

**МАТЕМАТИЧЕН МОДЕЛ НА РЕЗУЛТАТА ОТ ИЗМЕРВАНЕ ПРИ
НАЛИЧИЕ НА МУЛТИПЛИКАТИВНА СЪСТАВЛЯВАЩА НА
ГРЕШКАТА****THE MATHEMATICAL MODEL OF RESULTS AND MEASUREMENTS IN
THE PRESENTATION OF EXISTING MULTIPLICATIVE ERROR****Димитър Дичев***Технически университет - Габрово***Емил Колев***Висше Техническо училище-Шмалкалден***Стефан Начев***Технически университет - Габрово***Флориан Бауер***Висше Техническо училище-Шмалкалден***Abstract**

The report presents the results of theoretical study of the measurement process in static and dynamic mode. Developed mathematical model of the formation of multiplicative error and algorithms to determine their mathematical expectation and correlation function. Conclusions are made about the characteristics of the dispersion of the multiplicative error in the dynamic and static mode.

Keywords: measuring, dynamic error, measurement system.

ВЪВЕДЕНИЕ

Измерването може да се разглежда като експериментална процедура, имаща за цел определяне на резултата от измерване. От гледна точка на експерименталната си същност измерването се реализира чрез взаимодействието на определена съвкупност от материални обекти. Свойствата на материалните обекти, участващи в измерването, както и тяхната взаимна корелация, влияят върху формирането на резултата от измерване. Във връзка с това математичният модел на резултата от измерване, отразяващ адекватно реалния измервателен процес, трябва да отчита влиянието на всички материални елементи, участващи в измервателния процес. Основните материални обекти, участващи в измерването са: обект на измерване, измервателно средство и измервателна среда.

Изброените по-горе материални обекти изграждат, в някои измервателни процедури, сложни взаимовръзки. Такива са например измервателните процедури за измерване на параметрите на подвижни обекти. Това са измерва-

ния в динамичен режим на работа, където инерционните свойства на измервателните уреди са под въздействието на динамичните характеристики на измерваната и влияещите величини. В тези случаи непълните и неточни математични модели на резултата от измерване не отразяват адекватно характеристиките на измервателните алгоритми и водят до значителни отклонения при оценката на точностните показатели на измервателните средства.

Ето защо целта на настоящата работа е да бъде разработен един обобщен модел на резултата от измерване, отчитащ точностните характеристики относно мултипликативната съставляваща на сумарната грешка.

ИЗЛОЖЕНИЕ

Извежданията в тази работа се основават на резултатите от многократни измервания, които са най-ефективният способ за обезпечаване на единство на измерванията относно грешката в резултата от измерване.

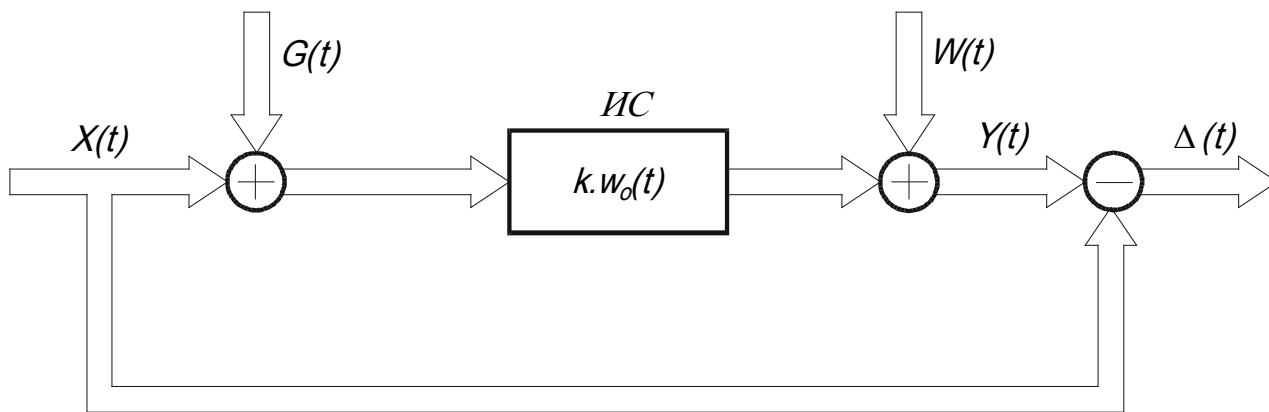
Според [1] грешката в резултата от

измерване е равна на:

$$\Delta(t) = Y(t) - X(t), \quad (1)$$

където $Y(t)$ е резултата от измерване, а $X(t)$ – измерваната величина.

