x,y) \in Z : x \rho y \Leftrightarrow 3 \mid (x-y).$$

Dokazati da je ova relacija relacija ekvivalencije. Odrediti klase ekvivalencije i količnički skup Z/ρ.

Rešenje:

Relacija je refleksivna, jer je

$$\forall x \in Z : 3 \mid (x-x) \Rightarrow 3 \mid 0$$

Relacija je simetrična, jer je

$$\forall(x,y)\in Z: 3|(x-y)\Rightarrow x-y=3k$$
$$y-x=-(x-y)=-3k$$
$$3|(x-y)\Rightarrow 3|(y-x)$$

Relacija je tranzitivna, jer je

$$\forall(x,y)\in Z: 3|(x-y)x\wedge 3|(y-z)\Rightarrow$$
$$x-y=3k\wedge y-z=3m$$
$$x-z=(x-y)+(y-z)=3k+3m=3(k+m)=3n$$

Klase ekvivalencije su :

Data relacija rastavlja skup Z na 3 podskupa.

$$Z_0=\{3,6,9,12\}=\{x|x\in Z\wedge x=3k\}$$
$$Z_1=\{1,4,7,10\}=\{x|x\in Z\wedge x=3k+1\}$$
$$Z_2=\{2,5,8,11\}=\{x|x\in Z\wedge x=3k+2\}$$

Količnički skup je $S/\rho=\{S_0,S_1,S_2\}$.

Napomena:

Izraz $x|y$ znači: *x* se sadrži u *y* ili *x* je činilac za *y*.

Osim ove oznake, često se piše $x\equiv 0(\mathrm{mod}\, y)$ i čitamo *x* je

kongruentno 0 po modulu *y*, znači *y* je deljivo sa *x* bez ostatka.

8. Date su funkcije

$$f(x)=-4x+5,\quad g(x)=x+3$$

Izračunati

$$f(1),\ f(f(1)),\ g(0),\ f(g(0)).$$

Rešenje:

$$f(1)=-4\cdot 1+5=1$$
$$f(f(1))=1$$
$$g(0)=3$$
$$f(g(0))=-4\cdot 3+5=-7$$

9. Odrediti sva preslikavanja skupa $A=\{1,2\}$ u skup $B=\{a,b,c\}$.

Rešenje:

$$f_1=\begin{pmatrix}1 & 2\\ a & a\end{pmatrix},\ f_2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ a & b\end{pmatrix},\ f_3=\begin{pmatrix}1 & 2\\ a & c\end{pmatrix},\ f_4=\begin{pmatrix}1 & 2\\ b & b\end{pmatrix},\ f_5=\begin{pmatrix}1 & 2\\ b & a\end{pmatrix},\ f_6=\begin{pmatrix}1 & 2\\ b & c\end{pmatrix},$$

$$f_7=\begin{pmatrix}1 & 2\\ c & c\end{pmatrix},\ f_8=\begin{pmatrix}1 & 2\\ c & a\end{pmatrix},\ f_9=\begin{pmatrix}1 & 2\\ c & b\end{pmatrix}.$$

Ima ih 9.

10. Data je funkcija

$$f=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4\end{pmatrix}$$

Odrediti funkcije f^2 i f^3.

Rešenje:

$$f^2=f\circ f=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5\end{pmatrix},$$

$$f^3=f\circ f\circ f=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix}.$$

11. Preslikavanja f i g definisana su sa

$$f(x)=x^2-4x+5 \text{ i}$$

$$g(x)=4x+5.$$

Odrediti

$$f^2,\ g^2,\ f\circ g,\ g\circ f.$$

Rešenje:

$$f^2(x)=f\circ f(x)=f(f(x))=\left(x^2-4x+5\right)^2-4\left(x^2-4x+5\right)+5=x^4-8x^3-22x^2-24x+10$$

$$g^2(x)=g\circ g(x)=g(g(x))=4(4x+5)+5=16x+25$$

$$f\circ g(x)=f(g(x))=(4x+5)^2-4(4x+5)+5.$$

$$g\circ f(x)=g(f(x))=4\left(x^2-4x+5\right)+5.$$

12. Neka je $A=\{a,b,c,d\}$ i $f:A\to A$. Koje su od sledećih funkcija 1-1 i na?

$$f_1=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix},\ f_2=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & b & b \end{pmatrix},\ f_3=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & d & a \end{pmatrix}.$$

Rešenje:

Samo je funkcija f_1 1-1 i na.

13. Data je funkcija $f=\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Odrediti njenu inverznu funkciju f^{-1}.

Rešenje:

Ako je funkcija f bijekcija skupa $A=\{a,b,c,d,e\}$ u skup $B=\{1,2,3,4,5\}$, onda je

$$f^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ c & a & d & b & e \end{pmatrix}.$$

14. Odrediti inverznu funkciju, funkcije $f(x)=4x+5$.

Rešenje:

Prvo treba dokazati da je preslikavanje bijekcija.

Ako je ispunjeno

$$(\forall x_1,x_2\in R)\left(x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)\right)$$

preslikavanje je “$1-1$”. Koristićemo kontrapoziciju prethodnog izraza koja glasi

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2.$$

Dakle

$$4x_1+5=4x_2+5\Rightarrow x_1=x_2,$$

čime smo dokazali da je preslikavanje “$1-1$”.

Ovo preslikavanje je “na” jer

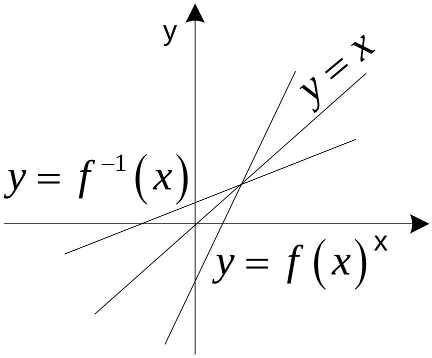
$$(\forall y\in R,\ \exists x\in R)\ x=\frac{y-5}{4}$$ i

Pošto je preslikavanje “$1-1$” i “na”, (bijekcija),

postoji inverzno preslikavanje f^{-1}.

Zamenom vrednosti x i y u izrazu $x=\dfrac{y-5}{4}$ dobijamo $f^{-1}(x)=y=\dfrac{1}{4}x-\dfrac{5}{4}$.

Grafici funkcija f i f^{-1} su simetrični u odnosu na pravu *y=x.*



15. Ako je $f(x) = 2x + 1$ odrediti $f \circ f^{-1}$.

Rešenje:

Da bi neko preslikavanje imalo inverzno, mora da je bijekcija, tj 1-1 i na.

Dakle

$$2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2,$$

čime smo dokazali da je preslikavanje "$1-1$".

Da bismo dokazali da je preslikavanje "na". Rešimo polaznu jednačinu po *y*.

Dobićemo izraz

$$x = \frac{1}{2} y - \frac{1}{2}.$$

Onda je

$$(\forall y \in R, \exists x \in R)\ x = \frac{1}{2} y - \frac{1}{2} \text{ i}$$

i zaključujemo da je preslikavanje "na".

Inverzna funkcija je oblika

$$f^{-1}(x) = y = \frac{1}{2} x - \frac{1}{2}.$$

Složeno preslikavanje iznosi

$$f \circ f^{-1} = f\left(f^{-1}(x)\right) = 2\left(\frac{1}{2} x - 1\right) + 1 = x.$$

16. Neka je data funkcija $f(x)=4x+10$. Dokazati da je $f^{-1}\circ f^{2}=f$.

Rešenje:
Prvo treba dokazati da je preslikavanje bijekcija.
$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$ preslikavanje je 1-1.
Dakle $4x_1+10=4x_2+10\Rightarrow x_1=x_2$, čime smo dokazali da je preslikavanje “$1-1$”.
Kako je $(\forall y\in R,\exists x\in R)\left(x=\dfrac{y-10}{4}\right)$ zaključujemo da je preslikavanje “na”.

Prema tome postoji inverzno preslikavanje $f^{-1}(x)=y=\dfrac{x-10}{4}$.

Kako je $f^{-1}(x)=\dfrac{x-10}{4}$, $f^{2}(x)=4(4x+10)+10=16x+50$, pa dobijamo

$$f^{-1}\circ f^{2}(x)=f^{-1}\left(f^{2}(x)\right)=\frac{(16x+50)-10}{4}=\frac{16x+40}{4}=4x+10.$$

17. Preslikavanja f i g definisana su sa

$$f(x)=4x+5 \ \ i \ \ g(x)=x-5 \text{ i}.$$

Odrediti

$$f^{-1}, g^{-1}, f^{-1}\circ g^{-1}, g^{-1}\circ f^{-1}, f\circ f^{-1}.$$

Rešenje:
Prvo se mora dokazati da su preslikavanja f i g bijekcije, pa zatim odrediti inverzne funkcije i dobiće se da je

$f^{-1}(x)=\dfrac{x-5}{4}$ i $g^{-1}(x)=x+5$.

Sada je

$$f^{-1}\circ g^{-1}(x)=f^{-1}\left(g^{-1}(x)\right)=\frac{(x+5)-5}{4}=\frac{x}{4},$$

$$g^{-1}\circ f^{-1}(x)=g^{-1}\left(f^{-1}(x)\right)=\frac{x-5}{4}+5=\frac{x+15}{4},$$

$$f\circ f^{-1}(x)=f\left(f^{-1}(x)\right)=x.$$

4.

OSNOVE KOMBINATORIKE

KRATAK SADRŽAJ:

CILJEVI UČENJA:

Kada ovo poglavlje proučite moći ćete da:

1. Definišete tehnike prebrojavanja,
2. definišete pojam permutacija sa i bez ponavljanja,
3. definišete pojam varijacija sa i bez ponavljanja,
4. definišete pojam kombinacija sa i bez ponavljanja,
5. koristite binomnu formulu.

4.1. PRINCIPI PREBROJAVANJA

Predmet ***kombinatorike*** je raspoređivanje elemenata u konačnim skupovima i određivanje broja takvih rasporeda. Proučavanje ove oblasti počelo je u 17. veku, uporedo sa nastankom teorije verovatnoće, kada su se prva pitanja iz ove oblasti pojavila u vezi sa igrama na sreću.

Prebrojavanja predstavljaju važan deo kombinatorike, pošto skupove moramo prebrojavati u cilju rešavanja najrazličitijih problema. Nekada su to problemi određivanja trocifrenih brojeva formiranih od zadatih cifara, ili broja različitih telefonskih brojeva, do određivanja složenosti algoritama ili utvrđivanja verovatnoća slučajnih događaja.

Kako se prebrojava?

Tako što svakom elementu nekog skupa pridružimo redom prirodni broj i poslednji definisani broj predstavlja broj elemenata skupa.

Definicija:

Neka je dat skup konačno mnogo prirodnih brojeva $N_n = \{1, 2, ..., n\}$

- **Pod *prebrojavanjem*** proizvoljnog konačnog skupa X podrazumeva se funkcija f, koja je bijekcija, takva da je $f : N_n \to X$.
- Ako skup X ima n elemenata pišemo da je $|X| = n$.
- Ako za dva konačna skupa X i Y postoji bijekcija $f : X \to Y$, tada je $|X| = |Y|$.
- Ako su X i Y ne prazni i disjunktni konačni skupovi $(X \cap Y = \varnothing)$ onda je $\|A \cup B\| = |A| + |B|$.
- Ako su X i Y ne prazni konačni skupovi tada je $|X \times Y| = |X||Y|$.

Razlikujemo tri vrste različitih rasporeda elemenata skupova i to su:

- ***permutacije,***
- ***varijacije,***
- ***kombinacije.***

Napomena:

Većina izostavljenih dokaza teorema koje se navode u narednom poglavlju izvode se korišćenjem principa matematičke indukcije.

4.2. PERMUTACIJE

4.2.1. PERMUTACIJE BEZ PONAVLJANJA

- Neka je dat skup $A=\{a_1,a_2,...,a_n\},\ n\in N$. ***Permutacija*** je bilo koji raspored svih *n* elemenata skupa A.

- Permutacije bez ponavljanja elemenata se mogu definisati i kao sva ***bijektivna preslikavanja*** skupa *A* u samog sebe.

Primer:
Jedna od permutacija bez ponavljanja, elemenata skupa

$$A=\{1,2,3,4,5\}$$

je preslikavanje

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- ***Broj permutacija*** skupa od n elemenata iznosi

$$P(n)=n(n-1)\cdots 2\cdot 1=n!$$

- Simbol $n!$ je skraćenica za zapisivanje uzastopnog proizvoda od n elemenata i čita se n ***faktorijel.***

- Po definiciji se uzima da je $0!=1$.

Primer:

$$5!=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120\ .$$

Primer:
Dat je skup $A=\{a_1,a_2\}$.
Koliko ima permutacija elemenata ovoga skupa, a da se elementi ne ponavljaju?
Ima ih dve.
To su:

a_1a_2 i a_2a_1. $\qquad P(2)=2\cdot P(1)=2\cdot 1=2$

Primer:
Dat je skup

$$A=\{a_1,a_2,a_3\}.$$

Koliko ima permutacija elemenata ovoga skupa, a da se elementi ne ponavljaju?
Ima ih šest.

$$P(3)=3\cdot P(2)=3\cdot 2!=3\cdot 2\cdot 1=6$$

To su:

$$a_1a_2a_3 \quad a_2a_1a_3 \quad a_3a_1a_2$$
$$a_1a_3a_2 \quad a_2a_3a_1 \quad a_3a_2a_1$$

Primer:
Na koliko načina se mogu rasporediti 6 različitih knjiga na policu?

$$P(6)=6!=6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=720.$$

Primer:
Pčela treba da skupi polen sa 7 različitih cvetova.
Kada uzme polen sa cveta ona se na njega više ne vraća.
Na koliko načina pčela može da obiđe svih 7 cvetova?

$$P(7)=7!=7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=5040.$$

Permutacije se često pojavljuju u definisanju pojmova. Na primer, u obrascu za izračunavanje determinante, kod algoritama za sortiranje, raspored karata u špilu, u matematičkoj estetici i slično.

4.2.2. PERMUTACIJE SA PONAVLJANJEM

- Neka je dat skup $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$. Broj ***permutacija sa ponavljanjem,*** skupa od *n* elemenata, među kojima ima $k_1,k_2,\cdots,k_m$ jednakih, iznosi

$$P_{k_1,k_2,\ldots k_m}(n)=\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\binom{n-k_1-k_3}{k_3}\cdots\binom{k_m}{k_m}=\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}.$$

Primer:
Napisati sve permutacije elemenata a, b, b.
To su: abb, bab, bba
Primer:
Odrediti broj permutacija elemenata $0,0,0,1,1,1,1$.
Broj permutacija je

$$P_{3,4}(7) = \binom{7}{3}\binom{7-3}{4} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3!4!} = 35.$$

4.3. VARIJACIJE

4.3.1. VARIJACIJE ILI UREĐENI IZBORI BEZ PONAVLJANJA ELEMENATA

- Neka je dat skup $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$. ***Varijacija k klase od n elemenata*** je bilo koja k torka različitih elemenata skupa A gde je $k \leq n$.
- ***Broj varijacija*** iznosi

$$V_k^n = \prod_{i=0}^{k-1}(n-i) = n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

- Varijacije bez ponavljanja elemenata se mogu definisati i kao broj svih ***injektivnih preslikavanja*** (1-1 preslikavanja) skupa A od n elemenata u skup B od k elemenata

$$f : A \to B$$

Napomena:
U savremenoj literaturi sve se manje koristi naziv varijacije, već se koristi ***k-permutacije***. U stvari, ako je klasa jednaka broju elemenata zadatog skupa, varijacije se svode na permutacije

Primer:
Dat je skup

$$A = \{a_1, a_2, a_3\}$$

Koliko ima varijacija druge klase elemenata ovoga skupa i kako glase?
Ima ih šest.

$$V_2^3 = 3 \cdot 2 = 6.$$

To su:

$$a_1a_2 \quad a_1a_3 \quad a_2a_1 \quad a_2a_3 \quad a_3a_1 \quad a_3a_2$$

Primer:

Na konkurs u firmu javilo se 6 kandidata za radna mesta direktora, sekretara i portira. Na koliko načina ih je moguće izabrati?

Vrši se izbor 3 od 6 kandidata.

Kako je raspored elemenata (njihova funkcija) bitan, u pitanju su varijacije treće klase od 6 elemenata bez ponavljanja

$$V_3^6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

4.3.2. VARIJACIJE SA PONAVLJANJEM

- Neka je dat skup $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$. ***Varijacija sa ponavljanjem k klase od n elemenata*** je bilo koja k -torka elemenata skupa *A.*

- **Broj varijacija** iznosi

$$\overline{V}_k^n = n^k$$

- Varijacije sa ponavljanjem elemenata se mogu definisati i kao broj ***svih preslikavanja*** skupa A od $n \geq 1$ elemenata, u skup B od $k \geq 0$ elemenata,

$$f : A \to B.$$

Primer:

Koliko ima dvocifrenih brojeva koji se mogu napisati sa ciframa $1, 2, 3$ i kako glase?

Ima ih

$$\overline{V}_2^3 = 3^2 = 9.$$

To su:

$$11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33.$$

4.4. KOMBINACIJE

4.4.1. KOMBINACIJE ILI NEUREĐENI IZBORI BEZ PONAVLJANJA ELEMENATA

- Neka je dat skup $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$. ***Kombinacija klase od k elemenata*** je bilo koja neuređena *k* -torka različitih elemenata skupa *A* gde je $k \le n$
- Broj kombinacija iznosi

$$C_k^n = \frac{V_k^n}{k!} = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

- Izraz $\binom{n}{k}$ čita se ***n nad k*** i to je broj svih pod skupova datog skupa *A* koji imaju *k* elemenata.

Primer:
Dat je skup

$$A=\{a_1,a_2,a_3\}.$$

Koliko ima kombinacija druge klase elemenata ovoga skupa i kako glase?
Ima ih

$$C_2^3 = \binom{3}{2} = \frac{3\cdot 2}{2!} = 3.$$

To su: $a_1a_2 \quad a_1a_3 \quad a_2a_3$.

Napomena: Osnovna razlika između permutacija, varijacija i kombinacija (bez ponavljanja) je u tome što kod permutacija koristimo i raspoređujemo sve elemente zadatog skupa, dok kod varijacija i kombinacija koristimo pod skupove zadatog skupa. Sa druge strane, razlika između varijacija i kombinacija je u tome što je kod varijacija je bitno mesto elementa u rasporedu, a kod kombinacija nije.

Primer:
Koliko ima dvocifrenih brojeva koji se mogu napisati sa ciframa $1,2,3$?
Kako je u broju bitan raspored cifara, ovo su varijacije.
Ima ih

$$V_2^3 = 3\cdot 2 = 6.$$

Primer:
Koliko ima pravih koji se mogu povući kroz ne kolinearne tačke A, B, C ?
Kako je sada nije bitan raspored tačaka na pravoj, ovo su kombinacije.
Ima ih

$$C_2^3 = \binom{3}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2!} = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 1} = 3$$

To su prave

AB , AC i BC .

4.4.2. KOMBINACIJE SA PONAVLJANJEM

- Neka je dat skup $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. ***Kombinacija klase od k elemenata sa ponavljanjem*** je

$$\bar{C}_k^n = \binom{n+k-1}{k}.$$

Primer:
Dat je skup

$$A = \{a_1, a_2, a_3\}.$$

Koliko ima kombinacija druge klase sa ponavljanjem elemenata i kako glase?
Ima ih

$$\bar{C}_2^3 = \binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2!} = 6.$$

To su:

$$a_1a_2 \quad a_1a_3 \quad a_2a_3 \quad a_1a_1 \quad a_2a_2 \quad a_2a_3.$$

Primer:
U jednoj prodavnici sladoleda postoji pet vrsta sladoleda. Na koliko različitih načina se može načiniti porcija od 3 kugle?

$$\bar{C}_3^5 = \binom{5+3-1}{3} = 35$$

4.5. BINOMNA FORMULA

Binomna formula je formula pomoću koje se izračunava izraz $(a+b)^n$, gde je $n \in N$.

- ***Binomna formula*** glasi:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^n + \binom{n}{n}b^n =$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}b^k \quad n, k \in N$$

- ***Opšti član*** binomnog razvoja je oblika

$$T_{k+1} = \binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

.

- Izraz $\binom{n}{k}$ se naziva ***binomni koeficijent*** i definiše kao:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}, \text{ tj}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Binomni koeficijenti imaju osobine:

- ***simetričnosti*** $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

- ***aditivnosti*** $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 .$$

Napomena: Strogi dokaz binomne formule izvodi se primenom principa matematičke indukcije.

Ako bi se primenila binomna formula za neke vrednosti, $n = 1, 2, 3, \dots$, dobili bi se sledeći izrazi, a njihovi binomni koeficijenti činili bi takozvani Paskalov trougao:

$$(a+b)^0 = 1 \qquad\qquad 1$$

$$(a+b)^1 = a+b \qquad\qquad 1+1$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad\qquad 1+2+1$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \qquad\qquad 1+3+3+1$$

$$\searrow\swarrow$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \qquad\qquad 1+4+6+4+1$$

Paskalov trougao je pogodan za izračunavanje binomnih koeficijenata samo u slučajevima kada je stepen *n* mali broj.

Primer:
Razviti izraz po binomnoj formuli

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^6$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^6 = x^6 - \binom{6}{1}x^4 + \binom{6}{2}x^2 - \binom{6}{3} + \binom{6}{4}\frac{1}{x^2} - \binom{6}{5}\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} =$$

$$x^6 - 6x^4 + 15x^2 - 20 + \frac{15}{x^2} - \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^6}.$$

Primer:
Odrediti peti član u razvijenom obliku binoma

$$\left(x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{12}.$$

$$T_5 = \binom{12}{4} \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{12-4} \cdot \left(-x^{\frac{2}{3}}\right)^4 = 495x^{\frac{20}{3}}.$$

Primer:

Dokazati

$$a)\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

$$b)\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\cdots$$

Ako u binomnoj formuli zamenimo $a=1$ i $b=1$, odnosno $a=1$ i $b=-1$ dobićemo tražene veze.

PITANJA ZA PONAVLJANJE

1. Šta su permutacije ?
2. Šta su varijacije?
3. Šta su kombinacije?
4. Kako glasi binomna formula?
5. Šta je Paskalov trougao
6. Šta su binomni koeficijenti i kako se određuju?
7. Navesti osobine binomnih koeficijenata.

KLJUČNE REČI

Kombinatorika
Permutacije
Varijacije
Kombinacije
Binomni koeficijenti
Faktorijel
Paskalov trougao

4.6. ZADACI

1. Na koliko načina mogu da sednu 5 osoba na pet stolica?

Rešenje:

$$P(5) = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

2. Koliko različitih petocifrenih brojeva se mogu napisati pomoću cifara $0,1,2,3,4$, a da se cifre ne ponavljaju ?

Rešenje:

$$P(5) - P(4) = 5! - 4! = 120 - 24 = 96.$$

3. Dat je skup $A = \{1,2,3,4,5,6\}$.

a) Koliko šestocifrenih brojeva počinje ciframa $1,2$ u datom poretku ?
b) Koliko šestocifrenih brojeva počinje ciframa $1,2$ u proizvoljnom poretku ?
c) U koliko šestocifrenih brojeva cifre $1,2$ stoje jedna pored druge u datom poretku?
d) U koliko šestocifrenih brojeva cifre $1,2$ stoje jedna pored druge u proizvoljnom poretku?

Rešenje:

a)

$$P(4) = 4! = 24,$$

b)

$$2 \cdot P(4) = 2 \cdot 4! = 48,$$

c)

$$P(5) = 5! = 120,$$

d)

$$2 \cdot P(5) = 2 \cdot 5! = 240.$$

4. Formirati sve permutacije od elemenata a,b,b,c i odrediti njihov broj.

Rešenje:

$abbc$, $abcb$, $acbb$, $babc$, $bbac$, $bbca$, $bcba$, $bacb$, $bcab$, $cabb$, $cbab$, $cabb$.

$$P_2(4)=\frac{4!}{2!}=\frac{24}{2}=12$$

5. Koliko permutacija od elemenata a,a,a,a,a,b,b,b,c počinje

a) sa a, b) sa b, c) sa c .

Rešenje:

$$a)\quad P_{4,3}(8)=\frac{8!}{4!\cdot 3!}=280$$

$$b)\quad P_{5,2}(8)=\frac{8!}{5!\cdot 2!}=168,$$

$$c)\quad P_{5,3}(8)=\frac{8!}{5!\cdot 3!}=56.$$

6. Koliko ima dvocifrenih brojeva koji se mogu napisati sa ciframa $1,2,3$?

Rešenje:
Ima ih

$$\overline{V}_2^3=3^2=9.$$

To su:

$$11,12,13,21,22,23,31,32,33.$$

7. Dat je skup

$$A=\{1,2,3,4\}.$$

a) Formirati sve dvocifrene brojeve od elementa ovog skupa, kod koji se cifre ne ponavljaju i odrediti njihov broj.
b) Formirati sve dvocifrene brojeve od elementa ovog skupa i odrediti njihov broj.

Rešenje:

a) $$12,13,14,21,23,24,31,32,34,41,42,43.$$

$$V_2^4 = 4\cdot 3 = 12$$

b)

$$11,12,13,14,21,22,23,24,31,32,33,34,41,42,43,44$$

$$\overline{V}_2^4 = 4^2 = 16.$$

8. Na koliko se načina mogu izabrati četiri osobe na četiri različite dužnosti, od devet prijavljenih kandidata?

Rešenje:

$$V_4^9 = 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6 = 3024.$$

9. U kampanji za izbore predsednički kandidat mora da obiđe 7 od 15 gradova u Srbiji. Da bi postigao što bolji rezultat on kampanju mora da završi u Beogradu. Na koliko različitih načina on to može učiniti?

Rešenje:

$$V_6^{14} = 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9 = 2162160.$$

10. Koliko se različitih četvorocifrenih brojeva može formirati od deset različitih cifara?

Rešenje:

a) Ako se cifre u broju ne ponavljaju, brojeva ima

$$V_4^{10} - V_3^9 = 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6 - 9\cdot 8\cdot 7 = 5040 - 504 = 4536.$$

b) Ako se cifre u broju ponavljaju, brojeva ima

$$\overline{V}_4^{10} - \overline{V}_3^{10} = 10^4 - 10^3 = 9000$$

11. Koliko se različitih petocifrenih brojeva može formirati od cifara $0,1,3,5,7,9$, ako se nula ne nalazi ni na prvom ni na poslednjem mestu i ako se cifre ne ponavljaju ?

Rešenje:

$$2\cdot V_4^5 = 240.$$

12. Na tiketu sportske prognoze ima 12 susreta. Koliko popunjenih kolona obezbeđuje 12 tačnih pogodaka?

Rešenje:

$$\overline{V}_{12}^{3} = 3^{12} = 531441.$$

13. Da li se među brojevima $1, 2, \cdots, 10^{10}$, ima više onih koji sadrže cifru 9 ili onih koji je ne sadrže?

Rešenje:
Ako broj ne sadrži cifru 9, onda sve njegove cifre pripadaju skupu

$$\{1, 2, \cdots, 8\}.$$

Ovakvih brojeva ima $9^{10} - 1 + 1 = 3486784401$.
Oduzimamo broj sastavljen od svih nula, a dodajemo 10^{10}.
Brojeva koji sadrže cifru 9 ima $10^{10} - 9^{10} = 6513215599$,
odnosno mnogo više.

14. Na jednom šahovskom turniru učestvuje 15 šahista. Svaki treba da odigra partiju sa svakim. Koliko će partija biti odigrano?

Rešenje:

$$C_2^{15} = \binom{15}{2} = \frac{15 \cdot 14}{2 \cdot 1} = 105.$$

15. Ako je na jednom šahovskom turniru održano 105 partija, koliko je igrača učestvovalo?

Rešenje:
15

16. Koliko dijagonala ima konveksni petougao?

Rešenje:

$$C_2^{5} - 5 = \binom{5}{2} - 5 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} - 5 = 5.$$

17. Skup od 40 osoba treba da izabere predsednika, sekretara i 3 člana predsedništva. Na koliko načina je moguće načiniti ovaj izbor?

Rešenje:

$$V_2^{40}C_3^{38} = 13160160 .$$

18. Koliko rešenja ima jednačina $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$, gde su $x_1, x_2, \cdots, x_k$, ne negativni celi brojevi.

Rešenje:

Neka je dat skup $\{1, 2, \ldots, k\}$. Ako x_i označava koliko je puta izabran element ***i*** iz datog skupa, onda svako rešenje $(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ gornje jednačine predstavlja jednu kombinaciju sa ponavljanjem skupa od *k* elemenata sa *n* ponavljanja.

$$\binom{k+n-1}{n}.$$

19. Koliko u gradu ima telefona sa petocifrenim brojevima:

a) ako su sve cifre različite,

b) ako se cifre ponavljaju.

Rešenje:

$$V_5^{10}, \quad \overline{V}_5^{10}.$$

20. Na školskoj zabavi nalazi se 22 devojaka i 15 mladića. Na koliko načina je moguće od njih izabrati 4 para za ples?

Rešenje:

$$C_4^{22} \cdot C_4^{15} .$$

21. Na koliko načina se seku 18 pravih, od kojih su 5 paralelne, 6 se seku u jednoj tački, a 4 u drugoj.

Rešenje:

$$C_2^{18} - C_2^{5} - \left(C_2^{6} - 1\right) - \left(C_2^{4} - 1\right) = 124 .$$

22. Košarkaški tim sačinjavaju 5 bekova, 4 centra i 3 krila. Na koliko načina se može sastaviti petorka ako u njoj moraju da igraju bar 2 beka i bar jedan centar?

Rešenje:

$$C_2^5 C_2^4 C_1^3 + C_2^5 C_3^4 + C_2^5 C_1^4 C_2^3 + C_3^5 C_1^4 C_1^3 + C_3^5 C_2^4 + C_4^5 C_1^4 = 540.$$

23. Na koliko načina se 12 istih loptica može rasporediti u 6 različitih kutija? Svaka kutija može da primi i sve kuglice.

Rešenje:

$$\overline{C}_6^{12} = \binom{6+12-1}{12} = 6188$$

24. Na jednom šahovskom turniru odigrano je 210 partija. Odrediti broj učesnika, ako se zna da je svaki učesnik odigrao partiju sa svakim?

Rešenje: 21.

25. Date su cifre $0,0,0,0,1,1,1$. Koliko ima permutacija od ovih elemenata?

Rešenje:

$$P_{4,3}(7) = \frac{7!}{4!3!} = 35.$$

26. Koja je po redu permutacija ŠKOLA od osnovne AKLOŠ.

Rešenje:

Da bi slovo Š došlo na prvo mesto treba da prođe

$4 \cdot 4! = 96$, permutacija .

Na ovaj broj redom dodajemo

ŠK(ALO) $1 \cdot 3! = 6$,

ŠKO(AL) $2 \cdot 2! = 4$,

ŠKOLA $1 \cdot 1! = 1$,

i naredna permutacija je tražena.

Znači 108-ta permutacija .

27. Kako glasi 108 permutacija od osnovne AKLOŠ.

Rešenje:

Prvo se oduzme 1 i krećemo od 107 permutacije

$107:4!=4(11)$, znači prvo slovo je Š .

$11:3!=1(5)$, sledeće slovo je K

$5:2!=2(1)$ sledeće slovo je O

$1:1!=1(0)$ sledeće slovo je I, a zatim A

Dakle u pitanju je reč ŠKOLA.

28. Koja je po redu permutacija 0101010 od osnovne 0000111.

Rešenje:

Da bi došli do 1 treba da prođe

0(000111) $0\cdot\frac{6!}{3!3!}=0$, permutacija .

01(00011) $3\cdot\frac{5!}{3!3!}=10$, permutacija

010(0011) $0\cdot\frac{4!}{2!2!}=0$, permutacija

0101(001) $2\cdot\frac{3!}{2!2!}=3$, permutacija

01010(01) $0\cdot\frac{2!}{2!}=0$, permutacija

Znači 14-ta permutacija glasi 0101001, 15-ta glasi 0101010.

29. Kako glasi 15-ta permutacija od osnovne 0000111?

Rešenje:

$$14:\frac{6!}{3!3!}=14:20,$$

nije deljivo, dakle prva cifra je 0.

$$14:\frac{5!}{2!3!}=14:10=1(4),$$

dakle preskočiti nulu i sledeća cifra je 1.

$$4:\frac{4!}{2!2!}=4:6,$$

nije deljivo, dakle naredna cifra je 0.

$$4:\frac{3!}{2!}=4:3=1(1),$$

dakle preskočiti nulu i sledeća cifra je 1.

$$1:2!$$,

nije deljivo, dakle naredna cifra je 0.

$$1:1=1(0)$$,

dakle preskočiti nulu i sledeća cifra je 1.
15-ta glasi 0101010.

30. Koja je po redu permutacija *singidunum* od osnovne *gdiinnmsuu*?

Rešenje:

$s \qquad 7\cdot\frac{9!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}=317520+$

$si \qquad 2\cdot\frac{8!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}=10080+$

$\sin \qquad 3\cdot\frac{7!}{2!\cdot 2!}=3780+$

$\sin g \qquad 0\cdot\frac{6!}{2!}=0+$

$\sin gi \qquad 1\cdot\frac{5!}{2!}=60+$

$\sin gid \qquad 0\cdot\frac{4!}{2!}=0+$

$\sin gidu \qquad 2\cdot\frac{3!}{2!}=6+$

$\sin gidun \qquad 0\cdot 2!=0+$

$\sin gidunu \qquad 1\cdot 1!=1$

U pitanju je **331178** permuracija.

31. Koja je po redu permutacija TABLA od osnovne AABLT.

Rešenje: 52.

32. Odrediti član koji u razvijenom obliku binoma $\left(x+x^{-2}\right)^{12}$ ne sadrži x.

Rešenje:

$$T_{k+1}=\binom{12}{k}\cdot x^{12-k}\cdot\left(x^{-2}\right)^{k}=\binom{12}{k}\cdot x^{12-k}\cdot x^{-2k}=\binom{12}{k}\cdot x^{12-3k}$$

$$12-3k=0\Leftrightarrow k=4$$

Traženi član je

$$T_{4+1} = T_5 = \binom{12}{4} \cdot x^0 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 495$$

33. Odrediti član koji u razvijenom obliku binoma

$$\left(x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{2}} \right)^{11}$$

Ima promenljivu x na peti stepen.

Rešenje:

$$T_{k+1} = \binom{11}{k} \left(x^{\frac{1}{3}} \right)^{11-k} \cdot \left(x^{\frac{1}{2}} \right)^{k} = \binom{11}{k} \cdot x^{\frac{11-k}{3}} \cdot x^{\frac{k}{2}} = \binom{11}{k} \cdot x^{\frac{22+k}{6}}$$

$$\frac{22+k}{6} = 5 \Leftrightarrow k = 8$$

znači traženi član je deveti, tj

$$T_9 = T_{8+1} = \binom{11}{8} \cdot x^5 = \binom{11}{3} \cdot x^5 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot x^5 = 165 \cdot x^5$$

.

34. Odrediti trinaesti član u razvijenom obliku binoma

$$\left(9x + \frac{1}{\sqrt{3x}} \right)^{n},$$

ako je binomni koeficijent trećeg člana 105.

Rešenje:

Binomni koeficijent trećeg člana iznosi

$$\binom{n}{2} = 105 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} = 105 \Leftrightarrow n^2 - n - 210 = 0 \Leftrightarrow n = 15 \, , n = -14$$

Kako n mora da bude pozitivan broj uzimamo samo da je n=15.

Traženi binom glasi

$$\left(9x \frac{1}{\sqrt{3x}} \right)^{15},$$

a član

$$T_{13} = T_{12+1} = \binom{15}{12} \cdot (9x)^3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3x}} \right)^{12} = \binom{15}{15-12} \cdot 9^3 x^3 \cdot \frac{1}{3^6 x^6} = \binom{15}{3} \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{455}{x^3}$$

35. Zbir binomnih koeficijenata prvog, drugog i trećeg člana binoma je 46

$$\left(x^2 + \frac{1}{x} \right)^n$$

Odrediti član koji ne sadrži *x*.

Rešenje:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{1} = 46 \Leftrightarrow 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 46 \Leftrightarrow n = 9$$

Binom glasi

$$\left(x^2 + \frac{1}{x} \right)^9.$$

$$T_{k+1} = \binom{9}{k} \cdot \left(x^2 \right)^{9-k} \left(\frac{1}{x} \right)^k = \binom{9}{k} \cdot x^{18-2k} \frac{1}{x^k} = \binom{9}{k} \cdot x^{18-3k}$$

$$18 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 6$$

Traženi član je

$$T_{6+1} = T_7 = \binom{9}{6} = \binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84.$$

36. Odrediti x u izrazu

$$\left(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \right)^x,$$

ako je odnos sedmog člana od početka, prema sedmom članu od kraja 1: 6.

Rešenje: $x = 9$

37. Dat je binom

$$\left(\sqrt{2^x} + \frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}} \right)^n,$$

odrediti n tako da je zbir binomnih koeficijenata poslednja tri člana 22. Odrediti onu vrednost x za koju je zbir trećeg i petog člana datog binoma 135.

Rešenje:

$$n = 16, \quad x = 1 \vee x = 2 \;.$$

38. Koeficijenti četvrtog i šestog člana u razvijenom obliku binoma

$$\left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)^n$$

odnose se kao 5:18. Odrediti član koji ne zavisi od x.

Rešenje:

$$n = 12, k = 8, T_9 = 495 \;.$$

39. Odrediti sve racionalne članove u razvijenom obliku binoma

$$\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^{10} \;.$$

Rešenje:

$$32, 2160, 15120, 22860, 7292, 243 \;.$$

40. Koliko elemenata ima partitivni skup skupa od n elemenata?

Rešenje:

Skup od n elemenata ima $\binom{n}{k}$ podskupova od k elemenata.

Zato je ukupan broj podskupova jednak broju

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots \binom{n}{n} = 2^n \;.$$

41. Koliko se binarnih relacija može definisati u skupu od n elemenata?

Rešenje:

Kako je binarna relacija u skupu X po definiciji svaki podskup Dekartovog proizvoda X^2 i kako je $X^2 = n^2$, broj binarnih relacija iznosi 2^{n^2} .

5.

PRAVILA ZAKLJUČIVANJA I DOKAZI

KRATAK SADRŽAJ:

CILJEVI UČENJA:

Kada ovo poglavlje proučite moći ćete da:

1. Definišete dedukciju i indukciju,
2. znate šta su aksiome, definicije i teoreme,
3. znate šta sadrži dokaz teorema,
4. definišete osnovna pravila zaključivanja,
5. koristite matematičku indukciju.

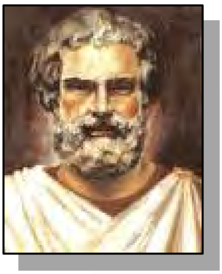
5.1. DEDUKCIJA I INDUKCIJA

Sva znanja u nauci dele se na empirijska i apriorna. Empirijska znanja su bazirana na iskustvu, dok su apriorna znanja ona koja se ne moraju opravdati iskustvom. Ona postoje nezavisno od iskustva. U sagledavanju znanja, čovek se mora koristiti metodama zaključivanja.

Zaključivanje je misaoni proces u kome izvodimo sud na osnovu jednog ili više drugih sudova.

U suštini postoje dva osnovna principa zaključivanja, a to su ***dedukcija*** i ***indukcija***.

5.1.1. DEDUKTIVNA METODA



Prvi koji je upotrebio deduktivni način zaključivanja bio je grčki filozof Tales iz Mileta (624-542 pre nove ere).

Tales je dedukciju upotrebio u dokazivanju podudarnosti trouglova.

Kasnije ovu metodu je prihvatio Pitagora (569-475 pre nove ere). Pitagorejci uočavaju zakonitost među zaključcima, izvode jedne iz drugih. Svima znana, Pitagorina teorema, bila je poznata i ranije, ali ju je Pitagora prvi dokazao deduktivnim putem.

Osnovne principe deduktivne organizacije matematike postavio je grčki matematičar Euklid (325.-265. pre naše ere).U svom čuvenom delu Elementi izložio je aksiomatski princip definisanja pre svega geometrije, a samim tim i matematike uopšte.

- ***Dedukcija*** je princip zaključivanja od ***opšteg*** ka ***pojedinačnom,*** od ***poznatog*** ka ***nepoznatom.***
- ***Deduktivna metoda*** svodi se da do zaključka dolazimo na osnovu drugih ranije poznatih stavova koje zovemo pretpostavke ili premise.
- Deduktivni zaključak oslanja se na pravila i zakonitosti matematičke logike.
- Deduktivnost znači izvodljivost.

Napomena:

U principu u deduktivnoj metodi, ne interesuje nas da li su pretpostavke i zaključci istiniti, već da li je tačan sam princip zaključivanja, odnosno da li se iz tih datih pretpostavki može izvesti tačan zaključak. Dedukcijom dakle želimo da proverimo istinitost postupka na osnovu koga zaključujemo, da ukoliko su premise tačne, da je i zaključak tačan.

Matematika je najvećoj meri deduktivna nauka, odnosno, ona se kao misaona delatnost odlikuje deduktivnošću.

U deduktivne ili teorijske metode spadaju:

- ***metoda dokazivanja***,
- ***metoda analize***,
- ***metoda sinteze***, i dr.

5.1.2. INDUKTIVNA METODA

Indukcija je metod zaključivanja kojim se iz stavova koji se odnose na određen broj pojedinačnih slučajeva izvodi stav koji se odnosi na sve slučajeve te vrste.

Ovaj metod zaključivanja često se koristi u prirodnim naukama, gde se posmatranjem ili eksperimentom dolazi do određenih saznanja o nekoj pojavi, pa se na osnovu ovih pojedinačnih slučajeva izvodi opšti stav. Takva indukcija se naziva ***nepotpuna*** ili ***empirijska indukcija***. Ovakav način zaključivanja nije dobar, jer se često na osnovu određenog broja tačnih pojedinačnih slučajeva ne mora dobiti tačan zaključak u opštem slučaju.

Primer:

Fermaov problem: Da li su prosti brojevi oblika $2^{2^n}+1, \quad n \in N$?

Zamenom za n=1,2,3,4 zaista se dobijaju prosti brojevi, 5, 17, 257, 65537.

To bi moglo da dovede do zaključka da su brojevi zaista prosti.

Međutim za n=5, dobija se broj deljiv sa 641, znači broj koji nije prost.

U induktivne ili empirijske metode spadaju:

- ***metoda eksperimenta,***
- ***metoda posmatranja,***
- ***metoda merenja,***
- ***metoda analogije i dr.***

Napomena:

Dedukcija i indukcija se međusobno isključuju, ali su i komplementarne. Ako bi ih upoređivali, možemo reći da dedukcija vodi za nužnim zaključcima, dok indukcija ka verovatnim zaključcima.

Deduktivne metode se bave isključivanjem pogrešnih pretpostavki, ali ne i utvrđivanjem istinitosti. Induktivne metode se bave utvrđivanjem činjenične istinitosti.

5.2. OSNOVNI POJMOVI

5.2.1. DEFINICIJE , AKSIOME I DOKAZI

- U matematici postoje pojmovi koji se ne definišu. Oni se shvataju uz pomoć intuicije, iskustva ili dogovora. Nazivamo ih ***osnovnim*** ili ***primitivnim pojmovima.***

To su *tačka, skup , prirodni broj 1* i mnogi drugi. Ovi pojmovi su intuitivno jasni i svi pokušaji kroz istoriju matematike, njihovog definisanja, nisu doveli do rezultata. Veliki matematičar Euklid u svome delu Elementi, želeći da sve pojmove definiše, dao je definiciju tačke. Rekao je „ tačka je ono čiji je deo ništa “. Naravno, ovo je sasvim nepotrebna definicija koja je nasmejala ne samo matematičare i koja se vremenom izgubila.

- Definicije služe da se pojmovi precizno odrede.
- ***Definicija*** je iskaz ili sud kojim se nedvosmisleno određuje sadržaj pojma.
- Ostali novi pojmovi se moraju ***definisati***, koristeći samo osnovne pojmove ili one pojmove koje smo već definisali.

Primer:
Definicija:
Za svake dve prave a i b, kažemo da se seku, ako imaju tačno jednu zajedničku tačku.
Definicija:
Dve prave su paralelne, ako leže u istoj ravni i nemaju zajedničkih tačaka ili se poklapaju.

Definicije su često oblika:

- ***ekvivalencije,*** A ako i samo ako B, u oznaci $A \overset{def}{\Leftrightarrow} B$,
- ***jednakosti,*** A jednako B, u oznaci $A \overset{def}{=} B$

Primer:

$$n! \overset{def}{=} 1 \cdot 2 \cdots n$$

$$a^n \overset{def}{=} \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n} \quad n \in N, a \in R$$

Kao što postoje osnovni pojmovi koje nije potrebno definisati, tako postoje i tvrđenja koja nije potrebno dokazivati.

To su ***aksiome***. One predstavljaju osnovu svake matematičke teorije.

- ***Aksiome*** ili ***postulati su*** trvđenja koja se ne dokazuju, a koja su sama po sebi uvek tačna.

Primer:

Aksioma:

Za bilo koje dve različite tačke postoji tačno jedna prava koja ih sadrži.

Aksioma:

Za svaku pravu p i tačku A van nje, postoji tačno jedna prava koja sadrži tačku A i paralelna je pravoj p.

Prvi sistem aksioma definisao je Euklid u 3 veku pre naše ere.

Druga navedena aksioma je aksioma paralelnosti. Definisao ju je Euklid, a poznata je i pod imenom 5 postulat. Vekovima su matematičari pokušavali da dokažu ovu a tvrđenje, sve dok u prvoj polovini 19. veka matematičar Lobačevski nije dokazao da je to tvrđenje aksioma i samim tim ne može se dokazati. Tako je nastala nova oblast ne euklidske geometrije, geometrija Lobačevskog, a za njom su sledili nastanci i drugih ne euklidskih geometrija.

Lobačevski i Gaus su postavili i pitanje koja od ove dve geometrije predstavlja stvarnu sliku sveta, obavili su i par eksperimenata, ali pitanje je ostalo bez odgovora.

Aksiome treba izabrati tako da nisu protivrečne, a da ih ima dovoljno za definisanje svake teorije .

- Posledice aksioma su teoreme.
- Svaka teorema sastoji se od ***pretpostavke –premise - hipoteze*** i ***zaključka*** posledice.

Sve ***teoreme*** , ***tvrđenja*** ili ***stavovi***, moraju se dokazati.

- Logičko rasuđivanje pomoću koga dolazimo do zaključaka je ***dokaz.***

Dokaz se sastoji od niza koraka , a svaki deo dokaza je:

1. definicija, aksioma i ona teorema koja je već dokazana.
2. pravila izvođenja i logičkih zakona zaključivanja

Svaka teorema ima bar jedan dokaz.

- Dokazi mogu biti ***direktni*** i i***ndirektni***.

- ***Zaključak,*** formula F***,*** kao posledica formula A,B,... je ispravan , ako sledi iz ispravnih pretpostavki.

- Da iz formula $A, B, C, \cdots$ sledi posledica F, koristimo se simbolikom u pisanju

$$\frac{A, B, C, \ldots}{F} \text{ ili } A, B, C, \ldots \models F$$

Napomena: Dokaz prestavlja zaštitni znak matematike. Pravilna upotreba dokaza je od suštinskog značaja za matematiku.

Primer:
Formule *p* i $p \wedge q$ su tačne (imaju vrednost 1), samo ako su istovremeno p i q tačni $(p = 1, q = 1)$.

Tada možemo pisati i $p, p \wedge q \models q$.

Dakle ispravno je zaključiti da iz tačne pretpostavke p i tačne pretpostvke $p \wedge q$, sledi da je i zaključak q tačan.

Iz ovog primera možemo zaključiti da i za proizvoljne formule A i B važi

$$\frac{A, A \wedge B}{B}$$

5.3. PRAVILA ZAKLJUČIVANJA

U praksi najčešće se koriste sledeća pravila zaključivanja:

5.3.1. MODUS PONENS I MODUS TOLENS

- ***Modus ponens*** je najčešće primenjivano, a ujedno i najjednostavnije pravilo dokazivanja. Naziv je latinski i u prevodu znači ***metoda potvrđivanja***. Ovo je primer direktnog dokaza.

$$\frac{A, A \Rightarrow B}{B}$$

Može da se čita, ako iz A sledi B, onda B.

- Ovo pravilo zaključivanja opravdava tautologija $p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q$.

Primer:
A: 2000 je deljivo da 5,
$A \Rightarrow B$: Ako je N deljivo sa 5, onda je N prestupna godina.
B: 2000 je prestupna godina.

Primer:
A : Napolju pada kiša.
$A \Rightarrow B$: Ako napolju pada kiša, poneću kišobran.
B: Poneću kišobran

- ***Modus tolens*** je oblika.

$$\frac{\neg A, A \Rightarrow B}{\neg B}$$

Naziv je takođe latinski i u prevodu znači ***metoda opovrgavanja***. Ovo je primer indirektnog dokaza.

- Ovo pravilo zaključivanja opravdava tautologija $\neg p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow \neg q$.

Primer:
$\neg A$: Nisam uhapšen.
$A \Rightarrow B$: Ako sam uhapšen onda sam izvršio zločin.
$\neg B$: Nisam izvršio zločin.

Oba pravila zaključivanja imaju veliku primenu, a u matematici i eksperimentalnim naukama modus tolens se čak i češće koristi.

5.3.2. PRAVILO KONTRADIKCIJE-PROTIVREČNOSTI

- Dokaz svođenja na ***protivrečnost***, ***kontradikcijom***, (reductio ad absurdum) je oblika

$$\frac{\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B)}{A}.$$

- Ovo pravilo zaključivanja opravdava tautologija

$$(\neg p \Rightarrow (q \wedge \neg q)) \Rightarrow p.$$

Ovo je primer indirektnog dokaza.

Po ovom pravilu, ako se polazeći od negacije formule A mogu dokazati dve suprotne posledice B i $\neg B$, tada sigurno je tačna formula A.

Primer:

$\sqrt{2}$ nije racionalan broj.

Ako ovo tvrđenje želimo da dokažemo pravilom kontradikcije, pretpostavićemo da jeste racionalan broj.

Onda se broj može napisati u obliku razlomka, tj.

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

gde su *p* i *q* uzajamno prosti brojevi, (nemaju zajedničkog delioca).

Odavde je

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2,$$

Odavde zaključujemo da je p^2 paran broj, pa sami time i p je paran broj i može se napisati $p = 2n$, odnosno $4n^2 = 2q^2 \Rightarrow q = 2n$.

To znači i da je i q paran broj.

Ako su oba broja p i q parna, oni nisu uzajamno prosti.

Znači početna pretpostavka da je $\sqrt{2}$ racionalan broj nije održiva.

Primer:

Ako je *3n+2* neparan broj, tada je *n* neparan broj.

Dokaz metodom kontradikcije

Pretpostavimo da je:

Ako je *3n+2* neparan broj, tada je *n* paran broj.

Ako je n paran broj, može se napisati kao n=2k, onda
3n+2=3(2k)+2=6k+2=2(3k+1), odnosno dobijamo paran broj, što je suprotno pretpostavci zadatka.
Znači naša pretpostavka nije dobra, i time dokazujemo polazno tvrđenje.

Primer:
U pokušaju da dokažu 5. postulat koji je definisao Euklid u 4 veku p.n.e., Lobačevski je krenuo od kontradikcije toga stava, odnosno pretpostavio je da kroz tačku A koja se nalazi van prave p je moguće postaviti dve prave koje su paralelne sa pravom p, a samim tim i beskonačno mnogo.
Međutim, ova pretpostavka ga nije dovela do kontradikcije i to je ukazalo na postojanje neke nove ne euklidske geometrije, koja se zove geometrija Lobačevskog u kojoj važe drugačija shvatanja odnosa u prostoru. (napr. Zbir uglova u trouglu je manji od 2 prava ugla)

5.3.3. PRAVILO KONTRAPOZICIJE

- Dokaz ***kontrapozicijom***

$$\frac{\neg B \Rightarrow \neg A}{A \Rightarrow B}$$

- Ovo pravilo zaključivanja opravdava tautologija

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

Primer:
Za rečenicu,
potrebno je biti jak da bi bio bokser,

kontrapozicija glasi:
Ako nisi bokser nije potrebno biti jak.

Primer:
Ako želimo da dokažemo izraz
$2x-1 \neq 3 \Rightarrow x \neq 2$,
dovoljno je da dokažemo kontrapoziciju koja glasi nije $2x-1 \neq 3 \Rightarrow$ nije $x \neq 2$,
tj. $x = 2 \Rightarrow 2x-1 = 3$, a ovaj izraz je očigledno tačan.

5.2.5. PRAVILO TRANZITIVNOSTI IMPLIKACIJE I EKVIVALENCIJE

- Pravilo ***tranzitivnosti za implikaciju*** (***pravilo silogizma)*** i ***ekvivalenciju*** (produžena implikacija i ekvivalencija) glasi

$$\frac{A\Rightarrow B, B\Rightarrow C}{A\Rightarrow C}, \qquad \frac{A\Leftrightarrow B, B\Leftrightarrow C}{A\Leftrightarrow C}.$$

- Ova pravila zaključivanja opravdavaju tautologije

$$(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)\Rightarrow(p\Rightarrow r),$$

odnosno

$$(p\Leftrightarrow q)\wedge(q\Leftrightarrow r)\Rightarrow(p\Leftrightarrow r)$$

Primer:
Ako je čovek umetnik, onda je on je srećan.
Ako je čovek srećan, onda on dugo živi.
Zaključak
Umetnici dugo žive .

Primer:
Ako je broj deljiv sa 18 onda je deljiv sa 6.
<u>Ako je broj deljiv sa 6 onda je deljiv sa 3.</u>
Ako je broj deljiv sa 18 onda je deljiv sa 3.

5.3.4. JOŠ NEKA PRAVILA DOKAZIVANJA

- ***Pravilo kontraprimera***

Za pravilo dovoljno je da nađemo bar neku vrednost promenljivih za koje tvrđenje nije tačno, pa da oborimo tačnost polaznog tvrđenja.

Primer:
Proizvod svaka dva iracionalna broja je iracionalan.

Za iracionalne brojeve $x=\sqrt{12}$ i $y=\sqrt{3}$, dobija se proizvod $xy=\sqrt{36}=6$
a to je racionalan broj.

Znači za obaranje polaznog tvrđenja nađen je jedan primer za koje tvrđenje ne važi.

- ***Pravilo generalizacije - uopštavanje***

$$\frac{A}{A \vee B}, \quad \frac{B}{A \vee B}$$

- ***Pravilo specijalizacije***

$$\frac{A \wedge B}{A}, \quad \frac{A \wedge B}{B}$$

Kod ove vrste zaključivanja postoji višak informacija, nepotrebne se odbacuje , a pažnja se usmerava samo ka željenom svojstvu.

Primer:
Želimo da odredimo da li je neki student položio matematiku, koja je ispit prve godine.
Prvo utvrđujemo da je student položio sve predmete prve godine,
znači, student je onda položio i matematiku.

- ***Pravilo eliminacije***

$$\frac{A \vee B, \neg B}{A}, \quad \frac{A \vee B, \neg A}{B}$$

Kada imamo dve mogućnosti, a jednu od njih isključimo, druga mora da važi.

Primer:
Naći sva pozitivna rešenja jednačine $x^2 - 1 = 0$.
Rešavanjem jednačine dobijaju se dva rešenja $x = \pm 1$, ali pošto ne želimo negativna rešenja, uzimamo samo rešenje x=1.

Primer:
Ispitati da li su sledeća zaključivanja dobra

a) $\dfrac{A \Rightarrow B, \neg A}{\neg B}$ b) $\dfrac{A \Leftrightarrow B, B}{A}$

U oba slučaja, ovim izrazima možemo da pridružimo iskazne formule

a) $(p \Rightarrow q) \wedge \neg p \Rightarrow \neg q$

b) $(p \Leftrightarrow q) \wedge q \Rightarrow p$

a)

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$\neg q$
T	T	T	$\perp$	$\perp$
T	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T
$\perp$	T	$\langle T \rangle$	$\langle T \rangle$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\langle T \rangle$	$\langle T \rangle$	T

Iz tablice za ispitivanje istinitosti vidi se da u trećem redu iz tačnih pretpostavki ne dobija se tačan zaključak.
Dakle, prvi zaključak nije dobar.

b)

p	q	$p \Leftrightarrow q$	p
T	$\langle T \rangle$	$\langle T \rangle$	T
T	$\perp$	$\perp$	T
$\perp$	T	T	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$

U ovom primeru, iz tablice vidimo da samo u prvom redu imamo tačne pretpostavke koje daju tačan zaključak.
Dakle, ovo zaključivanje je dobro.

Pravila zaključivanja

$\dfrac{A, A \Rightarrow B}{B}$	Modus ponens
$\dfrac{\neg B, A \Rightarrow B}{\neg A}$	Modus tolens
$\dfrac{\neg B \Rightarrow \neg A}{A \Rightarrow B}$	kontrapozicija
$\dfrac{A}{A \vee B}, \quad \dfrac{B}{A \vee B}$	Generalizacija-uopštavanje
$\dfrac{A \Rightarrow B, B \Rightarrow C}{A \Rightarrow C}, \quad \dfrac{A \Leftrightarrow B, B \Leftrightarrow C}{A \Leftrightarrow C}$	Tranzitivnost implikacije-silogizam Tranzitivnost ekvivalencije
$\dfrac{\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B)}{A}$	Kontradikcija –protivrečnost

$\dfrac{A\vee B,\neg B}{A}$, $\dfrac{A\vee B,\neg A}{B}$	Eliminacija-disjunktivni silogizam
$\dfrac{A\wedge B}{A}$, $\dfrac{A\wedge B}{B}$, $\dfrac{A,B}{A\wedge B}$	Rastavljanje konjunkcije Sinteza konjunkcije

Primer:
Ispitati da li je sledeće zaključivanje dobro

$$\frac{p\Rightarrow\neg q, r\Rightarrow q, r}{\neg p}$$

Ovom izrazu možemo da pridružimo tautologiju

$$\big((p\Rightarrow\neg q)\wedge(r\Rightarrow q)\wedge r\big)\Rightarrow\neg p$$

Što znači da je zaključivanje ispravno.

Do istog zaključka se može doći primenom pravila zaključivanja.

$\dfrac{r\Rightarrow q, r}{q}$ modus ponens

$\dfrac{p\Rightarrow\neg q}{q\Rightarrow\neg p}$ kontrapozicija

$\dfrac{q\Rightarrow\neg p, q}{\neg p}$ modus ponens

5.3.5. GREŠKE ZAKLJUČIVANJA

Greške u zaključivanju nastaju kada dovode do neispravne argumentacije.

Često se u primerima pojavljuje *greška konverzije*. Da bi je objasnili koristićemo primer:

Ako student vara na ispitu, on sedi u prvoj klupi.
Student sedi u prvoj klupi.

Zaključak: Student vara na ispitu.

Obe pretpostavke su tačne, ali zaključak nije.

Ovo zaključivanje se simbolički napisati u obliku

$$\frac{p\Rightarrow q, q}{p}$$

Korišćenjem tablica istinitosti možemo dokazati da je ovo zaključivanje neispravno.

Ovo zaključivanje dobija se iz ispravnog zaključka, modus ponens, konverzijom prve pretpostavke, što nije u redu, jer implikacija i njena konverzija nisu ekvivalentne.

Greška inverzije:

Ako pada sneg onda je hladno.
Ne pada sneg.

Zaključak: Nije hladno

I ovo zaključivanje se simbolički može napisati u obliku

$$\frac{p \Rightarrow q, \neg p}{\neg q}$$

5.4. MATEMATIČKA INDUKCIJA

Matematika je više ***deduktivna*** nauka, tj. metoda zaključivanja vodi od opšteg ka posebnom. Međutim, mnoge matematičke probleme moguće je proučavati obrnutim zaključivanjem, odnosno ***induktivnom metodom***.

Princip matematičke indukcije isključuje mogućnost greške, koja može da se pojavi u empirijskoj indukciji, jer se odnosi na sve moguće slučajeve.

- Neka je $T(n)$ teorema čija formulacija sadrži prirodni broj *n*.

1. Ako je teorema $T(n)$ tačna za $n=1$,
2. pod pretpostavkom da je tačna za bilo koji prirodni broj $n=k$,
3. ako dokažemo da važi za $n=k+1$,

onda je teorema $T(n)$ tačna za sve prirodne brojeve.

Primer:
Dokazati da važi jednakost:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},\ n\in N.$$

1. Za $n=1$ imamo $1=\frac{1\cdot(1+1)}{2}$, jednakost je tačna.

2. Za $n=k$ imamo $1+2+3+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}$.
   Pretpostavljamo da je jednakost tačna.

3. Za $n=k+1$ je $1+2+3+\ldots+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

Treba da dokažemo, pod pretpostavkom 2, da je ova jednakost tačna.
Ako obema strana jednakosti 2 dodamo sabirak k+1 dobijamo

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1)$$

$$\Leftrightarrow 1+2+3+\ldots+k+(k+1)=(k+1)\left(\frac{1}{2}k+1\right)$$

$$\Leftrightarrow 1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

čime smo dokazali da je pod pretpostavkom 2, jednakost tačna i za $n=k+1$, odakle zaključujemo da je formula tačna za sve prirodne brojeve.

Primer:

Dokazati da je izraz 6^n-5n+4 deljiv sa 5

1. Za $n=1$ imamo $6-5+4=5$, deljiv je sa 5.
2. Za $n=k$ imamo 6^k-5k+4, pretpostavljamo da je izraz deljiv sa 5.
3. Za $n=k+1$ je $6^{k+1}-5(k+1)+4$, treba da ispitamo deljivost sa 5 , pod pretpostavkom 2

Dobijamo

$$6^{k+1}-5(k+1)+4=6^k\cdot 6-5k-5+4\pm 6\cdot 5k\pm 6\cdot 4=$$

$$6\left(6^k-5k+4\right)+25k-25$$

Kako je svaki sabirak ovog izraza deljiv sa 5, proizilazi i da je ceo zbir deljiv sa 5, odakle zaključujemo da je formula tačna za sve prirodne brojeve.

Primer:

Dokazati Bernulijevu nejednakost:

$$(1+h)^n>1+nh,\ h\neq 1,\ h>0,\ n\geq 2$$

1. Za $n=2$ imamo $(1+h)^2=1+2h+h^2>1+2h$, nejednakost je tačna.
2. Za $n=k$ imamo $(1+h)^k>1+kh$, pretpostavljamo da je nejednakost tačna.
3. Za $n=k+1$ je $(1+h)^{k+1}>1+(k+1)h$ .Treba da dokažemo, pod pretpostavkom 2, da je jednakost tačna.

Koristeći nejednakosti 2 dobijamo:

$$\left(1+h\right)^{k+1}=\left(1+h\right)^{k}\left(1+h\right)>\left(1+kh\right)\left(1+h\right)=1+\left(k+1\right)h+kh^{2}>1+\left(k+1\right)h,$$

čime smo dokazali da je nejednakost tačna i za $n=k+1$,
odakle zaključujemo da je formula tačna za sve prirodne brojeve.

PITANJA ZA PONAVLJANJE

1. Šta je dedukcija?
2. Šta je indukcija?
3. Nabrojati sva pravila zaključivanja.
4. Koja je razlika između empirijske i matematičke indukcije?
5. Šra je matematička indukcija?
6. Šta je modus ponens?
7. Šta je modus tolens?
8. Kako glasi pravilo svođenja na protivrečnost?
9. Kako glasi metoda kontrapozicije?

KLJUČNE REČI

Dedukcija,
Indukcija,
Dokaz,
Definicija,
Aksioma,
Zaključak

Kontradikcija,
Modus ponens,
Modus tolens
Kontraprimer,
Silogizam,
Kontrapozicija

5.5. ZADACI

1. Napisati nekoliko definicija po izboru.

Rešenje:

D_1 : Za prave *a* i *b* kažemo da su paralelne ako je a=b, ili leže u istoj ravni i nemaju zajedničkih tačaka.

D_2 : Prave *a* i *b* se mimoilaze ako ne postoji ravan koja ih sadrži.

2. Napisati nekoliko aksioma po izboru.

Rešenje:

A_1 : Postoje najmanje 4 ne komplanarne tačke.

A_2 : Svaka prava sadrži bar dve tačke.

A_3 : Aksioma paralelnosti: Za svaku pravu *p* i tačku *A* van nje, postoji tačno jedna prava koja sadrži tačku *A* i paralelna je sa pravom *p*.

3. Napisati nekoliko teorema po izboru.

Rešenje:

T_1 : Pitagorina teorema:

Trougao je pravougli, ako i samo ako je zbir kvadrata nad katetama jednak kvadratu nad hipotenuzom.

T_2 : Dve razičite paralelne prave *a* i *b* određuju tačno jednu ravan.

T_3 : Talesova teorema.

4. Izvesti zaključak

Pada kiša.
Ako pada kiša sedimo u kući.

Rešenje:

Sedimo u kući.

U pitanju je zaključak po pravilu modus ponens.
P: pada kiša
q sedimo u kući, dakle

$$\frac{p, p \Rightarrow q}{q}.$$

5. Izvesti zaključak:

Ako je praznik Univerzitet je zatvoren.
Danas Univerzitet nije zatvoren.

Rešenje:
Danas nije praznik.

U pitanju je zaključak po pravilu modus tolens.
P: Praznik je
q : Univerzitet je zatvoren

$$\frac{\neg q, p \Rightarrow q}{\neg p}.$$

6. Ispitati istinitost tvrđenja:
Ako je n^2 paran broj, onda je i n paran broj.

Rešenje:
Kontrapozicija bi bila: Ako je n neparan broj, onda je i n^2 neparan broj.

$$n = 2n+1, \quad n^2 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$$

Znači tvrđenje je tačno.

7. Ispitati da li je funkcija $f(x) = 2x - 1$ preslikavanje 1-1.

Rešenje:
Ako je ispunjeno $(\forall x_1, x_2 \in R)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$
Izrazi koji u sebi sadrže nejednakosti se teško dokazuju i jednostavnije je koristiti kontrapoziciju prethodnog izraza koja glasi
$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
Dakle $2x_1 - 1 = 2x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$, čime smo dokazali da je preslikavanje "$1-1$".

8. Dokazati: Ako je ceo broj x deljiv sa i sa 3, onda je deljiv i sa 6.

Rešenje:
Dokaz se sastoji od više implikacija. Koristi se pravilo zaključivanja tranzitivnosti implikacije.

x je deljiv sa 2 i sa 3 $\Rightarrow x = 2a \wedge x = 3b$

$$3x = 6a \wedge 2x = 6b$$

$$x = 6(a-b) \Rightarrow x \text{ je deliv sa } 6$$

9. Proveriti ispravnost sledećeg zaključivanja:

$$\frac{p \Rightarrow \neg q, r \Rightarrow q, r}{\neg p}$$

Rešenje:

p	q	$\neg q$	r	$p \Rightarrow \neg q$	$r \Rightarrow q$	$\neg p$
T	T	$\perp$	T	$\perp$	T	$\perp$
T	T	$\perp$	$\perp$	$\perp$	T	$\perp$
T	$\perp$	T	T	T	$\perp$	$\perp$
T	$\perp$ $\perp$	T	$\perp$	T	T	$\perp$
$\perp$	T	$\perp$	T	T	T	T
$\perp$	T	$\perp$	$\perp$	T	T	T
$\perp$	$\perp$	T	T	T	$\perp$	T
$\perp$	$\perp$	T	$\perp$	T	T	T

Zaključak je dobar, jer kao što se može videti iz osenčene vrste, za tačne vrednosti pretpostavki dobijamo tačan zaključak.

Ako bi zadatak rešavali primenom zakona zaključivanja imali bi:

1. $\dfrac{r \Rightarrow q, r}{q}$ modus ponens
2. $\dfrac{p \Rightarrow \neg q}{q \Rightarrow \neg p}$ kontradikcija
3. $\dfrac{q, q \Rightarrow \neg p}{\neg p}$ modus ponens

10. Proveriti ispravnost sledećeg zaključivanja:

$\dfrac{p \vee (q \vee r), \neg r}{p \vee q}$, na oba načina.

11. Proveriti ispravnost sledećeg zaključivanja:

Ako danas pada kiša, nećemo se šetati. Pada kiša ili pada sneg. Ako pada sneg, onda je hladno. Nije hladno.

Rešenje:
Nećemo se šetati.

Neka je:
p-danas pada kiša
q- nećemo se šetati
r- pada sneg
s-nije hladno
onda imamo formule i ispitujemo ispravnost zaključka

$$\frac{p \Rightarrow q, p \vee r, r \Rightarrow \neg s, s}{q}$$

Zadatak može da se reši tablicom ili primenom zakona zaključivanja.

1. $\dfrac{r \Rightarrow \neg s}{s \Rightarrow \neg r}$ kontradikcija
2. $\dfrac{s, s \Rightarrow \neg r}{\neg r}$ modus ponens
3. $\dfrac{p \vee r, \neg r}{p}$ eliminacija
4. $\dfrac{p, p \Rightarrow q}{q}$ modus ponens

12. Proveriti ispravnost sledećeg zaključka:

Ako je avgust idemo na more. Avgust je ili toplo je. Ako je toplo ne pijemo topao čaj. Pijemo čaj.

Rešenje:
Idemo na more.

$$\frac{p \Rightarrow q, p \vee r, r \Rightarrow \neg s, s}{q}$$

13. Izvesti zaključak (primer je dao Aristotel)

Svi ljudi su smrtni
Sokrat je čovek

Rešenje:
Sokrat je smrtan.

Zaključak je donet na osnovu pravila zaključivanja-univerzalni modus ponens

$$\frac{\begin{array}{l}(\forall x)P(x)\Rightarrow Q(x)\\ P(a)\end{array}}{Q(a)}$$

14. Izvesti zaključak

Sve ptice lete
Pas ne leti

Rešenje:
Pas nije ptica.

Zaključak je donet na osnovu pravila zaključivanja-univerzalni modus tolens

$$\frac{\begin{array}{l}(\forall x)P(x)\Rightarrow Q(x)\\ \neg Q(a)\end{array}}{\neg P(a)}$$

15. Dokazati teoremu po izboru, direktnim dokazom.

Rešenje:
Dokazati da proizvod ma koja 4 uzastopna cela broja uvećan za 1 jednak kvadratu nekog celog broja.

$$n(n+1)(n+2)(n+3)=(n^2+3n+1)^2.$$

16. Dokazati teoremu po izboru, metodom kontradikcije.

Rešenje:
Neka su *m*,*n* i *p* prave koje pripadaju jednoj ravni. Ako su prave *m* i *n* paralelne i ako *p* seče *n*, tada *p* seče i *m*.

Dokaz:
Neka se prave *p* i *n* seku u tački *P*. Ako bi prave *p* i *m* bile paralelne, tada bi postojale dve različite prave *n* i *p*, koje sadrže tačku *P* i paralelne su sa *m*, što je nemoguće na osnovu aksiome paralelnosti.

17. Dokazati primenom matematičke indukcije

Dokazati da je izraz $5^n + 2^{n+1}$ deljiv sa 3, tj $3 \mid 5^n + 2^{n+1}$.

Rešenje:

1. Za $n=1$ imamo $3 \mid 5+2^2 \Rightarrow 3 \mid 9$, deljivost je tačna.

2. Za $n=k$ imamo $3 \mid 5^k + 2^{k+1}$, pretpostavljamo da je deljivost tačna.

3. Za $n=k+1$ $\quad 5^{k+1}+2^{k+2} = 5\cdot 5^k + 2\cdot 2^{k+1} = 3\cdot 5^k + 2\left(5^k + 2^{k+1}\right)$,

Ovaj izraz je deljiv sa 3, jer je prvi sabirak deljiv sa 3, drugi je deljiv sa 3 po pretpostavki 2, čime smo dokazali da je izraz deljiv sa 3 za sve prirodne brojeve.

18. Dokazati primenom matematičke indukcije.

$a)$ $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$,

$b)$ $133 \mid 11^{n+2}+12^{2n+1}$

$c)$ $2^n > 5, \quad n \geq 5$.

Rešenje:

1. Za $n=1$ imamo $\dfrac{1}{1\cdot 2}=\dfrac{1}{2}$, što je tačno.

2. Neka je za $n=k$ jednakost tačna $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{k}{k+1}$.

3. Dokažimo da je i za $n=k+1$ izraz tačan, pod pretpostavkom 2.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}\ \textbf{?}$$

$$\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}\right)+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}\right)+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}\right)+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

6.

TEORIJA ALGORITAMA

KRATAK SADRŽAJ:

CILJEVI UČENJA:

Kada ovo poglavlje proučite moći ćete da:

1. Opišete algoritam,
2. znate osobine algoritama,
3. definišete rekurzivne funkcije,
4. znate šta je Tjuringova mašina,
5. iskažete Čerčovu tezu.

6.1. ALGORITMI

Algoritam poput pojma tačke, skupa, prirodnog broja 1 spada u one osnovne pojmove koji se ne definišu*.* Opisna, neformalna definicija bi bila da je ***algoritam*** konačan i precizno definisan postupak (procedura) za rešavanje nekog problema.

U novije vreme, pojam algoritma se gotovo isključivo vezuje za računarstvo, mada se algoritmi koriste uvek kada jednostavno, u pojedinačnim koracima, želimo da rešimo neki problem. Na primer, svaki kuvarski recept je jedan algoritam.

U matematici su poznati Euklidov algoritam za određivanje najvećeg zajedničkog delioca dva broja, Gausov algoritam za rešavanje sistema linearnih jednačina i mnogi drugi.

Prvi algoritam napisao je persijski matematičar Al Khowarizmi (oko 850 godine) i služio je za rešavanje algebarskih problema. U knjizi 'Al Khowarizmi o indijskoj veštini računanja', u matematiku uvodi indijske cifre i decimalni brojni sistem, koje se vremenom pogrešno počinju da se nazivaju arapskim ciframa, a od lošeg prevoda imena ovog matematičara na latinski, nastaje ime za algoritam.

Prvi računarski algoritam je napisala Ada Bajron 1842 godine. U pitanju je bio algoritam za računanje Bernulijevih brojeva na analitičkoj mašini Čalsa Bebidža. Ta mašina nikada nije proradila, ali je njen algoritam ostavio dubok trag. U njenu čast jedan od programskih jezika dobio je ime Ada.

I pre razvoja digitalnih računara, 30 i 40 godina prošlog veka nastala je teorija algoritama kao posledica pokušaja strogog zasnivanja matematike kao rezultat potresa koji su doneli paradoksi u teoriji beskonačnih skupova. Postavilo se pitanje da li se istinitost matematičkog iskaza može utvrditi konstrukcijom računarske mašine koja bi koristila neki univerzalni veštački jezik.

Sledeći značajan napredak u formalizaciji uvođenja algoritma u matematiku i logiku učinio je Alan Tjuring, definišući Tjuringovu mašinu. To je primitivan automat.,ustvari, misaona tvorevina koja poseduje mogućnost izvođenja operacija koje su dovoljne za izvođenje skoro svih algoritama. Njegova mašina inicirala je teoriju konačnih automata.

Teško je dati preciznu definiciju algoritma i postoje mnoge ekvivalentene definicije, manje ili više stroge, ali opisno se može reći:

- ***Algoritam*** je skup jasno definisanih pravila koja opisuju rešavanje nekog problema, odnosno kojim se ulazne veličine transformišu u izlazne.

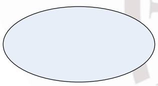
Algoritmi se mogu prestaviti na neki od sledećih načina:

1. Običnim govornim jezikom
2. Grafički -dijagram- blok algoritamska šema,
3. pseudo jezicima, odnosno, pseudo kodovima. (pseudo kod predstavlja veštački jezik koji je veza između svakodnevnog jezika, (srpski, engleski i td.) i programskih jezika),
4. programskim jezicima,
5. Prostovom mašinom,
6. Tjuringovom mašinom,
7. Rekurzivnim funkcijama i dr.

6.2. DIJAGRAM- BLOK ŠEMA

Najčešće, algoritam se grafički predstavlja u obliku blok šeme sa jasno definisanim nizom radnji, korak po korak.

- Grafički zapis algoritma naziva se ***algoritamska blok šema*.**
- Grafički simboli koje se koriste za pravljenje algoritamske šeme su:



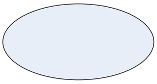
Početak- prvi korak algoritma

Definiše ulazne veličine algoritma

Definiše obradu podataka

Uslovni algoritamski korak

Definiše izlazne veličine algoritma



Definiše kraj algoritma

Algoritamske šeme mogu se podeliti u dve kategorije:

- ***Linijske algoritamske šeme,***
- ***ciklične algoritamske šeme***

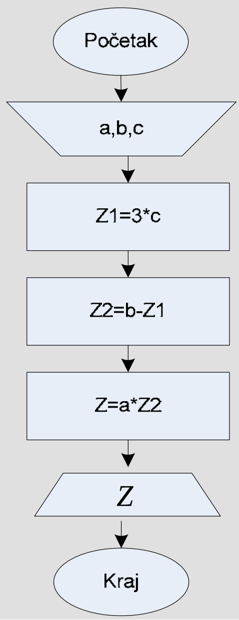
6.2.1. LINIJSKE ALGORITAMSKE ŠEME

- ***Linijske algoritamske šeme*** su one šeme kod kojih se svaki algoritamski korak izvršava najviše jedanput u toku izvršavanja algoritma.

  Mogu biti ***proste*** i ***razgranate****.*

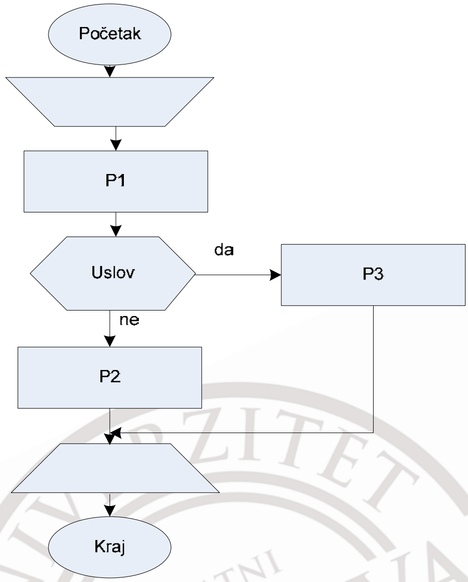
  - ***Proste linijske algoritamske šeme,*** su one šeme kod kojih se svaki algoritamski korak izvršava tačno jedanput u toku izvršavanja algoritma.