В основата на разработвания математичен модел стои структурната схема от фиг. 1, изразяваща формирането на грешката в резултата от измерване.



Фиг. 1. Структурна схема на грешката в резултата от измерване

Схемата от фиг.1 ни позволява да запишем уравнение 1 чрез неговите основни съставляващи, т.е:

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= Y_x(t) + Y_g(t) + W(t) - X(t) = \\ &= \Delta_x(t) + \Delta_g(t) + \Delta_w(t), \end{aligned} \quad (2)$$

където мултипликативната съставляваща на грешката в резултата от измерване се извежда от (2), като $\Delta_x(t) = Y_x(t) - X(t)$.

Останалите членове в дясната част на равенството (2) обуславят наличието на адитивна съставляваща в резултата. Последната се разделя на:

- адитивна съставляваща, предизвикана от въздействия на входа на измервателното средство (ИС)

$$\Delta_g(t) = Y_g(t); \quad (3)$$

- адитивна съставляваща, предизвикана от смущения на изхода на ИС

$$\Delta_w(t) = W(t). \quad (4)$$

Вземайки в предвид случайния характер на грешката в резултата от измерване можем да запишем адитивните съставляващи от (3) и (4) по следния начин:

$$\begin{aligned} \Delta_g(t) &= m_{\Delta g}(t) + \overset{o}{\Delta}_g(t) = \\ &= m_{yg}(t) + \overset{o}{Y}_g(t), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Delta_w(t) &= m_{\Delta w}(t) + \overset{o}{\Delta}_w(t) = \\ &= m_w(t) + \overset{o}{W}(t), \end{aligned} \quad (6)$$

където $m_{\Delta g}(t) = m_{yg}(t)$ е адитивната систематична съставляваща на грешката, предизвикана от въздействията на входа на ИС;

$\overset{o}{\Delta}_g(t) = \overset{o}{Y}_g(t)$ - адитивната центрирана случайна съставляваща на грешката, обусловена от въздействията на входа на ИС; $m_{\Delta w}(t) = m_w(t)$ - адитивната систематична съставляваща на грешката, предизвикана от сумарното смущение на изхода на ИС; $\overset{o}{\Delta}_w(t) = \overset{o}{W}(t)$ - адитивната центрирана случайна съставляваща на грешката, дължаща се на сумарното смущение на изхода на ИС.

Вземайки в предвид равенство (2) можем да запишем изразите на основните характеристики на грешката в резултата от измерване. Математическото очакване, характеризиращо систематичната грешка в резултата от измерване ще бъде

$$m_{\Delta}(t) = m_{\Delta x}(t) + m_{\Delta g}(t) + m_{\Delta w}(t). \quad (7)$$

Центрираната случайна съставляваща на грешката в резултата е

$$\overset{o}{\Delta}(t) = \overset{o}{\Delta}_x(t) + \overset{o}{\Delta}_g(t) + \overset{o}{\Delta}_w(t), \quad (8)$$

а съответстващата ѝ корелационна функция ще бъде:

$$K_{\Delta}(\tau) = K_{\Delta x}(\tau) + K_{\Delta g}(\tau) + K_{\Delta w}(\tau). \quad (9)$$

Адитивната съставляваща на грешката в резултата се дължи на множество фактори, които могат да бъдат отнесени както към входа, така и към изхода на ИС. В тази

работа обаче целта е да се изследва влиянието на измерваната величина върху точността на резултата от измерване. Ето защо тук основно внимание ще бъде отделено на мултипликативната случайна съставляваща на грешката както в статичен, така и в динамичен режим на измерване.