Primer:
Sastaviti algoritamsku šemu za izračunavanje izraza
$Z = a*(b-3c)$



- ***Razgranate linijske algoritamske šeme***, su one šeme kod kojih se svaki korak izvršava tačno jedanput i obavezno sadrži bar jedan uslovni algoritamski korak.

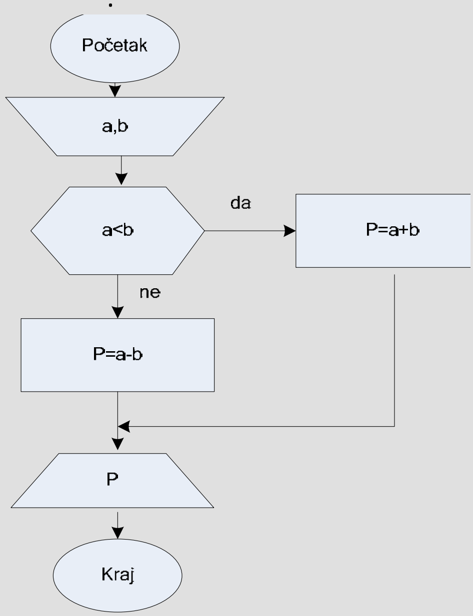
Ako je uslov ispunjen, izlaz iz algoritamskog koraka biće označen sa *da,* a ako uslov nije ispunjen izlaz će biti označen sa *ne***.**



Primer:

Sastaviti algoritam za računanje vrednosti

$$Z = \begin{cases} a+b, a<b \\ a-b, a \geq b \end{cases}.$$

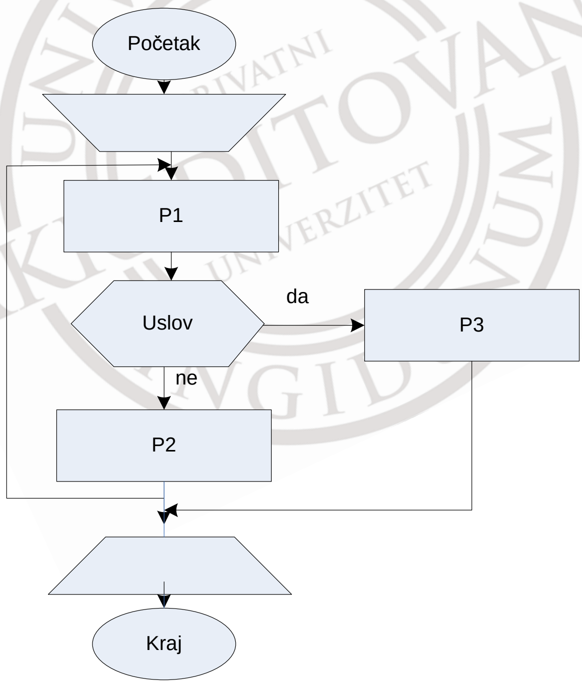


6.2.2. CIKLIČNE ALGORITAMSKE ŠEME

- ***Ciklične algoritamske šeme*** su one šeme u kojima se jedan ili više algoritamskih koraka može izvršavati više od jedanput u toku izvršavanja algoritma. Ovi koraci čine ***ciklus.*** Ukoliko je uslov ispunjen izlazi se iz ciklusa, u suprotnom ciklus se ponavlja.

- Uslov za izlazak iz ciklusa zove se ***izlazni kriterijum ciklusa.***
- Ciklične algoritamske šeme mogu biti ***konstantne*** i ***promenljive*.**
- ***Konstantne ciklične šeme*** su šeme kod kojih se zakon obrade tokom ciklusa ne menja, dok se kod ***promenljivih*** menja.

Grafički prikaz ciklične šeme dat je na sledećoj slici.

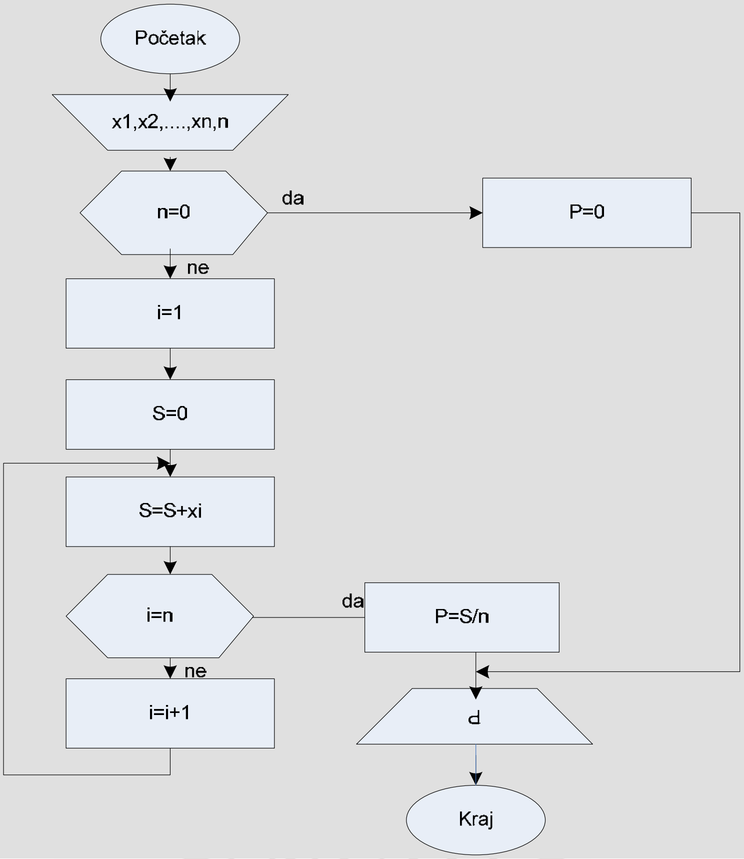


Primer:

Sastaviti algoritam koji za poznato *n* izračunava aritmetičku sredinu zadatih brojeva $x_1, x_1, \dots, x_n$.

Aritmetička sredina iznosi

$$P = \frac{x_1 + x_1 + \ldots + x_n}{n}$$



Složene algoritamske šeme prave se različitim kompozicijama predhodnih šema.

6.3. PSEUDO KOD

Savremeniji način za zapisivanje algoritama je pomoću pseudo kodova. Problem predstavljen na ovaj način je samo korak do zapisa na nekom od programskih jezika. Svaki algoritamski korak je jasno obeležen. Reči tipa ***if, end, begin, for, while*** i druge su rezervisane reči koje se koriste dogovorno za definisanje isključivo instrukcija.

a) Proste linijske strukture se zapisuju na sledeći način:

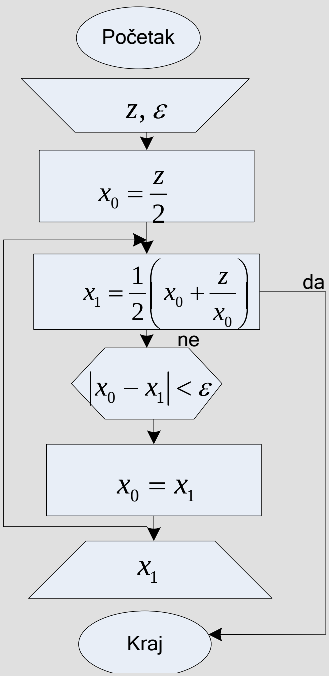
BEGIN
....
END

b) Razgranate linijske strukture pošto sadrže bar jedan uslovni korak, moraju imati i zapise oblika
IF p THEN a ELSE b END

c) Ciklične algoritamske šeme sadrže petlje (loop) i mogu biti:
Petlje sa brojačem (FOR)
Petlje sa uslovnim korakom (WHILE)

Primer:
Izračunati približno kvadratni koren broja z sa greškom manjom od ε $(\varepsilon > 0, \varepsilon \to 0)$ pomoću formule

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{z}{x_n}\right), \quad x_0 = \frac{z}{2}$$



Ako bi koristili pseudo jezik za pisanje algoritma imali bi:

$$procedura : koren(z , \varepsilon)$$

$$x_0 = \frac{z}{2}$$

$$loop$$

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{z}{x_0} \right)$$

$$if\ |x_1 - x_0| < \varepsilon\ then\ end$$

$$x_0 = x_1$$

$$end\ loop$$

6.3. OSOBINE ALGORITAMA

Za rešavanje jednog istog zadatka može se sastaviti više algoritama različitih struktura. Za ovakve algoritme kaže se da su ***ekvivalentni.*** Među ekvivalentnim algoritmima treba izabrati onaj koji najefikasnije dovodi do rezultata. Kriterijumi za izbor najefikasnijeg algoritma su različiti:

- Najveća brzina izvršavanja algoritma,
- minimalno angažovanje memorijskog prostora,
- vreme koje je potrebno za izvršavanje algoritma,
- što jednostavnija struktura i td,

Među najvažnije osobine algoritama spadaju:

- ***Diskretnost algoritama***: u odvojenim koracima se obavljaju oparacije i svakom možemo pridružiti diskretan vremenski period u kome se taj korak izvršava.
- ***Determinisanost:*** za iste ulazne veličine jednoznačno se dobijaju izlazne veličine.
- ***Elementarnost***: zakon dobijanja izlaznih veličina mora biti jasan i prost.
- ***Rezultativnost-konačnost:*** svakom skupu ulaznih veličina mora biti definisano šta je rezultat, koji se dobija posle konačno mnogo koraka.
- ***Masovnost:*** algoritam treba da važi za najširi skup ulaznih podataka.

Posao sastavljanja algoritma je kreativne prirode i ne postoje univerzalan pravila po kome se posao može formalizovati.

Samo kod jednostavnih struktura, kao što su linijske strukture, ispravnost se može utvrditi pažljivim pregledom svih koraka.

Za ispitivanje ispravnosti algoritma najčešće se koristi testiranje. Izabira se izvestan broj primera. Testiranje može poslužiti samo za dokazivanje prisustva greške, a nikako nije dokaz da greške nema. Testiranje algoritamskih šema oduzima mnogo vremena i podložno je greškama koje čovek može da napravi. Zato se danas za proveru ispravnosti koriste računari.

KOMPLEKSNOST ALGORITMA

- ***Kompleksnost algoritma*** predstavlja vreme rada algoritma, odnosno broj koraka algoritma koji dovode do traženog rešenja.
- Kako su vreme rada algoritma i broj koraka direktno proporcionalne veličine, nebitno je koja će se od ovih veličina koristiti za definisanje kompleksnosti.
- Vreme rada zavisi i od ulaznih podataka i oni definišu ***dimenziju problema***.
- Kompleksnost algoritma definisana je funkcijom f(n) koja određuje vreme rada algoritma u zavisnosti od dimenzije problema za najnepovoljniji ulazni podatak.
- Kompleksnost algoritma može da bude:
  konstantna,
  linearna,
  polinomijalna,
  eksponencijalna,
  logaritamska i td.

6.5. MATEMATIČKA DEFINICIJA ALGORITMA

Intuitivno shvatanje ***algoritma*** kao postupka za rešavanje problema ne zadovoljava ni teorijske ni praktične potrebe.

Neki autori ograničavaju definiciju algoritma na procedure koje se konačno završavaju, odnosno determinističke algoritme.

Naravno, ostaju otvorena pitanja koja se odnose probleme koji u sebe uključuju slučajnost, zatim dilema je da li je potrebno postavljati uslov da se problem mora završiti u konačnom vremenu sa zauzećem konačne memorije.

Pitanje je znači da li za svaki problem možemo sastaviti algoritam za njegovo rešavanje, odnosno postoje li zadaci za koje postupak rešavanja ne može biti predstavljen u obliku algoritma? Da li je u tom slučaju u pitanju naše neznanje ili principijelna nemogućnost? Svim tim i sličnim pitanjima bavi se matematičko-informatička disciplina Teorija algoritama.

6.4.1. REKURZIVNE FUNKCIJE

Jedan od načina da se definiše algoritam je pomoću ***rekurzivnih funkcija.*** Mi ćemo rekurzivne funkcije definisati na skupu celih brojeva, mada se ta definicija može uopštiti.

Rekurzija (lat. *recursio, recursion* od *recurrere*: vraćanje) u matematici i informatici označava postupak ili funkciju koje u svojoj definiciji koriste sopstvene vrednosti. Sastoje se iz dva koraka:

1. Funkcija je definisana za neku početnu vrednost *a* (najčešće 0 ili 1)
2. Ako je funkcija definisana za neku vrednost *n*, koja je veća ili jednaka *a*, tada može da se definiše i za vrednost *n+1*.

Rekurzivne definicije su veoma prisutne u matematici.

Primer:

Rekurzivna definicija prirodnih brojeva glasi:

1. 1 je prirodni broj
2. Ako je *n* prirodni broj, onda je to i *n+1*.

Rekurzivne funkcije imaju za osobinu da za izračunavanje njenih vrednosti postoji efektivni postupak. Proces izračunavanja može da bude dugotrajan, ali je uvek jasan i očigledan. Do rešenja uvek dolazimo posle konačno mnogo izračunavanja (koraka). Za takve funkcije kažemo da su ***izračunljive***.

Primer:

Uočimo funkciju

$$f\left(n\right)=a^n, n\in N\bigcup\{0\}$$

Ona se može shvatiti kao proizvod od n vrednosti broja a,

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdots a}_{n},$$

Takođe funkcija se može zapisati i rekurzivno na sledeći način.

$$f(0)=1\left(znajući\ da\ \ je\ a^0=1\right)$$
$$f(n+1)=a\cdot f(n)$$
.

Izračunati $f(3)$.

1. Kako je $a^o=1$,

2. $$f(3)=a\cdot f(2)=a\cdot a\cdot f(1)=a\cdot a\cdot a\cdot f(0)=a\cdot a\cdot a\cdot 1=a^3$$

Bitno je napomenuti da u savremenim programskim jezicima poput C/C++ i Jave svako rekurzivno rešenje nekog problema ima i svoj iterativni ekvivalent, tj. algoritam koji isti problem rešava bez rekurzije. U praktičnom programiranju uglavnom treba izbegavati rekurziju jer takva rešenja u opštem slučaju troše više vremena od iterativnih.

Rešavanje rekurzivne jednačine omogućava prelazak iz rekurentnog u iterativni oblik funkcije. Obično se odredi nekoliko početnih vrednosti, pa se na osnovu tih podataka izvodi opšti obrazac. Dobijeni obrazac treba strogo dokazati matematičkom indukcijom.

Primer:
Rešiti rekurentnu jednačinu

$$f(1)=1$$
$$f(k)=f(k-1)+k$$

Kako je

$$f(1)=1=\frac{1\cdot 2}{2}$$
$$f(2)=1+2=\frac{2\cdot 3}{2}$$
$$f(3)=(1+2)+3=\frac{3\cdot 4}{2}$$
$$f(4)=(1+2+3)+4=\frac{4\cdot 5}{2}$$

Znači, možemo da zaključimo da je

$$f(n)=1+2+3+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

Dokaz se izvodi matematičkom indukcijom.

Prvo dokazujemo da je za $n=1$

$$f(1)=\frac{1\cdot 2}{2}=1$$

$$f(k-1)+k=\frac{(k-1)k}{2}+k=\frac{k(k+1)}{2}=f(k)$$

Prema tome dobijena formula je tačna za sve prirodne brojeve.

6.4. 2. REKURZIVNI ALGORITMI

- ***Rekurzivni algoritam*** je onaj algoritam koji poziva samog sebe sve dok se ne ispune unapred postavljeni uslovi.

Da bi se algoritam koji koristi rekurziju završio mora se predvideti uslov izlaska, odnosno uslov završetka. Rekurzivni algoritam zahteva jednu ili više ulaznih veličina, a vraća jednu izračunatu. Ta vrednost je iz koraka u korak sve bliža željenoj, iskazanoj u uslovu izlaska.

Algoritam u sebi sadrži naredbe ***if*** koja testira uslov izlaska i naredbu ***else*** kojom se rekurzivno poziva sama funkcija, odnosno algoritam.

Primer:

Rekurzivni algoritam za izračunavanje stepena

$$procedura : stepen(a \in R, n \geq 0)$$
$$if\ \ n=0\ then\ stepen(a,n)=1$$
$$else\ stepen(a,n)=a\cdot stepen(a,n-1)$$

Iterativni algoritam

$$b=1$$
$$for\ i=1\ to\ n$$
$$b=a\cdot b$$
$$return\ b$$

6.5. ČERČOVA TEZA

Rekurzivne funkcije imaju za osobinu da za izračunavanje njenih vrednosti postoji efektivni postupak koji neke ulazne podatke uvek preslikava u odgovor. Do rešenja dolazimo posle konačno mnogo koraka. Proces izračunavanja može da bude dugotrajan ali je uvek jasan i očigledan.

Zato, za ***rekurzivne funkcije*** kažemo da su ***izračunljive.***
Izračunljive funkcije često se nazivaju i ***algoritamske funkcije***.

Obrnuto tvrđenje bi bilo - ***Veruje se da je svaka izračunljiva funkcija rekurzivna***. Ovo tvrđenje naziva se ***Čerčova teza.***

Rekurzivne funkcije su jedna uža klasa funkcija koje zovemo ***aritmetičke.***

- ***Aritmetička funkcija*** je funkcija oblika $f : N^n \to N$. Uzimamo da je skup N proširen sa 0.

- ***Čerčova teza:*** Aritmetička funkcija je izračunljiva ako je rekurzivna.

Nažalost ova teza nije dokazana u matematičkom smislu. U suštini ona tvrdi da za neki problem postoji algoritam ako se rešavanje problema svodi na izračunavanje vrednosti adekvatne rekurzivne funkcije. Problem koji se rešava tada se mora formulisati kao aritmetički problem. Problem van aritmetike mora se preslikati u aritmetički. Da bi se to postiglo prvo se problem mora predstaviti nekim univerzalnim jezikom, na primer, kvantifikatorskog računa, a zatim se to preslikava na jezik aritmetike. Dakle:

- ***Rekurzivna funkcija*** je jedan opšti model ***algoritma***.

6.6. TJURINGOVA MAŠINA

Tjuringova mašina je jedan zamišljeni model računara. Ovu mašinu je 1936. godine opisao Alan Tjuring. Nastala je pre nastanka savremenih elektronskih računara.

Tjuringova mašina otkriva suštinu pojma algoritma razmatranjem postupaka koji će se ostvariti na mašini i može da posluži za definiciju pojma algoritma.

Alan Matison Tjuring *(1912.-1954.), je bio engleski matematičar, logičar i kriptograf. Smatra se ocem modernog računarstva. Dao je značajan i provokativan doprinos debati koja se ticala veštačke inteligencije, tj. da li će ikad biti moguće reći da je mašina svesna i da može da misli. 1947. je prešao u Mančesterski univerzitet i radio je uglavnom na softveru, na Marku I, za koji se smatra da je jedan od prvih pravih računara. Tokom Drugog svetskog rata, Tjuring je radio u Blečli parku, britanskom kripto analitičkom centru i bio je jedno vreme šef Hut-a 8, odeljenja zaduženog za nemačku mornaricu. Tjuring je razvio više tehnika za razbijanje šifara, uključujući metod bombe, elektromehaničku mašinu, koja je mogla da otkrije postavke nemačke podmorničke šifre Enigme. Godine 1952. Tjuring je osuđen za delo „velike nepristojnosti“, pošto je priznao da je bio u vezi sa muškarcem u Mančesteru. Tjuring je umro 1954. pošto je pojeo jabuku napunjenu cijanidom. Njegova smrt se smatra samoubistvom.*

Tjuringova mašina je zamišljeni model računara. Oponaša čoveka koji računa po strogo utvrđenim propisima. Koristi se za rešavanje problema odlučivanja. To su problemi kod kojih se rešenje sastoji u utvrđivanju ili opovrgavanju neke osobine, odnosno rešavanje problema može da se svede na odgovore *da* ili *ne.* Naravno nisu svi problemi odlučivanja, ali se neki mogu svesti na njih.

Mada mogu da budu tehnički moguće, Tjuringove mašine nisu smišljene kao praktična računarska tehnologija, već kao misaoni eksperiment o granicama mehaničkog računanja i u praksi ove mašine se ne konstruišu.

Tjuringova mašina ima vrlo jednostavnu konstrukciju. Sastoji se od beskonačne trake, koja ima na sebi polja – ćelije u koje mogu da se upisuju simboli i glave koja može da čita i piše simbole. Za Tjuringovu mašinu se definiše azbuka simbola **S** koja će se u njoj koristiti, i spisak stanja Q u kojima glava za čitanje i pisanje može da se nalazi. Definišu se početno stanje, i završno stanje; početno stanje je stanje u kome se mašina nalazi na početku rada, a kada mašina dođe u završno stanje, prestaje sa radom. Glava može da se pomera za jedno polje ulevo, za jedno polje udesno, ili da ostane u mestu. U zavisnosti od stanja u kome se glava nalazi, i od simbola koji se nalazi u kućici iznad koje je glava postavljena, glava će u tu kućicu upisati određeni simbol, pomeriti se levo ili desno (ili ostati u mestu), i promeniti svoje stanje. Ovaj proces se ponavlja dok Tjuringova mašina ne stigne u završno stanje.

Svaki program za Tjuringovu mašinu je niz konačnih naredbi, a svaka naredba konačan niz simbola nekog prebrojivog skupa, tako da postoji samo prebrojivo mnogo programa.

Naravno, skup svih problema odlučivanja je neprebrojiv, što znači da postoje problemi za koje ne postoje algoritmi. Jedan od nerešivih problema je problem zaustavljanja Tjuringove mašine.

Tjuring je napravio je koncept algoritama za računanje pomoću Tjuringove mašine, formulišući danas široko prihvaćenu Tjuringovu verziju Čerčove teze:

- Problem je ***algoritamski rešiv*** akko se može rešiti na Tjuringovoj mašini.
- ***Algoritmom*** je svaki niz instrukcija koji se može uraditi na Tjuringovoj mašini.

Osim Tjuringove mašine postoje i fon Nojmanova mašina, Prostova mašina, algoritmi Markova, mašine Minskog i mnogi drugi formalizmi. Svi ovi sistemi su međusobno ekvivalentni, odnosno simuliraju jedni druge. U suštini klasa diskretnih funkcija koje te mašine mogu da izračunavaju je ista u svim slučajevima. To je jedna robusna klasa funkcija koja je otporna na promene računarskih modela, a radi se o klasi izračunljivih funkcija, odnosno svi problemi se svode na Čerčovu tezu.

1936 godina može se smatrati godinom nastanka nove naučne discipline, ***teorije algoritama***, a ponekad se i koristi termin teorija izračunljivosti. Teorija algoritama se bavi pitanjem postojanja ili nepostojanja algoritama za rešavanje pojedinih problema i kao takva pripada matematičkoj logici. Sa stanovišta prakse najinteresantnije pitanje je ne samo egzistencija algoritma, već i njegova efikasnost. Implementacija algoritma na nekom računarskom modelu koristi njegove resurse, vremenske i prostorne. Ovim pitanjima se bavi analiza algoritama ili teorija računske složenosti. Analiza algoritama predstavlja osnovu teorijskog računarstva, a od matematičkih metoda koristi tehnike diskretne matematike, matematičke logike i teoriju formalnih jezika.

Tjuringova mašina je nastala u pokušaju da se odgovori na neka od najpoznatijih pitanja matematike. Naime nemački matematičar David Hilbert postavio je 1900g. na berlinskom kongresu tri pitanja,

1. Da li je matematika kompletna?
2. Da li je konzistentna?
3. Da li je odlučiva (da li za svaki problem postoji algoritam kojim bi se odlučilo da li je neka formula valjana)?

Na prva dva pitanja odgovorio je Kurt Gedel 1930g. Krajnje neočekivano dokazao je da matematika nije zatvoren sistem i da će uvek biti tvrđenja koja se ne mogu dokazati.

Tjuring je 1937g. pokušao da odgovori na treće pitanje i to na neobičan način. Konstruisao je mašinu, koju zovemo Tjuringova mašina. Pomoću nje negativno je odgovorio na treće Hilbertovo pitanje ali ujedno postavio temelj za softver računara.

PITANJA ZA PONAVLJANJE

1. Šta je algoritam?
2. Navedite različite vrste predstavljanja algoritma ?
3. Čime se bavi teorija algoritama?
4. Šta je algoritamska šema i iz kojih delova se sastoji?
5. Linijske algoritamske šeme i primer.
6. Ciklične algoritamske šeme i primer.
7. Složene algoritamske šeme i primer.
8. Osobine algoritama.
9. Kako se vrši provera ispravnosti algoritma?
10. Definicija rekurzivne funkcije
11. Čerč - Tjuringova teza.
12. Koji je značaj Tjuringove mašine?

KLJUČNE REČI

Algoritam
Blok dijagram
Ciklična šema
Linijska šema
Petlja

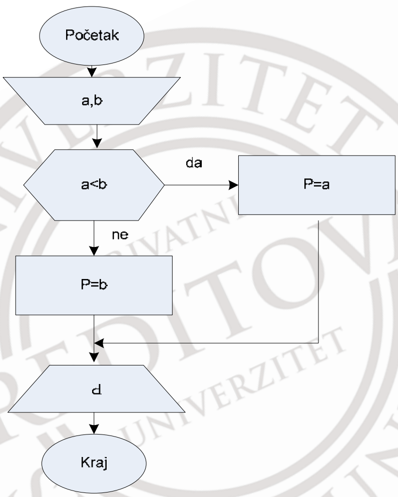
Čerčova teza
Tjuringova mašina
Rekurzija
Izračunljivost

6.7. ZADACI

1. Sastaviti algoritam za računanje vrednosti

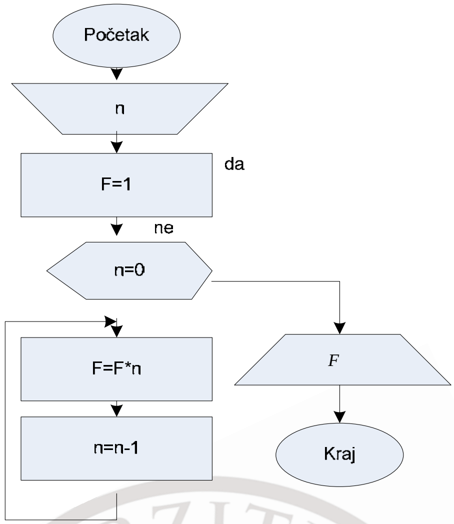
$$Z = \begin{cases} a, & a < b \\ b, & a \geq b \end{cases}.$$

Rešenje:



2. Sastaviti algoritam-blok dijagram kojim se izračunava $n!$

Rešenje:
Kako je $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ i $0! = 1$



3. Rešiti rekurentnu jednačinu

$$f(1)=1$$
$$f(k)=2f(k-1)+1$$

Rešenje:

$$f(1)=1$$
$$f(2)=2\cdot 1+1=3$$
$$f(3)=2\cdot 3+1=7$$
$$f(4)=2\cdot 7+1=15$$

Na osnovu ovih vrednosti možemo da zaključimo da je

$f(n)=2^n-1$

Dokaz ove tvrdnje mora da se uradi primenom matematičke indukcije.

Za n=1 imamo po definiciji da je $f(1)=1$

Za n=k je $f(k)=2^k-1$

Za n=k+1 je

$f(k+1)=2f(k)+1=2\cdot 2^k+1=2^{k+1}+1$

Dakle, formula je tačna za sve prirodne brojeve.

4. Napisati rekurzivnu formu za izračunavanje faktorijela n!

Rešenje:

Funkcija $fakt(n) = n!$ za računanje faktorijela broja se može izraziti na sledeći način.

$$fak(0) = 1$$
$$fak(n+1) = (n+1) \cdot fak(n)$$

Izračunati $f(3)$.

1. Kako je $0! = 1$,
2. $f(3) = 3 \cdot f(2) = 3 \cdot 2 \cdot f(1) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot f(0) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 6$

5. Napisati iterativni algoritam za izračunavanja faktorijela.

Rešenje:

$$\begin{aligned}
&procedura:\ fakt(n) = n!\,(n > 0)\\
&f = 1\\
&for\ i = 1\ to\ n\\
&f = i \cdot f\\
&end
\end{aligned}$$

6. Napisati rekurzivni algoritam za izračunavanje faktorijela.

Rešenje:

$$\begin{aligned}
&procedura:\ fakt(n)\,(n \geq 0)\\
&if\ \ n = 0\ then\ \ fakt(n) = 1\\
&else\\
&fakt(n) = n \cdot fakt(n-1)\\
&end
\end{aligned}$$

7. Fibonačijev niz je niz brojeva kod koga je prvi element broj 1, drugi element takođe broj 1, a svaki sledeći predstavlja zbir predhodna dva člana. Prvih nekoliko članova niza glase 1,1,2,3,5,8,13,........Napisati rekurzivnu funkciju niza.

Rešenje:

Rekurzivna funkcija izgleda

$$fib(1)=1$$

$$fib(2)=1$$

$$fib(n)=f(n-1)+f(n-2)$$

Izračunati $fib(3)$.

1. Kako je $fib(1)=1,\ fib(2)=1$,
2. $fib(3)=fib(2)+fib(1)=1+1=2$

6. Interaktivni algoritam za izračunavanje Fibonačijevih brojeva.

Rešenje:

$procedura:\ fibonaci(n\ \ je\ nenagativni\ broj)$
$if\ \ n=0\ then\ y=0$
$else$
$begin$
$x=0,\ y=1$
$for\ i=1\ to\ n-1$
$begin$
$z=x+y$
$x=y$
$y=y$
end
end
$y\ \ je\ \ fibonacijev\ broj$

7. Napisati rekurzivni algoritam za izračunavanje Fibonačijevih brojeva.

Rešenje:

$$
\begin{aligned}
&procedura:\ fib(n \geq 0)\\
&if\ \ n = 0\ then\ \ fib(0) = 0\\
&else\ \ n = 1\ then\ \ fib(1) = 1\\
&else\ \ \ fib(n) = fib(n-1) + fib(n-2)
\end{aligned}
$$

8. Napisati Euklidov algoritam za izračunavanje NZD-najvećeg zajedničkog delioca dva pozitivna broja a i b.

Rešenje:

Ako bi naprimer trebali da odredimo NZD za brojeve (287,91) uradili bi sledeće

$$
\begin{aligned}
&287 = 91 \cdot 3 + 14\\
&91 = 14 \cdot 6 + 7\\
&14 = 7 \cdot 2 + 0
\end{aligned}
$$

Znači NZD(287,91)=NZD(91,14)=NZD(14,7)=7.

Ako bi problem uopštili imali bi niz sledećih izraza:

Broj a se može napisati kao $a = b \cdot q + r,\, 0 \leq r < b$

Neka je

$$
\begin{aligned}
&a = b \cdot q_0 + r_0,\, 0 \leq r_0 < b\\
&b = r_0 \cdot q_1 + r_1,\, 0 \leq r_1 < r_0\\
&r_0 = r_1 \cdot q_1 + r_2,\, 0 \leq r_2 < r_1\\
&\ldots\\
&r_{k-2} = r_{k-1} \cdot q_{k-1} + r_n,\, 0 \leq r_n < r_{n-1}\\
&r_{k-1} = r_k \cdot q_k
\end{aligned}
$$

$procedura : Euk(a,b>0)$

$x = a$

$y = b$

$while\ y \neq 0$

$r = x \bmod y$

$x = y$

$y = r$

end

Rekurzivni algoritam bi glasio:

$procedura : Eukl(a,b>0)$

$if\ \ b = 0\ then\ Eukl\left(a,b\right) = a$

$else\ \ Eukl\left(a,b\right) = Eukl(a \bmod b, a)$

9. Napisati algoritam za sabiranje dve matrice A_{mxn}, B_{mxn}

Rešenje:

$procedura : Sab(A,B)$

$for\ i = 1 to\, m$

$for\ \ j = 1 to\, n$

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

end

end

end

10. Šta je azbuka Tjuringove mašine ?

Rešenje:

$$S = \{0,1,b\},$$

gde je b prazan simbol.

11. Šta je skup stanja Tjuringove mašine ?

Rešenje:

$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_+, q_-\},$$

gde je *b* prazan simbol. q_0 je početno stanje, q_+, q_- su završna stanja.

7.

TEORIJA GRAFOVA

KRATAK SADRŽAJ:

CILJEVI UČENJA:

Kada ovo poglavlje proučite moći ćete da:

1.Definišete graf,

2. navedete veliki broj različitih vrsta grafova,

3. odredite izomorfne,

4. definišete Ojlerove i Hamiltonove grafove,

5. znate kako se grafovi predstavljaju preko računara.

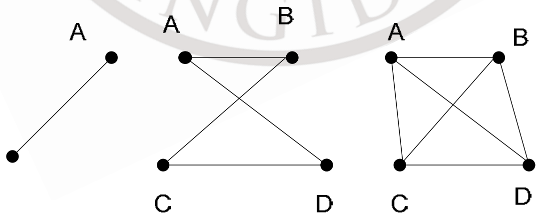
7.1. GRAFOVI

Teorija grafova je samostalna i važna oblast matematike. Grafovi su posebno zanimljivi jer pomoću njih možemo modelovati različite složene probleme, veoma jednostavno. Na primer, postavljanje saobraćajnica, električnih mreža, računarskih mreža, strukturna formula molekula i sl. Posebno su interesantni optimizacioni problemi, kao što su problemi najkraćeg puta, najniže cene i sl. Takođe, jednostavni, svakodnevni problemi kao što je pravljenje rasporeda časova, može se rešiti kao grafovski problem.

Prvi problem i njegovo rešenje,iz teorije grafova jeste rad ***Leonarda Ojlera*** *(Leonhard Paul Euler, 1707.-1783.) pod nazivom Sedam mostova Kenigsberga, objavljen 1736. godine. Kasnije, Frensis Gutri 1852. godine je izložio problem četiri boje koji postavlja pitanje da li je moguće obojiti zemlje na geografskoj karti sa samo četiri boje, a da se ne pojave dve susedne zemlje obojene istom bojom. Ovaj problem su rešili tek 1976. godine Kenet Apel i Volfgang Heken, ali se postavljanje ovog problema smatra rođenjem teorije grafova. Tokom pokušaja rešavanja ovog pro-blema otkrivene su mnoge teoreme i postavljeni mnogi teoretski pojmovi i koncepti.*

Graf je apstraktni matematički objekat. Neformalno govoreći, ***grafovi*** su objekti sastavljeni od tačaka, odnosno ***čvorova*** i linija među njima, odnosno ***grana.***

Uobičajeni način da se prestave grafovi su slike u ravni.



- Skup ***čvorova*** obeležavamo sa V (engl.vertice), a skup ***grana*** sa E (engl.edge), a graf kao uređeni par $G=(V,E)$.

Primer:
Čvorovi i grane mogu imati jasan praktični smisao,
čvorovi mogu biti gradovi, a grane putevi između njih ili
čvorovi mogu biti računari u mreži, a komunikacije između njih grane.

Primer:

Web graf

www može biti modelovan kao graf kod koga su web stranice predstavljene kao čvorovi, a grana počinje u web stranici a i završava u web stranici b, ako postoji veza od a do b. Čim se nova web stranica napravi, a to se događa skoro svake sekunde web graf se menja.

Naravno web graf ima više od bilion čvorova i desetine biliona grana. Mnogi ljudi bave se proučavanjem web grafova da bi bolje razumeli pripodu web-a,

Primer:

Za dati skup čvorova i grana nacrtati odgovarajuće grafove.

a)

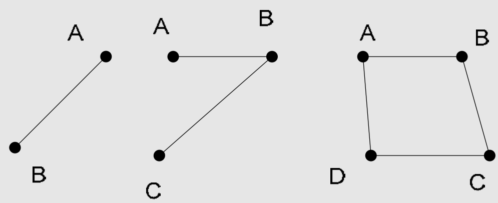
$$V = \{A, B\} \text{ i } E = \{AB\},$$

b)

$$V = \{A, B, C\} \text{ i } E = \{AB, BC\},$$

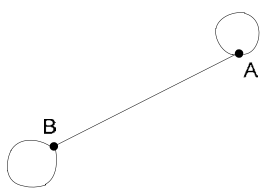
c)

$$V = \{A, B, C, D\},\ E = \{AB, BC, AD, CD\}$$



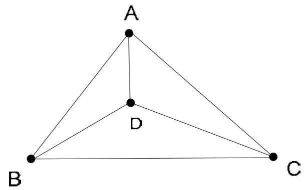
Osnovne definicije:

- Grana $e = (u, v)$ spaja dva ***susedna*** čvora u i v.
- Grana e je ***incidentna*** sa čvorom *u*, odnosno čvorom *v*.
- Grana koja spaja čvor sa samim sobom naziva se ***petlja.***



7.1.1. OSNOVNI POJMOVI I DEFINICIJE

- Graf koji nema nijednu petlju naziva se i ***prost graf.***



- ***Prost graf*** G je uređeni par $G=(V,E)$ koji se sastoji od skupa čvorova V i skupa grana E, gde je

$$E \subseteq \binom{V}{2}$$

- ***Graf-neorijentisani graf*** $G=(V,E)$ je uređen skup parova čvorova i grana gde je

$$E \subseteq \binom{V}{2} \cup V$$

  Znači on može imati i petlje.

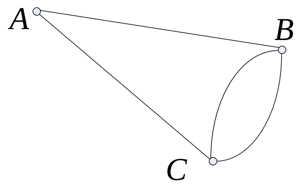
- ***Orijentisani graf*** ili ***digraf*** $G=(V,E)$ je uređen skup parova čvorova i grana gde je $E \subseteq V \times V$. Znači on ima orijentaciju, grana $v=(a,b)$ ima ***početni čvor*** u a i ***krajnji čvor*** u b.

Napomena:
Ukoliko nije drugačije naglašeno, radimo sa prostim, neorijentisanim grafovima.

Primer:
Mreža ulica u jednom gradu može se predstaviti grafom, ako su raskrsnice čvorovi,a ulice grane. Ako je ulica jednosmerna graf je orijentisan. Neorijentisane grane odgovaraju dvosmernim ulicama.

- Graf koji ima konačan broj čvorova se zove ***konačan graf.*** Analogno, graf sa beskonačnim brojem čvorova se zove ***beskonačan graf.***

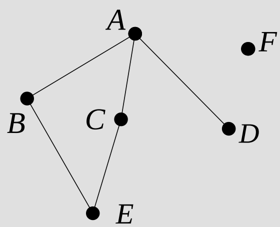
- ***Multigraf*** je graf kod koga između dva čvora postoji više od jedne grane.



- ***Stepen čvora*** jednak je broju grana grafa koji imaju kraj u tom čvoru.
- Čvor stepena 0 naziva se ***izolovani čvor***.
- Grana koja spaja čvor sa stepenom jedan je ***viseća grana.***

Primer:

Dat je graf na slici.



U grafu na slici čvorovi *A* i *C* su susedni, kao i grane *AB, AD* i *AC*.

Čvorovi *A* i E nisu susedni**,** kao ni grane *AC* i *BE*.

Grana AD je viseća grana.

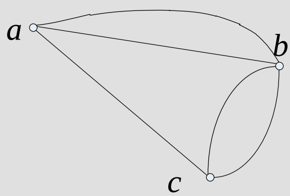
Čvor B je stepena 1, čvorovi ***B**, C, E* su stepena 2, a čvor *A* je stepena 3.

Čvor F je izolovani čvor.