Настоящото теоретично изследване обхваща и двата режима на работа на уредите – статичен и динамичен. Характерът на режима на работа се определя от следните фактори: вида на измерваната величина; вида на предавателната функция; големината на периода на преходния процес T . Измерваната величина може да бъде постоянна $x(t) = x - const$ или променлива във времето $x(t) - функция$. В зависимост от наличието на инерционни елементи в измервателните уреди се определя вида и математическия модел на предавателните им функции. При безинерционните ИС тегловата функция се определя от израза

$$w(t) = k \cdot w_0(t) = k \cdot \delta(t),$$

където $w_0(t)$ – нормираната теглова функция, k – коефициент на чувствителност, $\delta(t)$ – делта функцията.

В зависимост от тези характеристики са възможни следните режими на измерване:

- При $x(t) = x - const$ и $w_0(t) = \delta(t)$, режимът на измерване е статичен за $t \geq 0$;
- При $x(t) = x - const$ и $w_0(t) \neq \delta(t)$, режимът на измерване е статичен за $t \geq 0$ и динамичен при $t < T$;
- При $x(t) - функция$ и $w_0(t) = \delta(t)$, режимът на измерване е статичен за всяко $t \geq 0$;
- При $x(t) - функция$ и $w_0(t) \neq \delta(t)$, режимът на измерване е динамичен при $t \geq 0$.

Имайки в предвид цитираните по-горе обстоятелства, можем да запишем случайната мултипликативна грешка в резултата по следния начин:

$$\Delta_x(t) = Y_x(t) - X(t) = (1 + \Delta k) \times \int_0^t w_0(\tau) \cdot X(t - \tau) \cdot d\tau - X(t), \quad (10)$$

където Δk е отклонението от коефициента на чувствителност $k = 1 + \Delta k$, дължащо се на различни фактори, обусловени от условията на измерване и инструменталните отклонения на функционалните параметри на уреда от номиналните им стойности.

Горната граница на интегриране в (10) приема различни стойности в зависимост от характеристиките на цитираните по-горе варианти на режима на измерване.

Измерваната величина $X(t)$ може да бъде представена в еквивалентна на другите членове в (10) интегрална форма

$$X(t) = \int_0^t \delta(\tau) \cdot X(t - \tau) \cdot d\tau. \quad (11)$$

Тогава изразът за мултипликативната грешка ще бъде:

$$\begin{aligned} \Delta_x(t) &= \int_0^t [(1 + \Delta k) \cdot w_0(\tau) - \\ &- \delta(\tau)] \cdot X(t - \tau) \cdot d\tau = \\ &= \int_0^t w_{\Delta x}(\tau) \cdot X(t - \tau) \cdot d\tau, \end{aligned} \quad (12)$$

където $w_{\Delta x}(\tau) = (1 + \Delta k) \cdot w_0(\tau) - \delta(\tau)$ е тегловата функция на мултипликативната грешка.

В статичен режим на измерване, когато $w_0(t) = \delta(t)$, могат да бъдат формулирани следните свойства на тегловата функция $w_{\Delta x}$:

$$1. \quad w_{\Delta x}(t) = (1 + \Delta k) \cdot \delta(t) - \delta(t) = \Delta k \cdot \delta(t),$$

$$2. \quad \int_0^t w_{\Delta x}(\tau) \cdot d\tau = \int_0^t [(1 + \Delta k) \cdot w_0(\tau) - \delta(\tau)] \cdot d\tau = 1 + \Delta k - 1 = \Delta k,$$

Откъдето следва, че уравнение (12) можем да запишем във вида

$$\begin{aligned} \Delta_x(t) &= \Delta k \cdot \int_0^t \delta(\tau) \cdot X(t - \tau) \cdot d\tau = \Delta k \cdot X(t) = \\ &= \Delta k \cdot \left[m_x + m_x(t) + \overset{\circ}{X} + \overset{\circ}{X}(t) \right] = \\ &= m_{\Delta x}(t) + \overset{\circ}{\Delta}_x(t), \end{aligned} \quad (13)$$