Primer:

Nacrtati multigraf koji sadrži skup čvorova $V = \{a, b, c\}$ i skup grana

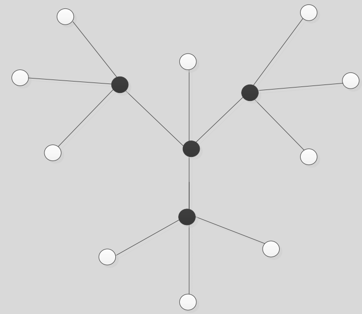
$E = \{(a,b),(b,c),(c,b),(c,a),(b,a)\}$



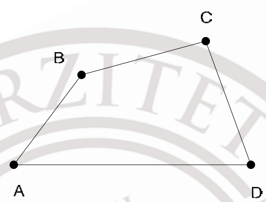
Primer:

Danas se razvija nova naučna disciplina, matematička hemija, koja primenjuje teoriju grafova na matematičko modelovanje hemijskih procesa. U hemiji se multigrafovima predstavlja struktura molekula.

$$
\begin{array}{c}
H_3C - CH - CH_3 \\
| \\
CH_3
\end{array}
$$



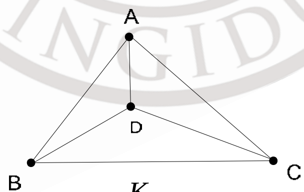
- Graf je ***regularan*** ako su svi čvorovi istog stepena.



Na slici je dat regularan graf stepena 2.

- ***Kompletan*** ili ***potpun graf*** je onaj prost graf kod koga su svaka dva čvora povezana granom. Kompletan graf sa n čvorova se obeležava sa K_n .

Kompletan graf ima $\binom{n}{2}$ grana.



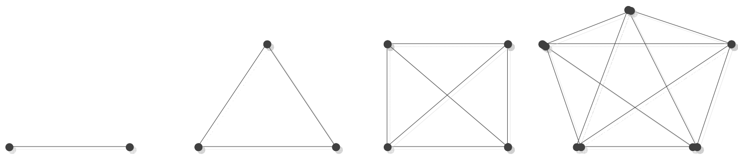
K_4

- ***Put*** je niz grana grafa sa osobinom da je kraj *k-te* grane u nizu početak naredne *k+1-te* grane. U opštem slučaju put je niz grana koje su međusobno povezane.

- ***Prost put*** ili ***elementarni put*** je put kod koga se kroz jedan čvor prolazi tačno jednom.

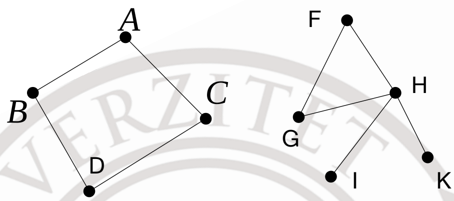
Regularni grafovi sa *n* čvorova stepena *n-1* su prema tome kompletni grafovi.

Na slici su dati kompletni grafovi K_2, K_3, K_4, K_5



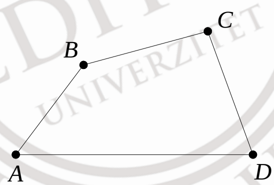
- Graf je ***povezan*** ako postoji put između bilo koja dva različita čvora.

  Prvi od grafova sa slike je povezan, a drugi je nepovezan.



- Ako je početni čvor ujedno i krajnji, takav put se naziva ***ciklus, kontura*** ili ***petlja.***

- ***Kontura*** je konačan, povezan, regularni graf stepena 2.



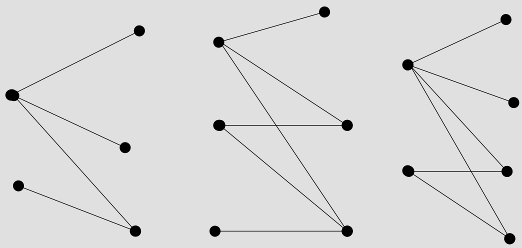
- ***Dužina puta(konture)*** je broj grana koji čine put (konturu).

- ***Bipartitivni graf*** je graf koji se sastoji od dva podskupa čvorova *X* i *Y*, tako da svaka dva čvora iz različitih podskupova su povezana granom, a nijedna grana ne povezuje čvorove iz istog podskupa. Podskupovi *X* i *Y*, nazivaju se ***klase***.

  Za obeležavanje bipartitivnih grafova koristi se oznaka $K_{m,n}$, gde je *n* broj čvorova prvog podskupa, a *m* broj čvorova drugog.

Primer:

Nacrtati bipartitivne grafove
$K_{2,3}, K_{3,3}, K_{2,4}$.



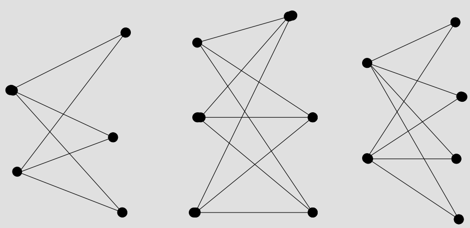
$K_{2,3}$ $K_{3,3}$ $K_{2,4}$

- **Teorema :**
  Graf je bipartitivan akko ne sadrži cikluse neparne dužine.

- ***Kompletan bipartitivni graf*** je graf koji se sastoji iz 2 podskupa čvorova, tako da je svaki čvor iz prvog skupa susedan sa svakim čvorom iz drugog skupa.

Primer:

Nacrtati kompletna bipartitivne grafove $K_{2,3}, K_{3,3}, K_{2,4}$.



$K_{2,3}$ $K_{3,3}$ $K_{2,4}$

- **Teorema 1:**
  Zbir stepena svih čvorova u grafu bez petlji uvek je ***paran broj*** i jednak je ***dvostrukom broju grana.***
  Ako su d_i stepeni čvorova, tada je

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2e.$$

Pošto svaka grana u grafu poseduje dva čvora, svaka grana doprinosi sa 2 zbiru stepena čvorova i ta suma mora da bude jednaka dvostrukom broju grana. Prema tome suma stepena svih čvorova zaista mora da bude paran broj.

Primer:
Koliko grana ima graf sa 10 čvorova, ako je svaki stepena šest ?
Na osnovu prethodne teoreme imamo da je
$2e = 10 \cdot 6 \Rightarrow e = 30$
Graf ima 30 grana

- **Teorema 2:**
U svakom grafu bez petlji broj čvorova ***neparnog stepena*** je ***paran broj.***

Ova teorema u literaturi se zove i Lema o rukovanju:
Zato što ako se u nekom društvu osobe rukuju neparan broj puta, onda je broj osoba paran broj. Ovde broj osoba koje su se rukovale predstavljaju čvorove grafa.

Kao posledica teoreme 1 imamo tvrđenje da regularni grafa stepena r ima $e = \frac{1}{2}nr$ grana.

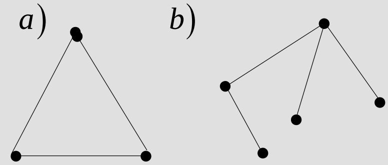
- Graf *G'=(V',E')* je ***podgraf*** grafa G=*(V, E)* ako je skup njegovih čvorova *V'* podskup skupa čvorova grafa *V,* a skup njegovih grana *E'* je podskup skupa grana *E.*

7.1.2. PLANARNI GRAFOVI

- ***Planarni graf*** je onaj prost graf koji se može nacrtati u ravni, a da mu se grane ne seku, sem u čvorovima.
- On deli ravan na na više konačnih zatvorenih oblasti i jednu beskonačnu.
- Svaka zatvorena oblast se naziva ***ćelija.***

Primer:
Grafovi na slici su planarni, graf a deli ravan na 1 konačnu i jednu beskonačnu oblast, dok graf b određuje samo jednu beskonačnu oblast.

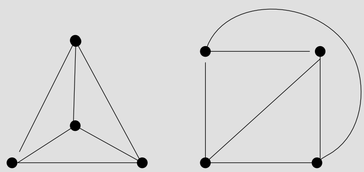
$a)$ $b)$



Primer planarnog grafa je mreža puteva ako se isključe nadvožnjaci, odnosno saobraćajne petlje. Koriste se u projektovanju elektronskih uređaja, odnosno svuda gde bi ukrštanje veza dovelo do kratkog spoja spoja. Naprimer, ako je integrisano kolo predstavljeno planarnim grafom može biti odštampano na jednom nivou, a ako graf nije planaran mora se koristiti više nivoa štampe.

- ***Ojlerova teorema:*** Povezan, planarni graf sa v čvorova i e grana deli ravan na f=*e-v+2* oblasti.

Primer:
Planarani grafovi



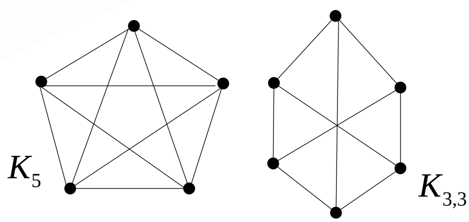
dele ravan na *f=6-4+2=4* oblasti.

Prethodna teorema ima mnogobrojne primene i posledice. Jedna od njih je poznata teorema iz geometrije:

- **Ojlerova teorema :** Konveksni poliedar sa *n* temena i *m* ivica ima *s=m-n+2* strane.

  Ako temena poliedra shvatimo kao čvorove, a njegove ivice kao grane jednog grafa, dobija se planarni graf .

  Grafovi koji se često u praksi koriste, a nisu planarni, su potpuni pentagraf K_5 i potpuni bitrigraf $K_{3,3}$.



Teorema: Potpuni pentagraf K_5 i potpuni bitrigraf $K_{3,3}$ nisu planarni grafovi.

Ako bi pentagraf bio planaran, po Ojlerovoj teoremi za v=5 i e=10 dobili bi da je f=7. Granice oblasti su ciklusi u grafu. Svaka grana pripada granici oblasti tačno

2 oblasti. Zato je broj grana koje pripadaju granicama oblasti $2e$. Kod penta-grafa najkraći ciklus ima 3 grane, odnosno svaka oblast mora imati bar toliko grana. Znači mora da je $2e \geq 3f$, odnosno $20 \geq 21$, što je nemoguće.

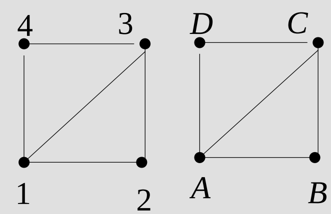
Za bitrigraf imali bi v=6, e=9 i f=5. Kod bitrigrafa svaka oblast je ograničena sa bar 4 grane , dakle $2e \geq 4f$, i $18 \geq 20$, što je takođe nemoguće.

7.1.3. IZOMORFNI GRAFOVI

- Dva grafa su ***izomorfna*** ako postoji uzajamno jednoznačno preslikavanje, bijekcija, skupova njihovih čvorova koje čuva susednost čvorova.

- Dva grafa $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ su ***izomorfni,*** ako postoji bijekcija $f : V_1 \to V_2$ za koju važi da je $\{u, v\} \in E_1$ **,** ako i samo ako $\{f(u), f(v)\} \in E_2$ **i** koristimo oznaku $G_1 \cong G_2$.

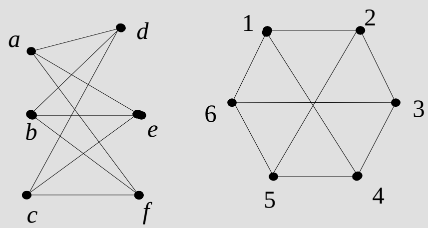
Primer:
Nacrtati dva izomorfna grafa.
a)



Izomorfizam ovih grafova definisan je bijekcijom

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ A & B & C & D \end{pmatrix}$$

b)



$$f = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Napomena:

Grafovi se razlikuju samo po tome kako su čvorovi povezani, a ne kako su obeleženi. Obeležavanje čvorova nema značaja za strukturu grafa, tako da se često i ne obeležavaju.

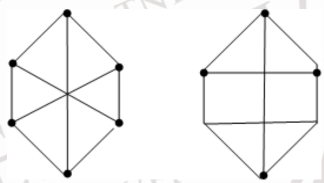
Iz definicije možemo da zaključimo da su izomorfni grafovi u stvari isti grafovi samo drukčije nacrtani u ravni. Zato je veoma važno pitanje kako ispitati da li su dva grafa izomorfna ili ne. Nažalost joj ne postoji univerzalni postupak ili neka teorema koja bi to definisala. Ispitivanje se vrši neposrednim proveravanjem vodeći računa o sledećem:

Izomorfni grafovi moraju imati:

1. Isti broj čvorova,
2. Isti broj grana,
3. Isti niz stepena čvorova,
4. broj čvorova stepena 1,
5. cikluse istih dužina i td.

Ispunjenje ovih uslova ne garantuje da su dva grafa izomorfna.

Sledeća dva grafa imaju isti broj čvorova, grana, svi čvorovi su istog stepena, pa opet nisu izomorfni.



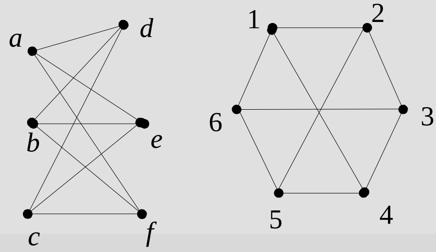
Napomena:

Zanimljivo je da nije nađen ni jedan kompletan algoritam za testiranje izomorfnosti grafova, ali nije dokazano ni da ne postoji.

Izomorfni grafovi su od velikog značaja u elektronici, pri konstruisanju štampanih kola, gde grane grafa (strujni vodovi) ne smeju da se seku osim u čvorovima. Zato je bitno da se pronađe izomorfan graf željenom grafu, ali takav da mu se grane ne seku.

Primer:

Da li je moguće spojiti 3 kuće sa 3 bunara stazama koje se ne ukrštaju, a da od svake kuće vodi po jedna staza do svakog od 3 bunara.



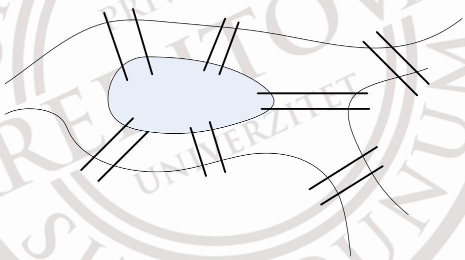
Kuće i bunari se mogu predstaviti kao na prvoj slici. U pitanju je kompletan bipartitivni graf, ali kod koga grane ne bi smele da se seku.

Može se dokazati da je naš graf izomorfan sa potpunim bitrigrafom koji je prikazan na drugoj slici.
A dokazali smo da da taj graf nije planaran.

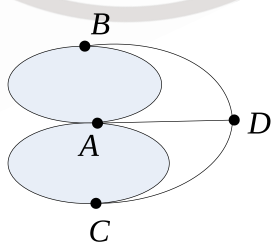
7.1.4. OJLEROVI GRAFOVI

Švajcarskom matematičaru Leonardu Ojleru tokom boravka u Keninsbrgu, današnji Kaljingrad, građani su postavili pitanje koje ih je mučilo. Grad leži na obalama i dva ostrva na reci Pregel i povezan je sa sedam mostova. Pitanje je bilo da li je moguće početi šetnju iz bilo koje tačke u gradu i vratiti se u polaznu tačku, prelazeći pri tome svaki most tačno jednom.

1735.godine Ojler je prezentovao svoj rad dokazujući da je takav prelazak nemoguć, uz napomenu da se razmatranje može proširiti da proizvoljan raspored ostrva i mostova. Ovaj rad smatra se pretečom teorije grafova.



Ojler je problem rešio tako što je obale i ostrva shvatio kao čvorove, a mostovi su bili grane između njih. Tako je dobio jedan multigraf.



Svakodnevnim jezikom možemo reći da je Ojlerov graf, graf koji se može nacrtati ne podižući olovku sa papira.

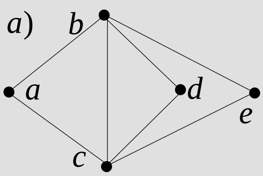
- ***Ojlerov put*** je put koja sadrži sve grane iz *G* tačno jedanput. (ne mora biti zatvoren).

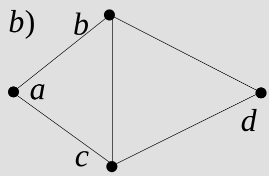
- Zatvoren Ojlerov put naziva se ***Ojlerov ciklus ili kontura.***
- Graf koji ima Ojlerov ciklus zove se ***Ojlerov graf.***
- Graf koji ima Ojlerov put se zove ***poluojlerov graf.***

Graf može, a ne mora imati Ojlerov put, odnosno ciklus.

- ***Ojlerova teorema:***
  Graf *G* je ***Ojlerov*** akko je povezan i svi čvorovi su parnog stepena.
- ***Teorema:***
  Graf ima ***Ojlerov put*** akko je povezan i sadrži najviše 2 čvora neparnog stepena.

Primer:
Nacrtati po jedan Ojlerov graf i Ojlerov put.

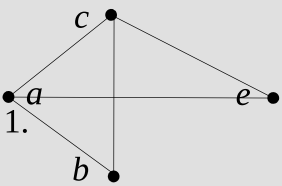


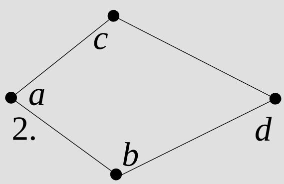


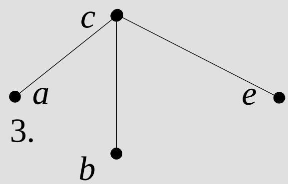
Graf na slici a je Ojlerov , napr: abcbdec.
U njemu su svi čvorovi parnog stepena.

Graf na slici b je Ojlorev put, napr: bacbdc.
Ovaj graf ima tačno 2 čvora neparnog stepena.

Primer:
Dati su grafovi na slici. Oni su:







Prvi graf je Ojlerov put, napr: caecba, ima 2 čvora neparnog stepena.
Drugi graf je Ojlerova kontura, napr: abdca. Svi čvorovi su mu parnog stepena.
Treći graf nije ni Ojlerov put ni Ojlerova kontura.

Ako se vratimo na problem Kenisberških mostova, vidimo da se on ne može svesti na Ojlerovu konturu, jer graf ima stepene čvorova 5, 3, 3, 3 pa je samim tim nemoguće svaki most pređi samo jedanput, a da se vratimo u početnu tačku.

Traženje Ojlerovog puta sreće se u problemima kombinatorna optimizacije, ali i u radu sa laserima, čiji je cilj da se optimalno koristi laser i samim tim pojeftini proizvodnja laserskih uređaja. Ojlerovi putevi su važni za organizaciju poslova u velikom gradu, na primer, za raznošenje pošte, naplate računa i slično. Poštar će najracionalnije razneti poštu ako svaku ulicu obiđe tačno jedanput.

7.1.5. HAMILTONOVI GRAFOVI

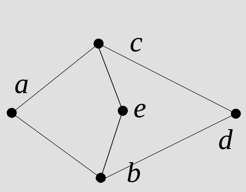
Vilijem Hamilton je 1859. godine postavio problem pod nazivom put oko sveta . Problem je bio kao obići gradove sveta i vratiti se u polazni. Igra je koristila ivice dodekaedra (12) za predstavljanje dozvoljenih puteva između gradova.

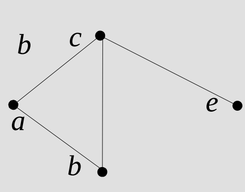
Graf koji prolazi kroz sve čvorove datog grafa tačno jednom naziva se ***Hamiltonov graf.***

- ***Hamiltonov put*** u grafu G je put koji prolazi kroz svaki čvor tačno jedan put.
- Zatvoren Hamiltonov put zove se ***Hamiltonova kontura*** ili ***ciklus.***
- Graf koji ima Hamiltonov ciklus zove se ***Hamiltonov graf.***
- Graf koji ima Hamiltonov put se zove ***poluhamiltonov graf.***

Primer:

Nacrtati jedan Hamiltonov graf i jedan put.





Postoji velika sličnost u definiciji Ojlerovih i Hamiltonovih grafova. Kod Ojlerovih grafova obilazimo grane, a kod Hamiltonovih grafova obilazimo čvorove grafa.

Međutim, dok je Ojlerov graf je u potpunosti određen Ojlerovom teoremom, koja definiše potrebne i dovoljne uslove za egzistenciju grafa, za Hamiltonove grafove to nije slučaj. Ne postoji teorema koja definiše potreban i dovoljan uslov postojanja

Hamiltonovog grafa. Postoji više teorema koje na posredan način određuju Hamiltonove grafove, ali samo u specijalnim slučajevima, kao naprimer:

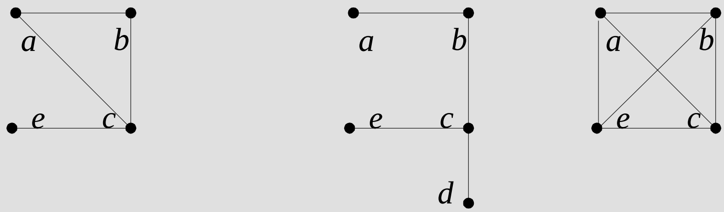
- Grafovi sa čvorovima stepena 1 ne mogu biti Hamiltonovi, dok u Hamiltonovom grafu svaki čvor je susedan sa dve grane u konturi.

- Svaki kompletan graf Kn sa $n \geq 3$ čvorova je Hamiltonov graf.

- Povezan graf sa $n \geq 3$ čvorova u kome je stepen svakog čvora bar $\frac{n}{2}$ je Hamiltonov graf.

Primer:

Dati su grafovi na slici

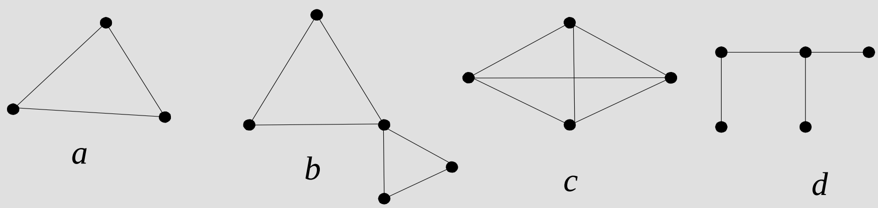


Prvi graf je Hamiltonov put, napr: e,c,b,a.
Drugi graf nije ni Hamiltonov put, ni Hamiltonov graf.
Treći graf je Hamiltonov graf. Kompletan je graf, K_4

Primer:

Odrediti grafove koji su:

a) istovremeno Ojlerovi i Hamiltonovi,
b) jesu Ojlerovi, a nisu Hamiltonovi,
c) nisu Ojlerovi, a jesu Hamiltonovi,
d) nisu ni Ojlerovi, ni Hamiltonovi.



7.1.6. TEŽINSKI GRAF

Pretpostavimo da želimo da odredimo najbolji put od tačke A do tačke B. To može da bude najkraći, najjeftiniji, najbezbedniji ili put na kome se troši najmanje energije i sl.

Tada se granama grafa koji predstavlja ovakav put dodeljuje neki realni brojevi, njihove težine, odnosno mera, koji će karakterisati željeni uslov.

Težina ne mora da bude pozitivan broj, ali je uobičajeno da se takav koristi, ne umanjujući opštost razmatranja. Ako neka grana ne postoji, tada se na pomenutu poziciju stavlja neki poseban simbol napr ∞.

Ovakvi grafovi se nazivaju ***težinski grafovi.***

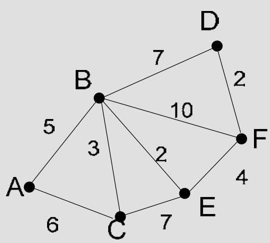
- ***Težinski graf (digraf)*** $G=(V,E,w)$ je uređena trojka skupova čvorova, grana i težinske funkcije $w:E\rightarrow V\times V$ koja svakoj grani dodeljuje težinu.

Ako su težine pozitivni realni brojevi, a graf je bez petlji možemo zaključiti:

- Dužina puta je zbir svi težina na putu.
- Udaljenost čvorova je dužina minimalnog puta između dva čvora.
- Udaljenost čvora do samog sebe je 0.
- Težinski graf koji je usmeren zove se ***mreža.***

Primer:

Na slici je dat jedan težinski graf.



7.2. PRESTAVLJANJE GRAFOVA POMOĆU RAČUNARA

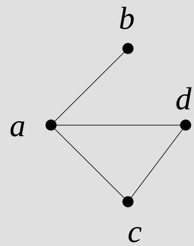
Grafovi se mogu koristiti za rešavanje raznih praktičnih problema koje rešavamo pomoću računara. Iz tih razloga potrebno je na adekvatan način predstaviti grafove. Ne postoji neka univerzalna reprezentacija grafova koja bi rešila sve različite probleme u kojima se oni koriste. Najčešće korišćeni načini su liste susedstva, matrica incidencije i matrica susedstva.

7.2.1. LISTA SUSEDSTVA

U listi susedstva za svaki čvor *u* beležimo u listu čvorova v_n, takvih da postoji grana (u, v_n).

- Za svaki čvor grafa *G* ***lista susedstva*** sadrži sve čvorove koji su susedni sa njim u *G,* $l = \{v \in V \,|\, (u,v) \in E\}$.

Primer:
Grafu sa slike odgovara sledeća lista susedstva



$$\begin{array}{c|c} u & l \\ a & (b,c,d) \\ b & (a) \\ c & (a,d) \\ d & (a,c) \end{array}$$

Procedura algoritma koji bi koristio ovakav način za zapisivanje grafa bi se svodila na pretraživanje niza grana koje u opštem slučaju u grafu sa velikim brojem čvorova i grana može biti vremenski veoma zahtevna. Lista susedstva je sa memorijskih resursa najekonomičnija reprezentacija. Svaka grana grafa ili digrafa predstavlja se sa 2 memorijske jedinice, jedna za početni čvor, a druga za krajnji čvor grane. Dakle graf je se predstavlja sa 2m lokacija (m je broj grana). Ovakvo predstavljanje nije uvek pogodno, pogotovo kod grafova kod kojih je potrebno ispitivati susednost čvorova. Iz tih razloga mnogo je efikasnije predstavljanje grafova putem matrica.

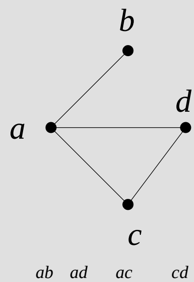
7.2.2. MATRICA INCIDENCIJE

- Grana *(a,b)* gde su čvorovi *a* i *b* su krajnji čvorovi grane zove se ***incidentna grana*** čvorovima *a* i *b*.
- Neka je *G=(V,E)* graf. Matrica B čije su vrste određene čvorovima, a kolone granama grafa naziva se ***matrica incidencije***.
- Element b_{ij}, jednak je 1 ako je i-ti čvor incidentan (susedan) j-toj grani, a jednak nuli u protivnom.

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & ako\ \ je\ čvor\ i\ incidentan\ sa\ granom\ \ j \\ 0, & inače \end{cases}$$

U svakoj koloni se tačno nalaze 2 jedinice i one govore koji čvorovi su vezani istom granom.

Primer:
Grafu sa slike odgovara sledeća matrica incidencije

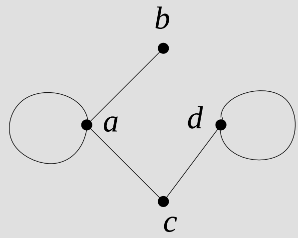


$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} ab & ad & ac & cd \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matrice incidencije nisu jednoznačno definisane već zavisi kako se definišu čvorovi.

Matrice incidencije mogu da se koristite i kod grafova sa petljama.

Primer:
Grafu sa petljama sa slike odgovara sledeća matrica incidencije



$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} ab & aa & ac & cd & dd \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Kod orijentisanih grafova na preseku i-te vrste i j-te kolone stavlja se -1 ili 1 ako u i-ti čvor ulazi, odnosno izlazi j-ta grana, inače je 0.
Ova reprezentacija je veoma neekonomična i ređe se koristi.

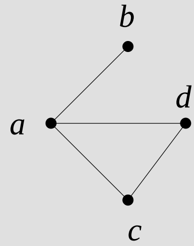
7.2.3. MATRICA SUSEDSTVA

- ***Matrica susedstva*** je kvadratna matrica čiji je red jednak broju čvorova grafa.
- Element a_{ij}, jednak je broju grana koje polaze iz čvora v_i a završavaju se u čvoru v_j
- Ako su dva čvora spojena najviše jednom granom iste orijentacije tada je:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & ako\ ne\ \ postoji\ \ grana\ od\ čvora\ i\ do\ čvora\ \ j \\ 1, & ako\ postoji\ \ grana\ od\ čvora\ i\ do\ čvora\ \ j \end{cases}$$

- Matrica susedstva je simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu.

Primer:
Grafu sa slike odgovara sledeća matrica susedstva

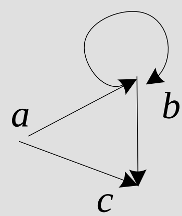


$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Kako oznake čvorova u većini slučajeva nisu važne, matrica se piše bez oznaka.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Primer:
Usmerenom grafu sa slike odgovara matrica susedstva



$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matrica susedstva je najčešća matrična interpretacija grafova. Ova reprezentacija zahteva n^2 (n je broj čvorova) memorijskih jedinica u računaru.

Nepraktična je za grafove sa malim brojem grana što je u praksi čest slučaj. Sa druge strane ona može da se koristi i za grafove i multigrafove (digfraove). Tada, na poziciju preseka i-te vrste i j-te kolone treba staviti broj grana koje spajaju i-ti čvor sa j-tim čvorom. U slučaju da je graf neorijentisan skoro 50% memorijskih jedinica možemo uštedeti ako se pamte samo elementi ispod ili iznad glavne dijagonale**,** zato što je matrica simetrična**.** Ali tada se usporava brzina rada jer je potrebno izvršiti testiranja koja se nameću.

7.3. PROBLEM ČETIRI BOJE-BOJENJE GRAFOVA

Problem 4 boje postavio je 1852g. Frensis Gatri. Pitanje je bilo da li je sa 4 boje moguće obojiti kartu regija neke države ili kartu sveta, a da su susedne oblasti obojene različitim bojama, bez obzira kao karta izgleda i koliko delova ima. Problem je zainteresovao matematičare pa i čuvenog Augusta de Morgana. Tek 1976g. Apel i Haken su pomoću računara dokazali da je za bojenje karte sveta potrebno 4 boje. Za to im je bilo potrebno 1200 sati rada kompjutera.

I ovaj problem može se tretirati kao grafovski, odnosno kao problem bojenja grafova.

Problem bojenja grafova svodi se na bojenje čvorova grafa, odnosno pridruživanje skupa boja skupu čvorova, tako da je svakom čvoru pridružene jedna boja i da susedni čvorovi nisu iste boje. Za takav graf se kaže da je ***pravilno obojen***.

- Ako je graf pravilno obojen i da se pri tom upotrebi k ili manje boja , onda je graf je ***k-obojiv*** .

Svaki graf od n čvorova je n-obojiv, jer svaki čvor možemo obojiti nekom drugom bojom. Drugo je pitanje koliko min boja treba da bi se graf obojio na gore opisani način.

- Najmanji broj boja kojim je moguće obojiti jedna graf se zove ***hromatski broj grafa,*** χ

Ako graf sadrži samo izolovane čvorove onda je $\chi = 1$, a ako je bipartitivni graf onda je $\chi = 2$.

Tačno određivanje hromatskog broja grafa nije jednostavan posao i poznat je kao NP težak. Problem se jednostavno rešava samo za mali broj čvorova.

Jednostavnije je samo odrediti relativo dobru donju i gornju granicu. Razvijen je čitav niz heuristika za nalaženje približne vrednosti χ.

Postoji više teorema koje se odnose na bojenje grafova:

- Svaki planarni graf je 4-obojiv.
- Graf je bihromatski (može se odojiti sa dve boje) akko ne sadrži nijednu konturu sa neparnim brojem čvorova,

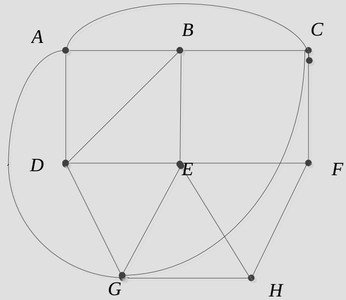
Postoji algoritam koji omogućava bojenje grafova, ali on ne govori o minimalnom broju boja.

ALGORITAM:

1. Definiši graf G
2. Poređaj čvorove prema opadajućim stepenima
3. Dodeli boju B1 prvom čvoru, a zatim i svim čvorovima koji nisu susedni sa prethodnim čvorom
4. Ponoviti korak 2 sa bojom B2, sa sledećim neobojenim čvorom.
5. Ponavljati korak 3 dok ima čvorova i boja.
6. Kraj.

Primer:

Obojiti graf na slici koristeći prethodni algoritam



Ako čvorove poređamo u opadajući niz prema stepenima imamo

E, C, G, A, B, D, F, H

Prvu boju nanosimo na čvor E, i na njemu ne susedni čvor A

Drugu boju nanosimo na čvor C i zatim na čvor D i na čvor H

Treću boju nanosimo na čvor G, pa na čvor B i nakon toga na čvor H.

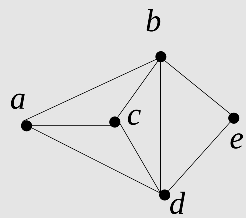
Znači potrebno je 3 boje da obojimo ovaj graf. Hromatski broj ovog grafa je 3.

Primer:

Treba skloniti u magacin 5 hemikalija, ali vodeći računa da hemikalije koje u dodiru izazivaju hemijsku reakciju ne smeju biti stavljene jedna do druge. Kao je to moguće učiniti, ako su reakcije hemikalija zadate sledećom tablicom. Koliko je potrebno skladišta za držanje ovih hemikalija.

	a	b	c	d	e
a	-	+	+	+	-
b	+	-	+	+	+
c	+	+	-	+	-
d	+	+	+	-	+
e	-	+	-	+	-

Ovom problemu možemo pridružiti sledeći 4-obojiv graf, odnosno potrebna su 4 skladišta.



PITANJA ZA PONAVLJANJE

1. Šta su karakteristike grafa?
2. Šta su biparitivni, a šta kompletni bipartitivni grafovi.
3. Definisati stepen čvora i stav o vezi između čvorova i grana.
4. Koja je razlika između Ojlerovog puta i Ojlerove konture?
5. Koja je razlika između Hamiltonovog puta i Hamiltonove konture?
6. Koja je razlika između Ojlerove i Hamiltonove konture?
7. Šta su planarni grafovi?
8. Koji su grafovi izomorfni?
9. Definisati težinski graf.
10. Koja je razlika između matrice incidencije i matrice susedstva?
11. Šta je hromatski broj grafa?

KLJUČNE REČI

Graf
Grana
Čvor
Petlja
Multigraf
Kompletan graf
Stepen čvora
Put
Ciklus
Hromatski broj

Digraf
Podgraf
Bipartitivan
Planaran
Izomorfan
Ojlerov graf
Hamiltonov graf
Incidencija
Susedstvo

7.4. ZADACI

1. Nacrtati grafove sa:

a) čvorovima A,B,C,D i granama

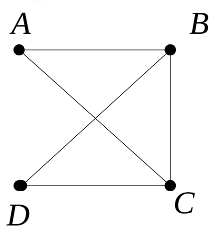
$$\{A,B\},\{A,C\},\{B,C\},\{B,D\},\{C,D\},$$

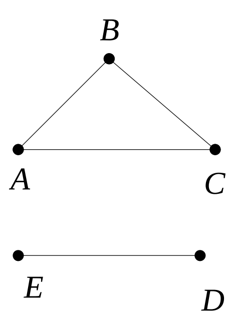
b) čvorovima A,B,C,D,E i granama

$$\{A,B\},\{A,C\},\{B,C\},\{D,E\},$$

Koji je od njih povezan graf?

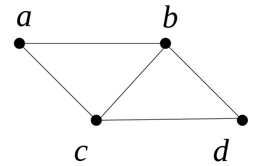
Rešenje:





Prvi graf je povezan, drugi nije.

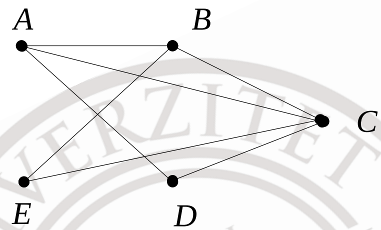
2. Odrediti stepene čvorova datom grafu.



Rešenje:

Čvorovi a i d imaju stepen 2, a čvorovi c i a stepen 3.

3. Dat je graf na slici. Odrediti stepene čvorova i proveriti teoremu o broju čvorova i grana.

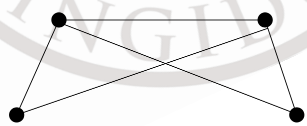


Rešenje:

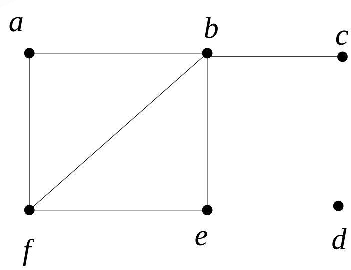
Stepen čvorova A, B je 3, stepen čvora C je 4 i stepen čvorova D,E je 2. Teorema kaže da zbir stepena čvorova, 3+3+4+2+2=14 jednak dvostrukom broju grana 2.7=14.

4. Nacrtati nepovezan graf sa 4 čvora i 5 grana.

Rešenje:



5. Dat je graf



a) Koliki je broj grana, čvorova i odrediti stepene svih čvorova.

b) Da li je ovaj graf regularan (objasniti)?

Rešenje:

a) *v=6, e=6.*

b) *g*raf nije regularan , zato što svi čvorovi nemaju iste stepene.

6. Da li postoji prost graf sa 5 čvorova čiji su stepeni čvorova 1,2,3,4,5 ?

Rešenje:

Ne postoji. Zbir stepena čvorova nije paran broj ($1+2+3+4+5=15$).

7. Koliko maksimalno grana može da postoji u grafu koji sadrži n čvorova?

Rešenje:

$$\binom{n}{2}$$

8. Koliko grana ima graf čiji su stepeni čvorova 5,2,2,2,2,1?

Rešenje:

Kako je

$$2e = \sum_i d_i \,,$$

gde su d_i stepeni čvorova, a *e* broj grana, dobijamo,

$$2e = 5+2+2+2+2+1 \Rightarrow e = 7$$

9. Da li je moguće 5 gradova povezati putevima tako da iz tih gradova redom izlazi

a) 4,2,3,0,1 puteva

b) 4,4,4,0,1 puteva?

Rešenje:

a) Moguće je. Ako su putevi grane, a gradovi čvorovi, imamo da je

$$2\cdot 5 = 4+2+3+0+1$$

b) Nije moguće, jer

$$2\cdot 5 \neq 4+4+4+0+1 .$$

10. Da li postoji graf sa stepenima čvorova

a) 2,4,6,8,3,3,1

b) 2,4,6,8,3,3,1,1

Rešenje:

a) Ne postoji, zato što broj čvorova neparnog stepena, mora da bude paran broj, a kod nas je 3.
b) Postoji.

11. Da li postoji prost graf sa 12 čvorova i 28 grana, takav da je stepen svakog čvora ili 3 ili 5 ?

Rešenje:

Postoji, jer je $2\cdot 28 = 5\cdot 10 + 2\cdot 3$

12. Dokazati da u svakom grafu moraju da postoje bar 2 čvora istog stepena.

Rešenje:
Pretpostavimo da tvrđenje nije tačno. Ako graf ima n čvorova, najveći stepen koji neki čvor može da ima je n-1. Ostali čvorovi su tada 0,1,2,…., n-2. Imali bi graf gde je jedna čvor stepena 0 , i jedan n-1, što nije moguće. Znači, naša pretpostavka je pogrešna. Dakle u grafu mora da postoji bar 2 čvora istog stepena.

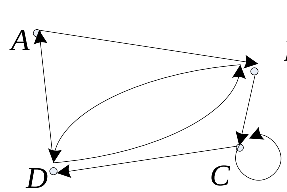
13. Na jednom šahovskom turniru svaki igrač je odigrao najviše jednu partiju sa svakim drugim igračem. Dokazati da u svakom trenutku na turniru postoje bar 2 igrača koji su do tog trenutka odigrali isti broj partija.

Rešenje:
Ako se definiše graf gde su igrači čvorovi, a partije grane, onda kao u prethodnom primeru zaključujemo da u svakom trenutku postoje bar dva čvora parnog stepena.

14. Nacrtati digraf koji sadrži skupove $V = \{a,b,c,d\}$ i

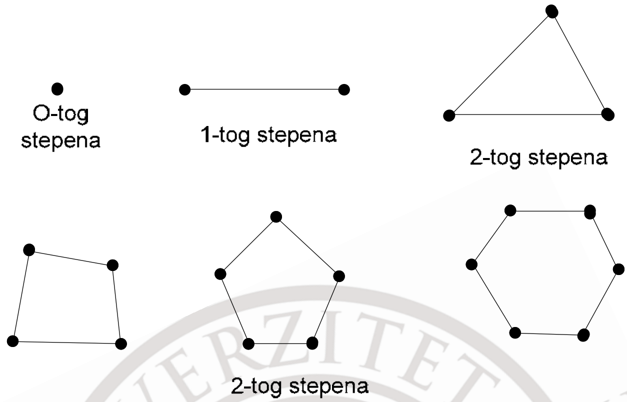
$$E = \{(a,b),(b,c),(c,c),(b,d),(d,b),(c,d),(d,a)\}$$

Rešenje:



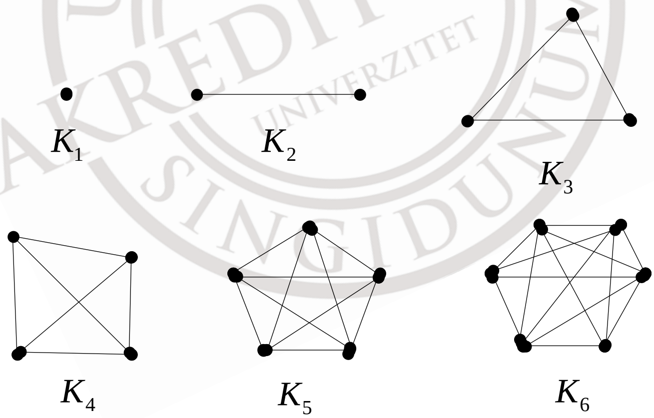
15. Nacrtati regularne grafove stepena 0,1,2.

Rešenje:



16. Nacrtati kompletne grafove u oznaci $K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6$.

Rešenje:



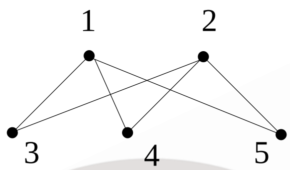
17. Na jednom šahovskom turniru igrači su podeljeni u dve grupe po 11 igrača. Svaki igrač mora da odigra 7 partija u svojoj grupi i 5 partija sa igračima iz druge grupe. Da li je moguće napraviti takav raspored igranja?

Rešenje:

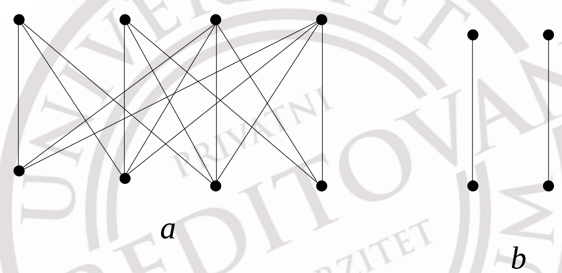
Problem možemo da shvatimo grafovski gde su igrači čvorovi, a partije grane. Pitanje je da li postoji graf sa dve grupe od 11 čvorova,gde svaki čvor ima 7 grana u svojoj i 5 grana susednog grupi. Podgraf koji sadrži jednu grupu, odnosno 11 čvorova ne postoji. Po iskazanoj teoremi broj čvorova sa neparnim stepenima je paran broj, a kod nas nije(imamo neparan broj čvorova i svi su neparnog stepena).

18. Nacrtati kompletan bipartitivni graf koga čine dva disjunktna podskupa čvorova $A=\{1,2\}$ i $B=\{3,4,5\}$.

Rešenje:



19. Koji od grafova na slici je regularan i bipartitivan?



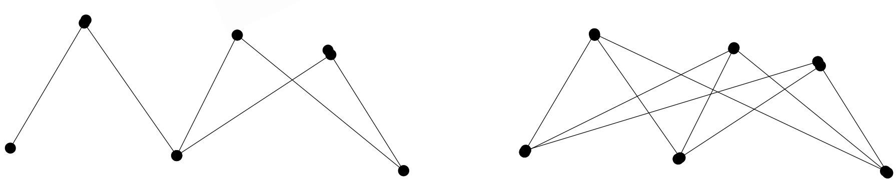
Rešenje:

Graf na slici a $K_{4,4}$ je nije regularan i bipartitivan.

Graf na slici b $K_{2,2}$ je regularan i bipartitivan.

20. Nacrtati jedan bipartitivni graf $K_{3,3}$ i jedan kompletan bipartitivni graf $K_{3,3}$.

Rešenje:



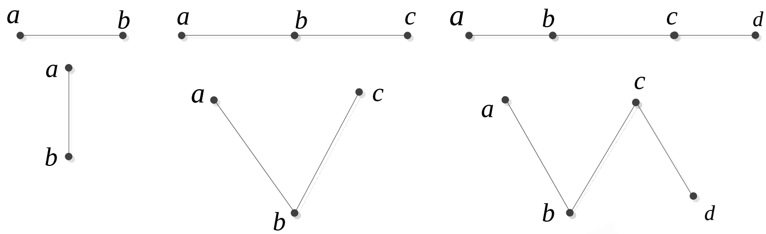
21. Odrediti najveći broj grana u bipartitivnom podgrafu grafa:

c) Put P_n, $n \geq 2$

d) Kontura, C_n, $n \geq 2$

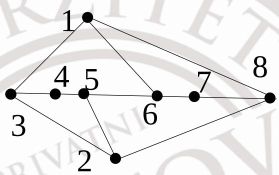
Rešenje:

a) Pošto je svaki put bipartitivan graf, max broj grana je n-1 (vidi se sa slike)



b) Ako je n paran broj kontura je bipartitivan graf i broj grana je n.

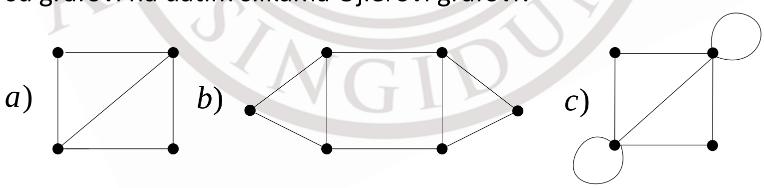
22. Grafu sa slike odrediti bipartitivni podgraf sa maksimalnim brojem grana.



Rešenje:

Zadani graf nije bipartitivni jer sadži neparne cikluse 13456 I 25678. Brisanjem zajedničke grane(5,6) uklanjamo neparne cikluse iz grafa I dobijamo bipartitivni podgrafi čiji je najveći broj grana 10.

23. Da li su grafovi na datim slikama Ojlerovi grafovi?



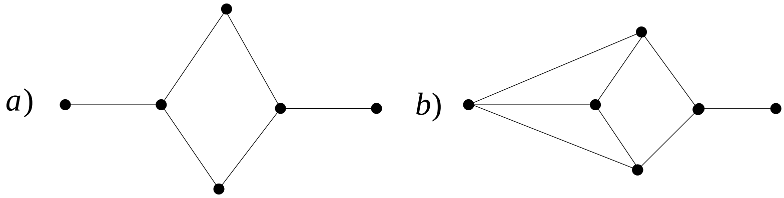
Rešenje:

a) Graf na je Ojlerov put jer ima samo 2 čvora neparog stepena,

b) nije ni Ojlerov grag ni put jer ima 4 čvora neparnog stepena,

c) jeste Ojlerov graf jer su mu svi čvorovi parnog stepena.

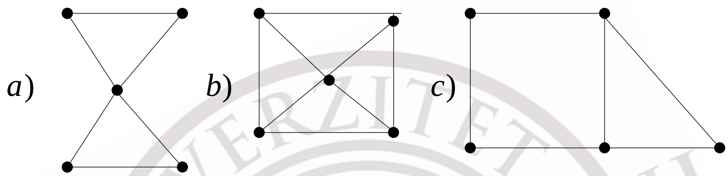
24. Da li su grafovi na narednim slikama Ojlerovi grafovi?



Rešenje:

a) ne; b) ne.

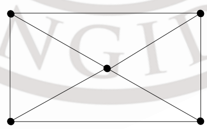
25. Koji od sledećih grafova imaju Ojlerove konture, odnosno puteve?



Rešenje:

a) Jeste i kontura i put. Svi čvorovi su parnog stepena.
b) Nije kontura jer ima čvorova neparnog stepena, a nije ni put jer ima više od 2 čvora neparnog stepena.
c) Nije kontura jer ima čvorova neparnog stepena, ali jeste put jer ima tačno 2 čvora neparnog stepena.

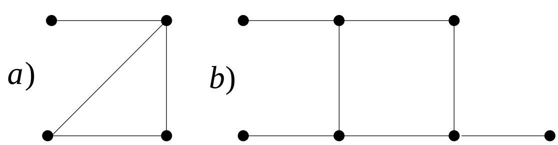
26. Može li se jednim potezom, ne dižući olovku sa papira nacrtati sledeća figura?



Rešenje:

U ovom grafu postoji 5 čvorova stepena 3,3,3,3,4, pa prema tome to nije Ojlerov put. Znači sliku nije moguće nacrtati ne dižući olovku sa papira.

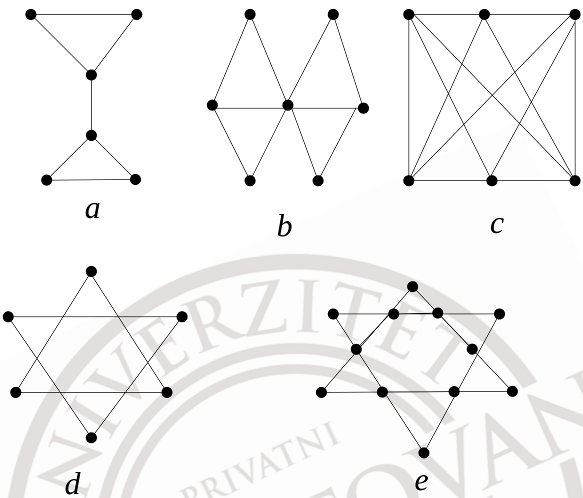
27. Kakvi su grafovi dati slikama ?



Rešenje:

Graf na slici a) nema Hamiltonovu konturu, a ima Hamiltonov put, a graf na slici b) nije ni Hamiltonova kontura ni put.

28. Koji od sledećih grafova imaju Ojlerove konture, odnosno puteve?



Rešenje:

Konture

a) ne, b) ne c) da d) ne e) da

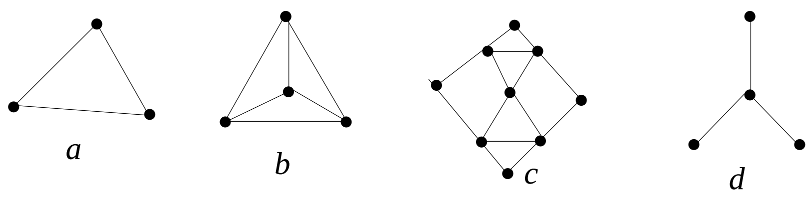
Putevi

a) da, b) da c) da d) ne e) da

29. Odrediti grafove koji su:

a) istovremeno Ojlerovi i Hamiltonovi,
b) nisu Ojlerovi, a jesu Hamiltonovi,
c) jesu Ojlerovi, a nisu Hamiltonovi,
d) nisu ni Ojlerovi, ni Hamiltonovi.

Rešenje:



a) Kontura K_3 je i Ojlerov i Hamiltonov graf,

b) Potpuni graf K_4, nije Ojlerov, a jeste Hamiltonov graf,

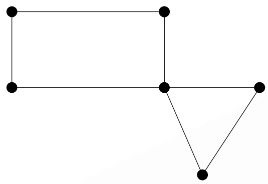
c) Graf je Ojlerov, a nije Hamiltonov graf,

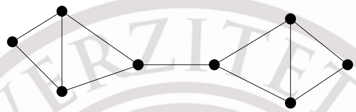
d) Zvezda, K_4, nije Ojlerov i nije Hamiltonov graf.

30. Nacrtati graf koji ima Ojlerovu konturu, a zatim da nema Ojlerovu, a ima Hamiltonovu konturu.

Rešenje:

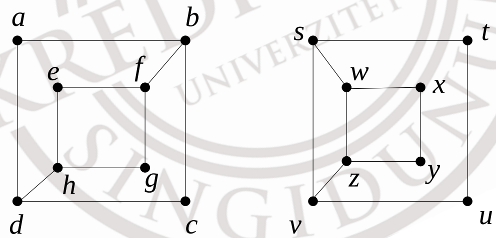
Ojlerova kontura





Hamiltonova kontura

31. Da li su sledeći grafovi izomorfni?



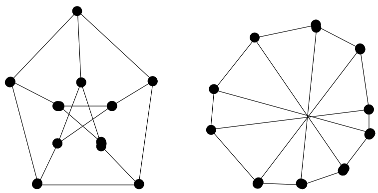
Rešenje:

Jesu.

Imaju isti broj čvorova, grana, svi čvorovi su istog stepena i može da se definiše bijekcija

$$f = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ t & s & u & v & x & w & y & z \end{pmatrix}.$$

32. Da li su sledeći grafovi izomorfni?

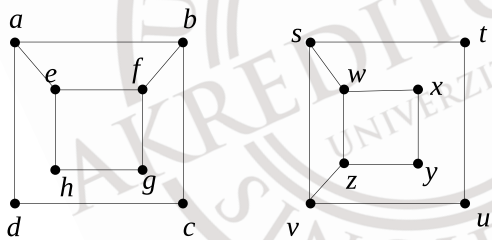


Rešenje:

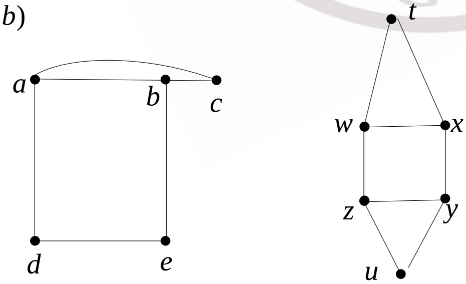
Oba grafa imaju 10 čvorova i 15 grana. Stepen svih čvorova je 3, ali to još nije dovoljno da utvrdimo da su izomorfni. Moramo da nađemo još neku zajedničku osobinu. Jedna od takvih osobina je i postojanje ciklusa određene dužine. Graf levo sadrži ciklus dužine 5, dok graf sa desne strane sadrži samo cikluse dužine 4,6,8, i 10. Znači nisu izomorfni.

33. Da li su sledeći grafovi izomorfni?

a)



b)

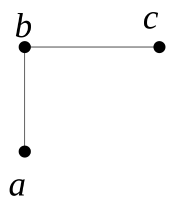


Rešenje:

a) jesu

b) nisu

34. Dat je graf, naći listu susedstva i matricu susedstva.



Rešenje:

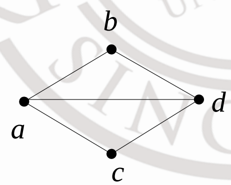
Lista susedstva

$$\begin{array}{c|c} v & l \\ a & (b) \\ b & (a,c) \\ c & (b) \end{array}$$

. Matrica susedstva

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

35. Dat je graf, naći listu susedstva, matricu susedstva i matricu incidencije.



Rešenje:

$$\begin{array}{c|c} v & l \\ a & (b,c,d) \\ b & (a,d) \\ c & (a,d) \\ d & (a,b,c) \end{array}$$

Matrica incidencije

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} ab & ac & ad & bd & cd \end{array} \\
A = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Matrica susedstva

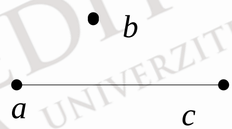
$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.
$$

36. Data je matrica susedstva

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

odrediti graf.

Rešenje:

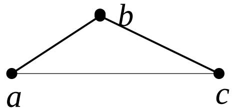


37. Data je matrica incidencije, odrediti graf.

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

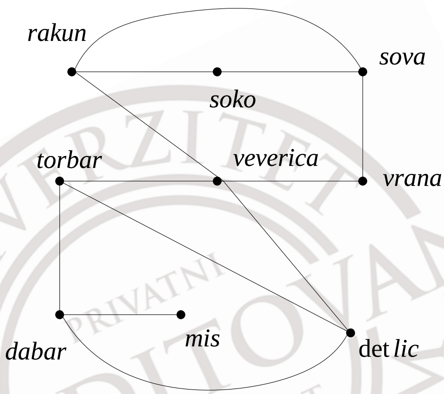
Rešenje:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} ac & bc & ab \end{array} \\
A = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{array},
$$
i dobijamo



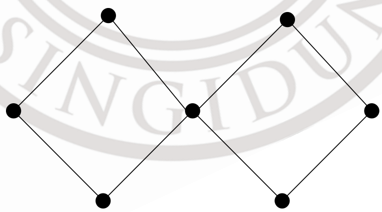
38. Nacrtati graf koji predstavlja eko-sistem ishrane u šumi, ako životinjske vrste predstavljaju čvorove, a vrsta iste hrane vezu između njih. Isto se hrane :Soko, sova i rakun, soko i vrana , sova i vrana, veverica i rakun, veverica i vrana, veverica i torbar, detlić i torbar, dabar i detlić, dabar i miš.

Rešenje:



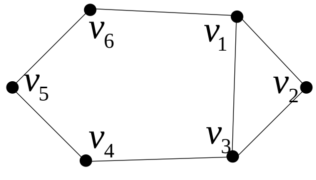
39. Nacrtati jedan planarni graf i po teoremi izračunati na koliko on oblasti deli ravan.

Rešenje:



$R = e - v + 2 = 7 - 7 + 2 = 3$, Ovaj graf deli ravan na 3 oblasti.

40. Odrediti hromatski broj grafa sa slike



Rešenje:

Ako čvorove poređamo u silazni niz $v_1, v_3, v_2, v_4, v_5, v_6$ I

Prvu boju nanosimo na čvor v_1 , pa na v_3

Drugu boju nanosimo na čvor v_3 , pa na v_6 I treću boji na preostale čvorove.

Graf je 3-hromatski.

41. Na kraju semestra studenti polažu odslušani predmeti. Za svaki ispit postoji samo jedan termin. Koji je najmanji broj termina potreban ako student polaže samo 1 ispit u jednom terminu?

Rešenje:

Neka je S skup studenata, a N broj svih ispita. Označimo sa N1 skup svih studenata koji polažu ispit x i N2 skup svih studenata koji polažu ispit y. Ako je $N_1 \bigcap N_2 = \varnothing$, onda se ispiti x I y polažu u različitim terminima. Konstruišimo graf sa N čvorova I ako u čvorovi x I y spojeni granama, onda je $N_1 \bigcap N_2 \neq \varnothing$,odnosno ne postoji student koji bi polagao oba predmeta. Bojenje ovog grafa , sa k boja odgovara rasporedu ispita sa k termina. Najmanji broj termina je hromatski broj grafa.

8.

STABLO

KRATAK SADRŽAJ:

CILJEVI UČENJA:

Kada ovo poglavlje proučite moći ćete da:

1. Definišete stablo,
2. znate razne osobine koje poseduje stablo,
3. znate šta su binarna stabla,
4. definišete teoremu koja govori o odnosu broja čvorova i grana,
5. opišete algoritam stabla pretrage.

8.1. POJAM STABLA

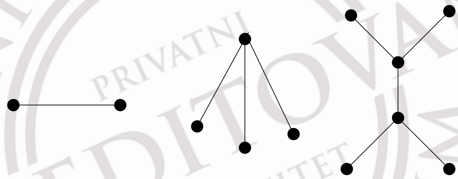
8.1.1. OSNOVNE DEFINICIJE

Stablo ili ***drvo*** (engl. tree) predstavlja najjednostavniju, ali i najvažniju klasu grafova. Od posebnog interesa su za elektrotehniku i računarstvo.

Porodična stabla ili organizaciona struktura firme su takođe vrsta stabla.

Postoji više ekvivalentnih definicija stabla. Navešćemo neke od njih.

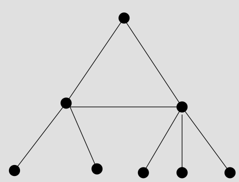
- Povezan graf sa n (n>1) čvorova i n grana naziva se ***stablo.***
- ***Stablo*** je povezan graf koji ne sadrži cikluse ili konture.



- ***Stablo*** je minimalno povezan graf.
- ***Stablo*** je maksimalni graf bez kontura.
- ***Stablo*** je graf kod koga su svaka dva čvora povezana jedinstvenim putem.

Primer:

Graf na sledećoj slici nije stablo jer sadrži konturu- ciklus.

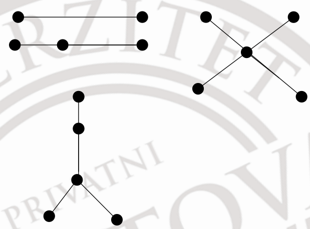


Primer:

Neka n gradova treba povezati telefonskom mrežom. Ovu mrežu možemo predstaviti grafom gde su gradovi čvorovi, a telefonske linije grane. Dužina telefonske linije je težina grane. Ovaj graf mora biti povezan i ne sme imati konture, znači u pitanju je stablo.

Osobine stabla:

- ***Stablo*** sadrži bar dva čvora stepena 1.
- Za svaki par čvorova *(u,v)* postoji ***tačno jedan put*** koji ih povezuje.
- Udaljavanjem bilo koje grane iz stabla dobija se nepovezan graf, odnosno dva nova stabla.
- Dodavanjem proizvoljne, nove grane, u stablo dobija se graf koji ima tačno jednu konturu.
- Svaki povezan neorijentisan multigraf bez petlji sadrži kao delimični graf u obliku stabla.
- ***Stablo*** je bipartitivni graf.



- ***Stablo*** je planarni graf.
- ***Šuma*** je graf kome su komponente stabla.

8.1.2 RAZAPINJUĆA STABLA

- ***Razapinjuće ili razapeto stablo*** (engl. spanning trees) *T* , grafa *G,* je svako stablo (podgraf grafa G) koje se dobija iz grafa *G* uklanjanjem određenog broja grana, a da ostane povezano i da sadrži sve čvorove iz G.

- Svaki povezan graf ima ***razapinjuće*** stablo.

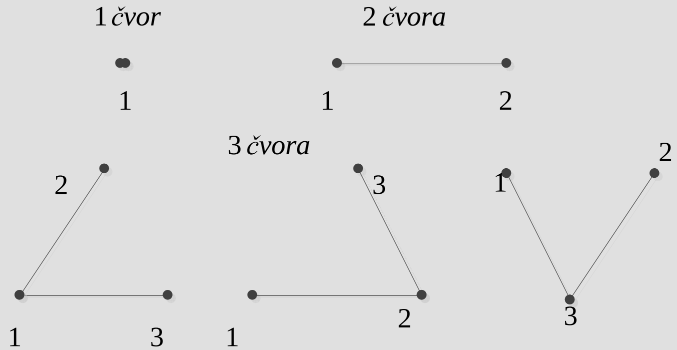
Broj razapinjućih stabala na fiksnom skupu čvorova n svodi se na određivanje broja razapinjućih stabala koji su podgrafovi potpunog grafa K_n .
Razapinjuća stabla se često nazivaju i ***označena stabla (***engl. labeled trees).

Broj razapinjućih stabala definisan sledećom teoremom.

Kelijeva teorema:
Broj razapinjućih stabala kompletnog grafa K_n , $n \in N$, jednak je n^{n-2} .

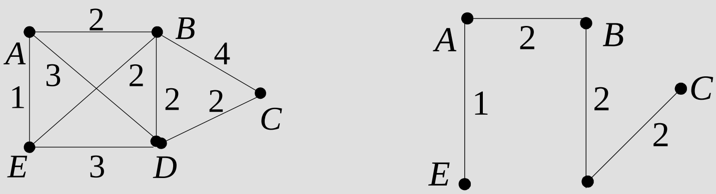
Napomena:
Keli je teoremu definisao 1889g. i dokazao ju je za vrednosti $n \leq 5$. Kasnije su mnogi matematičari uspeli da dokažu teoremu, tako da danas imamo više različitih dokaza.

Primer:
Odrediti razapinjuća stabla sa 1,2,3 čvora.



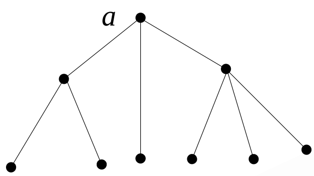
Konstruisanje razapinjućeg stabla u suštini je jednostavan postupak , ali obično se traže stabla koja ispunjavaju neki uslov, napr. min ili max. Za dobijanje razapinjućeg stabala postoje razni algoritmi, ali najpoznatiji su Primov i Kruskalov algoritam, o kojima će kasnije biti reči.

Primer:
Grafu sa slike, odgovara sledeće min razapinjuće stablo. Ukupan broj stabala koji bi se iz ovog grafa mogla napraviti je prema Kelijevoj teoremi 125.

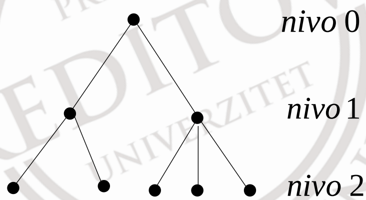


8.1.3. KORENA STABLA

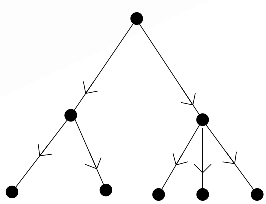
- Stablo u kome je jedan čvor posebno označen naziva se ***koreno stablo.***
- Čvor na vrhu stabla naziva se ***korenom*** (engl.root).



- ***Koreno stablo*** je uređena trojka $T = \{V_T E_T , v\}$, gde je *T* stablo, a v koren stabla.
- Svaki čvor korenog stabla povezan je jedinstvenim putem za koren stabla.
- Broj grana na putu od korena do nekog čvora predstavlja ***nivo*** tog čvora.
- Koren stabla ima nivo 0, a najveći nivo imaju od korena najudaljeniji čvorovi.



- Koreno stablo može da bude i ***orijentisano.*** Grane se orijentišu od čvorova manjih nivoa, ka čvorovima viših nivoa. Ulazni stepen korena je 0, dok je ulazni stepen ostalih čvorova u korenskom stablu jednak 1.



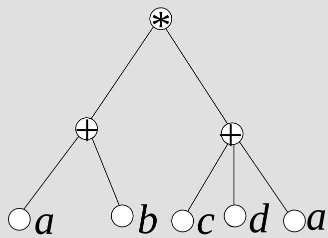
- Čvorovi do kojih vode grane koje polaze iz nekog čvora *x,* nazivaju se ***sinovi*** čvora *x*, a sam čvor *x* je njihov ***otac.*** Svi prethodni čvorovi u odnosu na *x* nazivaju se ***roditelji***, a naredni njihovi ***deca.***
- Čvor bez dece naziva se ***list.*** Listovi su završni čvorovi.

- ***Listovi*** su čvorovi stepena 1.
- Ostali čvorovi se nazivaju ***unutrašnjim čvorovima*.**
- ***Visina stabla*** je dužina najdužeg mogućeg puta od korena do lista.

Korena stabla mogu da se iskoriste za predstavljanje matematičkih formula.

Primer:

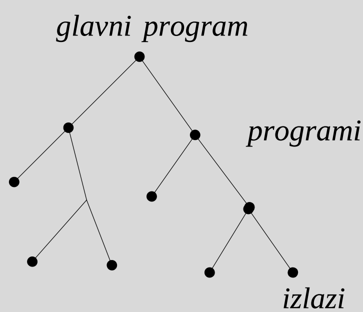
Napisati koreno stablo koje predstavlja formulu $(a+b)\cdot(c+d+a)$



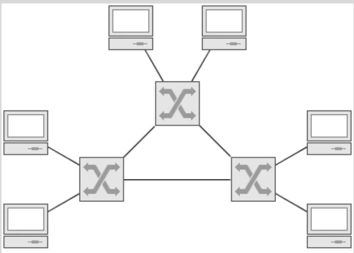
Koren stabla odgovara formuli, a listovi su ulazne promenljive. Pod stabla odgovaraju pod formulama.

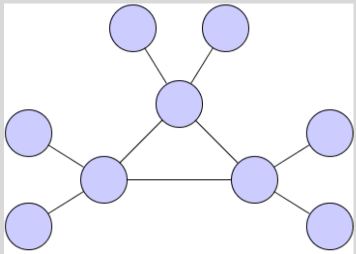
Primer:

Stabla se mogu iskoristiti da se predstave neki od složenih algoritama, gde je glavni program podeljen na pod programe, kao međusobno nezavisne celine. Kako svaki od pod programa ima svog samo jednog prethodnika , onda znamo koji su mu podaci i kako radi. Potprogrami su pod stabla. Na osnovu grafa možemo da vidimo odakle je sve pod program pozvan.

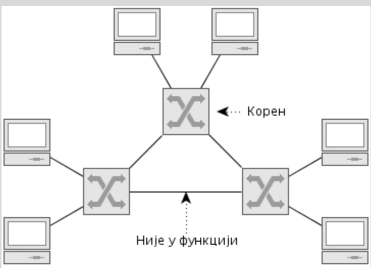


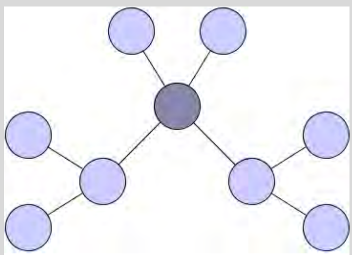
Primer:
Razapinjuća stabla, odnosno korena stabla, igraju važnu ulogu u lokalnim računarskim mrežama. Problem sa kojim se srećemo je kako poslati podatak-paket sa jednog računara na više odredišta. Kada se podaci šalju ka više odredišta kroz mrežu (prva slika), onda može da zbog petlji dođe do zagušenja rada mreže, a zatim i do njenog potpunog otkazivanja. Razlog tome je beskonačno mnogo paketa koji su namenjeni za isporuku svim članovima mreže. Druga slika prestavlja graf ove mreže.





Da bi se problem rešio koristi se teorija grafova kojom se zadati graf mreže transformiše u razganato stablo. Eliminacijom grana stabla koja u mrežama predstavljaju redundantne veze dobija se razgranato stablo. U takvoj mreži ne postoje zatvorene petlje i ne može da dođe do zagušenja u saobraćaju. Do svakog računara u mreži postoji jedinstvena putanja.





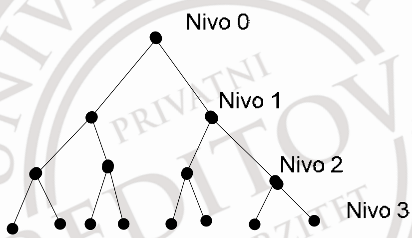
8.2. BINARNA STABLA

8.2.1. OPŠTI POJMOVI I DEFINICIJE

Binarna stabla predstavljaju jedan od važnijih pojmova računarskih nauka.

- Ako je najveći izlazni stepen, bilo kog čvora stabla, jednak *m*, tada se to stablo naziva *m*- ***arnim stablom*.** U posebnom slučaju, ako je *m=2*, dobijamo ***binarno stablo.***

- U binarnom stablu svaki otac ima najviše 2 sina i svako dete se posmatra kao ***levo*** ili ***desno*** dete.
- Ako su u binarnom stablu svi ***završni čvorovi istog nivoa***, binarno stablo se naziva ***potpuno.***



- Na nivou *k* postoji tačno 2^k čvorova.

- **Teorema:**
  Ako potpuno binarno stablo ima pored nivoa 0 još n nivoa, tada je ***broj čvorova*** *v* u stablu jednak

$$v = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

- Broj završnih čvorova (***listova***)

$$l = 2^n = \frac{v+1}{2}$$

- ***Visina stabla***

$$h = \log_2 (v+1) - 1$$

Primer:

Graf na prethodnoj slici ima 3 nivoa, znači ima

$v = 2^{3+1} - 1 = 15$ čvorova

$l = 2^3 = \frac{15+1}{2} = 8$ listova

$h = \log_2(15+1) - 1 = 3$

Binarno stablo je u informatici struktura namenjena čuvanju podataka. ***Čvor stabla*** je jedna memorijska ćelija.

Stabla generalno, a binarna stabla posebno, koriste se za definisanje, uređivanje i pretragu podataka. Pomoću njih se svaki podatak može lako pronaći, utvrditi šta nedostaje, dodati ili izbaciti nepotreban podatak.

Da bi se to moglo uraditi mora da postoji neko utvrđeno pravilo, koje se zove ključ, a može da bude numerički ili alfabetski. Dogovorno se uzima da su leva deca su manja ili jednaka od roditelja, a čvor sa najmanjom vrednošću je naj levlji. Desna deca su veća ili jednaka od roditelja, a čvor sa najvećom vrednošću je naj dešniji.

8.2.2.FORMIRANJE STABLA

Jedan od algoritama da se od zadatih podataka formira binarno stablo glasio bi:

ALGORITAM:

1. Definiše se ključ –pravilo
2. pretraga počinje od korena stabla
3. ukoliko je element veći od oca, idi na desno dete i ponovi ispitivanje
4. ukoliko je element manji od oca, idi na levo dete i ponovi ispitivanje.

Primer.

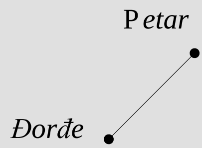
Formirati binarno stablo pretrage za sledeća imena. Zadati ključ je ređanje imena po abecedi.

Koren stabla je prvo ime u nizu.

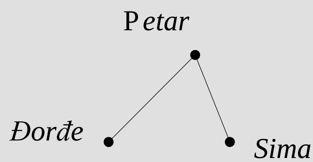
Petar, Đorđe, Sima, Helena, Stoja, Rista, Dunja, Martin, Vasa i Laza.

Napomena: abeceda- a,b,c,č,ć,d,dž,đ,e,f,g,h,i,j,k,l,lj,m,n,nj,o,p,r,s,š,t,u,v,z,ž

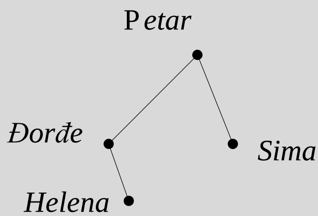
Krećemo od imena Petar koje ćemo postaviti za koren stabla.
Pošto se ime Đorđe nalazi u nizu posle njega, a abecedno je ispred imena Petar (Đ<P), on će postati njegovo levo dete.



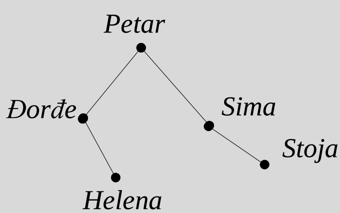
Sledeće ime je Sima, koje se nalazi iza imena Petar (S>P), pa će zato postati njegovo desno dete.



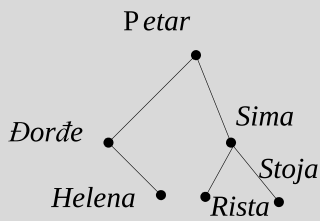
Sledeće ime je Helena. Abecedno je ispred imena Petar(H<P) i spuštamo se do levog deteta, Đorđe, a kako je abecedno iza imena Đorđe(H>Đ), to je njegovo desno dete.



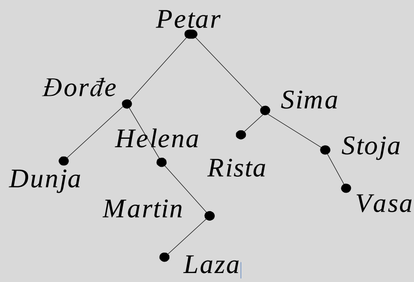
Ako bi ovako nastavili, sledeće ime je Stoja, ona je Petrovo desno dete (P<S), a iza Sime, pa je Simino desno dete (posmatramo drugo slovo t)



Sledeće ime Rista. Abecedno je iza imena Petar (R>P) i spuštamo se do desnog deteta Sime a kao je R abecedno ispred S (R<S), Rista postaje Simino levo dete.



Ako bi ovako nastavili do kraja dobili bismo stablo



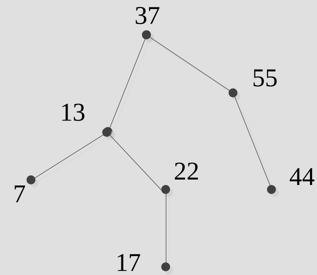
8.2.3. TRAŽENJE I UBACIVANJE ELEMENTA U STABLO

Pretraga i ubacivanje elementa u binarno stablo definisana je narednim algoritmom. Algoritam nalazi traženi element ili ga ubacuje u stablo ako ga ne nađe.

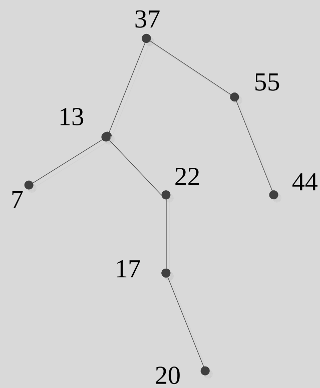
ALGORITAM:

1. Početi od korena stabla
2. uporedi traženi element sa korenom stabla
3. ukoliko je element manji od korena , idi na levo dete
4. ukoliko je element veći od korena , idi na desno dete
5. ponavljati korake 2 i 3 do trenutka
   a) našli smo element uspešno
   b) nismo našli element, dodajemo čvor i pridružujemo mu element

Primer.
Dat je graf. Proveri da li se element 20 nalazi u grafu i ako nije ubaci ga.



1. Uporedi element 20 sa korenom. Kako je 20<37 pređi na levo dete korena, a to je 13
2. Uporedi element 20 sa elementom 13. Kako je 20>13 pređi na njegovo desno dete , a to je 22
3. Uporedi element 20 sa elementom 22. Kako je 20<22 pređi na njegovo desno dete , a to je 17
4. Uporedi element 20 sa elementom 17. Kako je 20>17, a 17 nema desno dete, unesi 20 kao desno dete od 17.