където $m_{\Delta x}(t) = \Delta k \cdot [m_x + m_x(t)]$ – систематичната мултипликативна грешка;

$\overset{\circ}{\Delta}_x(t) = \Delta k \cdot \left[\overset{\circ}{X} + \overset{\circ}{X}(t) \right]$ – центрираната случайна съставляваща на мултипликативната грешка; $m_x - const$; $m_x(t) - функция$; $\overset{\circ}{X} - центрирана случайна величина с дисперсия D_x ; $\overset{\circ}{X}(t) - центрирана случайна функция с корелационна функция $K_x(\tau)$.$$

В динамичен режим на измерване $w_0(t) \neq \delta(t)$. Следователно, в този режим тегловата функция на мултипликативната грешка е $w_{\Delta x}(t) = (1 + \Delta k) \cdot w_0(t) - \delta(t)$, уравнение (12) се преобразува във вида

$$\Delta_x(t) = \int_0^t w_{\Delta x}(\tau) \cdot \left[m_x + m_x(t - \tau) + \overset{\circ}{X} + \overset{\circ}{X}(t - \tau) \right] d\tau = m_{\Delta x}(t) + \overset{\circ}{\Delta}_x(t), \quad (14)$$

където

$$m_{\Delta x}(t) = \int_0^t w_{\Delta x}(\tau) \cdot [m_x + m_x(t - \tau)] d\tau = m_{\Delta x} + \overline{m_{\Delta x}}(t). \quad (15)$$

От свойствата на тегловата функция следва:

$$m_{\Delta x} = m_x \cdot \int_0^t w_{\Delta x}(\tau) d\tau = \Delta k \cdot m_x, \quad (16)$$

тъй като

$$\int_0^t w_{\Delta x}(\tau) d\tau = \Delta k. \quad (17)$$

Вторият член в (15) е математическото очакване на нестационарен случаен процес, което не е постоянна величина и се определя от израза

$$\overline{m_{\Delta x}}(t) = \int_0^t w_{\Delta x}(\tau) \cdot m_x(t - \tau) d\tau. \quad (18)$$

Центрираната случайна съставляваща на мултипликативната грешка ще бъде:

$$\overset{\circ}{\Delta}_x(t) = \int_0^t w_{\Delta x}(\tau) \cdot \left[\overset{\circ}{X} + \overset{\circ}{X}(t - \tau) \right] d\tau = \overset{\circ}{\Delta}_x + \overline{\overset{\circ}{\Delta}_x}(t). \quad (19)$$

При което, центрираната случайна величина е

$$\overset{\circ}{\Delta}_x = \overset{\circ}{X} \cdot \int_0^t w_{\Delta x}(\tau) d\tau = \Delta k \cdot \overset{\circ}{X}, \quad (20)$$

а центрираната случайна функция на мултипликативната грешка е равна на:

$$\overline{\overset{\circ}{\Delta}_x}(t) = \int_0^t w_{\Delta x}(\tau) \cdot \overset{\circ}{X}(t - \tau) d\tau. \quad (21)$$

В [2] е дадена методика за пресмятане на съставляващите на мултипликативната грешка за установено състояние на ИС, т.е. при $t \geq T$. Според тази методика съставляващата на систематичната мултипликативна грешка

ка ще бъде:

$$\overline{m_{\Delta x}}(t) = \sum_{v=0}^{\varepsilon} \frac{1}{v!} \cdot c_v \cdot m_x^{(v)}(t), \quad (22)$$

където

$$c_v = \frac{d^{(v)} W_{\Delta x}(p)}{dp^{(v)}} \Big|_{p=0}, v = 0, \dots, \varepsilon, \quad (23)$$

$$W_{\Delta x}(p) = (1 + \Delta k) \cdot W_0(p) - 1. \quad (24)$$

Замествайки (24) в (22) получаваме следния израз за коефициентите c_v :

$$c_v = \frac{d^{(v)} [(1 + \Delta k) \cdot W_0(p) - 1]}{dp^{(v)}} \Big|_{p=0} = \begin{cases} \Delta k, & v = 0 \\ \frac{d^{(v)} (1 + \Delta k) \cdot W_0(p)}{dp^{(v)}} \Big|_{p=0} = (1 + \Delta k) \cdot c_{lv}, & v = 1, \dots, \varepsilon. \end{cases} \quad (25)$$