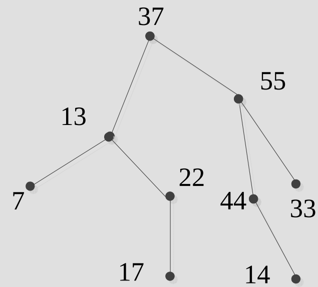
8.2.4. BRISANJE ELEMENTA IZ STABLA

ALGORITAM:

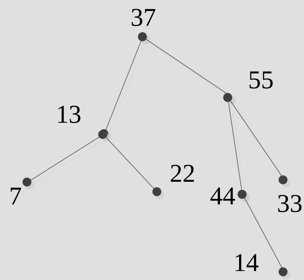
1. Ako čvor v nema dece ukloni ga
2. ako čvor v ima jedno dete, ukloni čvor i zameni ga detetom
3. ako čvor ima dvoje dece , prvo idi na desno dete, a zatim levo dete. Redom uzimaj levo dete svakog narednog čvora dok ne naiđeš do čvora koji nema levo dete. Polazni čvor v zameni tim čvorom i neka njegovo desno dete postane levo dete njegovog roditelja .

Primer.

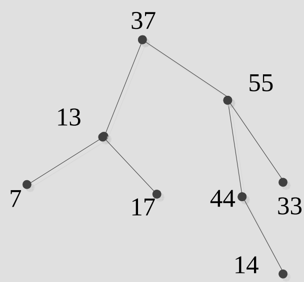
Dat je graf.



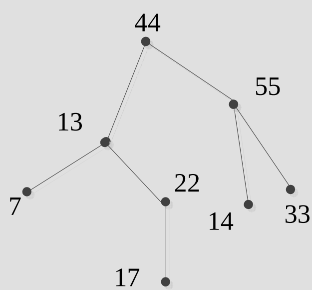
Ako se ukloni element 17 iz grafa, dobijamo sledeći graf



Ako se ukloni element 22 iz grafa, dobijamo sledeći graf



Da bi se uklonio element 37 iz grafa koji ima 2 deteta, prvo idemo na njegovo desno dete 55, a zatim na levo dete 44. Pošto čvor 44 nema levo dete , on postaje novi čvor, čvor 14 će postati levo dete čvora 55.

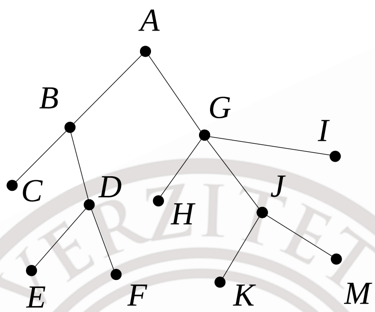


8.3. OBILASCI BINARNIH STABLA

Standardni načini obilaska čvorova binarnih stabala su:

KLD, LKD i LDK, gde L predstavlja levo pod stablo, D je desno pod stablo, K je koren i označava kojim redosledom obavljamo obilazak.

Ako je zadato stablo



6. ***KLD obilazak*** (engl. preorder) bi bio obilazak kod koga se prvo obilazi koren zatim levo podstablo i tek onda desno.

   A B C D E F G H J K M I

7. ***LKD obilazak*** (engl. inorder) bi bio obilazak kod koga se prvo obilazi levo pod stablo, zatim koren i tek onda desno.

C B E D F A K J M H G I

8. ***LDK obilazak*** (engl. postorder) bi bio obilazak kod koga se prvo obilazi levo pod stablo, zatim desno i koren i na kraju.

C E F D B K M J H I G A

PITANJA ZA PONAVLJANJE

1. Šta je stablo?
2. Šta je koreno stablo?
3. Šta je binarno stablo?
4. Šta je razapeto stablo?
5. Kako glasi teorema koja povezuje broj čvorova i grana u stablu?
6. Šta je list?
7. Kako glasi Kelijeva teorema?
8. Koji algoritmi za pretragu stabala postoje i kako glase?

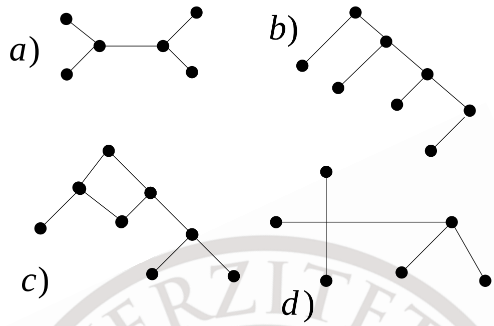
KLJUČNE REČI

Stablo
Drvo
Šuma
Koren
List
Binarno stablo

Koreno stablo
Razgranato stablo
Novo
Visina stabla
Roditelj
Dete

8.3. ZADACI

1. Koji od sledećih grafova predstavljaju stablo?

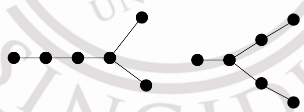


Rešenje:

Grafovi pod a,b,d su stabla. Graf pod c nije stablo jer sadrži ciklus.

2. Naći dva ne izomorfna stabla sa istim nizom stepena čvorova.

Rešenje:



Ovi grafovi imaju iste stepene čvorova 3,2,2,1,1, 1, ali nisu izomorfni jer ne ispunjanaju već spomenute kriterijume izomorfnosti.
Tako naprimer :
U prvom grafu čvorovi stepena 2 su susedni, a u drugom nisu
U prvom grafu čvor stepena 3 ima jednog suseda stepena 1, a u drugom grafu ima 2 suseda stepena 1.
Ovo su samo neki od kriterijuma koji ukazuju da grafovi nisu izomorfni, a ima h još.

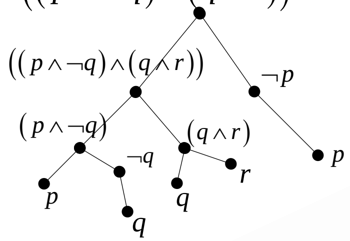
3. Iskaznu formulu predstaviti stablom.

$$\left(\left(p \wedge \neg q\right) \wedge \left(q \wedge r\right)\right) \Rightarrow \neg p,$$

Rešenje:

Svakom pojavljivanju iskaznog slova u formuli odgovara u stablu jedan čvor stepena 1. Ostalim čvorovima odgovaraju vrednosti koje se dobijaju primenom pod-formula.

$$\left(\left(p\wedge\neg q\right)\wedge\left(q\wedge r\right)\right)\Rightarrow\neg p$$

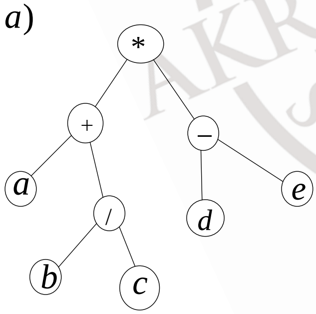


4. Datim matematičkim izrazima pridružiti stabla

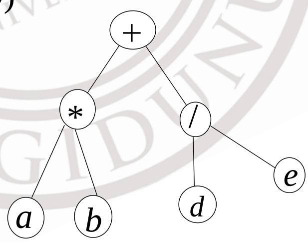
a) $\left(a+\dfrac{b}{c}\right)\left(d-e\right)$ b) $ab+\dfrac{c}{d}$

Rešenje:

$a)$



$b)$

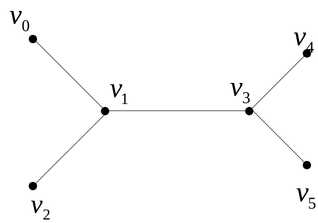


5. Koliko grana ima stablo sa 5 čvorova?

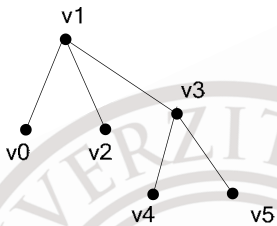
Rešenje:

Ako su *v* čvorovi, a *e* grane, dobijamo $e=v-1=5-1=4$.

6. Grafu sa slike pridružiti koreno stablo, koristeći čvor v_1 koren stabla.



Rešenje:



7. Koristeći dobijeno stablo odrediti:

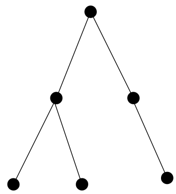
a) Potomke čvora *v3*,
b) pretke čvora *v5,*
c) roditelje čvora *v3,*
d) decu čvora *v1,*
e) listove,
f) nivo čvora *v3,*
g) visinu stabla.

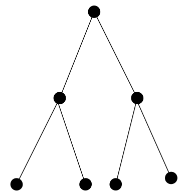
Rešenje:

a) *v4, v5,* b) *v3, v1,* c) *v1,* d) *v0,v2,v3,*
e) *v0,v2,v4,v5,* f) novo je 1 g) visina je 2

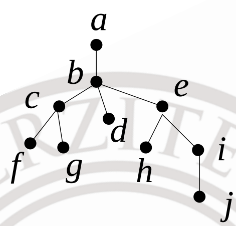
8. Nacrtati jedno i binarno stablo i jedno potpuno binarno stablo nivoa 2.

Rešenje:





9. Dato je stablo čiji je koren čvor a.



Odrediti visinu stabla, nivo čvora *e*, koji je čvor roditelj čvora *i*, koji su čvorovi deca čvora *b*?

Rešenje:

Visina stabla je 4, nivo čvora *e* je 2, roditelj čvora *i* je čvor *e*, dete čvora *b* je čvor *a*.

10. Ako potpuno binarno stablo ima 32 lista. Koliko ono ima čvorova i kolika je visina stabla?

Rešenje:

Na k- tom nivou ima 2^k čvor. Kako mi imamo 32 lista $2^k = 32 \Rightarrow k = 5$.
Naše stablo ima 5 novoa, broj čvorova je $v = 2^{k+1} - 1 = 2^6 - 1 = 63$.

11. Koliko čvorova ima potpuno binarno stablo sa 4 nivoa?

Rešenje:

$$v = 2^{4+1} - 1 = 31.$$

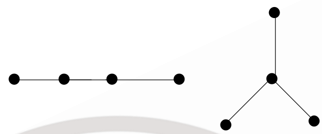
12. Koliko listova ima potpuno binarno stablo sa 7 čvorova?

Rešenje:

$$l = 2^k = \frac{v+1}{2} = \frac{7+1}{2} = 4\,.$$

13. Nacrtati sva stabla sa 4 i 6 čvorova.

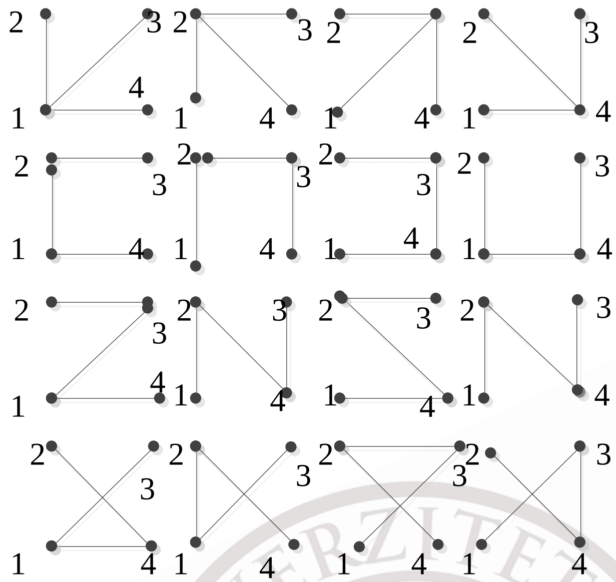
Rešenje:
Sva stabla sa 4 čvora mogu imati samo 2 oblika



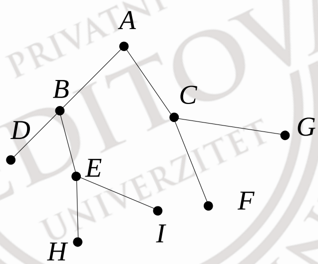
Sva stabla sa 6 čvorova izgledaju:

14. Nacrtati razapinjuća stabla sa 4 čvora.

Rešenje:
Po Kelijevoj teoremi ima ih $n^{n-2} = 4^2 = 16$.



15. Dato je stablo



Odrediti LKD, KDL I KLD obilaske stabla.

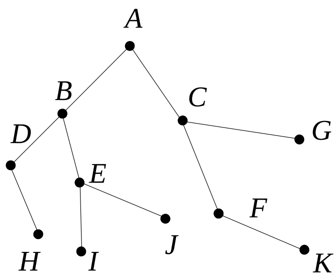
Rešenje:

LKD -inorder: D B H E I A F C G

KLD -preorder: A B D E H I C F G

LDK- postorder: D H I E B F G C A

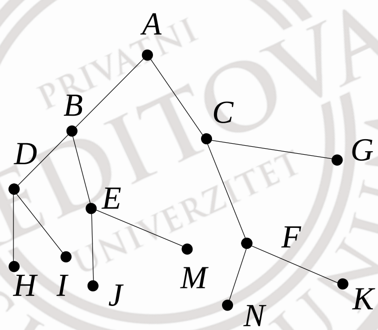
16. Dato je stablo



Odrediti LKD, KDL I KLD obilaske stabla.

Rešenje:
LKD -inorder: H D B I E J A F K C G
KLD -preorder: A B D H E I J C F K G
LDK -postorder: H D I J E B K F G C A

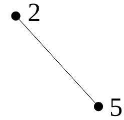
17. Dato je stablo



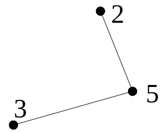
Odrediti LKD, KDL I KLD obilaske stabla.

18. Poređajmo sledeće brojeve koristeći algoritam za formiranje binarnog stabla 2,5,3,1,14,11,4.

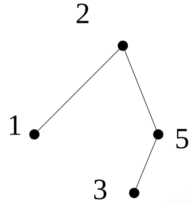
Rešenje:
Ako pođemo od broja 2 i postavićemo ga za koren stabla. Pošto je broj 5 veći od njega, on postaje njegovo desno dete.



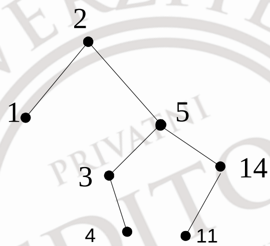
Sledeće broj je 3, veći je od 2, pa idemo do 5, a manji od 5, pa postaje njegovo levo dete.



Sledeći broj je 1. On je manji od 2 i postaje njegovo levo dete.

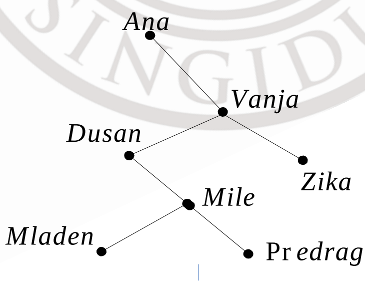


Ako bi ovako nastavili dobijamo graf



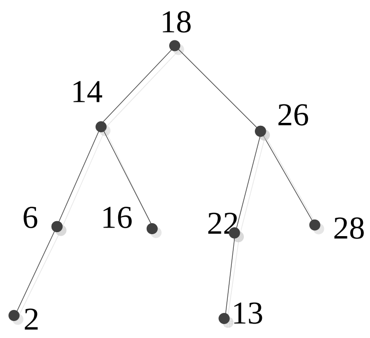
19. Konstruisati binarno stablo koje sadrži imena data poređana u abecednom poretku: Ana, Vanja, Dušan, Mile, Žika, Mladen, Predrag.

Rešenje:



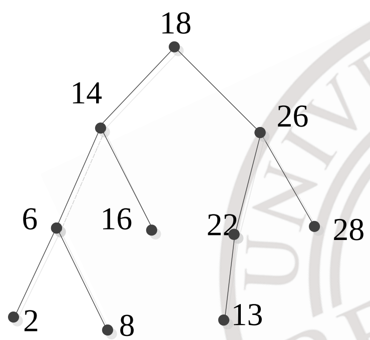
20. Dato je stablo, ubaci u njega

a) Čvor 8
b) Čvor 27

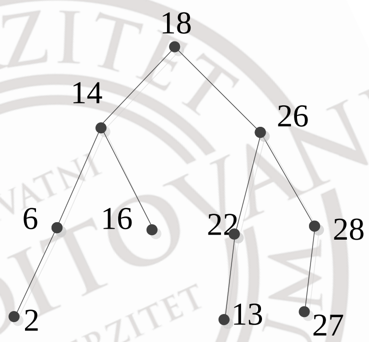


Rešenje:

a)

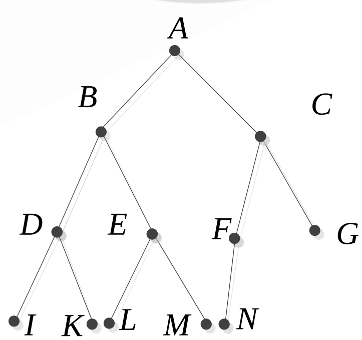


b)



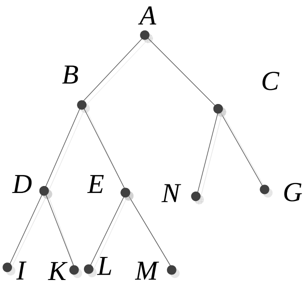
21. Dato je stablo, ukloniti iz njega

a) Čvor F
b) Čvor A
c) Čvor C
d) Čvor B

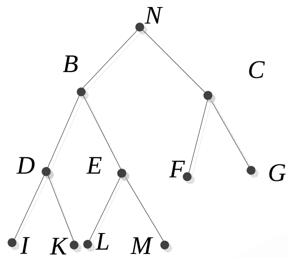


Rešenje:

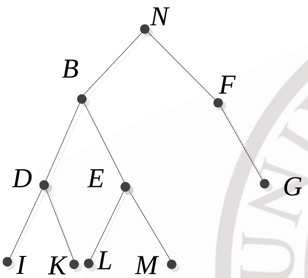
a)



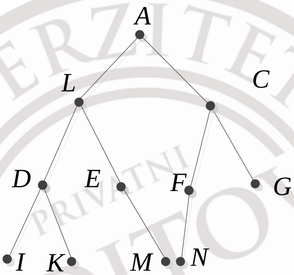
b)



c)



d)

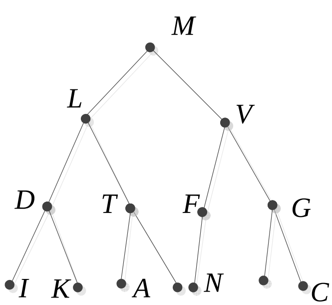


22. Dato je stablo, ukloniti iz njega

a) Čvor G
b) Čvor M

Dodaj u njega

c) Čvor E
d) Čvor P



9.

GRAFOVSKI ALGORITMI

KRATAK SADRŽAJ:

CILJEVI UČENJA:

Kada ovo poglavlje proučite moći ćete da:

1. Definišete principe grafovskih algoritma,
2. znate algoritam pretrage u dubinu,
3. znate algoritam pretrage u širinu,
4. vrste algoritama za pronalaženje najkraćeg puta,
5. znate Dijkastrin algoritam

9.1. OSNOVNI ALGORITMI PRETRAGE

Prilikom modeliranja složenijih odnosa između objekata često se koriste grafovi. Oni mogu da modeliraju različite odnose između objekata tehnike, arheologije do psihologije, uključujući i najrazličitije probleme svakodnevnog života. Najvažniji za primene su takozvani optimizacioni problemi, kao što su problemi minimalnog puta, maksimalne cene, ekonomičnost pravljenja mreže saobraćajnica, telekomunikacionih mreža, do običnog primera pravljenja rasporeda za studente jednog fakulteta.

S obzirom na složenost problema i veličinu grafova koji se pri tom pojavljuju, pojavila se potreba za razvojem algoritama pogodnih za njihovu implementaciju na računaru.

U grafovskim algoritmima zahteva se pretraga prvenstveno čvorova grafa, po nekom po nekom unapred definisanom pravilu. Pretraga grafova nije trivijalan posao pošto je izbor često višeznačan.

Postoje mnogo algoritama vezanih za različite probleme. Mi ćemo više informativno nabrojati neke od njih. Prvo ćemo videti kao izgledaju algoritmi pretrage grafova u dubinu i širinu, a zatim i jedan od algoritama najkraćeg puta.

Postoji više načina za obilazak stabla. Osnovno je da se svi čvorovi posete samo jednom. Na čvor se može naići više puta ali se samo prvi put poseti. Osnovni algoritmi za obilazak stabala zasnovani na susedstvu čvorova su ***algoritam pretrage u širinu*** i ***algoritam pretrage u dubinu*** .

9.1.1. ALGORITM - PRETRAGA U DUBINU

Kod ***algoritma pretrage na dubinu***–DFS (engl. *depth-first-search*)pokušavamo da napravimo stablo najveće dužine. Kreće se od početnog čvora do suseda. Zatim se poseti jedan ne posećen sused prethodnog. Kada put kojim se krene stigne do kraja, obrazujemo list, vraćamo se do roditelja tog lista i pokušavamo da napravimo novi put. Na roditelje se vraćamo samo kada isprobamo sve moguće puteve koji kreću od njegovog deteta.

Kod algoritma pretrage na dubinu svi čvorovi moraju biti označeni i sve njegove grane tokom izvršavanja algoritma prelaze se bar jedanput.

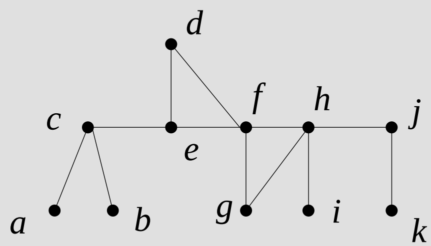
ALGORITAM:

1. Algoritam počinje od proizvoljnog čvora *u* grafa $G(V,E)$ koji proglašavamo korenom stabla.
2. Zatim biramo čvor *v* koji je njemu susedan i formiramo novu granu (u,v). Sa $V_1 \subseteq V$ obeležimo skup čvorova koje smo prešli, a sa $E_1 \subseteq E$ skup novih grana koje prodajemo stablu.

   Na tom putu treba čvorove redom obeležavati da bi ih prelazili samo jedanput.
3. Proverava se da li je čvor *w* susedan čvoru *v* i da li je grana *(v,w)* već

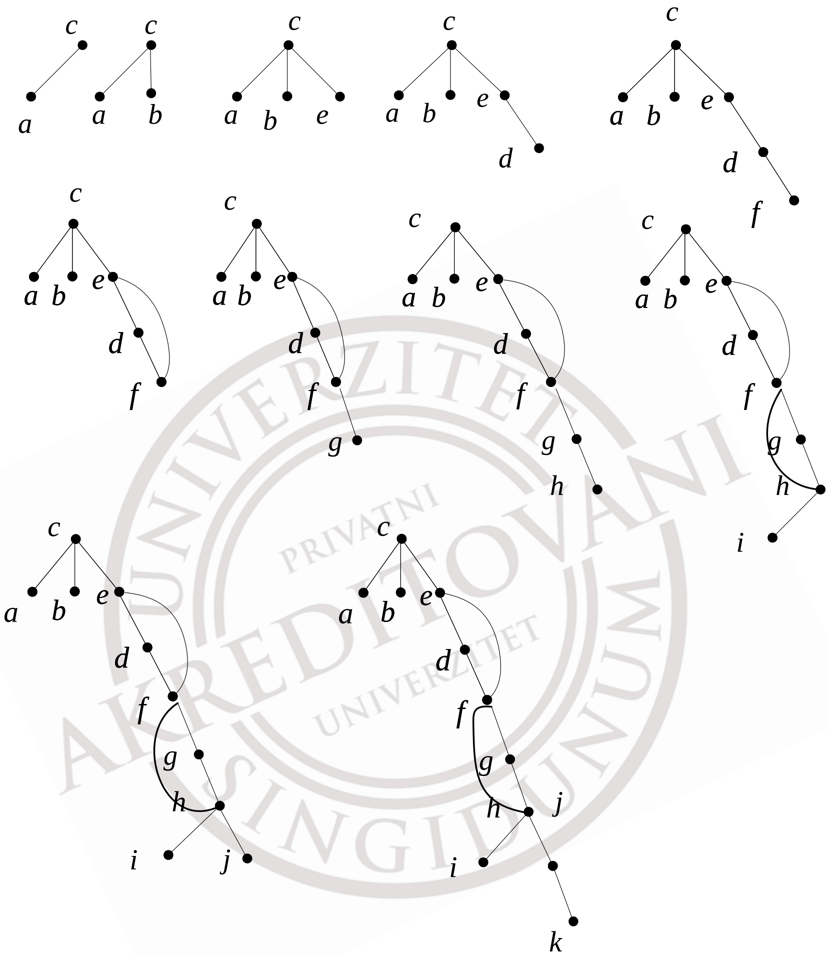
pridodata. Ako nije, pridodajemo je, odnosno čvor $w \in V_1$, a grana $(v,w) \in E_1$. Ako grana *(v,w)* već postoji, to je povratna grana, mi ostajemo na čvoru *v* i biramo mu novi susedan čvor ako je to moguće. Bilo koja grana grafa *G* mora da bude ili grana stabla ili povratna grana.
Ovi algoritmi su jednostavni i prilagodljivi rekurzivnim algoritmima.

Primer:
Dat je graf na slici. Formirati stablo primenom algoritma pretrage da dubinu.
Bilo koji od čvorova možemo izabrati za koren stabla.



Izabrali smo da je koren stabla čvor *c*.
Čvor c ima 3 susedna čvora. Od našeg izbora u ovom koraku zavisiće izgled stabla. Znači možemo dobiti stabla različitog izgleda.
Ako izaberemo čvor *a* i granu *(c,a)* dodajemo skupu grana *E1*. Pošto je čvor *a* list, vraćamo se čvor *c* i tražimo njemu novi susedan čvor.
To može da bude čvor *b* i granu *(c, b)* dodajemo skupu *E1*. Pošto je i čvor *b* list, vraćamo se u čvor *c* i tražimo novi njemu susedan čvor.
To je čvor *e.* Čvor *e* ima 2 susedna čvora i dva moguća izbora za izgled grafa. Ako izaberemo čvor *d,* granu *(e, d)* dodajemo skupu *E1* i nastavljamo ka čvoru f. Iz čvora f u čvor e možemo samo povratnom granom, jer je čvor *e* već upotrebljen i dalje ka čvoru g. Dodajemo granu *(f, g),* zatim idemo ka čvoru h i dodajemo granu

(g,h). Iz h možemo povratnom granom u *f* , jer je čvor f već upotrebljen,vraćamo se u čvor h i i granom *(h,i)* do idemo do *i*. Kako je čvor *i* list vraćamo se u čvor *h*, njemu dodajemo granu *(h,j)* do susednog čvora *j* i konačno granu *(j,k)* do lista *k*.



9.1.2. ALGORITAM - PRETRAGA U ŠIRINU

Kod a***lgoritam pretrage u širinu*** –BFS (engl. *breadth-first-search*) cilj je da dobijemo stablo najveće širine.

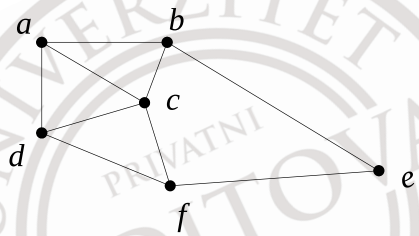
Počinje se od proizvoljnog čvora *u*, povezanog grafa *G* koji proglašavamo korenom stabla. Ideja je da se sistematično ispitaju grane grafa da bi se otkrio svaki čvor koji je susedan sa u. Zatim biramo sve čvorove koji su njemu susedni i formiramo nove grane. Prvi dobijeni čvorovi su nivoa 1. Sada uzimamo svaki od čvorova nivoa 1 i za svaki čvor koji je njemu susedan, a ranije nije uzet dodajemo novu granu. Čvorovi koje smo dodali u ovom koraku imaju nivo 2. Postupak ponavljamo sve dok stablu ne dodelimo sve čvorove grafa G.

Dobio je naziv po tome što se granica otkrivenih i neotkrivenih čvorova širi kroz graf. Algoritam prvo otkriva čvorove na udaljenosti k, pa tek onda na udaljenosti k+1 od početnog v.

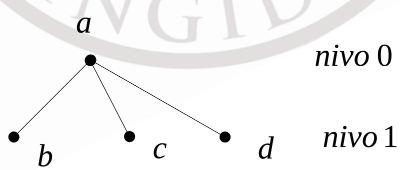
ALGORITAM:

1. Algoritam počinje od proizvoljnog čvora *a* , grafa $G(V,E)$ koji proglašavamo korenom stabla.
2. Neka *L(v)* označava nivo na kome je čvor dodat, V_1 predstavlja skup čvorova novog razapetog stabla, E_1 skup grana novog razapetog stabla.

   Tada je $L(a)=0$ i $a \in V_1$.

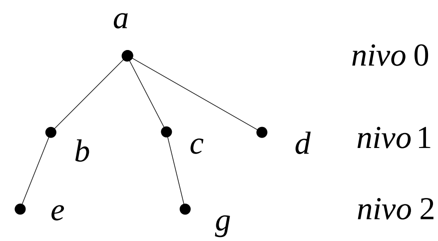


3. Kako su čvorovi *b, c, d* susedni čvoru *a,* njihov novo postaje 1 i imamo da je $L(b)=L(c)=L(d)=1$, čvorovi $b,c,d \in V_1$, a grane $(a,b),(a,c),(a,d) \in E_1$.



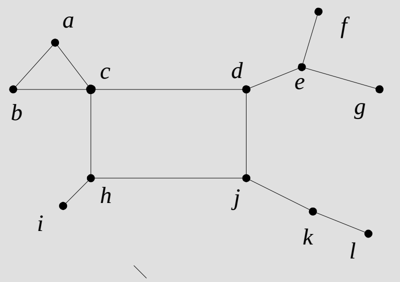
4. Razmotrimo sada sve čvorove novoa 1.

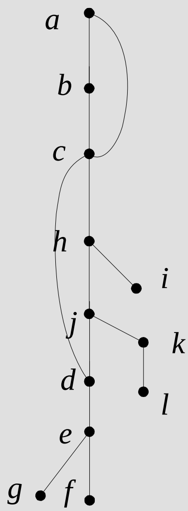
   Počinjemo od čvora *b* i posmatramo njemu susedne koji do sada nisu iskorišćeni. To je samo čvor *e*. Sada je $e \in V_1, L(e)=2, (b,e) \in E_1$. Pošto je čvor *f* susedan čvoru *c*, a nije iskorišćen imamo i da je $f \in V_1, L(f)=2, (c,f) \in E_1$. Razapeto stablo sada izgleda:

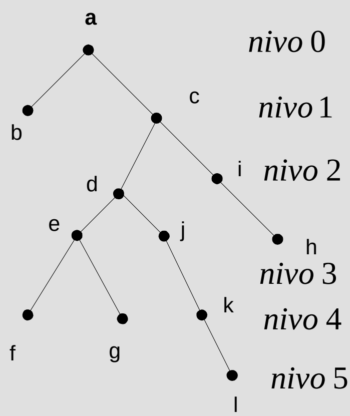


Primer:

Datom grafu napraviti razapeta stabla primenom algoritma pretrage u dubinu u širinu







9.2. OPTIMIZACIONI ALGORITMI

Za rešavanje optimizacionih problema koriste se težinska stabla. Optimizacioni zadatak se svodi na zahtev da se nađe razapinjuće stablo čija je težina najmanja. U praksi ovakvih problema ima mnogo. Postoje mnogi algoritmi za njihovo rešavanje, kao što su: Kruskalov, Primov, Dijkastrin i mnogi drugi.

9.2.1. DIJKSTRIN ALGORITAM

Dijkstrin algoritam je jedan od najpoznatijih algoritama za nalaženje najkraćeg puta u grafu. Dobio ime po holandskom informatičaru **Edsheru Dejkstri (1930-2002)**. Koristi se i za orijentisane i neorijentisane grafove sa ne negativnim težinama.

Na primer, ako čvorove predstavimo kao gradove, a vrednosti grana kao rastojanja između gradova koji su direktno povezani, Dijkstrin algoritam nalazi najkraći put između dva grada, najbrži put, najjeftiniji put i slično.

Neka je dat težinski usmereni graf *G(V,E)*. Svaka grana iz *E*, predstavljena je parom čvorova (*u*,*v*) i određenom težinom *w*. Težina svake grane može se predstaviti kao rastojanje između dva čvora koje ona povezuje.

Dužina puta, ***d*** , između dva zadata čvora je suma težina svih grana na putu od početnog do krajnjeg čvora. Za dati par čvorova *s* i *t* iz *V*, gde je s početni , a t krajnji čvor puta, Dijkstrin algoritam nalazi vrednost najkraćeg puta ***d***.

Dijkstrin algoritam je ***pohlepni algoritam*** koji se zasniva na pamćenju vrednosti ***d*** trenutnog najkraćeg puta od polaznog čvora *s* do nekog čvora *v*. Za početni čvor ta vrednost najpre iznosi 0, tj. d(*s*)=0, a za ostale čvorove se uzima vrednost beskonačno. Pri prestanku rada algoritma, ***d*** dobija vrednost najkraćeg puta iz *s* u t, ili vrednost beskonačno, ukoliko takav put ne postoji.

Osnovna operacija Dijkstrinog algoritma je oslobađanje grana. Ukoliko postoji grana iz *u* ka *v*, tada trenutno najkraći put iz *s* u v*, odnosno d*(*v*) može dobiti kao vrednost sume *d*(u) i težine grane (*u*, *v*). Dakle, njegova dužina će iznositi *d*(*u*)+*w*(*u*, *v*), ukoliko je ova vrednost manja od *d*(*v*). Proces oslobađanja grana se nastavlja sve dok vrednost *d* ne odredi najkraći put iz *s* u *t*.

Tokom izvršavanja algoritma izdvajaju se dva skupa čvorova V i $\bar{V}$. U skupu $\bar{V}$ su oni čvorovi za koje je poznata vrednost *d*(*v*), a u skupu V svi ostali. Na početku je skup $\bar{V}$ prazan, a u svakoj iteraciji jedan čvor se premešta iz V u $\bar{V}$ i postaje **'*stalan*'** čvor. To je onaj čvor koji ima najmanju vrednost. Na kraju se oslobađaju sve grane (*u*,*v*) gore opisanim postupkom.

Obrnutim obilaskom čvorova dobija se najkraći put.

ALGORITAM:

1 korak

$d(s)=0, p(v_i)=0$	definiše se početni čvor (d je dužina, a p oznaka za prethodni čvor)
for $i=1$ to n	
$d(v_i)=\infty, p(v_i)=0$	početno stanje za ostale čvorove
$\bar{V}=\{s\}$	polazni čvor je stalan čvor
$t \notin \bar{V}$	

2 korak

Za svaki $v_i \notin \overline{V}$

$d(u) = \min d(v_i)$ bira se čvor sa minimalnom udaljenošću

$\overline{V} = \overline{V} + \{u\}$ novi čvor postaje stalan

3 korak

Ispitujemo udaljenost ostalih čvorova koji nisu u $\overline{V}$

If $d(v_i) > d(u) + w(u, v_i)$ then

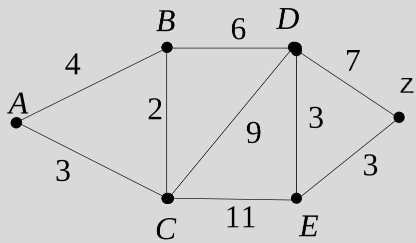
$d(v_i) = d(u) + w(u, v_i)$ i $p(v_i) = u$

end

Primer:

Dat je graf na slici, sa zadatim težinama između dva čvora.

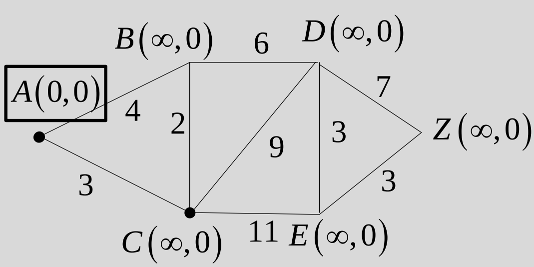
Naći minimalni put od čvora A do čvora Z.



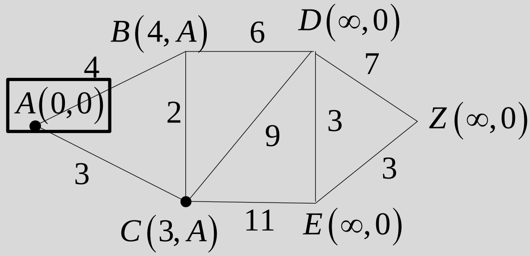
Krenućemo od čvora A ka ostalim čvorovima. Čvor *A* koji je polazni ima koordinate (0,0), postaje ***stalan čvor***, a simbolički ga obeležimo sa $A(0,0)$

Za ostale čvorove prva komponenta uređenog para označava dužinu najkraćeg puta do tog čvora u tom trenutku, a druga komponenta označava prethodni čvor na najkraćem putu. Dok se put ne pronađe čvorovima se pridružuje par $(\infty, 0)$.

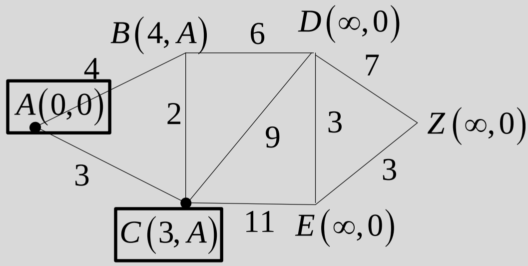
Ideja algoritma je da postepeno svi čvorovi postanu stalni.



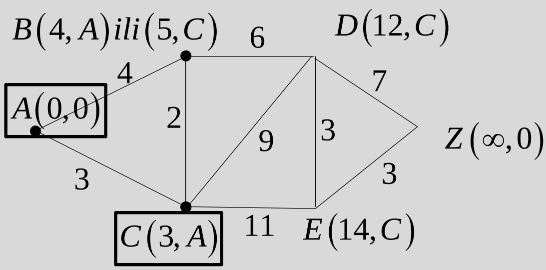
Susedni čvorovi čvoru A su *B* i *C,* i dodeljujemo im vrednosti, čvoru *B (4,A)* ,a čvoru C *(3,A).*



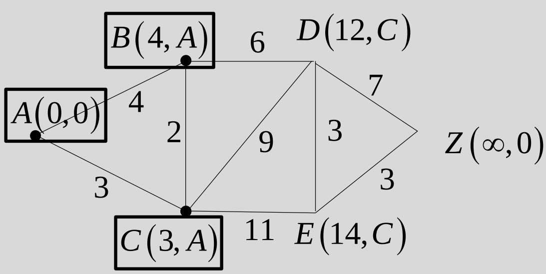
Uzimamo manju od dodeljenih vrednosti, to je *3* i čvor *C(3,A)* i postaje stalan čvor.



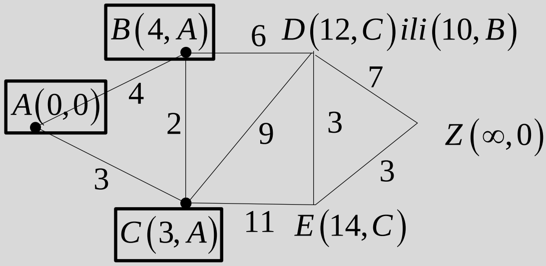
Vraćajući se na prethodni korak posmatramo privremene čvorove *B, D, E* koji su susedni sa *C.* U svakom od slučajeva dodajemo razdaljinu *AC* razdaljini do posmatranih čvorova. Za čvor *B* imamo 3+2=5, za D imamo 3+9=12, za *E* imamo 3+11=14.



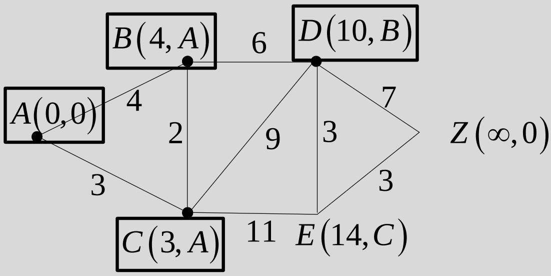
Najmanja od svih razdaljina je ona koja je već dodeljena čvoru B, *B(4,A),* i on postaje novi stalni čvor.



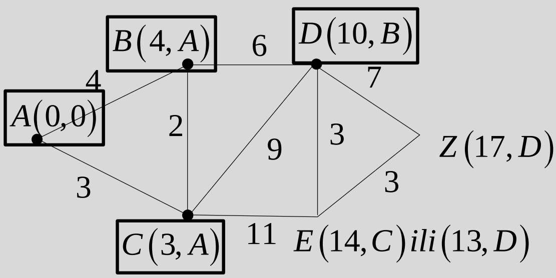
Iz čvora *B* možemo samo u čvor D i njegova razdaljina bi bila 4+6=10.



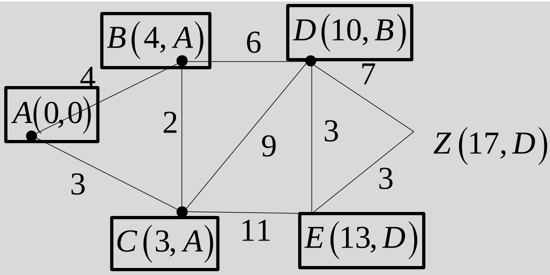
To rastojanje je manje od već pridružene vrednosti čvora D*(12,C),*kao i od udaljenosti 14 za čvor E*,* pa čvor D postaje stalni sa koordinatama *D(10,B).*



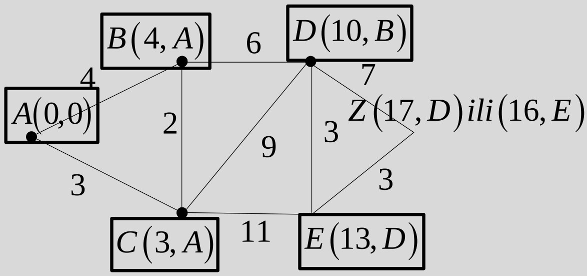
Iz čvora *D* možemo u čvorove E i Z. Za čvor *E* imamo 10+3=13, za Z imamo 10+7=17.



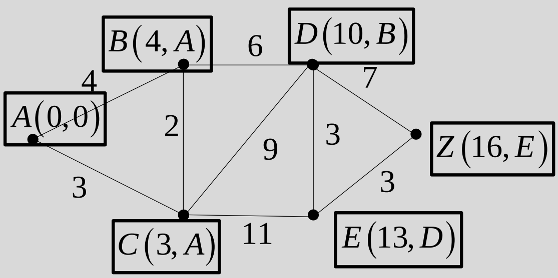
Pošto nova razdaljina ka E manja od one koja je već dodeljena ovom čvoru, a bila je *E(14,C),* menjamo vrednost čvora *E* u *E(13,D)* i on postaje novi stalni čvor.



Iz čvora *E* možemo u čvor *Z* dužinom puta 13+3=16.



Pošto je ta vrednost manja od već dodeljene vrednosti čvoru Z, on postaje stalni čvor sa koordinatama *Z(16,E).*



.

Najkraći put je *ABDEZ* dužine *16 (čvorove na putanji čitamo od kraja).*

Napomena: Ako dva ili više čvorova imaju istu dužinu, bira se bilo koji od tih čvorova po izboru i proces se nastavlja.

9.3. ALGORITMI ZA MINIMIZACIJU RAZAPINJUĆIH STABALA

Već smo naglasili da grafovi, a posebno stabla imaju veliku primenu u svakodnevnom životu.
Pretpostavimo da imamo problem:
n gradova treba povezati putevima tako da uvek postoji put između dva grada. Ako znamo cenu puta između svaka dva grada, kako projektovati mrežu puteva da ukupni troškovi izgradnje budu minimalni .

Ovaj problem može se svesti na primenu grafova, odnosno traženja “najpovoljnijeg” načina za povezivanje svih vrhova grafa (gradova), tj. na problem traženja najmanjeg ili minimalnog razapinjućeg stabla.

Minimalno razapinjuće stabloT je ono stablo grafa *G(V,E),* takvo da je težina stabla T(V, V_T)manja ili jednaka težini bilo kog drugog razapinjućeg stabla grafa G.

Najmanje razapinjuće stablo ne mora biti jedinstveno.

Postoji više algoritama za određivanje minimalnih razapinjućih stabala, ali su najpoznatiji Primov i Kruskalov algoritam.

9.3.1. PRIMOV ALGORITAM

Ovim algoritmom pokušavamo da od zadatog težinskog grafa napravimo minimalno razapinjuće stablo. Ideja je da se odredi poskup grana koje formiraju stablo uključujući sve čvorove polaznog grafa tako da težina stabla bude minimalna.

U početku je stablo prazno pa ga počinjemo graditi dodavanjem proizvoljnog vrha iz skupa čvorova početnog grafa. Postepeno dodajemo grane u stablo, povezujući jedan čvor koji se već nalazi u stablu i jedan koji se u njemu ne nalazi, pazeći pri tome da je težina te ivice minimalna. Postupak se nastavlja dok ne povežemo sve čvorove zadatog stabla.
Na kraju rada algoritma dobijeno stablo predstavlja minimalno razapinjuće stablo. Nosi naziv svoga tvorca inženjera i matematičara *Roberta Prima* (1921)

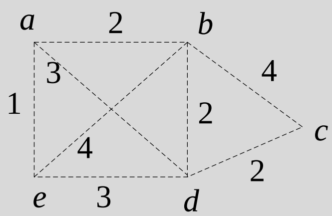
ALGORITAM:

Algoritam se može prikazati sledećim opisom:

1. Izabere se proizvoljni čvor iz G i stavi se u stablo T.
2. Izabere se grana najmanje težine iz skupa grana koje sadrže prethodni čvor i obrazuje se stablo T_1

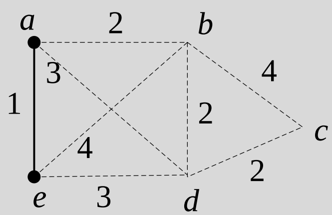
3. Dok je broj čvorova stabla < broja čvorova grafa, ponavljati postupak
4. Izaberi čvor koji ne pripada stablu, a susedan je nekom čvoru iz stabla, a pri tome je težina ivice koja ih spaja minimalna.
5. Stavi taj čvor zajedno s njemu pripadajućim granom u stablo.
6. Postupak ponavljati sve dok svaki čvor grafa G ne bude u stablu.

Primer:
Od datog težinskog grafa sa slike, formirati minimalno razapinjuće stablo koristeći Primov algoritam.

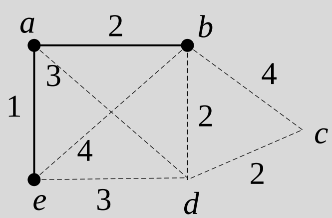


Biramo jedan čvor proizvoljno za početni čvor, koren stabla.
Neka je to čvor a.

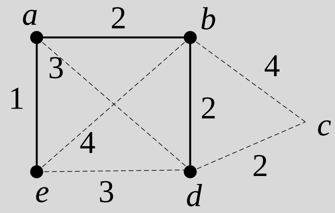
Iz čvora a možemo da stignemo u čvor b sa udaljenošću 2, zatim u čvor d sa udaljenošću 3 i u čvor e sa udaljenošću 1. Kako je čvor e na najmanjoj udaljenosti od a, pridodaćemo ga stablu kao i njegovu granu (a,e).



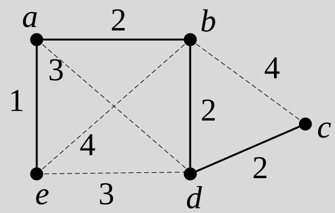
Sada posmatramo oba čvora novog stabla a i e. Njihove udaljenosti do čvorova grafa su: iz *a* do *b* dužina 2, iz *a* u *d* dužina 3, iz čvora *e* u *b* dužina 4, iz *e* u *d* dužina 3. Najmanja dužina je 2, iz *a* u *b*, tako da čvor *b* i granu (a,b) pridodajemo stablu.



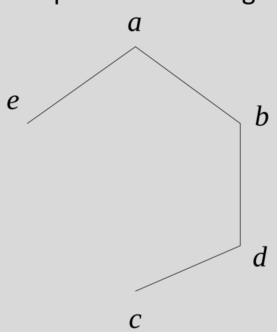
Proces se nastavlja. Sada posmatramo čvorove *b* i *e*. Najmanja udaljenost je iz *b* u *d* dužine 2, tako da stablu pridodajemo čvor *d* i granu (b,d).



I konačno, iz b u c možemo granom dužine 4, a iz d u c granom dužine 2, pa dodajemo čvor c i kraću granu (d,c).



Razapeto stablo bi izgledalo



9.3.2. KRUSKALOV ALGORITAM

Kruskalov algoritam je još jedan od algoritama koji određuje razapinjuće stablo minimalne dužine.

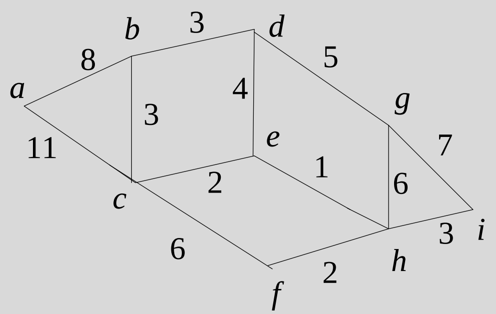
Algoritam:

1. Početi sa grafom koga sačinjavaju samo čvorovi grafa *G*, tj. iz originalnog grafa ukloniti sve grane.
2. Sortirati sve grane *L* grafa *G* u ne opadajući niz prema njihovim dužinama.
3. Dodavati grane inicijalnom grafu po sortiranom redosledu vodeći računa o tome da se ne formira kontura.
4. Ponavljati korak 3 sve dok broj dodatih grana ne bude *n* - 1.

Drugi način

1. Uočiti bilo koju konturu grafa.
2. Iz uočene konture isključiti granu sa najvećom dužinom.
3. Ponavljati korake 1 i 2 sve dok ne ostane *n* - 1 grana, tj. dok ne bude više kontura.

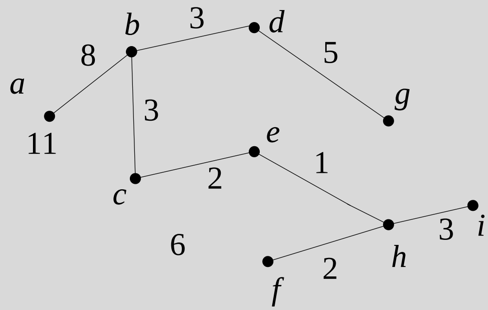
Primer:
Od datog težinskog grafa sa slike, formirati minimalno razapinjuće stablo koristeći Kruskalov algoritam.



Rešenje: I način:
Popisaćemo sve grane grafa i njihove dužine i sortirati ih u ne opadajući niz:

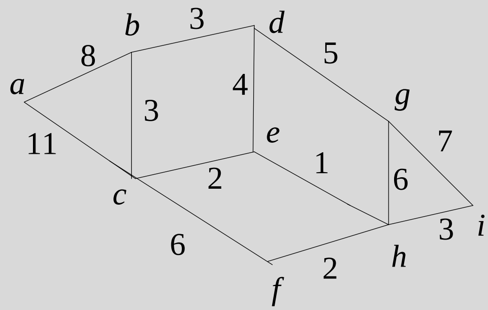
grane	dužina	sortirana grane	dužina
(a,b)	8	(e,h)	1
(a,c)	11	(c,e)	2
(b,c)	3	(f,h)	2
(b,d)	3	(b,c)	3
(c,e)	2	(b,d)	3
(c,f)	6	(h,i)	3
(d,g)	5	(d,e)	4
(e,h)	1	(d,g)	5
(f,h)	2	(g,h)	6
(h,i)	3	(c,f)	6
(g,i)	7	(g,i)	7
(g,h)	6	(a,b)	8
(d,e)	4	(a,c)	11

Ne koristiti grane koje bi stvorile konture. To su grane (a,c), (d,e), (g,h), (g,i) i (c,f).



Primenjujući Kraskalov algoritam, dobija se rešenje prikazano na slici.

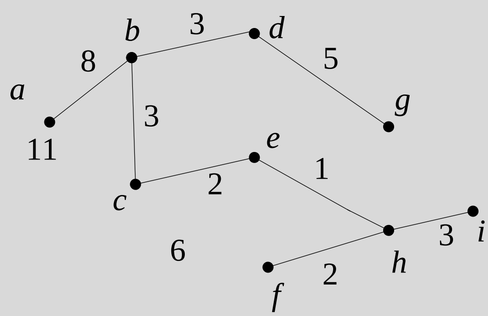
Rešenje 2 način:



Počećemo od zadatog grafa i uočiti npr. konturu (a, b, c, a). Od grana koje sačinjavaju ovu konturu biramo onu sa najvećom dužinom i brišemo je. To je grana (a, c). Sve uočene konture i izbrisane grane su date u sledećoj tabeli:

Kontura	Grana koja se briše
(1, 2, 3, 1)	(1, 3)
(2, 3, 5, 4, 2)	(4, 5)
(2, 3, 5, 8, 7, 4, 2)	(7, 8)
(2, 3, 5, 8, 9, 7, 4, 2)	(7, 9)
(3, 5, 8, 6, 3)	(3, 6)

Nakon ovog postupka dobili smo graf



PITANJA ZA PONAVLJANJE

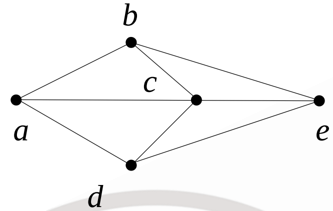
1. Za šta služe grafovski algoritmi?
2. Za koje grafove koristimo algoritme pretrage u širinu i dubinu?
3. Koji je osnovni princip algoritma pretrage na širinu?
4. Koji je osnovni princip algoritma pretrage na dubinu?
5. Koji je osnovni princip Dijkastrinog algoritma ?

KLJUČNE REČI

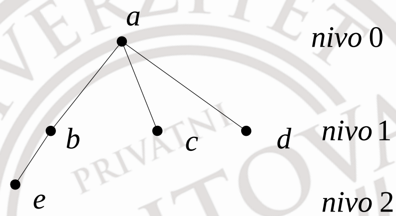
Razapeta stabla
Pretraga
Dubina
Širina
Povratna grana
Pohlepni algoritam
Stalni čvor

9.3. ZADACI

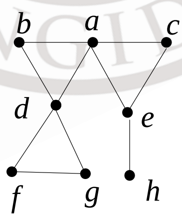
1. Uočimo graf na slici. Napraviti njegovo razapinjuće stablo koristeći algoritam pretrage u širinu uzimajući čvor a za polazni.



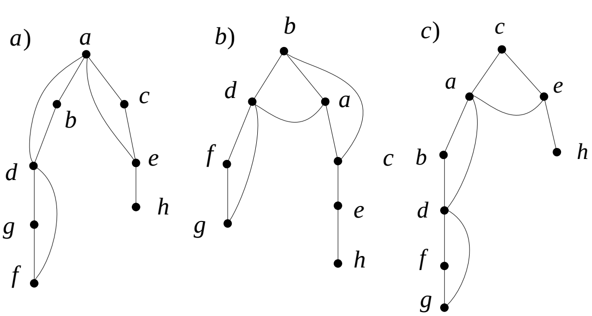
Rešenje:



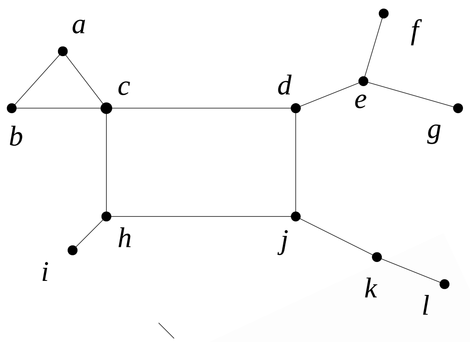
2. Grafu sa slike odredi jedno stablo koristeći algoritam pretrage u dubinu, uzimajući da je koren stabla:
   a) čvor a,
   b) čvor b,
   c) čvor c.



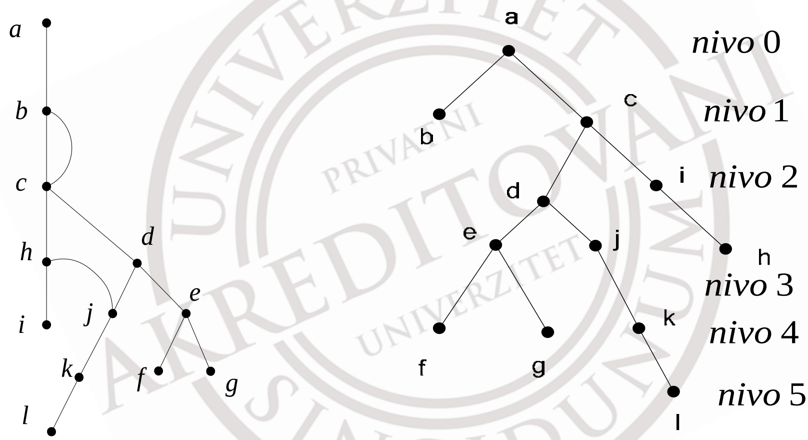
Rešenje:



3. Za zadati graf napraviti razapeto stablo primenom pretrage na dubinu i širinu.

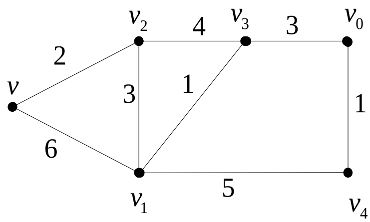


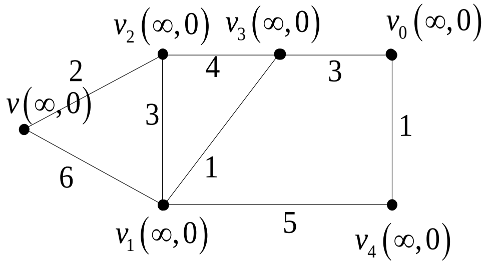
Rešenje:

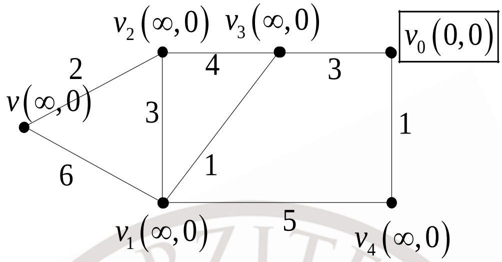


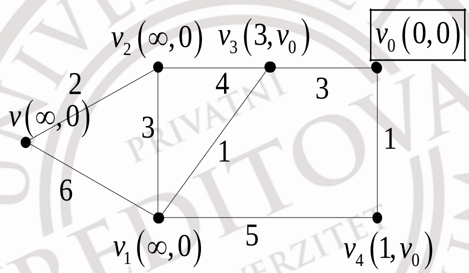
4. Dat je graf na slici, sa težinama između dva čvora. Naći minimalni put od čvora v_0 do čvora v koristeći Dijkastrin algoritam.

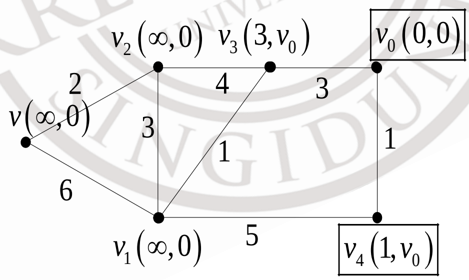
Rešenje:

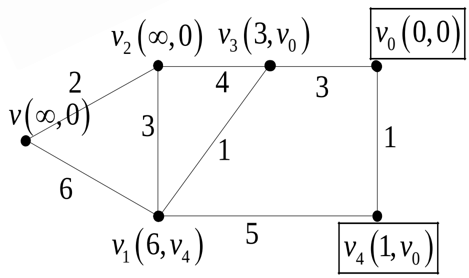


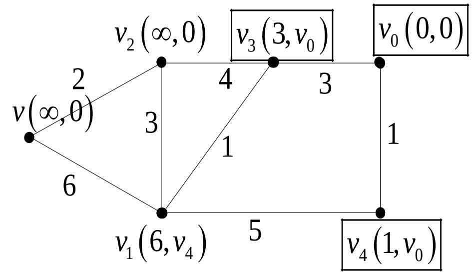

$v_2(\infty,0)$
$v_3(\infty,0)$
$v_0(\infty,0)$
$v(\infty,0)$
$v_1(\infty,0)$
$v_4(\infty,0)$
2
4
3
3
1
1
6
5


$v_2(\infty,0)$
$v_3(\infty,0)$
$\boxed{v_0(0,0)}$
$v(\infty,0)$
$v_1(\infty,0)$
$v_4(\infty,0)$
2
4
3
3
1
1
6
5

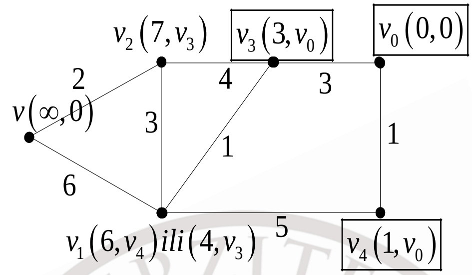

$v_2(\infty,0)$
$v_3(3,v_0)$
$\boxed{v_0(0,0)}$
$v(\infty,0)$
$v_1(\infty,0)$
$v_4(1,v_0)$
2
4
3
3
1
1
6
5


$v_2(\infty,0)$
$v_3(3,v_0)$
$\boxed{v_0(0,0)}$
$v(\infty,0)$
$v_1(\infty,0)$
$\boxed{v_4(1,v_0)}$
2
4
3
3
1
1
6
5

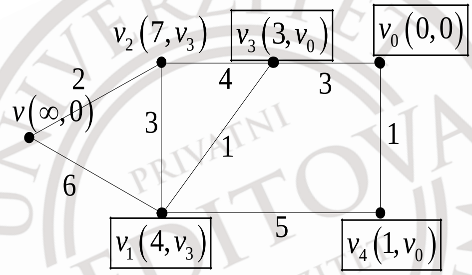

$v_2(\infty,0)$
$v_3(3,v_0)$
$\boxed{v_0(0,0)}$
$v(\infty,0)$
$v_1(6,v_4)$
$\boxed{v_4(1,v_0)}$
2
4
3
3
1
1
6
5



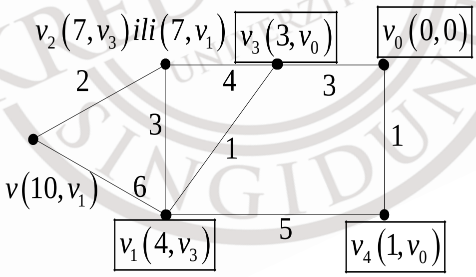
$v_2(\infty,0)$
$v_3(3,v_0)$
$v_0(0,0)$
$v(\infty,0)$
$v_1(6,v_4)$
$v_4(1,v_0)$
2
4
3
3
1
1
6
5



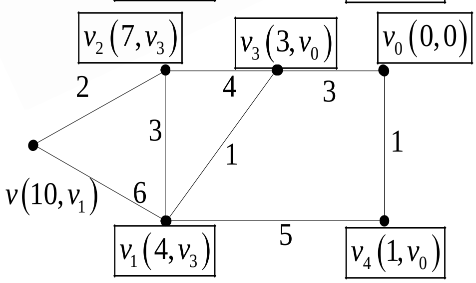
$v_2(7,v_3)$
$v_3(3,v_0)$
$v_0(0,0)$
$v(\infty,0)$
$v_1(6,v_4)\,ili\,(4,v_3)$
$v_4(1,v_0)$
2
4
3
3
1
1
6
5



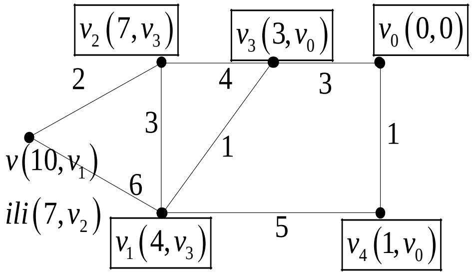
$v_2(7,v_3)$
$v_3(3,v_0)$
$v_0(0,0)$
$v(\infty,0)$
$v_1(4,v_3)$
$v_4(1,v_0)$
2
4
3
3
1
1
6
5

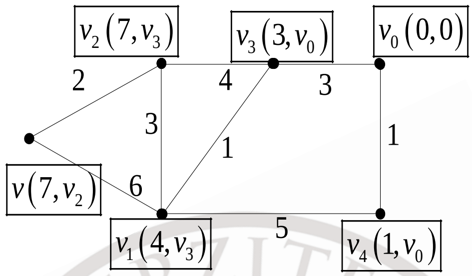


$v_2(7,v_3)\,ili\,(7,v_1)$
$v_3(3,v_0)$
$v_0(0,0)$
$v(10,v_1)$
$v_1(4,v_3)$
$v_4(1,v_0)$
2
4
3
3
1
1
6
5



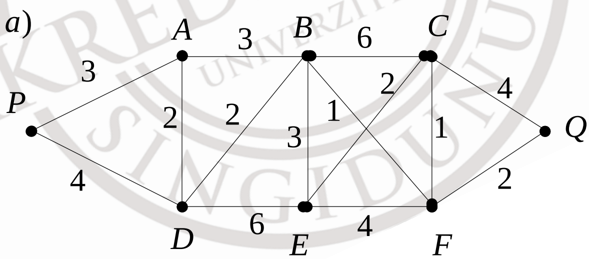
$v_2(7,v_3)$
$v_3(3,v_0)$
$v_0(0,0)$
$v(10,v_1)$
$v_1(4,v_3)$
$v_4(1,v_0)$
2
4
3
3
1
1
6
5

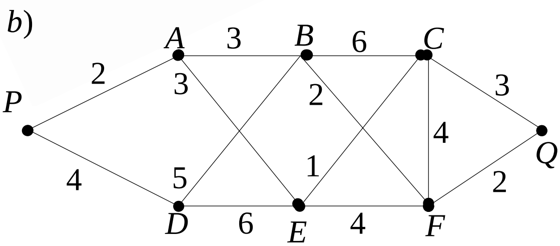




Najkraći put je $v_0v_3v_2v$ dužine 9.

5. Dati su grafovi na slici, sa težinama između dva čvora. Naći minimalni put od čvora P do čvora Q, koristeći Dijkastrin algoritam.



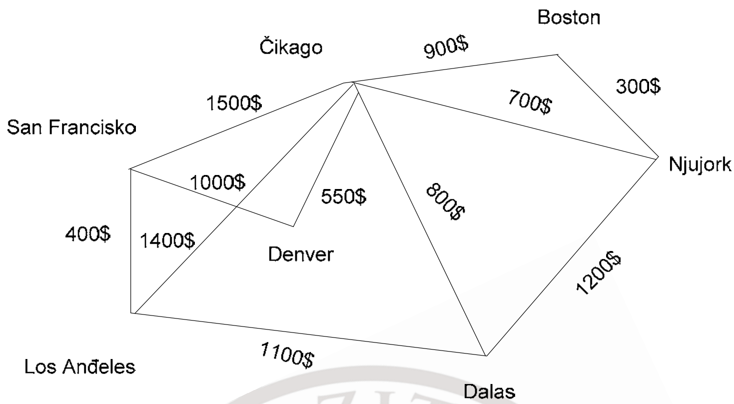


Rešenje:

Minimalni put je dat sa $PABFQ$. Dužina puta je 9.

Minimalni put je dat sa $PAECQ$. Dužina puta je 9.

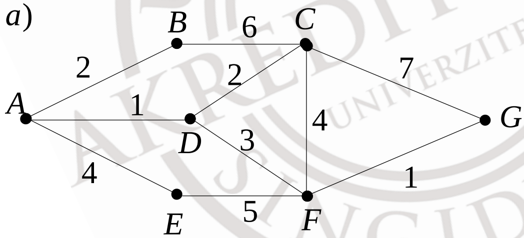
6. Odredi najjeftiniju kartu od Bostona do Los Anđelesa, ako je mreža linija data na sledećem
grafu.



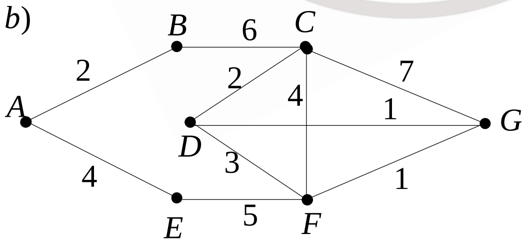
Rešenje:
Najjeftinija je karta preko je Čikaga i košta 2300$.

7. Dati su grafovi na slikama, sa težinama između dva čvora. Naći minimalni put od čvora A do čvora G, koristeći Dijkastrin algoritam.

a)

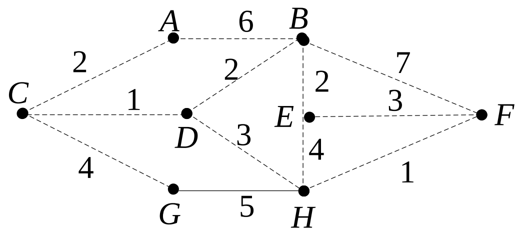


b)



Rešenje:
ADFG dužine 5
AEFG dužine 10

7. Od datog težinskog grafa sa slike, formirati minimalno razapinjuće stablo koristeći Primov algoritam.

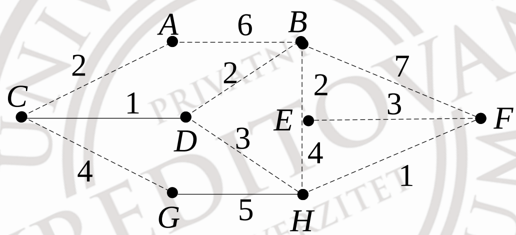


Rešenje:

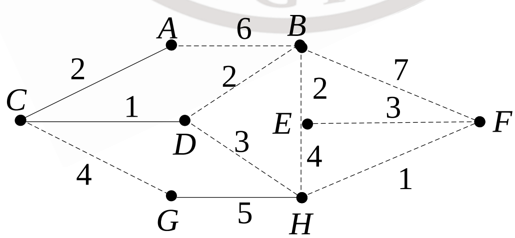
Biramo jedan čvor proizvoljno za početnu tačku, koren stabla.

Neka je to čvor C.

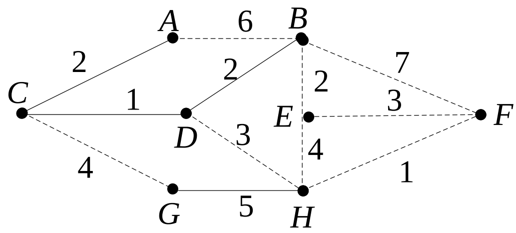
Iz čvora C možemo da stignemo u čvor A sa udaljenošću 2, zatim u čvor D sa udaljenošću 1 i u čvor G sa udaljenošću 4. Kako je čvor D na najmanjoj udaljenosti od C, pridodaćemo ga stablu kao i njegovu granu (CD).



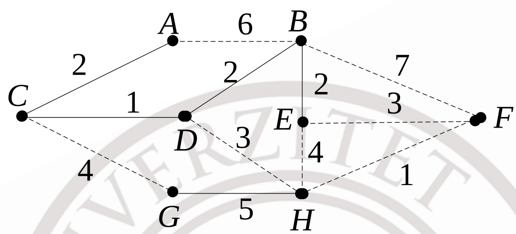
Sada posmatramo oba čvora novog stabla C i D. Njihove udaljenosti do čvorova grafa su: iz C do A dužina 2, iz C u G dužina 4, iz čvora D u B dužina 2, iz D u H dužina 3. Kako imamo dva čvora iste udaljenosti biramo jedan proizvoljno. Uzmimo čvor C, tako da čvor A i granu (CA) pridodajemo stablu.



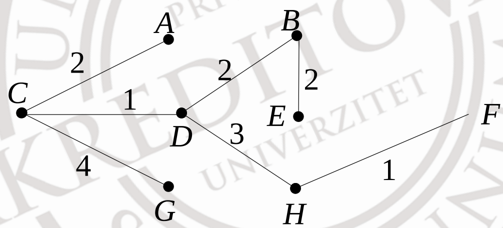
Proces se nastavlja. Sada posmatramo čvorove C,A i D. Najmanja udaljenost je iz D u B dužine 2, tako da stablu pridodajemo čvor B i granu (DB).



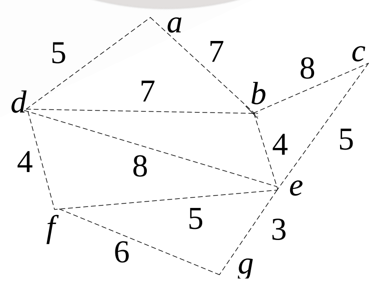
Grana AB ne može nikada da se pridoda stablu jer sa ostalim već pridodatim granama čini konturu. Posmatramo čvorove C, B, D I najmanja udaljenost je iz D ka E dužine 2, Čvor E I granu (BE) dodajemo stablu.



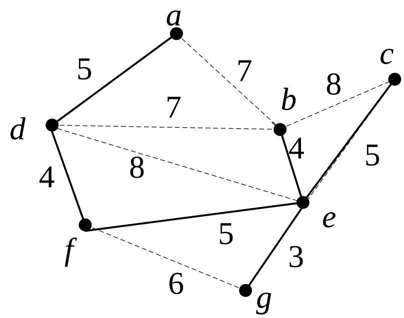
Posle još tri koraka dobijamo sledeće razapeto stablo



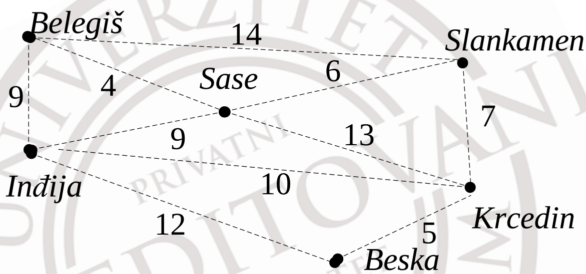
8. Od datog težinskog grafa sa slike, formirati minimalno razapinjuće stablo koristeći Primov algoritam.



Rešenje:

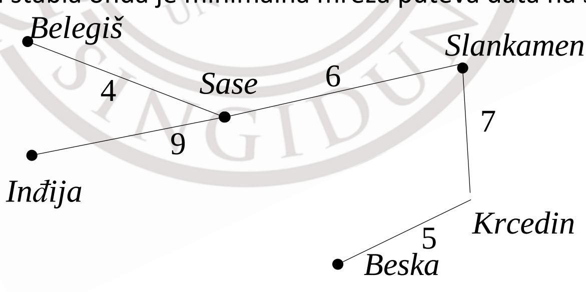


9. Postojeća mreža puteva između mesta treba da se asvaltira. Na slici su date kilometraže između mesta. Koristeći Primov algoritam napraviti minimalnu mrežu puteva koji se moraju asvaltirati, tako da sva mesta budu povezna.

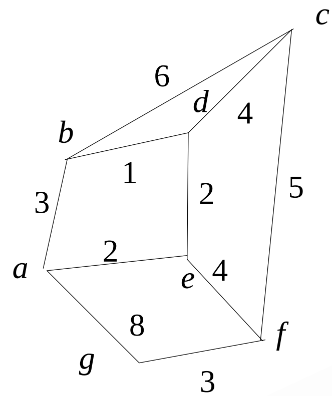


Rešenje:

Ako je Inđija koren stabla onda je minimalna mreža puteva data na slici



10. Od datog težinskog grafa sa slike, formirati minimalno razapinjuće stablo koristeći Kruskalov algoritam.

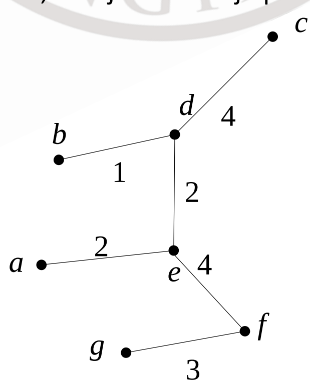


Rešenje: I način:

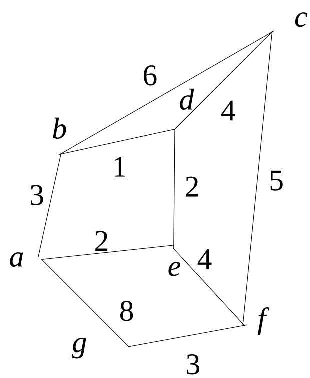
Popisaćemo sve grane grafa i njihove dužine i sortirati ih u ne opadajući niz:

grane	dužina	sortirana grane	dužina
(a,b)	3	(b,d)	1
(a,e)	2	(a,e)	2
(a,g)	8	(d,e)	2
(b,d)	1	(a,b)	3
(b,c)	6	(f,g)	3
(d,c)	4	(e,f)	4
(d,e)	2	(d,c)	4
(e,f)	4	(f,c)	5
(f,g)	3	(b,c)	6
(f,c)	5	(a,g)	8

Ne koristiti grane koje bi stvorile konture. To su grane (a,b), (b,c) i (f,c), (g,f).
Primenjujući Kruskalov algoritam, dobija se rešenje prikazano na slici.



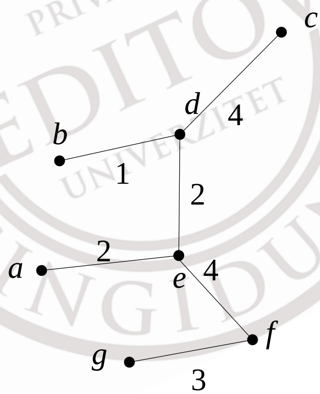
Rešenje 2 način:



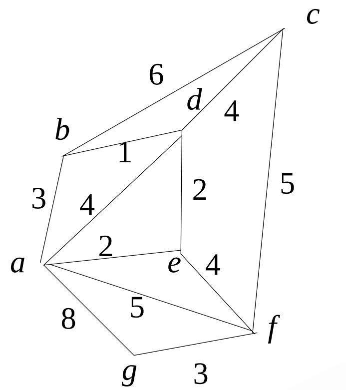
Počećemo od zadatog grafa i uočiti npr. konturu (a, b, d,e, a). Od grana koje sačinjavaju ovu konturu biramo onu sa najvećom dužinom i brišemo je. To je grana (a, b). Sve uočene konture i izbrisane grane su date u sledećoj tabeli:

Kontura	Grana koja se briše
(a, b, d, e,a)	(a,b)
(d, c, f, e,d)	(f, c)
(b, d, c, b)	(b,c)
(a,e,f,g,a)	(a,g)

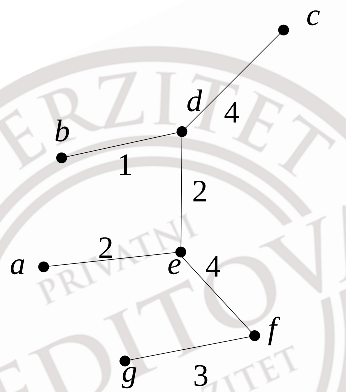
Nakon ovog postupka dobili smo graf



11. Od datog težinskog grafa sa slike, formirati minimalno razapinjuće stablo koristeći Kruskalov algoritam.

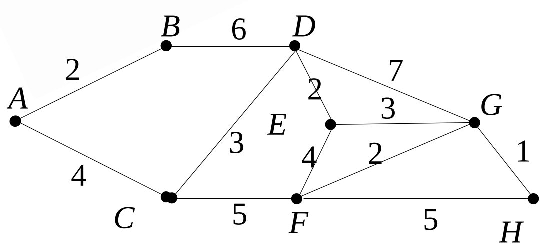


Rešenje:



12. Datom grafu
pridruži minimalno razapinjuće stablo korišćenjem:

a) Primovog algoritma
b) Kruskalovog algoritma
c) i odredi najkraći put od čvora A do čvora F primenom Dijkastrinog algoritma



10.