Отчитайки (25), въвеждаме следния запис на уравнение (22):

$$\overline{m_{\Delta x}}(t) = \Delta k \cdot m_x(t) + (1 + \Delta k) \cdot \sum_{v=1}^{\varepsilon} \frac{1}{v!} \cdot c_{lv} \cdot m_x^{(v)}(t). \quad (26)$$

Тогава окончателният израз за систематичната съставляваща на мултипликативната грешка придобива вида

$$m_{\Delta x}(t) = \Delta k \cdot [m_x + m_x(t)] + (1 + \Delta k) \cdot \sum_{v=1}^{\varepsilon} \frac{1}{v!} \cdot c_{lv} \cdot m_x^{(v)}(t) = m_{\Delta x}^{st}(t) + m_{\Delta x}^{din}(t), \quad (27)$$

където първият член е съставляващата на систематичната мултипликативна грешка, съответстваща на статичен режим на измерване

$$m_{\Delta x}^{st}(t) = \Delta k \cdot [m_x + m_x(t)], \quad (28)$$

а вторият член е съставляващата на систематичната мултипликативна грешка, отчитаща характеристиките на измерване в динамичен режим

$$m_{\Delta x}^{din}(t) = (1 + \Delta k) \cdot \sum_{v=1}^{\varepsilon} \frac{1}{v!} \cdot c_{lv} \cdot m_x^{(v)}(t). \quad (29)$$

Основният израз за определянето на характеристиките на случайната съставляваща на мултипликативната грешка е

$$\overline{\overset{\circ}{\Delta}_x}(t) = \int_0^t w_{\Delta x}(\tau) \cdot \overset{\circ}{X}(t - \tau) d\tau. \quad (30)$$

От (19) може да се определи корелационната функция на тази грешка

$$K_{\Delta x}(\tau) = \overline{D}_{\Delta x} + \overline{K}_{\Delta x}(\tau), \quad (31)$$

където

$$\overline{D}_{\Delta x} = \Delta k^2 \cdot D_x. \quad (32)$$

За изчисляване на корелационната функция $\overline{K}_{\Delta x}(\tau)$ е необходимо да се определят честотната предавателна функция

$$W_{\Delta x}(j\omega) = (1 + \Delta k) \cdot W_0(j\omega) - 1, \quad (33)$$

както и спектралната плътност на центрираната случайна съставляваща $\overset{o}{\Delta}_x(t)$

$$\overline{S}_{\Delta x}(\omega) = |W_{\Delta x}(j\omega)|^2 \cdot S_x(\omega). \quad (34)$$

Алгоритъмът за определяне на дисперсията $\overline{D}_{\Delta x} = \overline{K}_{\Delta x}(\tau)|_{\tau=0}$ се основава на интегралите от вида

$$\begin{aligned} \overline{D}_{\Delta x} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{M_{n-1}(j\omega)}{|H_n(j\omega)|^2} \cdot d\omega = \\ &= I_n(a_0, \dots, a_n; b_0, \dots, b_{n-1}). \end{aligned} \quad (35)$$

За илюстрация на представените по-горе алгоритми ще разгледаме конкретен пример от измервателната практика. Нека измерваната величина е напрежение, което се задава с израза

$$X(t) = m_x + m_x(t) + \overset{o}{X}(t),$$

където $m_x = 10[V]$, $\Delta k = 0,05$,

$$S_x(\omega) = \frac{S_o^2}{|T_x \cdot j\omega + 1|^2} - \text{спектралната функция на измерваната величина;}$$

$T_x = 2[s]$; $S_o = 0,2[V \cdot s^{1/2}]$; $m_x(t) = c \cdot t$; $c = 0,1[V \cdot s^{-1}]$

$W_0(p) = \frac{1}{T \cdot p + 1}$ - нормираната предавателна функция на измервателния уред; $T = 1[s]$.