BULOVA ALGEBRA

KRATAK SADRŽAJ:

CILJEVI UČENJA:

Kada ovo poglavlje proučite moći ćete da:

1. Definišete Bulovu algebru,
2. znate definicije, aksiome i teoreme ove algebre,
3. definišete binarnu Bulovu algebru,
4. znate da napravite disjunktivnu i konjuktivnu formu Bulovih funkcija,
5. pravite razliku između prekidačkih i logičkih kola.

10.1. OSNOVNI POJMOVI

Matematičari kažu da je $1+1=2$, a informatičari da je $1+1=1$. Ko je u pravu? U pravu su i jedni i drugi, jer svako posmatra sa svog stanovišta. Informatičari se pozivaju na Bulovu algebru koja predstavlja teorijsku osnovu rada savremenih računara.

Osnovno načelo Bulove algebre zasniva se na činjenici da logički izrazi mogu biti samo ***tačni*** i ***netačni.*** Tvrđenja nikada ne mogu biti delimično tačna ili delimično netačna.

Algebra koja analizira ovakva tvrđenja, sažima matematičku logiku i teoriju skupova u algebru i daje teorijsku osnovu savremenih računarskih nauka naziva se Bulova algebra.

Bulova algebra služi da se dizajniraju elektronska kola od kojih se sastoje savremeni računari.

10.1.1. DEFINICIJA I AKSIOME

Neka je B ne prazan skup u kome su definisane dve ***binarne operacije,*** sabiranje(+) i množenje (.) i jedna ***unarna operacija,*** komplement (’ ili -), a 0 i 1 su elementi iz skupa B, tada skup

$$\{B,+,\cdot,',0,1\}$$

nazivamo ***Bulovom algebrom***, ako za bilo koje elemente skupa *a,b,c* iz skupa B važe aksiome:

- ***zatvorenosti***

$$a+b\in B, \qquad a\cdot b\in B$$

- ***komutativnosti***

$$a+b=b+a, \qquad a\cdot b=b\cdot a$$

- ***distributivnosti***

$$a+(b\cdot c)=(a+b)\cdot(a+c),$$

$$a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$$

- ***postojanje neutralnog elementa***

$$a+0=a \qquad a\cdot 1=a$$

- ***postojanje inverznog elementa***

$$a+\overline{a}=1 \qquad a\cdot\overline{a}=0$$

Element *0* zove se ***nula element,*** a element *1* se zove ***jedinični element.***

$a'=\overline{a}$ zove se ***komplement*** od *a.*

Operacije + i . zovu se ***sabiranje*** i ***množenje***.

Oznaka za operaciju **.** se često ne piše, već se koristi oznaka $a \cdot b = ab$.

Usvajamo i klasične konvencije prioriteta operacija. Najveći prioritet ima operacija komplementa (-), zatim množenja (.) i najmanjeg prioriteta je operacija sabiranja (+).

10.1.2. OSNOVNE TEOREME

Neka su *a,b,c* elementi Bulove algebre *B*, tada važe sledeće teoreme, odnosno zakoni:

- ***zakon asocijacije***

$$(a+b)+c = a+(b+c), \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

- ***zakon idempotencije***

$$a+a=a, \qquad a \cdot a = a$$

- ***zakon nule***

$$a+1=1, \qquad a \cdot 0 = 0$$

- ***zakon apsorbcije***

$$a + a \cdot b = a, \quad a \cdot (a+b) = a$$

- ***zakon involutivnosti***

$$\overline{\overline{a}} = a$$

- ***De Morganovi zakoni***

$$\overline{(a+b)} = \overline{a} \cdot \overline{b}, \quad \overline{(a \cdot b)} = \overline{a} + \overline{b}$$

- ***zakon komplementa za neutralne elemente***

$$\overline{0} = 1, \qquad \overline{1} = 0$$

- ***zakon sažimanja***

$$a \cdot b + a \cdot \overline{b} = a, \quad (a+b) \cdot (a + \overline{b}) = a$$

Ako je A Bulov izraz, pod ***dualnim*** Bulovim izrazom podrazumeva se izraz koji se dobija kada se u izrazu A operacije + zameni sa . i obrnuto, a konstante 0 i 1 se zamene njihovim komplementima.

10.2. BINARNA BULOVA ALGEBRA

Bulova algebra može da bude definisana na proizvoljnom skupu elemenata, ali njena primena u digitalnoj tehnici je ograničena na binarnom skupu {0,1}.

Bulova promenljiva može da uzima vrednost iz skupa $\{0,1\}$, ali ne u isto vreme.

Ako se na skupu $\{0,1\}$ definišu operacije +, . , ’, odnosno $\vee, \wedge, \neg$, prema tablicama dobija se ***Bulova algebra,*** koja se naziva i ***prekidačka algebra.*** Prekidačka algebra je dakle Bulova algebra na skupu od dva elementa.

+	1	0
1	1	1
0	1	0

*	1	0
1	1	0
0	0	0

dok je 0’=1, 1’=0.

12.2.1. BINARNE BULOVE FUNKCIJE

Neka je $F = F\left(p_1, p_2, \ldots, p_n\right)$ neka formula, gde su $p_1, p_2, \cdots p_n$ iskazna slova ili Bulove promenljive. Bulove funkcije se mogu definisati na skupu sa proizvoljno mnogo elemenata, ali za projektovanje digitalnih računara koristi se isključivo binarni brojni sistem.

- ***Bulova funkcija*** je svako preslikavanje $F : \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$.
- Elementi skupa $\{0,1\}^n$ su uređene n-torke $p_1, p_2, \ldots p_n \in \{0,1\}$
- Ovakve Bulove funkcije nazivaju se i ***prekidačke funkcije***.
- Takvih n-torki ima 2^n a funkcija 2^{2^n} (varijacije n te klase od 2 elementa sa ponavljanjem)

Kako Bulove funkcije imaju konačan domen, moguće ih je zadati preko tablica. Jedan opšti oblik tablice je sledeći

p_1	p_2	$\dots$	p_n	$F(p_1, p_2, \dots p_n)$
0	0	$\dots$	0	$F(0,0,\dots 0)$
0	0	$\dots$	1	$F(0,0,\dots,1)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	
1	1	$\dots$	1	$F(1,1,\dots,1)$

- Bulove funkcije sa jednom i dve promenljive date su tablicom.

p	F1	F2	F3	F4
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

p_1	p_2	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	F10	F11	F12	F13	F14	F15	F16
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Iz tablice se može videti da su F8, F5, F7 i F10 redom disjunkcija, konjunkcija, implikacija i ekvivalencija.

Sve Bulove funkcije mogu se predstaviti iskaznim formulama.

10.2.2. DISJUNKTIVNA I KONJUKTIVNA FORMA

Algebarske Bulove funkcije se mogu predstaviti u dva oblika.

- ***Disjunktivna forma (DF)*** $F(p_1, p_2, \dots, p_n) = P_{i1} + P_{i2} + \dots + P_{im}$.

Disjunktivna forma predstavlja logičku sumu logičkih proizvoda . Funkcija se može predstaviti kao suma disjunkcija koje odgovaraju vrstama u tablici u kojima funkcija ima vrednost 1.

Primer:

$$F = F_1F_2 + \overline{F}_1F_2 + F_1\overline{F}_2 + \overline{F}_1\overline{F}_2 .$$

- ***Konjuktivna forma (KF)*** $F\left(p_1, p_2, \ldots, p_n\right) = S_{i1} \cdot S_{i2} \ldots S_{im}$

Konjuktivna forma predstavlja logički proizvod logičkih suma. Funkcija se može predstaviti kao konjunkcija suma koje odgovaraju vrstama u tablici u kojima funkcija ima vrednost 0.

Primer:

$$F = \left(F_1 + F_2\right)\left(\overline{F}_1 + F_2\right)\left(F_1 + \overline{F}_2\right)\left(\overline{F}_1 + \overline{F}_2\right)$$

Primer:

Funkcija je zadata tabelom.
Napisati konjunktivnu i disjunktivnu formu zadate funkcije
Algebarski prikaz funkcije u obliku konjunktivne forme, na osnovu zadate tabele, zapisujemo u vidu logičkog proizvoda onoliko elementarnih suma koliko u tabeli ima vrsta sa vrednošću funkcije 0.

p_1	p_2	p_3	F
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

$$F = \left(\overline{p}_1 + \overline{p}_2 + p_3\right)\left(\overline{p}_1 + p_2 + \overline{p}_3\right)\left(p_1 + \overline{p}_2 + p_3\right) .$$

Algebarski prikaz funkcije u obliku disjunktivne forme, na osnovu zadate tabele, zapisujemo u vidu logičkog zbira onoliko elementarnih proizvoda koliko u tabeli ima vrsta sa vrednošću funkcije 1.

$$F = p_1p_2p_3 + p_1\overline{p}_2\overline{p}_3 + \overline{p}_1p_2p_3 + \overline{p}_1\overline{p}_2p_3 + \overline{p}_1\overline{p}_2\overline{p}_3 .$$

10.3. PRIMENA U RAČUNARSTVU I TEHNICI

10.3.1. BINARNI BROJNI SISTEM

Moderni računari koriste binarni brojni sistem koji ima dve cifre 0 i 1. Binarni sistem je izabran zato što digitalni sistemi koriste binarne signale, koji mogu da imaju samo dva stanja. Ova stanja mogu biti otvoren-zatvoren, levo-desno, uključen-isključen i slično.

Binarni sistem baziran je na korišćenje matematičke logike, na iskazima koji takođe imaju samo dve mogućnosti, tačno (*true*) i netačno (*false*) . Umesto oznaka T i $\perp$, u informatici se koriste oznake 1 i 0. Logičke operacije se predstavljaju uobičajeno, konjunkcija (proizvod) AND, a disjunkcija (sabiranje) kao OR, imajući u vidu istinitosne tablice za date logičke operacije.

Jedna binarna cifra 0 ili 1 predstavlja minimalnu količinu informacija, odnosno najmanji podatak koji se može obraditi u računaru i zove se ***bit*** (*bit*). Bit može da reprezentuje ***istinu*** i ***neistinu***. Jedinica reprezentuje istinu, a nula neistinu. U većini računara koristi se grupa od osam bita koja se naziva ***bajt*** (*byte*).

Primer :

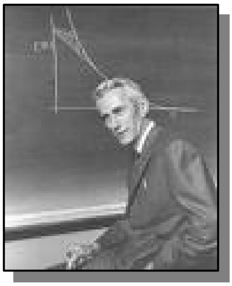
Ako primenimo operatore AND i OR na brojeve 0110110110 i 1100011101 dobićemo:

0110110110	0110110110
1100011101 AND	1100011101 OR
0100010100	1110111111

Računari moraju imati mogućnosti da memorišu i obrađuju i ne numeričke, odnosno tekstualne podatke. To su ili ***nizovi*** (*string*) ili ***znakovi*** (*charácter data*), **zatim slova,** ***znakovi interpunkcije***, ***matematički znaci***, ***specijalni znaci*** i slično. Podaci ovog tipa su memorisani u obliku niza bitova. Danas se koriste ASCII i EBCDIS kod. Na primer 1111001 predstavlja slovo b.

Dakle, binarni brojevi su osnova za funkcionisanje računara. Digitalna kola kombinuju nule i jedinice, i generišu nove nule i jedinice. Mašinske instrukcije su takođe prikazane kao nizovi nula i jedinica. Svi programi napisani u mašinskom jeziku (asembleru) ili nekom višem jeziku, da bi mogli da rade moraju da budu prevedeni u nizove nula i jedinica.

10.3.2. PREKIDAČKE ŠEME I DIGITALNA LOGIČKA KOLA



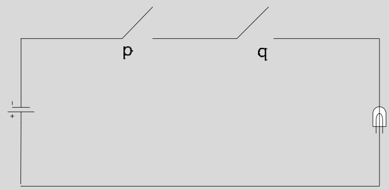
Klod Elvud Šenon *(Claude Elwood Shannon; 1916. – 2001.) bio je američki naučnik i inženjer. Među najznačajnija otkrića ovog naučnika spadaju teorija informacija i dizajn digitalnih računara i logičkih kola. 1938. godine otkrio vezu između logičkih tablica istinitosti i električnih kola. Šenon je poznat kao utemeljivač informacione teorije sa svojim naučnim radom objavljenim 1948. godine. Takođe se smatra utemeljivačem teorije digitalnog računara i teorije dizajna digitalnih kola, kada je kao 21-godišnji student MIT-a, napisao tezu gdje dokazuje da je primjenom Bulove algebre na digitalna električna kola, moguće rešiti bilo koji logički ili numerički problem.*

Prekidačke šeme i digitalna logička kola su tako projektovana da implementiraju principe binarne aritmetike i matematičke logike.

- ***Prekidačke šeme*** su univerzalne šeme koje ne zavise od tehnologije. Mogu da se realizuju na osnovu mehaničkih prekidača, električnih kola i slično.
- ***Digitalna električna logička kola*** su specijalizovane šeme sastavljene od tačno definisanih električnih komponenti.
- Koristeći operacije (+,.,’) Bulove algebre može se opisati bilo koje kolo.
- Iskazne formule u kojima se pojavljuju samo operacije $\wedge, \vee, \neg$, odnosno (.,+,’), imaju jednu zanimljivu interpretaciju koja se koristi u tehnici u projektovanju digitalnih kola, a naziva se ***prekidačka algebra.***
- Iskazna slova se tretiraju kao ***otvoreni prekidači,*** a njihova negacija kao ***zatvoreni prekidači.*** Ako iskazno slovo ima vrednost $p=1$ smatra se da je prekidač zatvoren, tj. da provodi signal, a za $p=0$ je otvoren, tj. da ne provodi signal.

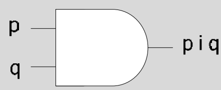
- Formula se tretira kao mreža sa dva kraja sastavljena od prekidača koji su povezani paralelno ili serijski. Tautologijama odgovaraju mreže koje uvek provode signal.

Primer:
Posmatrajmo prekidačko kolo-šemu koje sadrži prekidač i sijalicu.
Vrednost 1 dodeljujemo prekidačima p i q kada su zatvoreni, tj ako kroz njih protiče struja. U suprotnom dodeljujemo im vrednost 0.
Kada su prekidači redno vezani, sijalica će svetleti i kolo će imati vrednost 1 samo ako su oba prekidača p i q zatvorena. Prema tome, ovo kolo će odgovarati iskazu p i q, odnosno $p \wedge q$ i zove se ***AND –i kolo***.

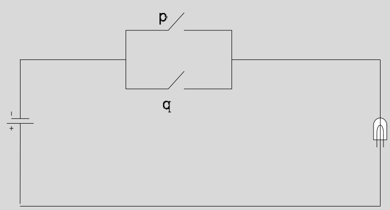


$$p \wedge q$$

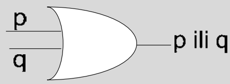
Digitalno logičko kolo



Primer :
Posmatrajmo prekidačko kolo u kome su prekidači p i q vezani paralelno.
Kada su prekidači paralelno vezani, sijalica će svetleti ako je p=1 ili q=1 i kolo će imati vrednost 1 ako je bar jedan prekidača p i q zatvoren.
Prema tome, ovo kolo će odgovarati iskazu p ili q, odnosno $p \vee q$ i zove se ***OR- ili kolo.***

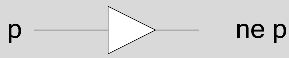


$$p \vee q$$



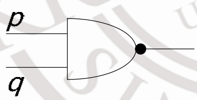
Kolo sa jednim prekidačem p, u kome sijalica svetli samo ako je prekidač otvoren. Prema tome kolo će imati vrednost 1 ako je prekidača p zatvoren, odnosno ako je p jednako 0. Takvo kolo se zove ***ne kolo*** ili ***invertor***.

$$\neg p$$

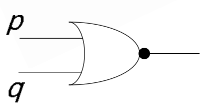


Elementi digitalnih logičkih kola osim standardnih navedenih (***i kolo***, ***ili kolo*** i ***ne kolo***) su i sledeća kola:

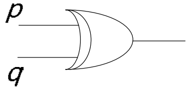
- ***ni kolo***, odgovara logičkom izrazu $\neg(p \wedge q)$.



- ***nili kolo,*** odgovara logičkom izrazu $\neg(p \vee q)$.



- ***ekskluzivno ili***



10.3.3. UPROŠĆAVANJE PREKIDAČKIH ŠEMA I LOGIČKIH KOLA

Najvažnija primena Bulove algebre je da pojednostavi konstrukciju prekidačkih i logičkih kola.

Potrebno je da se podsetimo aksioma i teorema koje smo već definisali, a potrebne su nam za dalji rad.

Bulovi zakoni za operaciju ***i***

$$a \cdot a = a$$

$$a \cdot 0 = 0$$

$$a \cdot 1 = a$$

$$a \cdot \overline{a} = 0$$

Bulovi zakoni za operaciju ***ili***

$$a + a = a$$

$$a + 0 = a$$

$$a + 1 = 1$$

$$a + \overline{a} = 1$$

I teorema $\overline{\overline{a}} = a$

Za operacije ***i*** i ***ili***

$$a + b = b + a$$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$a(b \cdot c) = a \cdot b \cdot c$$

$$a + (b + c) = a + b + c$$

Teoreme minimizacije

$$a \cdot b + a \cdot \overline{b} = a$$

$$a + a \cdot b = a$$

$$a + \overline{a} \cdot b = a + b$$

Teoreme inverzije

$$\overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$$

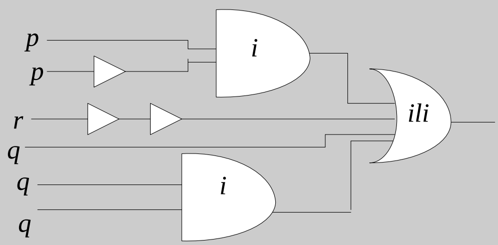
$$\overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$$

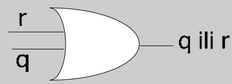
Primer:

Pojednostaviti izraz $p \cdot \overline{p} + q + q \cdot q + \overline{\overline{r}}$

$$
\begin{aligned}
p \cdot \overline{p} + q + q \cdot q + \overline{\overline{r}} &= 0 + q + q \cdot q + \overline{\overline{r}} && (a \cdot \overline{a} = 0) \\
&= q + q \cdot q + \overline{\overline{r}} && (a + 0 = a) \\
&= q + q + \overline{\overline{r}} && (a \cdot a = a) \\
&= q + \overline{\overline{r}} && (a + a = a) \\
&= q + r && (\overline{\overline{a}} = a)
\end{aligned}
$$

Polazno kolo se zamenjuje sa znatno jednostavnijim koje je zadato izrazom $q + r$.





Napomena: Minimizacija prekidačkih funkcija je jedan od najvažnijih praktičnih zadataka. U prethodnom poglavlju iznesene su neke opšte ideje teorijskog tipa bazirane na Bulovoj algebri. Inače metode minimizacije su raznovrsne. Najčešća je podela na grafičke i algoritamske. Jedan od često korišćenih načina u inženjerskoj praksi su Karnoove mape.

PITANJA ZA PONAVLJANJE

1. Šta je Bulova algebra?
2. Šta je binarna Bulova algebra?
3. Navesti osnovne aksiome.
4. Navesti i dokazati osnovne teoreme Bulove algebre
5. Šta su DF i KF?
6. Kako izgledaju prekidačka, a kako logička kola?

KLJUČNE REČI

Bulova algebra
Bulova funkcija
Bit
Bajt
Kolo
Prekidačka kola
Električna kola
Invertor
Disjunktivna forma
Konjunktivna forma
Prekidači

10.4. ZADACI

1. Dokazati sledeće zakone:
Zakon idempotencije $a)\quad a+a=a,\qquad b)\ a\cdot a=a$

Rešenje:
a)

$$\begin{aligned} a+a &= (a+a)\cdot 1 && neutra\ln i\ element \\ &= (a+a)\cdot(a+\overline{a}) && inverzni\ element \\ &= a+(a\cdot\overline{a}) && distribucija \\ &= a+0 && inverzni\ element \\ &= a && neutra\ln i\ element \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} a\cdot a &= a\cdot a+0 && neutra\ln i\ element \\ &= a\cdot a+a\cdot\overline{a} && inverzni\ element \\ &= a(a+\overline{a}) && distribucija \\ &= a\cdot 1 && inverzni\ element \\ &= a && neutra\ln i\ element \end{aligned}$$

Zakon nule $a\cdot 0=0$

Rešenje:

$$
\begin{aligned}
a\cdot 0 &= a\cdot 0+0 && \textit{neutralni element}\\
&= a\cdot 0+a\cdot\overline{a} && \textit{inverzni element}\\
&= a\cdot\left(0+\overline{a}\right) && \textit{distribucija}\\
&= a\cdot\overline{a} && \textit{neutralni element}\\
&= a && \textit{inverzni element}
\end{aligned}
$$

Zakon absorbcije a) $a+a\cdot b=a$ b) $a\cdot\left(a+b\right)=a$

Rešenje:

a)

$$
\begin{aligned}
a+a\cdot b &=\\
&= a\cdot 1+a\cdot b && \textit{neutralni element}\\
&= a\cdot\left(1+b\right) && \textit{distribucija}\\
&= a\cdot 1 && \textit{zakon nule}\\
&= a && \textit{neutralni element}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
a\cdot\left(a+b\right) &=\\
&= \left(a+0\right)\cdot\left(a+b\right) && \textit{neutralni element}\\
&= a+\left(0\cdot b\right) && \textit{distribucija}\\
&= a+0 && \textit{zakon nule}\\
&= a && \textit{neutralni element}
\end{aligned}
$$

Zakon involutivnosti $\overline{\overline{a}}=a$

Rešenje:

Aksioma o inverznom elementu kaže

$$\overline{a}+a=a+\overline{a}=1$$

$$\overline{a}\cdot a=a\cdot\overline{a}=0$$

Ako uvedemo $x=\overline{a}$, onda je

$$x+a=a+x=1$$

$$x\cdot a=a\cdot x=0$$

pa je $a=\overline{x}$, odnosno $a=\overline{\overline{a}}$.

Zakon komplementa za neutralne elemente a) $\overline{0}=1$, b) $\overline{1}=0$

Rešenje:

a)

$$\overline{0} = \overline{\left(a \cdot \overline{a}\right)} \qquad \textit{inverzni element}$$

$$= \overline{a} + \overline{\overline{a}} \qquad \textit{De Morganovo pravilo}$$

$$= \overline{a} + a \qquad \textit{zakon involutivnosti}$$

$$= 1 \qquad \textit{inverzni element}$$

$$\overline{1} = \overline{\left(a + \overline{a}\right)} \qquad \textit{inverzni element}$$

$$= \overline{a} \cdot \overline{\overline{a}} \qquad \textit{De Morganovo pravilo}$$

$$= \overline{a} \cdot a \qquad \textit{zakon involutivnosti}$$

$$= 0 \qquad \textit{inverzni element}$$

Zakon sažimanja a) $a \cdot b + a \cdot \overline{b} = a$ b) $\left(a+b\right) \cdot \left(a + \overline{b}\right) = a$

Rešenje:

a)

$$a \cdot b + a \cdot \overline{b} =$$

$$= a \cdot \left(b + \overline{b}\right) \quad \textit{distribucija}$$

$$= a \cdot 1 \qquad \textit{inverzni element}$$

$$= a \qquad neutra\ln i \ \textit{element}$$

b)

$$\left(a+b\right) \cdot \left(a + \overline{b}\right) =$$

$$= a + \left(b \cdot \overline{b}\right) \quad \textit{distribucija}$$

$$= a + 0 \qquad \textit{inverzni element}$$

$$= a \qquad neutra\ln i \ \textit{element}$$

2. Dokazati

a) $a + b + \overline{a} \cdot \overline{b} = 1, \quad b) \left(a+b\right) \overline{a} \cdot \overline{b} = 0$

3. Primenom Bulove algebre izračunati vrednost izraza $1\cdot 0+\overline{(0+1)}$.

Rešenje:

$$\begin{aligned} 1\cdot 0+\overline{(0+1)} &= 0+\overline{1} \\ &= 0+0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

4. Kako izgleda disjunktivna i konjunktivna forma Bulove funkcije koja je zadata tablicom?

p	q	r	f
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

Rešenje:

$f=\left(pq\overline{r}\right)+\left(\overline{p}qr\right)+\left(\overline{p}\,\overline{q}r\right)+\left(\overline{p}\,\overline{q}\,\overline{r}\right)$ disjunktivna forma -DF

$f=\left(\overline{p}+\overline{q}+\overline{r}\right)\left(\overline{p}+q+\overline{r}\right)\left(\overline{p}+q+r\right)\left(p+\overline{q}+r\right)$ konjunktivna forma -KF

5. Odrediti istinitosnu tablicu funkcija:

a) $f_1=pq+\overline{p}r+\overline{qr}$ b) $f_2=\overline{p}+q\overline{r}$

Rešenje:

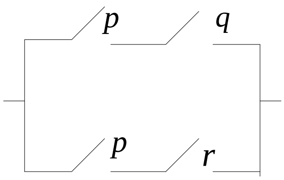
p	q	r	f_1	f_2
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	0
0	1	0	0	0
0	0	1	1	1
0	0	0	1	0

6. Formuli $p \cdot q + p \cdot r$ odrediti

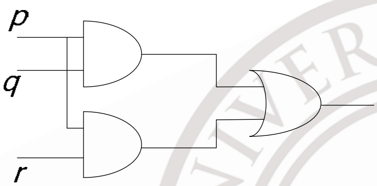
a) prekidačku šemu,
b) digitalno logičko kolo.

Rešenje:

a)



b)

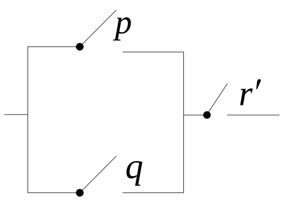


7. Formuli $(p+q) \cdot \overline{r}$ odrediti

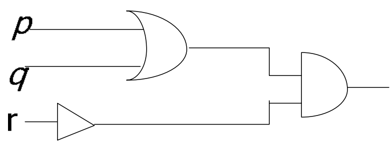
a) prekidačku šemu,
b) digitalno logičko kolo.

Rešenje:

a)



b)



8. Nacrtati prekidačke šeme i digitalna logička kola koja odgovaraju iskaznim formulama:

a) $(p\cdot q)\cdot(r\cdot s)$,

b) $(p\cdot q+r)\cdot s$,

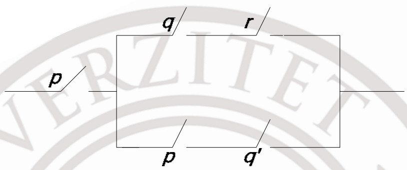
c) $p(\overline{q}+r)$,

d) $\overline{p}\cdot q+\overline{p\cdot\overline{r}}$,

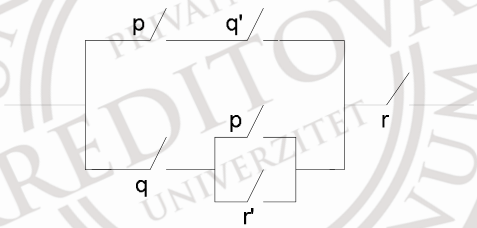
e) $\overline{p\cdot q}+(p+r)+\overline{r}$.

5. Napisati formule i nacrtati digitalna logička kola koja odgovaraju sledećim prekidačkim šemama

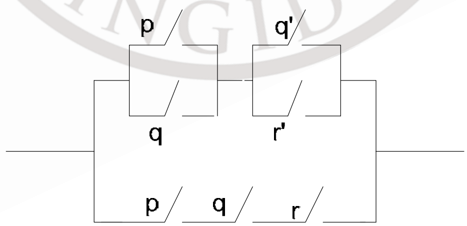
a)



b)

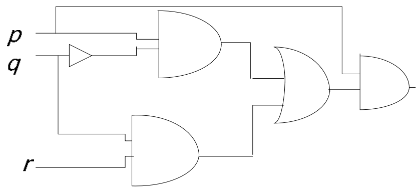


c)



Rešenje:

a) $p\cdot(q\cdot r+p\cdot\overline{q})$

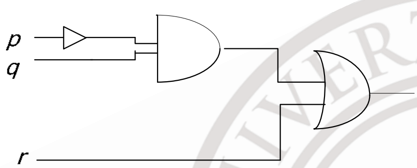


b) $\left(p\cdot\overline{q}+q\cdot\left(p+\overline{r}\right)\right)\cdot r$

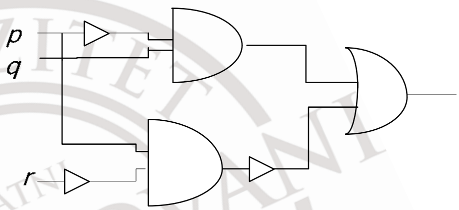
c) $\left(p+q\right)\cdot\left(\overline{q}+\overline{r}\right)+p\cdot q\cdot r$.

6. Napisati formule i nacrtati prekidačku šemu koja odgovaraju sledećim digitalnim električnim kolima:

a)

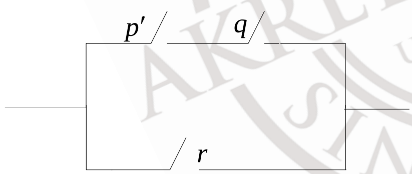


b)



Rešenje:

a) $\overline{p}\cdot q+r$,



b) $\overline{p}\cdot q+\overline{p\cdot\overline{r}}$.

7. Za zadatu tablicu odredite Bulovu funkciju. Zatim nacrtajte prekidačko kolo dobijenog izraza.

p	q	r	f
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1

0	0	0	1

Rešenje:

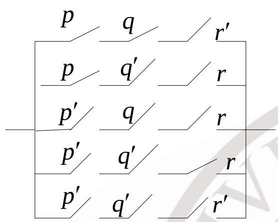
Disjunktivna forma glasi:

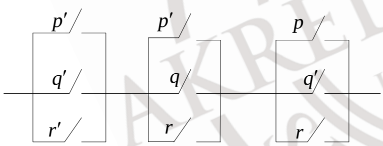
$$(p \cdot q \cdot \overline{r}) + (p \cdot \overline{q} \cdot r) + (\overline{p} \cdot q \cdot r) + (\overline{p} \cdot \overline{q} \cdot r) + (\overline{p} \cdot \overline{q} \cdot \overline{r})$$

Konjunktivna forma glasi:

$$(\overline{p} + \overline{q} + \overline{r}) \cdot (\overline{p} + q + r) \cdot (p + \overline{q} + r)$$

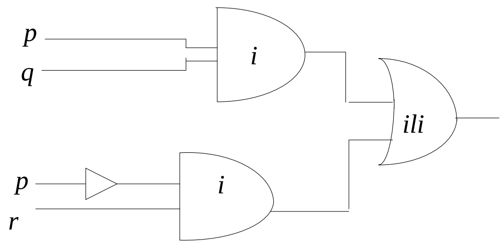
.

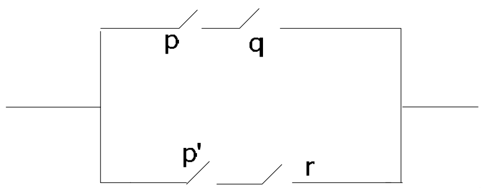




8. Nacrtati logičko digitalno i prekidačko kolo za formulu $p \cdot q + \overline{p} \cdot r$.

Rešenje:





9. Pojednostaviti formulu i nacrtati logičko kolo.

a) $p(q+r)+(pq+pr)t$

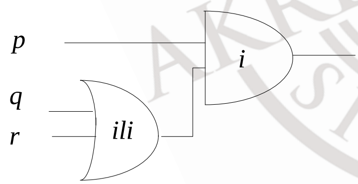
b) $p\overline{p}+q+qq+\overline{\overline{r}}$

Rešenje:

a)

$$p(q+r)+(pq+pr)t = pq+pr+pqt+prt =$$

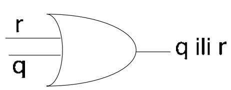
$$pq+pr = p(q+r)$$



b)

$$p\overline{p}+q+qq+\overline{\overline{r}} = 0+q+qq+\overline{\overline{r}} =$$

$$q+qq+\overline{\overline{r}} = q+q+r = q+r$$



10. Pojednostaviti formulu

a) $p\cdot q\cdot \overline{r}+p\cdot q+\overline{(\overline{p}+q+r)}+\overline{p}\cdot\overline{q}\cdot r+q\cdot r+\overline{p}\cdot q\cdot r$

b) $\overline{p}\overline{q}s+\overline{p}qs+qrs+prs$

c) $pq+\overline{p}s+p\overline{q}+pr\overline{s}$

Rešenje:

$$p\cdot q\cdot\overline{r}+p\cdot q+\overline{\left(\overline{p}+q+r\right)}++\overline{p}\cdot\overline{q}\cdot r+q\cdot r+\overline{p}\cdot q\cdot r= \qquad \left(\overline{a+b}=\overline{a}\cdot\overline{b}\right)$$

$$=\underbrace{p\cdot q\cdot\overline{r}}_{1}+p\cdot q+\underbrace{p\cdot\overline{q}\cdot\overline{r}}_{1}+\underbrace{\overline{p}\cdot\overline{q}\cdot r}_{2}+q\cdot r+\underbrace{\overline{p}\cdot q\cdot r}_{2} \qquad \left(a\cdot b+a\cdot\overline{b}=a\right)$$

$$=p\cdot\overline{r}+p\cdot q+\overline{p}\cdot r+q\cdot r \qquad \left(a\cdot b+\overline{a}\cdot c+b\cdot c=a\cdot b+\overline{a}\cdot c\right)$$

$$=p\cdot\overline{r}+p\cdot q+\overline{p}\cdot r$$

b)

$$\overline{p}\overline{q}s+\overline{p}qs+qrs+prs=$$

$$\overline{p}s\left(\overline{q}+q\right)+qrs+prs=\overline{p}s+qrs+prs=$$

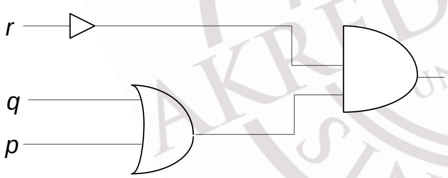
$$\left(\overline{p}+pr\right)s+qrs=\left(\overline{p}+r\right)s+qrs=$$

$$\overline{p}s+rs+qrs=\overline{p}s+\left(1+q\right)rs=$$

$$\overline{p}s+rs=\left(\overline{p}+r\right)s$$

c) $p+s$

11. Dato je logičko kolo



a) Napisati izraz funkcije koju ovo kolo predstavlja
b) Napisati tablicu funkcije
c) Odrediti disjunktivnu i konjunktivnu formu funkcije

Rešenje:

a) $f=\left(p+q\right)\cdot\overline{r}$

b) Iz formule možemo da zaključimo da je samo u sledećim slučajevima vrednost funkcije 1 , $f\left(1,1,0\right)=f\left(1,0,0\right)=f\left(0,1,0\right)=1$

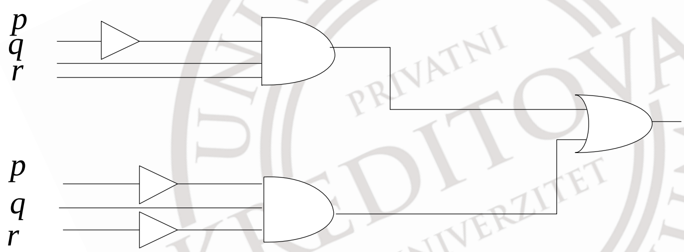
p	q	r	f
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

C)

$$f = p\cdot q\cdot \overline{r} + p\cdot \overline{q}\cdot \overline{r} + \overline{p}\cdot q\cdot \overline{r}$$

$$f = p\cdot q\cdot \overline{r} + p\cdot \overline{q}\cdot \overline{r} + \overline{p}\cdot q\cdot \overline{r}$$

12. Dato je logičko kolo



a) Napisati algebarski izraz funkcije koje kolo predstavlja
b) Napraviti tablicu ove funkcije
c) Na osnovu tablice napisati konjunktivnu formu funkcije
d) Primenom Bulove algebre minimizirati izraz i nacrtati jednostavnije kolo

Rešenje:

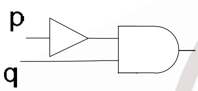
$$f = \overline{p}qr + \overline{p}q\overline{r}$$

p	q	r	f
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

Konjunktivna forma

$$\left(\overline{p}+\overline{q}+\overline{r}\right)\cdot\left(\overline{p}+\overline{q}+r\right)\cdot\left(\overline{p}+q+\overline{r}\right)\cdot\left(\overline{p}+q+r\right)\cdot\left(p+q+\overline{r}\right)+\left(p+q+r\right)$$

$$f=\overline{p}q\left(r+\overline{r}\right)=\overline{p}q$$



INDEKS POJMOVA

Z

LITREATURA

1. J. A. Anderson, *Diskretna matematika sa kombinatorikom*, Računarski fakultet, Beograd, 2005.

2. D. Cvetković, *Diskretna matematika*, Prosveta, Niš, 1996.

3. D. Cvetković, *Diskretne matematičke strukture*, Računarski fakultet, Beograd, 2004.

4. D. Cvetković, S. Simić, V. Baltić, M. Ćirić, *Diskretna matemamatika. Osnove kombinatorike i teorije grafova,* Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2008.

5. D. Cvetković, *Teorija grafova i njene primene*, Naučna knjiga, Beograd, 1990.

6. K. H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications*, Mc Grew Hill, 2003.

7. S.Lipschutz, M. Lipson, Discrete mathematics, Schaum's, Mc Graw Hill

8. V. Petrović, *Teorija grafova,* Novi Sad, 1998.

Na osnovu člana 23. stav 2. tačka 7. Zakona o porezu na dodatu vrednost („Službeni glasnik RS”, br. 84/2004, 86/2004 (ispr.), 61/2005, 61/2007 i 93/2012), Odlukom Senata Univerziteta Singidunum, Beograd, broj 260/07 od 8. juna 2007. godine, ova knjiga je odobrena kao osnovni udžbenik na Univerzitetu.

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

51-74:004(075.8)(076)
51(075.8)(076)

КОВАЧЕВИЋ, Ивана, 1952-
Diskretna matematika : sa zbirkom zadataka / Ivana Kovačević. - 3. izmenjeno i dopunjeno izd. - Beograd : Univerzitet Singidunum, 2013 (Loznica : Mladost grup). - VIII, 252 str. : graf. prikazi ; 24 cm
Tiraž 300. - Bibliografija: str. 252. - Registar.

ISBN 978-86-7912-468-5

a) Дискретна математика - Задаци b) Математика - Задаци
COBISS.SR-ID 196325644