Първо определяме характеристиките на мултипликативната грешка в резултата за статичен режим на измерване.

$$m_{\Delta x}^{st}(t) = \Delta k \cdot [m_x + m_x(t)] = 0,5 + 0,005 \cdot t.$$

За определяне на дисперсията на мултипликативната грешка използваме изразите

$$K_{\Delta x}(\tau) = \overline{D}_{\Delta x} + \overline{K}_{\Delta x}(\tau)|_{\overline{D}_{\Delta x}=0} = \overline{K}_{\Delta x}(\tau),$$

$$D_{\Delta x} = K_{\Delta x}(\tau)|_{\tau=0} = \overline{K}_{\Delta x}(\tau)|_{\tau=0} = \overline{D}_{\Delta x}.$$

При статичен режим на измерване имаме $[(1 + \Delta k) \cdot W_0(j\omega) - 1]|_{W_0(j\omega)=1} = \Delta k$,

откъдето следва, че

$$\overline{S}_{\Delta x}(\omega) = \Delta k^2 \cdot S_x(\omega) = \frac{\Delta k^2 \cdot S_o^2}{|T_x(j\omega) + 1|^2}.$$

Тогава окончателно за дисперсията на мултипликативната грешка в статичен режим на измерване при $n=1$ получаваме

$$D_{\Delta x} = I_1 = 0,25 \cdot 10^{-4} [V^2].$$

Първата от числовите стойности на характеристиките на мултипликативната грешка за динамичен режим на измерване, която ще определим е математическото очакване

$$\begin{aligned} m_{\Delta x}(t) &= m_{\Delta x}^{st}(t) + m_{\Delta x}^{din}(t) = \\ &= 0,5 + 0,005 \cdot t - 0,1 = 0,4 + 0,005 \cdot t. \end{aligned}$$

За определяне на дисперсията $\overline{D}_{\Delta x}$ намираме израза за спектралната плътност

$$\begin{aligned} \overline{S}_{\Delta x}(\omega) &= |W_{\Delta x}(j\omega)|^2 \cdot S_x(\omega) = \\ &= \frac{|\Delta k - T \cdot j\omega|^2 \cdot S_o^2}{|(T \cdot j\omega + 1)(T_x \cdot j\omega + 1)|^2} = \frac{M_{n-1}(j\omega)}{|H_n(j\omega)|^2}, \end{aligned}$$

откъдето получаваме търсената дисперсия при $n=2$ в динамичен режим на работа

$$D_{\Delta x} = \overline{D}_{\Delta x} = I_2 = 33,5 \cdot 10^{-4} [V^2]$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Необходимо е да се обърне внимание на факта, че дисперсията на мултипликативната грешка в динамичен режим на измерване е значително по-голяма отколкото тази в статичен режим. Това обстоятелство се обяснява с факта, че центрираната случайна функция $\overset{o}{X}(t)$ е съставляваща на измерваната величина и колкото по-малка е инерционността на измервателния уред, толкова по-точно е измерването, а следователно, толкова по-малка е стойността на дисперсията $\overline{D}_{\Delta x}$. При стойност на тегловата функция $w_0(t) = \delta(t)$ измервателното средство е безинерционно и стойността на дисперсията трябва да бъде нулева. В разглеждания пример обаче стойността на дисперсията не е нулева. От направените теоретични изследвания се вижда, че при реалните измервателни уреди отклонението от номиналната стойност на коефициента на чувствителност е $\Delta k \neq 0$, т.е. средството за измерване възпроизвежда измервателната единица на величината с някаква грешка.

Този факт обяснява ненулевата стойност на дисперсията.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Сергеев А., В. Крохин. Метрология. “ЛОГОС”, Москва, 2002.
- [2] Дичев Д., Ц. Караджов. Математически модели на резултата от измерване в динамичен режим. “UNITECH 10”, Габрово, 2010.
- [3] Вентцель Е., Л. Овчаров. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. “Наука”, Москва, 1991.